

Chapitre 5

Théorèmes généraux

L'utilisation d'un formalisme matriciel pour résoudre des équations de réseaux linéaires se justifie par la propriété de linéarité des réseaux considérés, dont la conséquence est que l'application des lois de Kirchhoff à ces réseaux conduit à des relations *linéaires* entre les intensités et les fem des générateurs de tension, réels ou équivalents. De cette linéarité découlent aussi d'importants théorèmes généraux qui font l'objet de ce chapitre. Mais présentons tout d'abord deux théorèmes ne faisant pas appel à cette propriété de linéarité.

5.1 Théorème de Tellegen¹

Considérons un réseau *quelconque* comportant B branches et N nœuds. Pour faire ressortir son aspect géométrique, dans chacune de ses branches faisons abstraction des éléments qu'elle comporte et remplaçons-la par un simple trait ou un arc de courbe. Le réseau "dépouillé" ainsi obtenu constitue le *graphe* du réseau initial.

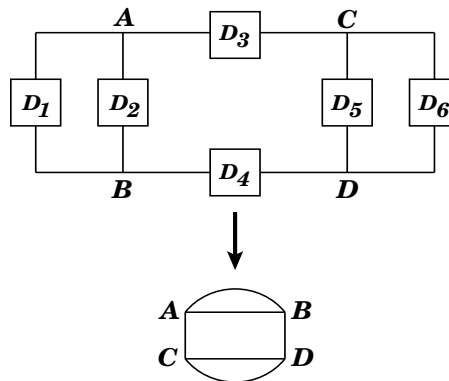


FIGURE 5.1 – Un réseau et son graphe

D'après la figure 5.1, il est clair que, selon la nature des dipôles D_i placés dans les diverses branches, on peut obtenir des réseaux différents mais que, inversement, des réseaux différents peuvent avoir le même graphe.

Envisageons alors deux réseaux différents possédant le *même graphe* et pour lesquelles les deux lois de Kirchhoff, loi des noeuds et loi des mailles, s'appliquent. Les courants circulant dans les branches et les tensions aux bornes de ces branches seront orientés de la même manière dans les

1. Bernard D. H. Tellegen, *A general network theorem with applications*, Philips Research Reports, 7 (1952) p259 ; voir aussi : P. Penfield Jr., R. Spence, S. Duinker, IEEE Transactions on circuit theory, vol. CT-17 n° 3, (1970) p302.

deux réseaux et, pour k ème branche, seront notées i_k, u_k et i'_k, u'_k pour le premier réseau et le second réseau, respectivement.

La k ème branche étant limitée par deux nœuds p et q , la tension à ses bornes s'exprime comme la différence des potentiels entre ces deux nœuds. Ainsi, on écrira, selon l'orientation choisie, $u_k = V_p - V_q$ pour le premier réseau, $u'_k = V'_p - V'_q$ pour le second. Evaluons la somme

$$X = \sum_{k=1}^B i_k u'_k = \sum_{k=1}^B i_k (V'_p - V'_q) = \sum_{p=1}^N V'_p \sum_{k=1}^{p_n} i_k - \sum_{q=1}^N V'_q \sum_{k=1}^{q_m} i_k$$

Dans la dernière étape, où l'on a transformé la somme sur les branches en somme sur les nœuds, les sommes

$$\sum_{k=1}^{p_n} i_k, \quad \sum_{k=1}^{q_m} i_k$$

représentent les sommes des intensités, comptées algébriquement, arrivant (ou sortant) des nœuds p et q respectivement (en nombre p_n et q_m pour le premier nœud et le second, respectivement). Mais, d'après la loi des nœuds, celles-ci sont strictement nulles. On en déduit la relation

$$X = \sum_{k=1}^B i_k u'_k = 0 \quad (5.1)$$

et symétriquement

$$X' = \sum_{k=1}^B i'_k u_k = 0 \quad (5.2)$$

En supposant que les deux réseaux soient finalement identiques, on aboutit aussi bien à

$$Y = \sum_{k=1}^B i_k u_k = 0 \quad (5.3)$$

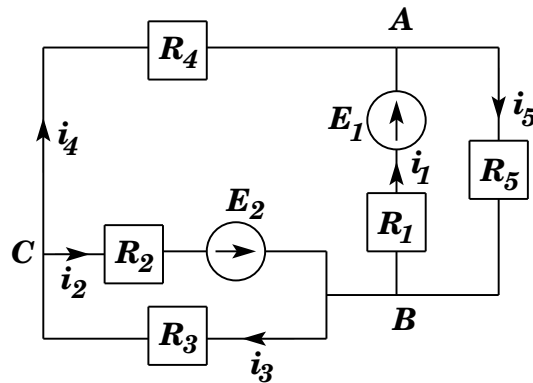


FIGURE 5.2 – Exemple d'application du théorème de Tellegen

Dans ce dernier cas, le résultat exprime simplement la *conservation* de la puissance totale dans un réseau. Vérifions-le dans le cas du réseau de la figure 5.2. On a

$$u_{AB} (i_1 - i_5) + u_{AC} i_4 + u_{BC} (i_2 - i_3) = 0$$

Réexprimant alors les tensions de manière appropriée en fonction des éléments de chaque branche concernée, il vient

$$[E_1 - R_1 i_1] i_1 - [R_5 i_5] i_5 + [-R_4 i_4] i_4 + [E_2 - R_2 i_2] i_2 - [R_3 i_3] i_3 = 0$$

soit $E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2$

D'où le résultat annoncé.

