Chapitre 4

Les réseaux de conducteurs

4.1 Description

On appelle *réseau* de conducteurs toute association d'éléments de circuits, appelés *branches*, pouvant contenir en série des dipôles actifs ou passifs. Ces branches sont reliées entre elles par des *noeuds*. Une *maille* est une succession de branches dont le noeud d'arrivée est identique au noeud de départ. Un exemple de réseau est représenté à la figure 4.1.

Un noeud est un point commun à trois branches au moins (sinon, il s'agit de la même branche). Ainsi, pour le réseau de la figure 4.1, N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des noeuds, mais N_0 n'en est pas un.

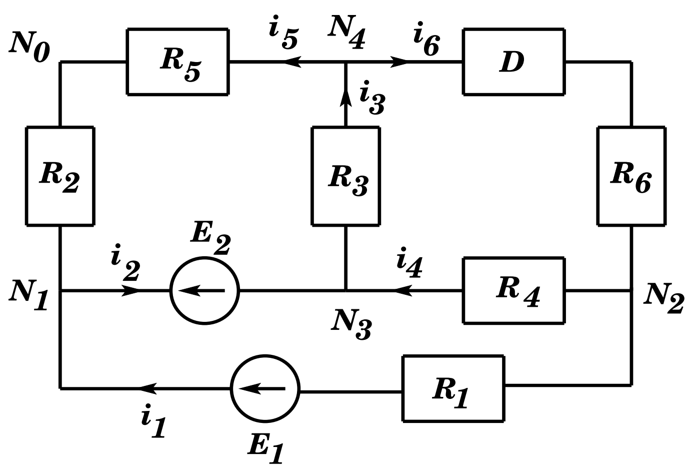

FIGURE 4.1 – Exemple de réseau

Une maille est un contour fermé constitué par une suite de branches que l'on traverse chacune une seule fois en parcourant cette maille. Dans le réseau envisagé, $N_1R_2R_5N_4R_3N_3E_2N_1$ est une maille.

Les réseaux que nous considèrerons dans ce chapitre

♣ d'une part, comporteront des générateurs de tension ou de courant *continus* ;

♣ d'autre part, seront étudiés uniquement en régime permanent établi, qui sera donc un régime permanent de courants continus.

Le problème de la *résolution* d'un réseau consiste à déterminer les intensités des courants circulant dans les diverses branches du réseau à partir des caractéristiques supposées connues des dipôles qui le constituent. Pour ce faire, on dispose des *lois de Kirchhoff* qui fournissent des équations permettant de mener à bien cette résolution.

4.2 Lois de Kirchhoff

4.2.1 Conventions

Les lois de Kirchhoff sont de deux types. L'un fournit des équations applicables aux noeuds, l'autre des équations concernant les mailles. Mais avant d'écrire ces équations, il convient de suivre la démarche suivante.

♠ En premier lieu, noter chaque intensité par une lettre et fixer *arbitrairement* le sens des courants, en essayant toutefois d'apporter à ce *choix* le maximum de vraisemblance, bien que cela ne soit nullement indispensable ;

♠ ensuite, de fixer *arbitrairement* un sens de parcours pour chaque maille.

Ce faisant, les intensités des courants doivent être considérées comme des grandeurs *algébriques*. Ce n'est qu'après la résolution complète des équations que l'on constatera si le sens de parcours choisi *a priori* pour tel ou tel courant est ou non le sens réel de celui-ci, suivant qu'il apparaîtra un signe "+" ou un signe "-" devant la valeur numérique de son intensité.

4.2.2 Loi des noeuds

Nous avons déjà rencontré cette loi à propos de l'association en parallèle de dipôles. Elle résulte de la loi plus fondamentale de conservation de la charge appliquée aux régimes continus ou quasi-stationnaires. Elle s'énonce ainsi,

♠ La somme *algébrique* des intensités des courants arrivant à un noeud est *nulle* :

$$\sum_k i_k = 0 \tag{4.1}$$

Dans cette relation, la convention de signe est la suivante. Compte-tenu du choix qui a été fait pour le sens des courants, l'intensité d'un courant arrivant *vers* le noeud devra être affectée d'un signe "+", alors qu'elle devra être affectée d'un signe "-" si le courant en part. Ainsi, au noeud N_4 de la figure 4.1, on a

$$-i_5 + i_3 - i_6 = 0 \tag{4.2}$$

Bien entendu, on peut tout aussi bien choisir comme sens de référence le sens de divergence à partir du noeud. Dans ce cas, les signes à affecter sont inversés par rapport à la convention précédente.

4.2.3 Loi des mailles

Cette loi repose sur la *continuité* de la *fonction potentiel électrique* et s'énonce ainsi

♠ La somme des tensions u_k aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est *nulle* :

$$\sum_k u_k = 0 \tag{4.3}$$

Les tensions u_k devront ensuite être exprimées en fonction des intensités des courants, à partir des caractéristiques des dipôles.

Telles quelles, les équations des mailles, comme celles des noeuds, sont applicables à tout réseau, donc aussi bien à des réseaux comportant des éléments non linéares, car ce sont des lois générales de l'électrocinétique.

Cependant, dans le cas des réseaux dits *linéaires*, on peut exprimer la loi des mailles sous une forme plus maniable, prête à l'emploi.

4.3 Réseaux linéaires

Un réseau est dit *linéaire* si les caractéristiques des dipôles qui le constituent sont toutes affines. De façon plus restreinte, cela signifie que dans les conditions d'utilisation des dipôles considérés, leurs caractéristiques sont supposées pouvoir être assimilées à des droites.

Si la caractéristique est une droite passant par l'origine ($u = 0$, $i = 0$), le dipôle correspondant est assimilable à un résistor (résistance pure). Si la caractéristique ne passe pas par l'origine, le dipôle sera assimilé à un générateur ou à un récepteur ou un générateur en opposition.

Dans ces conditions, l'étude des réseaux linéaires peut être ramenée à celle de réseaux dont les éléments passifs sont des résistances pures et dont les éléments actifs sont des générateurs de tension avec éventuelle résistance interne ou des générateurs de courant avec éventuelle conductance interne.

