COURS D'ELECTROCINÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

Christian Carimalo

Chapitre 1

Rappels d'Electrostatique

Ce premier chapitre a pour but de rappeler brièvement ce que représentent le champ électrique et son potentiel électrique associé, dans le cas d'un régime stationnaire, domaine de l'Electrostatique.

1.1 Charges électriques, champ électrique

Les particules élémentaires, qui représentent les ultimes grains d'énergie, sont pour la plupart porteuses d'une *charge électrique*, grandeur fondamentale qui leur confère la faculté d'avoir des interactions électromagnétiques. Ainsi, l'électron, dont le nom est à l'origine du mot électricité, porte la charge (en unité S.I.) $-e = -1.6\ 10^{-19}$C (C est le symbole de l'unité de charge électrique, le Coulomb). Cette charge est, jusqu'à présent, la plus petite qui ait été directement détectée[1]. Toute autre charge est égale en valeur absolue à un nombre entier de fois cette charge élémentaire : on dit que la charge est quantifiée[2].

Le proton, le muon positif, le pion positif portent la charge $+e$. Le neutron et le photon ont une charge nulle, ce qui ne signifie pas pour autant qu'ils n'ont pas d'interactions électromagnétiques : le photon est en fait le médiateur de ces interactions, et le neutron possède un moment magnétique qui en fait un petit aimant capable d'avoir des interactions magnétiques (le proton a aussi un moment magnétique, mais son interaction proprement électrique est prépondérante). Le neutrino a une charge nulle et n'a pas d'interaction électromagnétique directe, ce qui le rend difficilement détectable. Un atome comprend un noyau autour duquel gravitent des électrons. Si Z est le numéro atomique du noyau (c'est son numéro dans la classification périodique des éléments), ce dernier est constitué de Z protons et d'un certain nombre N de neutrons, la cohésion des protons et des neutrons dans le noyau étant assurée par les interactions nucléaires. L'atome étant électriquement neutre à l'état ordinaire, Z électrons gravitent donc autour de son noyau. Un atome qui a perdu des électrons est devenu un ion positif.

L'Electrostatique est le chapitre de l'Electromagnétisme qui étudie les interactions entre charges immobiles ou ayant de très faibles vitesses en comparaison de la célérité de la lumière.

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 immobiles interagissent conformément à la *loi de Coulomb* : la force d'interaction électrostatique qui s'exerce sur la charge q_2 située au point M_2 et qui est due à la charge q_1 située au point M_1 est[3]

♠ proportionnelle au produit des deux charges $q_1 q_2$,

[1]On sait actuellement que les particules hadroniques sont constituées de sous-structures, les *quarks*, dont les charges électriques sont les fractions $\pm 2/3$ ou $\pm 1/3$ de la charge de l'électron et qui ne sont pas *directement* détectables.

[2]On notera donc le caractère *extensif* de la charge électrique.

[3]Voir la biographie de Charles Augustin de Coulomb :
http ://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/coulomb.html.

♠ inversement proportionnelle au carré de la distance $r_{12} = M_1M_2$ séparant les deux charges,

♠ orientée dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_{12}}$:

$$\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{12}}}{r_{12}^2} \tag{1.1}$$

où $\overrightarrow{u_{12}} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r_{12}}$ est le vecteur unitaire porté par la droite M_1M_2, dans le sens de M_1 vers M_2

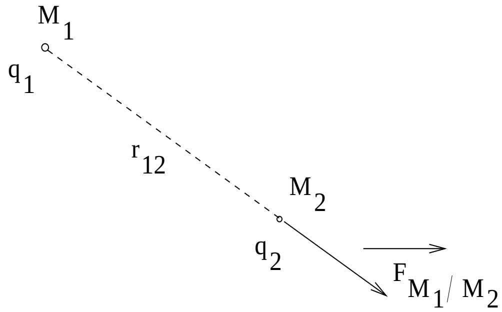

FIG. 1.1 – Interaction de deux charges ponctuelles

et où ϵ_0 est la *permittivité* du vide. Le facteur $1/(4\pi)$ provient de la *rationnalisation* des formules qui consiste à faire disparaître tout facteur numérique superflu des équations jugées plus fondamentales[4]. Numériquement, on a

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi 10^9} \quad \text{S.I.} \tag{1.2}$$