Insistons sur le fait que, par rapport aux autres théorèmes sur les réseaux, celui de Tellegen a ceci de très particulier, et donc de remarquable, qu'il repose uniquement sur l'applicabilité des deux lois de Kirchhoff précitées, et *rien d'autre*. Les réseaux considérés doivent seulement avoir le même graphe mais sont par ailleurs *quelconques*. Ils peuvent être linéaires *ou non*. Qui plus est, dans le cas des régimes quasi-stationnaires pour lesquels on peut encore appliquer les deux lois de Kirchhoff, les intensités dans l'un des réseaux et les tensions dans l'autre peuvent même être prises à des dates *différentes*!

5.2 Théorème de substitution

Ce théorème énonce que dans un réseau *quelconque*, il est possible de remplacer une branche par une autre, ou même un composant par un autre dans une branche donnée, à la seule condition que ce remplacement redonne la même tension aux bornes de ladite branche et la même intensité du courant principal qui y circule, de sorte à ne pas modifier le reste du réseau.

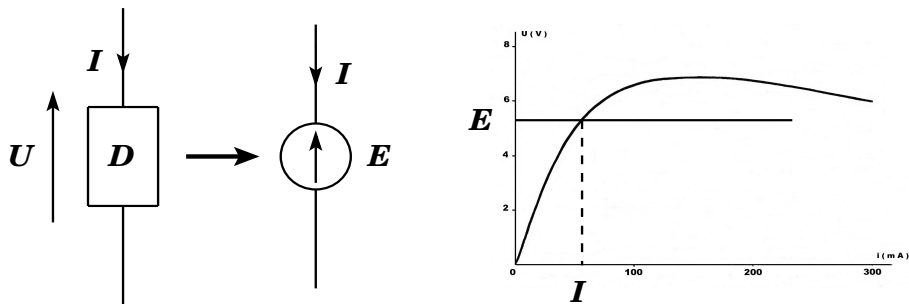


FIGURE 5.3 – Substitution d'un dipôle D par un générateur de tension parfait

La figure 5.3 en donne le principe dans le cas d'un dipôle D non linéaire. Supposons que l'insertion de ce dipôle dans un circuit conduise au point de fonctionnement pour lequel la tension à ses bornes et l'intensité du courant qui le traverse ont pour valeurs respectives $U = E$ et I . On peut remplacer ce dipôle par un générateur de tension parfait de fem E , dont la polarité doit respecter la sens de la tension initiale. Il faut cependant noter que ce générateur qui *simule* le dipôle pour ce point de fonctionnement particulier doit évoluer s'il se produit dans le réseau une variation affectant le point de fonctionnement. C'est pourquoi cette source de substitution est qualifiée de source *dépendante*.

5.3 Théorème de superposition

Considérons maintenant un réseau *linéaire* quelconque *en régime permanent* établi², ne comportant que des résistances et des générateurs de tension³. Du fait de la linéarité du réseau, les intensités i_1, i_2, \dots, i_B des courants circulant dans les diverses branches du réseau lorsque

2. C'est une condition *sine qua non*.

3. Il a été vu au chapitre 3 que tout dipôle linéaire actif peut être assimilé à un générateur de tension.

les fem dans ces branches ont pour valeurs respectives E_1, E_2, \dots, E_B s'expriment comme des *combinaisons linéaires* de ces dernières

$$i_p = \sum_{j=1}^B \alpha_p^j E_j \quad (5.4)$$

où les coefficients α_p^j ne sont fonctions que des résistances dans le réseau (y compris les résistances internes des générateurs). Supposons que, sans changer les résistances, on puisse modifier à volonté les fem du réseau et qu'elles deviennent E'_1, E'_2, \dots, E'_B . Les intensités prennent les nouvelles valeurs

$$i'_p = \sum_{j=1}^B \alpha_p^j E'_j \quad (5.5)$$

avec les *mêmes coefficients* α_p^j , puisque les résistances sont inchangées (notamment celles des générateurs non parfaits). Supposons qu'on puisse réaliser un régime permanent où les fem ont pour valeurs $E''_p = E_p + E'_p$. L'intensité dans la k ème branche devient

$$i''_k = \sum_{p=1}^B \alpha_k^p E''_p = i_k + i'_k \quad (5.6)$$

c'est-à-dire, la somme algébrique de l'intensité i_k correspondant au premier régime permanent caractérisé par les valeurs E_k des fem, et de l'intensité i'_k correspondant au second régime permanent où les fem ont les valeurs E'_k . On en déduit que :

☞ *La superposition de deux régimes permanents donne un nouveau régime permanent ;*

☞ *dans une branche donnée, l'intensité du courant pour ce troisième régime permanent est égale à la somme des intensités du courant trouvées pour chacun des régimes permanents superposés.*

Plus généralement, soit N régimes permanents, correspondant chacun à des valeurs particulières $E_p^{(m)}$ des générateurs. Pour le même régime, désignons par $i_k^{(m)}$ l'intensité du courant circulant dans la k ème branche. A partir de ces régimes, on peut, au moins théoriquement, en réaliser un autre où chacun des générateurs délivre la fem $\mathcal{E}_p = \sum_{m=1}^N a_m E_p^{(m)}$, où les coefficients a_m sont N nombres quelconques. L'intensité \mathcal{I}_k du courant dans la k ème branche et correspondant à cet ultime régime sera

$$\mathcal{I}_k = \sum_{m=1}^N a_m i_k^{(m)} \quad (5.7)$$

☞ Ces résultats constituent le *théorème de superposition des régimes permanents*.