4.3.1 Loi des mailles-bis

Pour un réseau linéaire, la loi des mailles peut être exprimée comme une généralisation de la loi de Pouillet. Pour une branche AB comportant un générateur de tension et une résistance, on a, au signe près,

$$V_A - V_B = E_a - R_a I_a \tag{4.4}$$

et, plus généralement, en présence de plusieurs générateurs et résistances en série dans cette branche,

$$V_A - V_B = \sum{}' E_a - \sum{}' R_a I_a \tag{4.5}$$

où les "primes" sur les signes sommes indiquent que les sommes sont en fait *algébriques*, comme explicité ci-après.

En appliquant cette relation aux autres branches BC, CD et DA d'une maille $ABCDA$, il vient

$$\begin{aligned} V_B - V_C &= \sum{}' E_b - \sum{}' R_b I_b \\ V_C - V_D &= \sum{}' E_c - \sum{}' R_c I_c \\ V_D - V_A &= \sum{}' E_d - \sum{}' R_d I_d \end{aligned} \tag{4.6}$$

Puis, en écrivant que la somme des tensions le long d'une maille complète est nulle, on obtient l'équation

$$0 = \sum{}' E - \sum{}' RI \tag{4.7}$$

où les sommes sont étendues à toutes les branches de la maille. On écrira cette relation sous la forme avantageuse :

$$\sum{}' E = \sum{}' RI \tag{4.8}$$

qui est effectivement d'un usage très commode car les conventions de signe correspondantes sont aisément mémorisables, comme expliqué maintenant.

Ayant fait le choix du sens de parcours de la maille, lorsqu'un générateur est rencontré et que l'on en sort par son pôle "+", sa fem sera affecté d'un signe "+" dans la somme $\sum'$. Elle devra être affectée d'un signe "-" dans cette somme si l'on sort du générateur par son pôle "-". Il apparaît que la convention de signe pour les produits RI est similaire. Lors du parcours de la maille, si le sens du courant rencontré dans une branche est le même que le sens de parcours, son intensité sera affectée d'un signe "+". Si le courant va en sens opposé, son intensité se verra affectée d'un signe "-".

On peut alors dire que la convention décrite ci-dessus est de nature “égocentrique” : *tout ce qui va selon mon idée, je le considère positivement, tout ce qui s'oppose à moi, je le considère négativement*!

Ainsi, pour la maille $N_1E_2N_3R_4N_2R_1E_1N_1$, prise dans ce sens, du réseau de la figure 4.1, on a

$$E_1 - E_2 = R_1 i_1 - R_4 i_4 \tag{4.9}$$

Cette loi est généralisable au cas où des récepteurs sont présents. Ceux-ci pourront être considérés comme des générateurs en opposition, pourvu que les valeurs trouvées pour les intensités de courant qui les traversent correspondent bien à une situation physique où les récepteurs fonctionnent effectivement, c'est-à-dire correspondent à un point de fonctionnement réel du réseau.

4.3.2 Application : associations de générateurs de tension

♣ En série

Considérons le circuit de la figure 4.2, comportant deux générateurs de tension de fem et résistance (E_1, R_1), (E_2, R_2), respectivement.

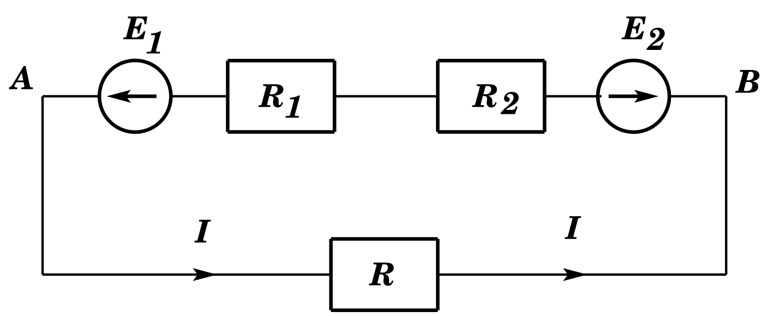

FIGURE 4.2 – Générateurs en série

D'après la loi des mailles (sens E_1ABE_2), on a

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2 + R_3)I \tag{4.10}$$

Or, $V_A - V_B = R_3 I$, donc

$$V_A - V_B = E_1 - E_2 - (R_1 + R_2)I \tag{4.11}$$

On voit donc que l'ensemble est équivalent à un générateur unique de fem algébrique $E_1 - E_2$ et de résistance interne $R_1 + R_2$. Si $I > 0$, on a $V_A > V_B$ et $E_1 > E_2$. Dans ce cas, la fem “vraie” de l'ensemble est bien $E_1 - E_2$. A l'inverse, si $I < 0$, $V_B > V_A$ et la fem vraie de l'ensemble est $E_2 - E_1$. Par récurrence, on généralise facilement au cas d'un nombre quelconque de générateurs.

En conclusion, ayant choisi un pôle comme pôle positif, A par exemple, la fem algébrique équivalente d'une association de générateurs de tension en série, qui est aussi la tension *à vide* $V_A^{(0)} - V_B^{(0)}$, est donnée par la somme algébrique

$$E = \sum_k{}' E_k \tag{4.12}$$

où la fem E_k du kème générateur est affectée du signe “+” ou du signe “-” selon que son pôle “+” est tourné ou non vers A, ici encore selon une convention égocentrique se rapportant au pôle A.