Cette force est attractive si les deux charges ont des signes opposés, répulsive si les charges ont le même signe. L'expression précédente donne la force que la charge q_1 en M_1 exerce sur la charge q_2 en M_2. Bien entendu, d'après le principe de l'action et de la réaction, la force $\overrightarrow{F}_{M_2/M_1}$ s'exerçant sur la charge q_1 et due à la charge q_2 est, vectoriellement parlant, exactement opposée à la précédente :

$$\overrightarrow{F}_{M_2/M_1} = -\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \tag{1.3}$$

D'après la loi de Coulomb, le vecteur $\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}/q_2$ est indépendant de la valeur de la charge q_2, que nous qualifierons de *charge d'essai*, placée au *point d'observation* M_2. Il ne dépend, en fait, que de la valeur de la charge q_1, que nous appellerons *charge source*, et de la position relative de M_2 vis-à-vis du point source M_1. On est alors conduit à interpréter l'interaction entre les deux charges de la façon suivante.

Du fait de la présence de la charge source q_1 en M_1, la structure de l'espace s'est modifiée : il est apparu un *Champ Electrique*, qui est de nature vectorielle. Au point d'observation M_2, ce vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}(M_2)$ est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{12}}}{r_{12}^2} \tag{1.4}$$

Cette modification de l'espace se manifeste lorsqu'une charge d'essai q_2 est placée en M_2 : celle-ci est alors soumise à la force

[4]En l'occurrence, les équations de Maxwell.

$$\overrightarrow{F}\ (M_2) = q_2\ \overrightarrow{E}\ (M_2) = \overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \tag{1.5}$$

La notion de champ électrique est fondamentale en Electricité. Elle peut sembler artificielle en *Electrostatique*, puisqu'en fait, la considération des forces seules suffit pour décrire l'effet électrique. De plus, la notion de champ y est aussi indissociable des *charges sources*. Il en va tout autrement dans la théorie des ondes électromagnétiques où la seule donnée des charges est insuffisante pour décrire la propagation du champ électromagnétique. On doit alors en conclure que ce champ a ses propres degrés de liberté qui ne se révèlent pleinement qu'en régime variable.

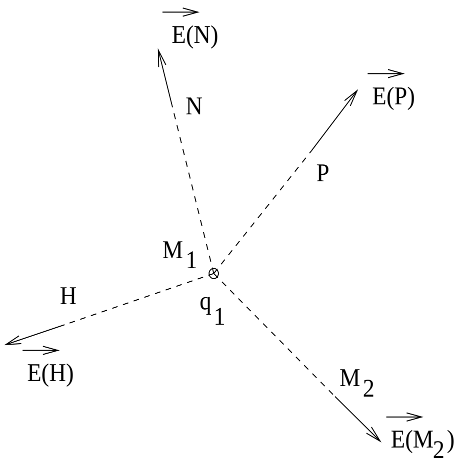

Fig. 1.2 – Le champ électrique

La généralisation de à un système $\mathcal{S}$ de n charges sources ponctuelles q_i $(i = 1, .., n)$ situées aux points S_i $(i = 1, ..n)$ est la suivante. D'après les principes mêmes de la Mécanique Classique, l'effort total exercé par $\mathcal{S}$ sur une charge d'essai Q placée en P est décrit par un vecteur force $\overrightarrow{F}\ (P)$ qui est la résultante vectorielle des divers vecteurs forces $\overrightarrow{F_i}\ (P)$ décrivant les efforts individuels des diverses charges q_i sur la charge Q :

$$\overrightarrow{F}\ (P) = \sum_i \overrightarrow{F_i}\ (P) = Q \sum_i \overrightarrow{E_i}\ (P) \tag{1.6}$$