La relation (5.4) peut alors s'interpréter de la façon suivante. Nous dirons qu'un générateur est *éteint* lorsque sa fem est nulle. Il se comporte alors comme une résistance morte, équivalente à sa résistance interne. Soit un régime permanent où seul le générateur $n^{\circ}p$ fonctionne, les autres générateurs étant éteints. L'intensité dans la k ème branche du réseau est alors

$$i_k^{(1)} = \alpha_k^p E_p$$

Il est alors clair qu'en superposant ces régimes permanents *élémentaires* où un seul générateur du réseau est en action, les autres étant éteints (en nombre égal au nombre de générateurs présents dans le réseau), on obtient le régime permanent où tous les générateurs fonctionnent simultanément. L'intensité du courant dans la k ème branche est égal à la somme des intensités trouvées pour cette branche pour chacun des régimes élémentaires.

Cette observation est très utile pour la résolution d'un réseau, car il est généralement plus simple de considérer chaque régime élémentaire séparément. En effet, lorsqu'un seul générateur fonctionne, les différences de potentiel sont proportionnelles à sa fem, et l'on se trouve généralement en présence de schémas classiques de "diviseurs de tension", et la seule difficulté est alors d'évaluer des résistances équivalentes.

A titre d'exemple d'application, considérons à nouveau le réseau de la figure 4.4. Dans un premier temps, supposons que seul le générateur de fem E_1 soit en action. Le réseau correspondant à cet état est représenté à la figure 5.4 (a).

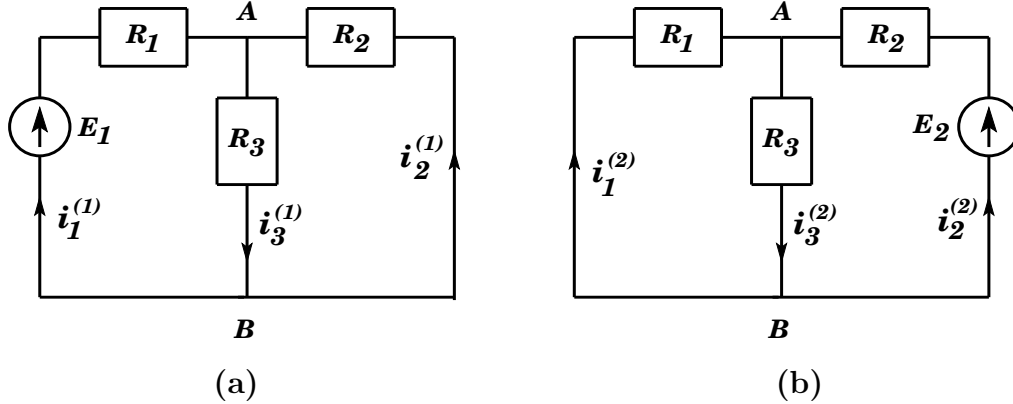


FIGURE 5.4 – Théorème de superposition ; (a) : état où seule E_1 est en action ; (b) : état où seule E_2 est en action

L'association des deux résistances R_2 et R_3 en parallèle a pour résistance

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (5.8)$$

La résistance totale du circuit est alors

$$R^{(1)} = R_1 + R_{23} = \frac{D}{R_2 + R_3} \quad \text{avec} \quad D = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 \quad (5.9)$$

et l'on obtient immédiatement

$$i_1^{(1)} = \frac{E_1}{R^{(1)}} = \frac{(R_2 + R_3)E_1}{D} \quad (5.10)$$

Dans cet état, la différence de potentiel entre A et B est

$$(V_A - V_B)^{(1)} = R_{23} i_1^{(1)} = \frac{R_2 R_3 E_1}{D} \quad (5.11)$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} i_2^{(1)} &= -\frac{(V_A - V_B)^{(1)}}{R_2} = -\frac{R_3 E_1}{D} \\ i_3^{(1)} &= \frac{(V_A - V_B)^{(1)}}{R_3} = \frac{R_2 E_1}{D} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Grâce à la symétrie du réseau, les grandeurs correspondant à l'état de la figure 5.4 (b) où seule E_2 est en action s'obtiennent simplement en échangeant les indices 1 et 2, soit :

$$\begin{aligned} i_2^{(2)} &= \frac{(R_1 + R_3)E_2}{D} & i_1^{(2)} &= -\frac{R_3E_2}{D} \\ i_3^{(2)} &= \frac{R_1E_2}{D} \end{aligned} \quad (5.13)$$

et l'on vérifie aisément que la somme des intensités $i^{(1)}$ et $i^{(2)}$ redonne bien les expressions obtenues au chapitre 4.

5.4 Théorème d'unicité

Ce théorème énonce qu'une fois données les fem des générateurs de tension et les intensités des générateurs de courant dans un réseau linéaire, l'intensité du courant circulant dans une branche donnée est *unique*.