♠ En parallèle

Dans le schéma de la figure 4.3, on a $V = V_A - V_B = E_1 - R_1 I_1 = -E_2 - R_2 I_2 = \cdots = E_n - R_n I_n$. D'où $I_1 = (E_1 - V)/R_1$, $I_2 = (-E_2 - V)/R_2$, $I_n = (E_n - V)/R_n$. Notant $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, on obtient

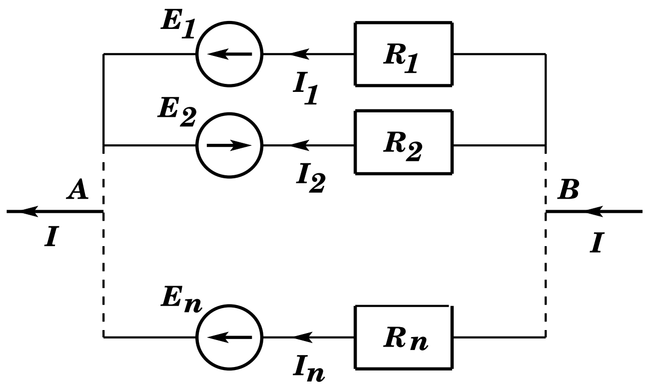

Figure 4.3 – Générateurs de tensions en parallèle

$$V \sum_k \frac{1}{R_k} = {\sum_k}' \frac{E_k}{R_k} - I \tag{4.13}$$

ce qui montre que l'ensemble est assimilable à un générateur unique de fem algébrique

$$E = \frac{{\sum_k}' \frac{E_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \tag{4.14}$$

et de résistance interne R donnée par

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} \tag{4.15}$$

Ce résultat se généralise aisément par récurrence à un nombre quelconque de générateurs.

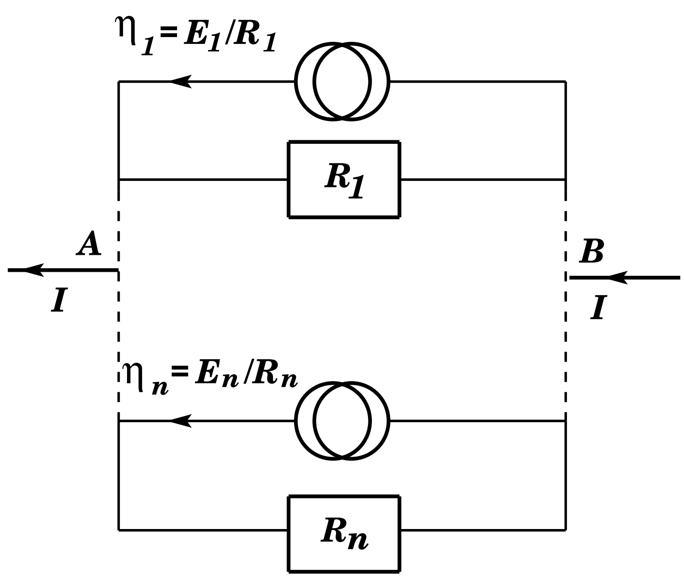

Figure 4.4 – Générateurs de courants en parallèle

Notons que la formule 4.14 peut également être établie de façon quasi-immédiate en remplaçant chaque générateur de tension par un générateur de courant équivalent, comme indiqué au paragraphe 3.3.2. Le schéma de la figure 4.3 se transforme ainsi selon celui de la figure 4.4. De façon évidente, l'association des n générateurs de courants en parallèle est équivalente à un générateur de courant parfait unique délivrant l'intensité

$$\eta = \sum_k \eta_k = \sum_k{}' \frac{E_k}{R_k} \tag{4.16}$$

en parallèle avec une résistance équivalente donnée par (4.15). Mais ce générateur de courant est tout aussi bien équivalent à un générateur de tension parfait de fem $E = R\eta$, égale à (4.14), en série avec la résistance R.

4.4 Méthode de résolution matricielle

Une maille est un contour fermé constitué par une suite de branches que l'on traverse chacune une seule fois en parcourant cette maille. Dans le réseau envisagé, $N_1R_2R_5N_4R_3N_3E_2N_1$ est une maille.

Afin d'illustrer le plus simplement possible les méthodes de résolution des réseaux, nous considèrerons le réseau *prototype* de la figure 4.5.

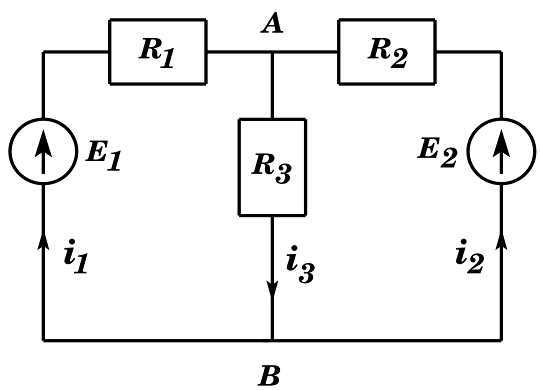

FIGURE 4.5 –

Ce réseau comporte B = 3 branches, reliées par N = 2 noeuds (A et B), et M = 3 mailles ($E_1R_1R_3E_1$; $E_1R_1R_2E_2E_1$; $R_3R_2E_2E_3$).

On doit donc trouver les B = 3 intensités i_1, i_2 et I_3 en fonction des éléments E_1, E_2, E_3, R_1, R_2 et R_3 du réseau.

La loi des noeuds donne (sens entrant)

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{4.17}$$

au noeud A et

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0 \tag{4.18}$$

au noeud B. Ainsi, on obtient seulement N - 1 = 1 équation indépendante. Ce résultat se généralise à un réseau quelconque : *Pour un réseau comportant N noeuds, on obtient seulement N - 1 équations de noeuds indépendantes.* Ceci résulte en fait de la loi de conservation de la charge, appliquée à l'ensemble du réseau.

Grâce aux équations de noeuds, il est alors possible d'exprimer N - 1 intensités en fonction des autres. Le nombre d'intensités restant à déterminer se réduit donc à B - (N - 1). Ceci nécessitera l'introduction d'un même nombre d'équations de mailles. Ainsi, le nombre *minimum* de mailles à considérer est

$$M_m = B - N + 1 \tag{4.19}$$

ce qui donne, pour notre réseau prototype, $M_m = 3 - 2 + 1 = 2$.