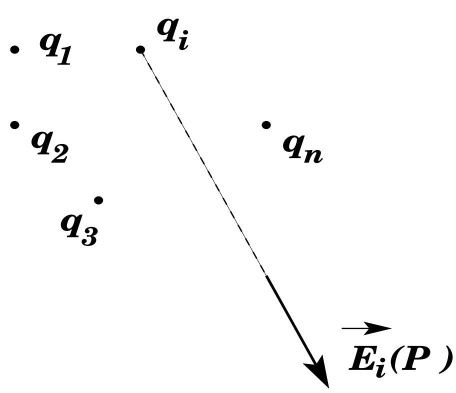

Fig. 1.3 – Système de charges ponctuelles

où $\overrightarrow{E_i}\ (P)$ est le vecteur champ électrique crée par q_i au point P (figure 1.3). Le vecteur $\overrightarrow{F}\ (P)/Q$ est indépendant de la valeur de Q. Il définit le champ électrique total $\overrightarrow{E}\ (P)$ crée en P par $\mathcal{S}$. On a donc

$$\overrightarrow{E}\ (P) = \sum_i \overrightarrow{E}_i\ (P) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_i}}{S_iP^2} \tag{1.7}$$

où $\overrightarrow{u_i}=\overrightarrow{S_iP}\ /S_iP$.
La règle de calcul du champ électrique total suit celle utilisée pour calculer une force totale : le vecteur champ électrique total en un point est la *résultante vectorielle* des champs électriques individuels en ce point.

D'une façon générale, la somme vectorielle ci-dessus est très compliquée, elle dépend de la répartition des charges sources. Ceci fait que la variation du champ total vis-à-vis des cordonnées du point d'observation peut être très différente d'une loi en $1/r^2$. En particulier, pour certaines distributions de charges sources, on peut obtenir un champ *uniforme* (ou quasiment uniforme sur une grande étendue). Un champ est dit *uniforme* si sa direction, son sens et son module sont les mêmes en tout point (champ de vecteurs constant)[5].

1.2 Energie Electrique, Potentiel Electrique

Une propriété importante du champ électrique est qu'il dérive d'une fonction appelée *potentiel électrique*. Plus précisément, on a

$$\overrightarrow{E}\ (P) = -\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(P)$$

On déduit de cette relation les propriétés suivantes.

♠ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe quelconque C joignant deux points donnés A et B est *indépendante* de la forme de cette courbe : elle est égale à la *différence de potentiel* $V(A) - V(B)$:

$$\int_C \overrightarrow{E}\ (M)\cdot \overrightarrow{dM} = V(A) - V(B)$$

♠ Le potentiel électrique $V(M)$ est une fonction *continue* des coordonnées du point M.

♠ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée quelconque *est toujours égale à zéro.*

♠ Le champ électrostatique est toujours orienté *dans le sens des potentiels décroissants.*

Cette dernière circonstance provient du signe "-" dans la relation champ-potentiel. Ce choix conventionnel du signe est en fait lié au souhait d'obtenir un signe "+" dans la définition de l'énergie potentielle électrostatique (voir plus loin).

Lorsque la charge d'essai Q se déplace du point P au point infiniment voisin P' tel que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{dP}$, la force électrostatique $\overrightarrow{F}\ (P) = Q\ \overrightarrow{E}\ (P)$ s'exerçant sur cette charge développe le travail

$$dW = \overrightarrow{F}\ (P)\cdot \overrightarrow{dP} = Q\ \overrightarrow{E}\ (P)\cdot \overrightarrow{dP}$$

Le rapport dW/Q est lui aussi indépendant de la valeur de la charge d'essai et peut servir à définir, de façon plus phénoménologique, la différence de potentiel électrique entre les deux points P et P'.

[5]Voir le chapitre 2 du cours d'Electromagnétisme.

Plus précisément, cette différence de potentiel, qui est ici infinitésimale, est donnée par (attention au signe ! voir plus haut) :

$$dV = -dW/Q$$

L'*énergie potentielle électrique* d'une charge Q en un point M où règne le potentiel électrique $V(M)$ est, à une constante additive près, égale à

$$W(M) = QV(M) \tag{1.8}$$

C'est le travail de la force que devrait exercer un observateur sur la charge Q en contre-balançant exactement la force électrostatique pour amener la charge depuis un point de potentiel zéro jusqu'au point M. En effet, on a alors

$$\overrightarrow{F}_{\text{obs}} = -Q \overrightarrow{E}(M) \tag{1.9}$$

d'où

$$W_{\text{obs}}(M) = -Q \int_{M_0}^{M} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dM} = -Q(V(M_0) - V(M)) = QV(M) \tag{1.10}$$

M_0 étant un point tel que $V(M_0) = 0$.