Pour démontrer ce théorème, envisageons un premier régime permanent où les fem et les intensités des générateurs de courant ont des valeurs données E_p et I_q , respectivement. L'intensité du courant dans la k ème branche vaut alors i_k .

Supposons qu'une seconde solution puisse exister, donnant la valeur i'_k de l'intensité du courant dans cette même branche. Considérons alors le second régime permanent où les fem et les intensités des générateurs de courant ont toutes changé de signe. De par la linéarité des équations, l'intensité du courant dans la k ème branche vaut alors $-i'_k$.

Si l'on superpose les deux régimes permanents, les fem résultantes et les intensités résultantes des générateurs de courant sont toutes *nulles*. D'après le théorème de superposition, l'intensité du courant dans la k ème branche pour ce régime permanent vaut $i_k - i'_k$. Or, la puissance dissipée dans la résistance r_k de cette branche est $r_k(i_k - i'_k)^2$ et la puissance totale dissipée

$$\mathcal{P} = \sum_k r_k(i_k - i'_k)^2 = 0 \quad (5.14)$$

est nulle puisqu'aucun générateur ne débite d'énergie. On en déduit l'égalité $i_k = i'_k$, ce qui démontre le théorème.

5.5 Théorème de compensation

Ce théorème s'applique opportunément aux situations où l'on doit déterminer la variation d'une intensité de courant traversant une résistance lorsque celle-ci subit elle-même une modification. Cependant, les variations envisagées sont ici supposées suffisamment faibles pour que l'on puisse effectuer des approximations au premier ordre.

Considérons le cas le plus simple⁴, représenté à la figure 5.5 (b), d'un circuit comportant un générateur parfait de tension E alimentant une résistance R . L'intensité du courant est alors $I = E/R$. Supposons que la résistance subisse une petite variation δR telle que $|\delta R| \ll R$. L'intensité du courant devient alors

$$\begin{aligned} I' &= \frac{E}{R + \delta R} \approx \frac{E}{R} \left(1 - \frac{\delta R}{R}\right) = I - I \frac{\delta R}{R} \\ \text{soit } \delta I &= -I \frac{\delta R}{R} \quad \text{ou} \quad R\delta I = -I\delta R \end{aligned}$$

4. On verra plus loin, avec le théorème de Thévenin, que cette configuration peut en fait représenter le cas plus général.

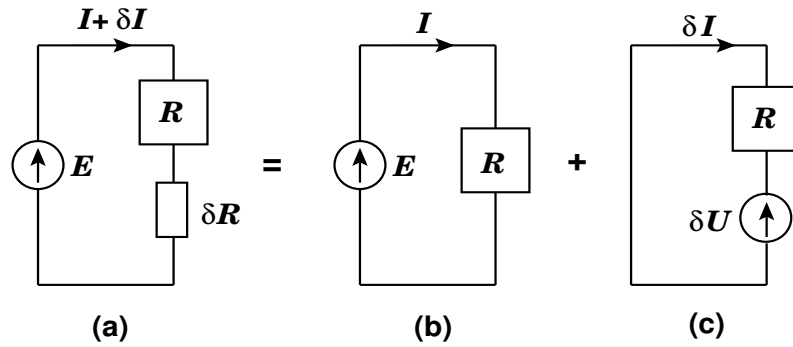


FIGURE 5.5 – Illustration du théorème de compensation

À la lumière du principe de superposition, ces formules suggèrent, comme le montre la figure 5.5, d'interpréter l'état (a), où l'intensité a la valeur I' , comme la superposition de l'état (b) "non perturbé" et d'un état (c) du circuit où, tandis que le générateur de tension E parfait est éteint, fonctionne un générateur parfait délivrant la tension $\delta U = I\delta R$ et faisant circuler un courant d'intensité δI à travers la résistance R , dans le sens indiqué. Un tel générateur fictif est appelé *générateur de compensation*. Cette méthode, qui consiste à simuler une variation d'intensité par la superposition de l'état non perturbé et d'un état du réseau où seul fonctionne un générateur de compensation, peut apporter une grande simplification des calculs. Toutefois, étant une approximation, elle n'est justifiée que si la perturbation reste dans des limites raisonnables qui dépendent du réseau étudié.

5.6 Théorème de réciprocité

Sous sa forme la plus simple, ce théorème énonce que, s'agissant d'un réseau linéaire,

☞ si un générateur de tension parfait, placé dans une branche donnée d'un réseau où il est seul en fonction, produit dans une seconde branche du réseau un courant d'intensité I , alors ce même générateur, déplacé de la première branche à la seconde et fonctionnant seul à nouveau, produira dans la première branche un courant ayant la même intensité I .

On le vérifie par exemple pour le réseau de la figure 5.4, pour lequel, lorsque $E_2 = E_1$, on obtient bien $i_2^{(1)} = i_1^{(2)}$. Sa démonstration utilise le théorème de Tellegen.