4.4.1 Courants de mailles

Par souci de symétrie, considérons les deux mailles $E_1R_1R_3E_1$ et $E_2R_2R_3E_2$. Il vient

$$E_1 = R_1 i_1 + R_3 i_3 \quad , \quad E_2 = R_2 i_2 + R_3 i_3 \tag{4.20}$$

soit, en remplçant i_3 par $i_1 + i_2$,

$$E_1 = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2 \quad , \quad E_2 = R_3 i_1 + (R_3 + R_2) i_2 \tag{4.21}$$

Ces dernières relations peuvent s'interpréter au moyen de la notion de *courants de mailles*. On peut dire en effet que dans la maille $E_1R_1R_3E_1$ circule le courant i_1 et que dans la maille $E_2R_2R_3E_2$ circule le courant i_2. Ces deux courants de maille circulent conjointement dans la résistance R_3 pour donner le courant total $i_3 = i_1 + i_2$.

L'avantage de cette représentation par les courants de mailles est qu'elle inclut d'emblée les équations des noeuds. Le courant dans chaque branche est alors obtenu soit directement, soit comme une combinaison de ces courants.

Notons que dans notre réseau prototype, nous aurions pu attribuer le courant i_3 à la maille $R_3R_2E_2R_3$ et le courant i_1 à la maille $E_1R_1R_2E_2E_1$. Nous aurions alors obtenu

$$E_1 = R_1 i_1 + R_3 i_3 \tag{4.22}$$

pour la maille $E_1R_1R_3E_1$, et

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) i_1 + R_3 i_3 \tag{4.23}$$

pour la maille $E_1R_1R_2E_2E_1$. Cependant, nous aurions perdu une certaine symétrie dans les équations. Le système d'équations ci-dessus peut être résolu très simplement en procédant par sustitution :

$$i_2 = \left[E_1 - (R_1 + R_3) i_1\right] / R_3 = \left[E_2 - R_3 i_1\right] / (R_2 + R_3) \tag{4.24}$$

d'où l'on déduit

$$i_1 = \left[(R_2 + R_3) E_1 - R_3 E_2\right] / D \quad , \quad i_2 = \left[(R_1 + R_3) E_2 - R_3 E_1\right] / D \tag{4.25}$$

puis

$$i_3 = \left[R_2 E_1 + R_1 E_2\right] / D \tag{4.26}$$

avec

$$D = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \tag{4.27}$$

4.4.2 Formalisme matriciel

Considérons i_1 et i_2 comme les composantes d'un vecteur I d'un espace vectoriel à deux dimensions, que nous écrirons sous la forme d'un vecteur *unicolonne*

$$I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

De même, E_1 et E_2 représenteront les composantes d'un vecteur

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Les équations de mailles à résoudre peuvent être considérées comme définissant dans cet espace une transformation $\mathcal{R}$ changeant le vecteur I en vecteur E

$$E = \mathcal{R}\ I \tag{4.30}$$

Plus précisément, on écrit cette relation sous la forme *matricielle*

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Le tableau $\mathcal{R}$ est ce qu'on appelle une *matrice*. Plus généralement, une matrice est un ensemble de nombres disposés selon une grille rectangulaire soumise à certaines règles de calcul. Dans la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

les nombres a_{ij} sont appelés *éléments* de la matrice. L'élément a_{ij} se trouve à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne. Cette matrice que l'on note aussi $[a_{ij}]$ comporte donc mn éléments : on dit que A est d'ordre mxn. Si m=n, la matrice est dite *carrée*. Dans notre exemple, $\mathcal{R}$ est une matrice carrée 2x2.

♣ Deux matrices sont égales si et seulement si leurs éléments sont respectivement égaux.

♣ Deux matrices de <u>même ordre</u> peuvent s'additionner ou se soustraire : si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont deux matrices mxn, on a [1]

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}] \tag{4.33}$$

♣ La matrice λA, où λ est un nombre réel, est la matrice dont les éléments sont λa_{ij}.

♣ Le produit AB de deux matrices A et B n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Si A est d'ordre mXn et B d'ordre nxp, AB est une matrice d'ordre mxp. Mais si m≠p, le produit BA n'est pas défini. Les produits AB et BA de deux matrices <u>carrées</u> de même ordre sont définis, mais ne sont pas égaux en général.

La multiplication (par la droite)d'une matrice $A = [a_{ij}]$ d'ordre mxn par une matrice $B = [b_{jk}]$ d'ordre nxp donne une matrice $C = [c_{ik}]$ d'ordre mxp dont l'élément c_{ik} de la ième ligne et de la kème colonne est égal à la somme des produits $a_{ij}b_{jk}$ des éléments a_{ij} de la ième ligne de A par les éléments b_{jk} de la kème colonne de B, le numéro j de la jème colonne de A où se trouve a_{ij} étant aussi le numéro de la ligne de B où se trouve b_{jk} :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \tag{4.34}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & . & \cdots & a_{1n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c|cc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & b_{jk} & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & n_{np} \end{array}\right) \tag{4.35}$$

• **Exemple**

1. Insistons sur le fait que ces opérations ne peuvent s'effectuer que si les matrices sont de même ordre.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Dans les problèmes de l'électrocinétique, on ne considère que des matrices carrées et nous nous limiterons ici au cas de matrices 2x2 ou 3x3.

D'une façon générale, la résolution de l'équation (4.30) revient à inverser la transformation $\mathcal{R}$, ce qui revient à inverser la matrice carrée $\mathcal{R}$ et écrire

$$I = \mathcal{R}^{-1}\ E \tag{4.37}$$

Du point de vue mathématique, la possibilité d'inverser une matrice carrée est soumise à une certaine condition que nous expliciterons plus loin. En fait, pour nous, cette condition ne peut qu'être satisfaite car nous avons à résoudre un problème physique dont on sait par expérience que la solution existe [2] !

On montre que l'inverse de la matrice 2x2

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

existe si et seulement si la quantité

$$\mathrm{det}M = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{4.39}$$

appelée *déterminant* de la matrice, est différente de zéro. La matrice inverse s'écrit alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\mathrm{det}M} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Pour notre circuit prototype, on obtient donc

$$\mathrm{det}\mathcal{R} = (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2 = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 = D \tag{4.41}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

En effectuant le produit matriciel de la matrice $\mathcal{R}^{-1}$ d'ordre 2x2 avec le vecteur unicolonne E, on retrouve bien les composantes i_1 et i_2 du vecteur unicolonne I données par l'équation (4.25), via la méthode de substitution.