On peut faire ici un parallèle avec l'interaction gravitationnelle d'une masse m dans le champ de pesanteur terrestre. On sait que l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en un point d'altitude z supposée petite devant le rayon terrestre a pour expression $W_{pes} = mgz$, où g est "l'accélération de la pesanteur", en convenant que $W_{pes} = 0$ pour $z = 0$. Le potentiel de gravitation est donné par $V_{pes} = W_{pes}/m = gz$, et le champ de gravitation est $G(z) = -dV_{pes}/dz = -g$.

Notons ici que le potentiel $V(M)$ n'est défini qu'à une constante additive près. Cette constante peut être ajustée en choisissant arbitrairement le point ou la région où le potentiel sera pris égal à zéro, sous réserve, bien entendu, que le potentiel n'y ait pas de singularité. Dans le cas d'un système de charges confinées dans une région finie de l'espace, on peut choisir le zéro du potentiel à distance infinie des charges. En Electrocinétique, on choisit couramment comme potentiel de référence (c'est-à dire comme potentiel zéro) celui de la "masse" ou celui de la Terre.

L'unité S.I. des potentiels est le Volt ; dans ce même système d'unités S.I., le champ électrique s'exprime quant à lui en Volt par mètre (V/m).

1.3 Les Condensateurs

1.3.1 Description

Un *condensateur* est un ensemble de deux conducteurs appelés *armatures* dont l'un entoure complètement l'autre, comme représenté à la figure 1.4. L'espace séparant les deux armatures est soit le vide, soit le plus souvent un milieu isolant appelé diélectrique.

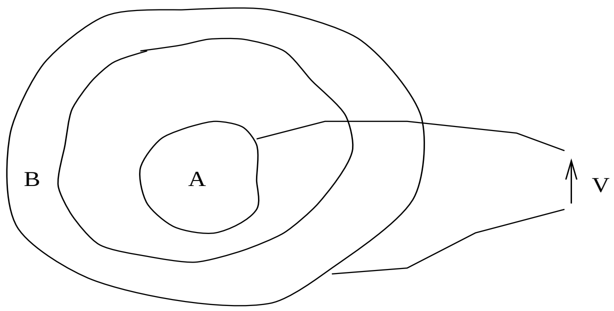

FIG. 1.4 – Condensateur théorique

L'expérience montre qu'à l'équilibre électrostatique, après que l'on ait établit une différence de potentiel V entre les armatures, une charge Q est apparue sur toute la surface du conducteur central tandis qu'une charge exactement opposée $-Q$ s'est répartie sur toute la surface interne du conducteur externe, en regard de la première. On dit que les deux conducteurs sont en *influence totale*[6].

On montre que cette charge Q est directement proportionnelle à la tension appliquée V :

$$Q = CV \tag{1.11}$$

où le coefficient C est indépendant de V et ne dépend que de la géométrie du condensateur et de la nature du diélectrique. C'est la *capacité* du condensateur, ainsi nommée car elle rend compte de la capacité d'un tel système à stocker des charges et de l'énergie.

Les condensateurs usuels n'ont pas vraiment la configuration précédente. Cependant, l'influence totale entre les deux conducteurs est généralement bien réalisée, à savoir, les charges des armatures en regard sont opposées et la relation $Q = CV$ peut être appliquée avec un excellent degré d'approximation.

La description précédente ne concerne en toute rigueur que les états d'équilibre électrostatiques, donc stationnaires. Nous admettrons qu'elle s'applique aussi aux régimes lentement variables avec le temps (on dit aussi quasi-stationnaires) comme par exemple un régime où la tension appliquée est une fonction sinusoïdale du temps dont la fréquence n'est pas trop elevée.

L'unité S.I. des capacités est le Farad (symbole F) et l'on schématise un condensateur comme indiqué à la figure 1.5.

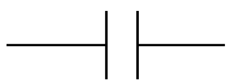

FIG. 1.5 – Symbole d'un condensateur

[6]Voir le chapitre 5 du cours d'Electromagnétisme.

Rappelons ici les règles d'association des condensateurs (pour plus de détails, voir le chapitre 5 du cours d'Electromagnétisme). Soit N condensateurs de capacités respectives C_1, C_2, ... C_N.

Leur association en série est équivalente à un condensateur unique dont la capacité C vérifie la relation

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k} \tag{1.12}$$

tandis que leur association en parallèle équivaut à un condensateur unique dont la capacité C' vaut

$$C' = \sum_{k=1}^{N} C_k \tag{1.13}$$