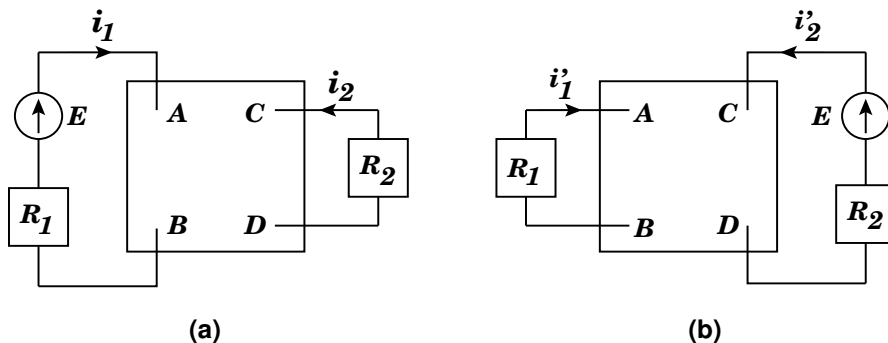


FIGURE 5.6 – Illustration du théorème de réciprocité

Considérons le réseau de la figure 5.6 (a) ne comportant qu'un seul générateur parfait en action, de fem E , placé dans une branche AB de résistance totale R_1 , produisant un courant d'intensité i_2 dans une branche CD de résistance totale R_2 . Le reste du réseau, représenté par la boîte $ABCD$

ne comporte que des résistances, disposées selon une configuration quelconque. Les tensions et intensités de courant des correspondant aux diverses branches du réseau pour cette première situation seront notées u_k et i_k ($k = 1, \dots, B$), respectivement.

Dans la seconde configuration de la figure 5.6 (b), le générateur est maintenant placé dans la branche CD . L'intensité du courant circulant alors dans la branche AB est i'_1 . Pour cette seconde situation, les tensions et intensités de courant dans les branches du réseau seront notées u'_k et i'_k , respectivement.

Le théorème de Tellegen permet d'écrire

$$\sum_{k=1}^B i_k u'_k = 0 = i_1 u'_1 + i_2 u'_2 + \sum_{k=3}^B i_k u'_k, \quad \sum_{k=1}^B i'_k u_k = 0 = i'_1 u_1 + i'_2 u_2 + \sum_{k=3}^B i'_k u_k$$

Or,

$$u_1 = u_{AB} = E - R_1 i_1, \quad u_2 = u_{CD} = -R_2 i_2, \quad u_k = R_k i_k, \quad k = 3, \dots, B$$

$$u'_1 = u'_{AB} = -R_1 i'_1, \quad u'_2 = u'_{CD} = E - R_2 i'_2, \quad u'_k = R_k i'_k, \quad k = 3, \dots, B$$

R_k étant la résistance de la k ème branche pour $k = 3, \dots, B$. D'où

$$0 = -R_1 i_1 i'_1 + i_2 (E - R_2 i'_2) + \sum_{k=3}^B R_k i'_k i_k = i'_1 (E - R_1 i_1) - R_2 i_2 i'_2 + \sum_{k=3}^B R_k i'_k i_k$$

De cette égalité on déduit le résultat annoncé :

$$i'_1 = i_2 \tag{5.15}$$

Ce résultat vaut pour n'importe quel couple de branches du réseau. Or, d'après 5.4, l'intensité du courant circulant dans la p ème branche alors que seule est en action la fem E dans la q ème branche est $i_p = \alpha_p^q E$, tandis que l'intensité du courant circulant dans la q ème branche alors que seule la fem E est en action dans la p ème branche est $i'_q = \alpha_q^p E$. On en déduit l'importante propriété, vue sous une autre forme au paragraphe 4.5.3, que la matrice $\{\alpha_p^q\}$ est *symétrique* :

$$\alpha_p^q = \alpha_q^p \tag{5.16}$$

Une version plus raffinée du théorème est la suivante. Supposons que les seules fem en action le soient dans les branches $1, \dots, M \leq B$ du réseau considéré. Soit un premier état du réseau où ces fem sont distribuées dans un certain ordre E_1, \dots, E_M , donnant les tensions et intensités de branches u_1, \dots, u_B et i_1, \dots, i_B , respectivement, et un second état où ces fem sont distribuées dans un ordre différent E'_1, \dots, E'_M , donnant d'autres valeurs u'_1, \dots, u'_B et i'_1, \dots, i'_B des tensions et intensités des branches, respectivement. Comme $u_k = R_k i_k$ et $u'_k = R_k i'_k$ pour $k = M + 1, \dots, B$, le théorème de Tellegen permet d'écrire

$$0 = \sum_{\ell=1}^M i_\ell u'_\ell + \sum_{k=M+1}^B R_k i_k i'_k = \sum_{\ell=1}^M i'_\ell u_\ell + \sum_{k=M+1}^B R_k i_k i'_k$$

d'où le résultat

$$\sum_{\ell=1}^M \{i_\ell u'_\ell - i'_\ell u_\ell\} = 0 \tag{5.17}$$

5.7 Théorèmes de Thévenin et de Norton⁵

Considérons le réseau linéaire de la figure 5.7 (a). Il comporte un sous-réseau actif, représenté ici par un bloc en gris, relié par deux bornes A et B à une branche ne comportant qu'une résistance R . L'intensité du courant circulant alors dans R a pour valeur I , et l'on a bien sûr $V_A - V_B = RI$.

☞ Le théorème de Thévenin affirme que, vu depuis la résistance R , ledit sous-réseau actif apparaît comme un générateur de tension dont la fem E_e est la valeur de la différence de potentiel $V_A - V_B$ lorsque la branche extérieure de la résistance est *ouverte* (on dit aussi, à circuit extérieur ouvert) et dont la résistance interne R_e est celle du sous-réseau, vue depuis les deux bornes A et B , lorsque celui-ci est devenu passif après que toutes les fem qu'il comporte aient été *éteintes*.