4.5 Méthode des déterminants

La recherche directe de la matrice inverse $\mathcal{R}^{-1}$ implique un certain nombre d'opérations algébriques qui sont en fait inutiles, et, sans doute, sources d'erreurs, donc indésirables. Il est possible de structurer plus rapidement le calcul en utilisant des déterminants.

2. Le fait de trouver une impossibilité ne pourrait donc résulter que d'une erreur d'interprétation ou de calcul !

4.5.1 Déterminants en dimension 2

Dans un plan xOy, considérons deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ de composantes cartésiennes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement :

$$\overrightarrow{V_1} = x_1 \overrightarrow{e_x} + y_1 \overrightarrow{e_y} \quad , \quad \overrightarrow{V_2} = x_2 \overrightarrow{e_x} + y_2 \overrightarrow{e_y} \tag{4.43}$$

Le *déterminant* de ces deux vecteurs, noté $\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$, est la quantité

$$\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{4.44}$$

C'est, en fait, la composante suivant l'axe Oz d'un trièdre $Oxyz$ du produit vectoriel des deux vecteurs qui, eux, se trouvent dans le plan xOy :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \ \overrightarrow{e_z} \tag{4.45}$$

On sait que ce produit vectoriel représente en quelque sorte un *vecteur surface* dans la mesure où, d'une part, son orientation est celle de la perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs (avec un sens conforme à la règle dite *du tire-bouchon*), et, d'autre part, son module est l'aire S du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs.

♠ Si les deux vecteurs sont parallèles, leur produit vectoriel est nul puisqu'alors S est nulle. On en déduit ainsi que deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont *indépendants* si et seulement si leur produit vectoriel n'est pas nul.

Le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ possède les propriétés fondamentales suivantes.

♠ Il est *antisymétrique* :

$$\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = -\det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_1}) \tag{4.46}$$

d'où l'on déduit que $\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_1}) = 0$.

♠ Il est *linéaire* par rapport aux deux vecteurs, c'est-à-dire que l'on a

$$\det(\alpha \ \overrightarrow{V_1} + \beta \ \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \alpha \ \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_3}) + \beta \ \det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) \tag{4.47}$$

α et β étant des nombres (réels ou complexes).

A l'aide des composantes de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, on peut former la matrice M donnée en (4.38), dont le déterminant est aussi le déterminant des deux vecteurs

$$\det M = \det\,(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) \tag{4.48}$$

Supposant $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ indépendants, tout autre vecteur $\overrightarrow{E}$ peut être écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\overrightarrow{E} = \alpha_1 \ \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \ \overrightarrow{V_2} \tag{4.49}$$

α_1 et α_2 étant deux nombres réels (ou complexes), appelées composantes de $\overrightarrow{E}$ relativement à la base formée par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$. Cependant, comme ces deux derniers vecteurs ne sont pas nécessairement orthogonaux, on ne peut obtenir lesdites composantes par simple projection de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{V_1}$ ou $\overrightarrow{V_2}$

$$\alpha_1 \neq \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{V_1} \quad , \quad \alpha_2 \neq \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{V_2} \tag{4.50}$$

On peut en revanche les calculer directement en formant des déterminants. En effet, on a

$$\det(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{V_2}) = \det(\alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_2}) = \alpha_1 \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) + \alpha_2 \det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_2}) \tag{4.51}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{\det(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{V_2})}{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})} \tag{4.52}$$

De même,

$$\alpha_2 = \frac{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{E})}{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})} \tag{4.53}$$

Ainsi, les déterminants permettent d'obtenir rapidement une composante quelconque (ici, α_1 ou α_2) relativement à un autre vecteur (ici, $\overrightarrow{V_1}$ ou $\overrightarrow{V_2}$).

Revenons alors aux équations (4.21), et posons

$$V_1 = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad , \quad V_2 = \begin{pmatrix} R_3 \\ R_2 + R_3 \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

On voit alors que le vecteur E (4.29) s'écrit aussi

$$E = i_1 V_1 + i_2 V_2 \tag{4.55}$$

D'après la méthode exposée ci-dessus, on en déduit immédiatement les relations [3]

$$i_1 = \frac{\det(E, V_2)}{\det(V_1, V_2)} \quad , \quad i_2 = \frac{\det(V_1, E)}{\det(V_1, V_2)} \tag{4.56}$$

qui redonnent bien les expressions de i_1 et i_2 trouvées précédemment.

Cette méthode est généralisable aux dimensions supérieures à 2 ; c'est la *méthode de Cramer*.

4.5.2 Déterminants en dimension 3

Soit maintenant les trois vecteurs à trois composantes

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{V_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Le déterminant de ces trois vecteurs, pris dans cet ordre (1,2,3) est leur *produit mixte*

$$\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) \tag{4.58}$$

♠ On sait que la valeur absolue de ce produit mixte est le volume V du parallélépipède formé par les trois vecteurs. Ce volume est nul si au moins deux des vecteurs sont parallèles. Ainsi, trois vecteurs non nuls sont indépendants si et seulement si leur déterminant n'est pas nul.

♠ Rappelons que le produit mixte change de signe si deux des vecteurs sont permutés et ne change pas si l'on effectue une permutation circulaire des vecteurs

3. Ici, pour les vecteurs, on utilise indifféremment soit la notation avec une flèche, soit la notation unicolonne.

$$\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = -\det(\overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) \tag{4.59}$$

♠ Le déterminant est *linéaire* par rapport à chacun des trois vecteurs

$$\det(\alpha_1 \overrightarrow{W_1} + \alpha_2 \overrightarrow{W_2}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \alpha_1 \det(\overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) + \alpha_2 \det(\overrightarrow{W_2}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) \tag{4.60}$$

On peut former une matrice carrée, ici d'ordre 3X3, à l'aide des composantes des vecteurs

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

dont le déterminant est celui des trois vecteurs formant ses colonnes

$$\det M = \det\,(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) \tag{4.62}$$

On montre que la matrice M est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Ce déterminant est aussi noté ainsi

$$\det M = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{4.63}$$

Comme

$$\det \overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \tag{4.64}$$

on en déduit une règle simple, dite *règle de Sarrus* pour le calcul de déterminants 2X2 ou 3X3, et uniquement pour ces ordres : *le déterminant est égal à la somme des produits des termes situés sur les parallèles à la 2ème bissectrice, diminuée de la somme des produits des termes situés sur les parallèles à la 1ère bissectrice* :

$$\det M = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \tag{4.65}$$

Soit maintenant trois vecteurs indépendants $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ et le vecteur

$$\overrightarrow{E} = \alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2} + \alpha_3 \overrightarrow{V_3} \tag{4.66}$$

D'après les propriétés des déterminants, on montre facilement que

$$\alpha_1 = \frac{\det(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})}{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{V_3})}{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{E})}{\det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})} \tag{4.67}$$

Appliquons ce formalisme à la résolution du réseau de la figure 4.6. En unités appropriées, on a

$$3 = 13i_1 + 3i_2 \quad , \quad 8 = 3i_1 + 10i_2 + 7i_3 \quad , \quad 3 = 7i_2 + 12i_3 \tag{4.68}$$

Posons

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{V_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

Il vient

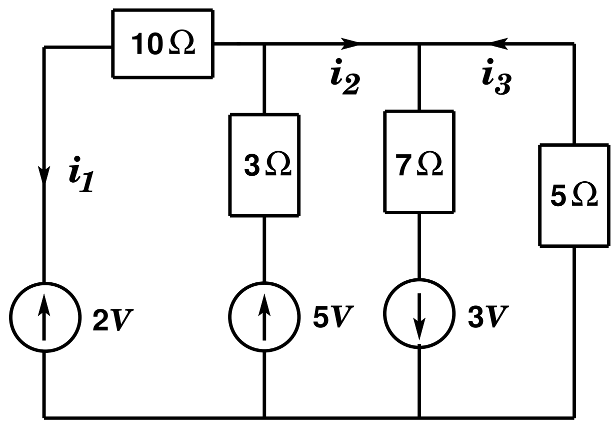

FIGURE 4.6 –

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 8 & 10 & 7 \\ 3 & 7 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix}} = -\frac{12}{815}\,\mathrm{A} = -1,47\ 10^{-2}\,\mathrm{A} \qquad (4.70)$$

Puis

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix}}{815} = 1,063\,\mathrm{A} \quad , \quad i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 8 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{815} = -0,37\,\mathrm{A} \qquad (4.71)$$

4.5.3 Sur la symétrie de la matrice $\mathcal{R}$ eqs. (4.30) et (4.31)

On dit qu'une matrice carrée est *symétrique* si son élément a_{ij} situé hors diagonale à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne est égal à son élément a_{ji} situé hors diagonale à l'intersection de la jème ligne et de la ième colonne, c'est-à-dire, si $a_{ij} = a_{ji}$ avec $i \neq j$.

Il en est ainsi de la matrice $\mathcal{R}$ dans les équations (4.30) et (4.31) où l'on remarque que chaque élément diagonal est positif et représente la résistance totale rencontrée par le courant de maille considéré, en l'occurrence, $R_1 + R_3$ pour i_1, $R_2 + R_3$ pour i_2, tandis que l'élément hors diagonale R_3 est la résistance commune aux deux mailles considérées, ici affectée d'un signe "+" car les deux courants de mailles la traversent dans le même sens.

Ce fait se généralise au cas d'un réseau linéaire quelconque. Considérons par exemple la maille de la figure 4.7. Pour chaque branche de cette maille la différence de potentiel $v_{k\ell} = V_k - V_\ell$ entre son nœud de départ et son nœud d'arrivée sera exprimée au moyen de la loi de Pouillet :

$$v_{k\ell} = r_{k\ell}\ i_{k\ell} - E_{k\ell}$$

où $i_{k\ell}$ est l'intensité du courant traversant cette branche, du nœud k vers le nœud ℓ et $E_{k\ell}$ la fem (comptée algébriquement) d'un générateur de tension éventuellement présent dans cette branche. En sommant toutes ces différences de potentiel pour la maille considérée, on trouve

$$\sum v_{k\ell} = 0 = \sum r_{k\ell}\ i_{k\ell} - \sum E_{k\ell}$$

soit

$$\sum r_{k\ell}\ i_{k\ell} = \sum E_{k\ell}$$

Notons I l'intensité du courant de la maille, $I_a, ..., I_d$ les intensités des courants des mailles adjacentes, les sens choisis étant ceux indiqués dans la figure 4.7.

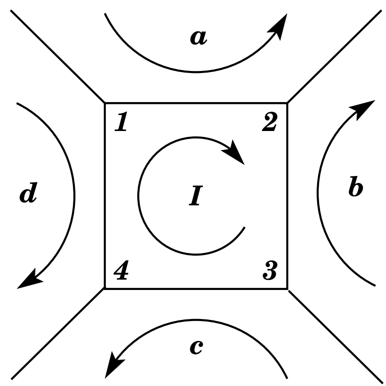

FIGURE 4.7 –

Comme $i_{12} = I + I_a$, $i_{23} = I - I_b$, $i_{34} = I + I_c$, $i_{41} = I - I_d$, la relation précédente prend la forme

$$I\,(r_{12} + r_{23} + r_{34} + r_{41}) + r_{12}I_a - r_{23}I_b + r_{34}I_c - r_{41}I_d = \sum E_{k\ell}$$

Dans cette équation, le coefficient de l'intensité I du courant de la maille (1234) considérée est bien la somme des résistances des différentes branches qui la constituent, tandis que les coefficients des intensités des courants des mailles adjacentes sont les résistances des branches qu'elles ont en commun avec cette maille, affectées d'un signe "+" ou "-" selon que ces courants vont dans le même sens ou dans le sens inverse du courant de ladite maille.