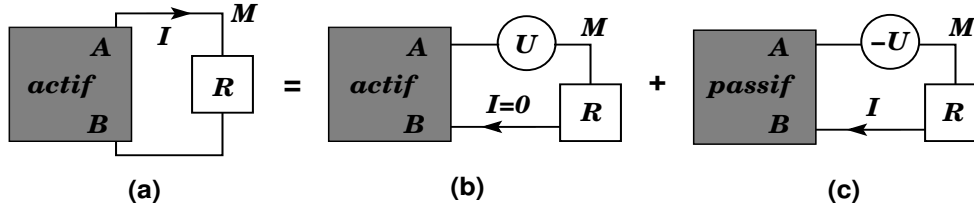


FIGURE 5.7 – Illustration du théorème de Thévenin

La démonstration utilise le théorème de superposition. On peut en effet envisager l'état (a) du réseau décrit par la figure 5.7 (a) comme la superposition des deux états suivants.

- L'état (b) décrit par la figure 5.7 (b) où, d'une part, les fem du sous-réseau sont bien en action et, d'autre part, un générateur parfait de fem U a été placé dans la branche extérieure. La fem U peut toujours être choisie de telle sorte qu'elle compense exactement la différence de potentiel $(V_A - V_B)_b$ de cet état, afin d'annuler l'intensité du courant qui pourrait circuler dans R . On a donc ici

$$(V_M - V_B)_b = 0, \quad (V_A - V_B)_b = -U = E_e$$

Comme il ne passe plus de courant dans la branche extérieure, celle-ci peut être ouverte et $-U$ représente ainsi la tension entre A et B fournie par le sous-réseau actif à *circuit extérieur ouvert*.

- L'état (c) décrit par la figure 5.7 (c) où, d'une part, toutes les fem du sous-réseau ont été éteintes⁶ et, d'autre part, on a inversé les bornes du générateur dans la branche extérieure. L'intensité du courant dans cette branche est alors égale à I . Vu depuis ses deux bornes A et B , le sous-réseau, devenu passif, est maintenant équivalent à une résistance de valeur R_e . On a ici

$$-U = (R + R_e)I, \quad (V_M - V_B)_c = RI = -U - R_e I$$

En superposant ces deux états (b) et (c), les deux fem U et $-U$ se compensent et il n'y a plus de générateur dans la branche extérieure. Comme $I = 0$ dans l'état (b), l'intensité dans l'état (b)+(c) est égale à I et cette superposition redonne bien l'état (a). On a donc :

$$V_A - V_B \equiv V_M - V_A \equiv (V_M - V_B)_a = -U - R_e I = E_e - R_e I \quad (5.18)$$

c'est-à-dire une relation du type loi de Pouillet, d'où le résultat annoncé. D'après la description générale des dipôles électrocinétiques qui a été présentée au chapitre 3, une relation affine tension-courant telle que 5.18 était en fait prévisible, sur le plan théorique, s'agissant d'un sous-réseau

5. Léon C. Thévenin, "Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique", C.R. Ac. Sc., Paris, (1883), p. 159; H. F. Mayer, "Über das Ersatzschema der Verstärkerröhre (On equivalent circuits for electronic amplifiers)", Telegraphen- und Fernsprech-Technik 15, (1926) p.335; E. L. Norton, "Design of finite networks for uniform frequency characteristic", Technical Report TM26-0-1860, Bell Laboratories (1926).

6. Les éventuelles résistances internes des générateurs étant laissées en place.

linéaire. D'un point de vue expérimental, la modélisation d'un dipôle actif par un générateur équivalent paraît aussi naturelle. A titre d'exemple d'application, reconsidérons du point de vue du théorème de Thévenin le calcul de l'intensité $i_2^{(1)}$ du réseau de la figure 5.4 (a).

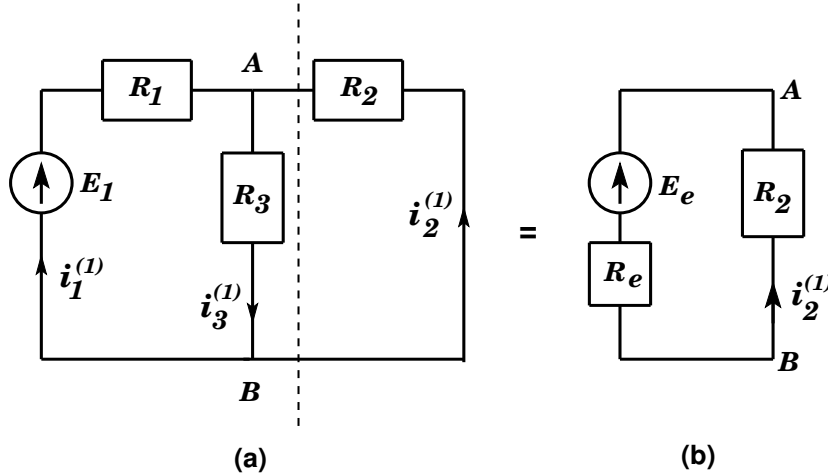


FIGURE 5.8 – Application du théorème de Thévenin

L'idée est de modéliser la partie du réseau à gauche de la ligne en pointillés de la figure 5.8 (a) par un générateur équivalent de Thévenin. Enlevons tout d'abord la branche $A - R_2 - B$, extérieure à cette partie. La tension entre A et B est alors (division de tension)

$$(V_A - V_B)^{(\circ)} = E_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = E_e$$