Il est clair que dans l'équation relative, par exemple, à la maille b, la contribution $r_{32}\ i_{32} = r_{23}\ (I_b - I)$ de la branche (32) fera apparaitre le terme $-r_{23}I$, symétrique du terme $-r_{23}I_b$ dans l'équation de la maille (1234). Collectant toutes les équations des mailles indépendantes sous une forme matricielle similaire à celle de l'équation (4.31), la matrice $\mathcal{R}$ correspondante est donc *symétrique*. Comme on l'a vu, la résolution des équations nécessite en théorie le calcul de la matrice inverse $\mathcal{R}^{-1}$. Cette matrice est aussi symétrique [4]. Nous verrons une conséquence de ce fait au chapitre 5.

4.6 Méthode des nœuds

Une autre méthode de résolution d'un réseau, dite *méthode des nœuds*, consiste à déterminer les différences de potentiel entre ses différents nœuds et un nœud de référence, dont le potentiel est pris par convention égal à zéro [5], plutôt que de s'attacher à déterminer les intensités des courants de mailles. Elle utilise les équations des nœuds (4.1), où les intensités des courants circulant dans les branches qui se rencontrent au nœud considéré sont réexprimées en fonction des différences de potentiel et des fem des générateurs de tension éventuellement présent dans les branches, au moyen de la loi d'Ohm et de la loi de Pouillet.

Considérons par exemple le schéma de la figure 4.8. Au noeud (4), on a

$$i_1 + i_3 - i_2 = 0$$

4. On montre en Mathématiques que l'inverse d'une matrice symétrique inversible est aussi symétrique.
5. Rappelons que le potentiel électrique nést défini qu'à une constante additive près.

L'application des lois d'Ohm et de Pouillet aux trois branches (4-1), (4-2) et (4-3) donne, respectivement,

$$V_1 - V_4 = E_1 - R_1 i_1 \ , \quad V_4 - V_2 = E_2 - R_2 i_2 \ , \quad V_4 - V_3 = R_3 i_3$$

d'où

$$i_1 = \frac{1}{R_1}\left(V_4 - V_1 + E_1\right) \ , \quad i_2 = \frac{1}{R_2}\left(E_2 + V_2 - V_4\right) \ , \quad i_3 = \frac{1}{R_3}\left(V_4 - V_3\right)$$

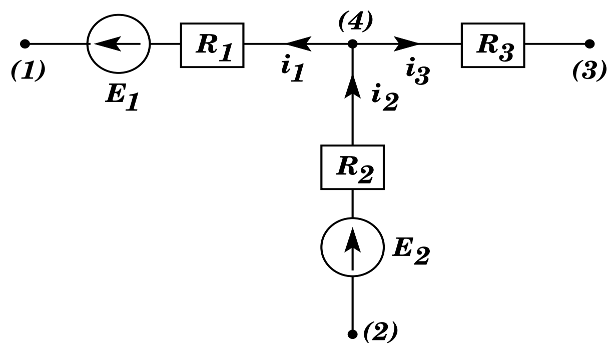

Figure 4.8 –

On en déduit

$$i_1 - i_2 + i_3 = \frac{V_4 - V_1}{R_1} + \frac{V_4 - V_2}{R_2} + \frac{V_4 - V_3}{R_3} + \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = 0$$

Cette dernière relation nous permet de préciser de quelle façon on doit appliquer la loi des nœuds au nœud (4) en ne faisant intervenir que les différences de potentiel et les fem. On voit que dans la relation obtenue, chaque différence de potentiel $V_4 - V_k$ relative à une branche $(4-k)$ joignant le nœud (4) y apparaît avec comme coefficient positif la conductance de ladite branche. Quant aux fem, elles interviennent chacune avec comme coefficient la conductance de la branche dans laquelle elle se trouve, positivement si le générateur présente son pôle "-" du côté du nœud (4), négativement s'il présente son pôle "+" du côté dudit nœud. L'équation peut aussi être récrite sous la forme avantageuse :

$$\sum_k \frac{V_4 - V_k}{R_k} = {\sum_k}' \frac{E_k}{R_k} \tag{4.72}$$

où les sommes sont étendues à toutes les branches joignant le nœud (4), la somme du second membre étant encore une somme "égocentrique" par rapport à ce nœud : si le générateur présente son pôle "+" vers le nœud, sa fem est affectée d'un signe "+", tandis que s'il présente son pôle "-" du côté du nœud, sa fem est affectée d'un signe "-".

Pour un réseau possédant N nœuds, la méthode requiert $N-1$ équations de nœud, le potentiel du nœud de référence étant pris égal à zéro. Une fois les $N-1$ potentiels déterminés, les intensités des branches s'en déduisent immédiatement par application de la loi d'Ohm ou de la loi de Pouillet.

Le choix entre la méthode des courants de mailles ou la méthode des nœuds dépend de la structure du réseau considéré, le but étant, bien entendu, d'avoir finalement le minimum d'équations à résoudre. Par exemple, un réseau contenant plusieurs branches en parallèle se résoudra plus facilement par la méthode des nœuds car son nombre de mailles est certainement plus élevé que son nombre de nœuds.

Comparons les deux méthodes pour le réseau de la figure 4.9 qui comporte trois mailles indépendantes et trois nœuds indépendants.

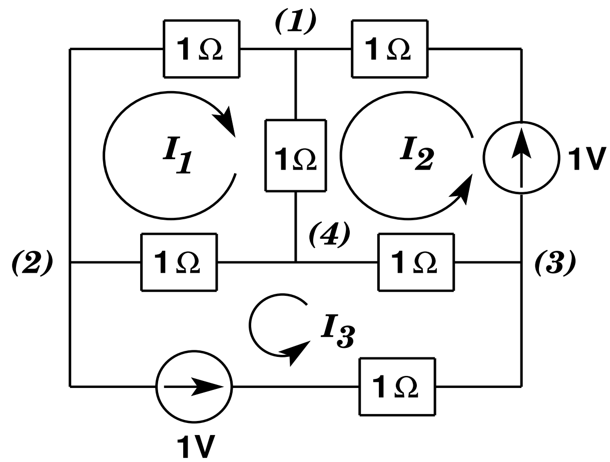

FIGURE 4.9 –

En unités convenables, la méthode des courants de mailles conduit aux trois équations

$$3I_1 + I_2 + I_3 = 0 \ \ (a) \ , \quad 3I_3 - I_2 + I_1 = 1 \ \ (b) \ , \quad 3I_2 + I_1 - I_3 = 1 \ \ (c)$$

La différence $(b) - (c) = 0 = 4I_3 - 4I_2$ donne $I_3 = I_2$, ce qui, compte tenu de a) conduit à $I_3 = I_2 = -3I_1/2$. En injectant ces résultats dans (b), il vient $I_1 = -1/2$ A, $I_3 = I_2 = 3/4$ A.