Elle représente la fem de ce générateur équivalent. Eteignons ensuite la fem E_1 . Depuis les deux bornes A et B , ladite partie gauche apparaît alors comme l'association en parallèle des deux résistances R_1 et R_3 , dont la résistance équivalente est

$$R_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

C'est la résistance interne du générateur équivalent. Le schéma de la figure 5.8 (a) peut alors être remplacé par celui de la figure 5.8 (b). En appliquant la loi des mailles, on trouve immédiatement

$$i_2^{(1)} = -\frac{E_e}{R_e + R_2} = -\frac{E_1 R_3}{R_1 + R_3} \frac{1}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = -\frac{E_1 R_3}{R_2 R_1 + R_3 R_2 + R_1 R_3}$$

c'est-à-dire, le résultat donné en 5.12.

Au chapitre 3, nous avons noté l'équivalence, du point de vue de leurs caractéristiques, entre un générateur de tension et un générateur de courant. Un générateur équivalent de Thévenin peut donc être converti en générateur de courant, ce qui fait qu'un réseau actif linéaire peut être aussi bien modélisé par un générateur de courant équivalent⁷. C'est ce qu'affirme le *théorème de Norton* :

☞ Tout dipôle électrique linéaire actif peut être assimilé à une source idéale de courant en parallèle avec une résistance (générateur de Norton). L'intensité I_e du courant délivré par la

7. Du fait de cette équivalence, on peut d'ailleurs considérer que tout dipôle linéaire actif ne possède que des générateurs de tension. Ainsi, l'appellation "source de tension éteinte" pourra correspondre en fait à une source de courant réelle "débranchée" (réciproquement, celle de "source de courant débranchée" peut aussi bien correspondre à une source de tension réelle "éteinte").

source est celle du courant qui circulerait dans un court-circuit entre les bornes du dipôle, et la résistance R_e est celle mesurée entre les bornes du dipôle lorsque toutes les sources qui y sont présentes ont été rendues inactives (c'est-à-dire, sources de tension court-circuitées et sources de courant débranchées).

Rappelons ici les relations de passage d'un modèle à l'autre (voir le paragraphe 3.3.2) :

$$\begin{aligned} \text{Thévenin} \rightarrow \text{Norton} & : (E_e, R_e) \rightarrow \left(I_e = \frac{E_e}{R_e}, R_e \right) \\ \text{Norton} \rightarrow \text{Thévenin} & : (I_e, R_e) \rightarrow (E_e = R_e I_e, R_e) \end{aligned} \quad (5.19)$$

en notant bien que dans le modèle de Thévenin la résistance R_e est en *série* avec le générateur de tension parfait de fem E_e , tandis que dans le modèle de Norton cette résistance est en *parallèle* avec le générateur de courant parfait délivrant le courant d'intensité I_e .

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont d'une très grande importance pratique car ils permettent de modéliser, selon les besoins, tout ou partie d'un réseau linéaire soit par un générateur de tension soit par un générateur de courant (imparfaits tous les deux). Suivant la structure du réseau que l'on doit résoudre, un théorème peut s'avérer plus facile à utiliser que l'autre, mais il arrive assez souvent qu'on les utilise tous les deux, conjointement ou alternativement.

5.8 Théorème de Millman⁸

Le montage de la figure 5.9, déjà considéré au paragraphe 4.3.2, est un dipôle de bornes A et B constitué de n branches en parallèle, chacune comportant un générateur de tension parfait en série avec une résistance. Le théorème de Millman donne une formule simple pour la différence de potentiel $V_A - V_B$ à *circuit extérieur ouvert*, c'est-à-dire, lorsque les deux bornes A et B ne sont reliées à aucun dispositif extérieur à ce dipôle. Dans la figure 5.9, les flèches apparaissant sur les diverses branches indiquent le sens choisi pour les valeurs algébriques des intensités de courant et celles des fem ; ici, c'est donc le sens allant du pôle B vers le pôle A .

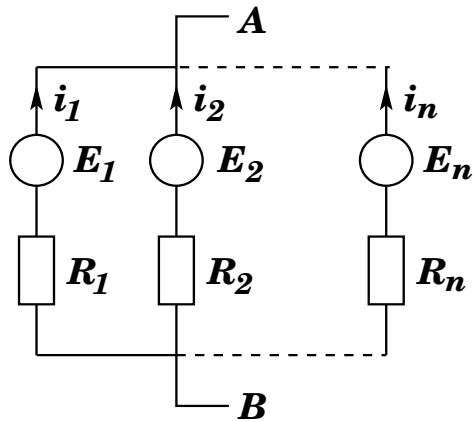


FIGURE 5.9 – Théorème de Millman avec des générateurs de tension

Pour chaque branche, on peut écrire

$$V_A - V_B = E_k - R_k i_k, \quad \text{soit} \quad i_k = \frac{E_k - (V_A - V_B)}{R_k}$$

8. J. Millman, "A Useful Network Theorem", Proc. Inst. of Radio Engineers, 28 (1940) p.413.

Mais, le circuit extérieur étant ouvert, on a

$$\sum_{k=1}^n ' i_k = 0$$

où le symbole de la somme primée signifie, comme auparavant, que l'intensité d'un courant figurant dans cette somme doit y être affectée d'un signe + ou d'un signe - selon que ce courant a été orienté de A vers B ou en sens inverse, respectivement. On obtient ainsi la relation

$$V_A - V_B = \frac{\sum_{k=1}^n ' \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \quad (5.20)$$

résultat qui constitue le théorème de Millman.