Choisissons le nœud (4) comme référence ($V_4 = 0$). On obtient :

$$3V_1 - V_2 - V_3 = 1 \ , \quad \text{au nœud (1)}$$

$$3V_2 - V_1 - V_3 = -1 \ , \quad \text{au nœud (2)}$$

$$3V_3 - V_1 - V_2 = 0 \ , \quad \text{au nœud (3)}$$

On notera que la somme (1) + (2) + (3) = 0 = $V_1 + V_2 + V_3$ équivaut à l'équation que l'on obtiendrait au nœud (4). Reportant cette relation dans (3), on tire $V_3 = 0$, d'où $V_2 = -V_1$. L'une ou l'autre équation (1) ou (2) conduit alors au résultat $V_1 = -V_2 = 1/4$ V. On en déduit $I_1 = (V_2 - V_1)/1 = -1/2$ A, $I_2 = 1 - (V_1 - V_3) = 3/4$ A, $I_3 = 1 - (V_3 - V_2) = 3/4$ A.

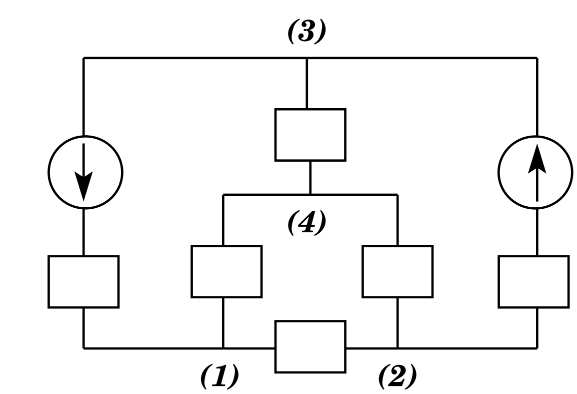

FIGURE 4.10 –

Le résultat $V_3 = 0$ s'explique simplement en réarrageant le réseau comme dans la figure 4.10 qui révèle une symétrie autour de la branche $(3 - 4)$: une rotation de π autour de cette branche équivaudrait à un changement de sens des fem des générateurs alors qu'elle ne devrait rien changer en réalité. On en déduit d'une part qu'aucun courant ne doit circuler dans la branche $(3-4)$, donc $V_3 = 0$ et que d'autre part on doit avoir $V_1 = -V_2$, $i_{31} = -i_{32}$.

Cette observation montre encore une fois la nécessité de faire une recherche préalable d'éventuelles symétries pour s'épargner des calculs fastidieux.

4.7 Complément

Montrons que la loi des mailles appliquée à une maille ne comprenant que des résistances exprime que l'effet Joule y est extrêmal, les intensités des courants externes arrivant aux noeuds de la maille étant fixés.

Pour simplifier, considérons la maille de la figure 4.11 ne comprenant que trois résistances r_1, r_2 et r_3.

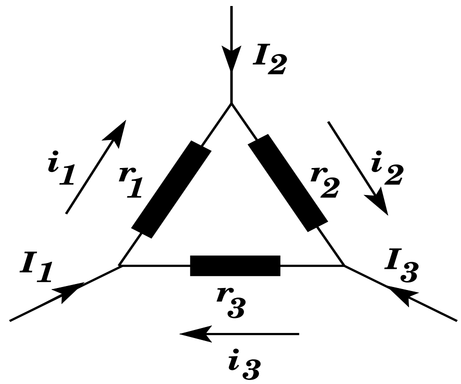

FIGURE 4.11 –

Lorsque les intensités des courants circulant dans les trois résistances r_1, r_2 et r_3, ont les valeurs effectivement réalisées i_1, i_2 et i_3 respectivement, la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la maille a pour expression

$$P = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + r_3 i_3^2$$

Imaginons que ces intensités aient des valeurs différentes

$$j_1 = i_1 + \delta i_1 \ , \quad j_2 = i_2 + \delta i_2 \ , \quad j_3 = i_3 + \delta i_3$$

La puissance dissipée devient alors

$$\begin{aligned} P(j_1, j_2, j_3) = P' = r_1 j_1^2 + r_2 j_2^2 + r_3 j_3^2 = P + 2\,(r_1 i_1 \delta i_1 + r_2 i_2 \delta i_2 + r_3 i_3 \delta i_3) \\ + r_1 (\delta i_1)^2 + r_2 (\delta i_2)^2 + r_3 (\delta i_3)^2 \end{aligned}$$

Ici, les intensités externes I_1, I_2 et I_3 sont supposées fixées. La loi des noeuds implique alors que l'on ait

$$I_1 = i_1 - i_3 = j_1 - j_3 \ , \quad I_2 = i_2 - i_1 = j_2 - j_1 \ , \quad I_3 = i_3 - i_2 = j_3 - j_2 \tag{4.73}$$

ce qui implique

$$\delta i_1 = \delta i_2 = \delta i_3$$

On en déduit

$$P' = P + \delta i_1\,(r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3) + (\delta i_1)^2\ (r_1 + r_2 + r_3)$$

Or, la loi des mailles s'exprime par l'égalité

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 = 0 \tag{4.74}$$

d'où

$$P' = P + (\delta i_1)^2 \ (r_1 + r_2 + r_3)$$

Son second terme étant positif, cette dernière expression montre de façon manifeste que, considérée comme fonction de j_1, j_2 et j_3 alors que ces trois grandeurs sont contraintes par les relations 4.73, la puissance $P(j_1, j_2, j_3)$ est *minimum* pour les valeurs i_1, i_2 et i_3 satisfaisant la relation 4.74.

Ce résultat s'étend sans difficulté au cas d'une maille comportant un nombre quelconque de branches.