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 4.3.2, l'interprétation de la formule 5.20 est plus claire encore si l'on remplace chaque générateur de tension imparfait (E_k, R_k) par un générateur de courant imparfait $(I_k = E_k/R_k, R_k)$, pour obtenir le montage équivalent de la figure 5.10

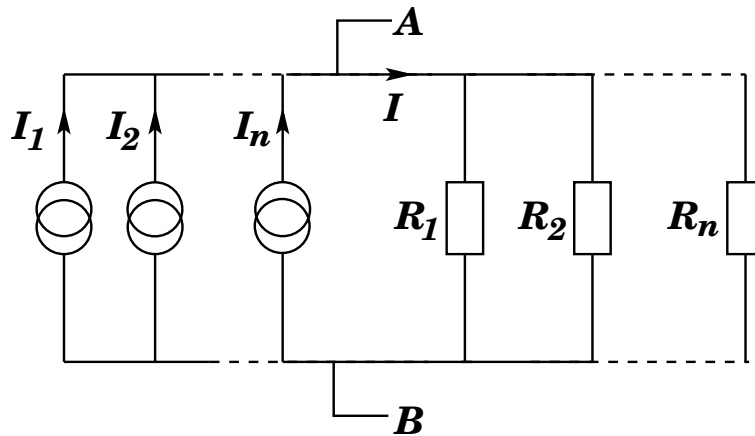


FIGURE 5.10 – Théorème de Millman avec des générateurs de courant

où n générateurs de courant parfaits disposés en parallèle débitent ensemble un courant d'intensité

$$I = \sum_{k=1}^n ' I_k$$

dans un ensemble constitué de n résistances en parallèle dont la résistance équivalente est

$$R_e = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right]^{-1}$$

ce qui donne la différence de potentiel

$$V_A - V_B = R_e I$$

d'où, immédiatement, la formule 5.20.

5.9 Théorème de Kennely⁹

L'idée sous-jacente de ce théorème, déjà présente dans le théorème de substitution ainsi que dans les théorèmes de Thévenin et de Norton, est que certains circuits qui réagissent de la même manière aux actions extérieures peuvent être remplacés les uns par les autres, sans que cela ne modifie les systèmes extérieurs. On doit à A. E. Kennelly de l'avoir développée, notamment dans ce qu'il est convenu d'appeler la *transformation triangle-étoile*.

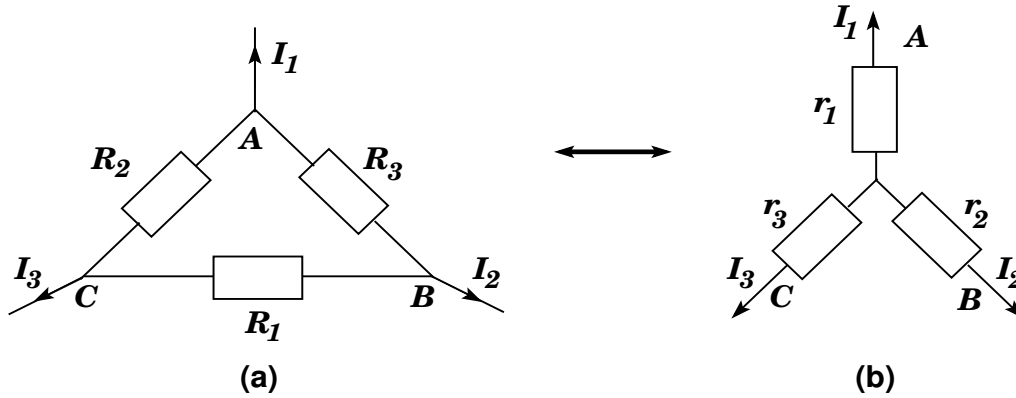


FIGURE 5.11 – Transformation triangle-étoile

☞ Le théorème énonce que, vu de l'extérieur, c'est-à-dire, en dehors des trois bornes A , B et C , le montage (a) *en triangle* de la figure 5.11, avec les résistances R_1 , R_2 et R_3 , est équivalent au montage *en étoile* (b) de cette même figure avec les résistances r_1 , r_2 et r_3 .

Pour le démontrer, nous utiliserons le fait que cette équivalence doit être réalisée quelles que soient les valeurs des intensités des courants externes I_1 , I_2 ou I_3 . Prenons par exemple $I_3 = 0$, soit $I_2 = -I_1$. Nous écrirons que la différence de potentiel $V_B - V_A$ a une valeur unique, qu'elle soit donnée par l'un ou l'autre montage. Pour le montage (a), ce cas correspond à une association en parallèle de R_3 avec la résistance $R_1 + R_2$, tandis que pour le montage (b), il s'agira de l'association de r_1 et r_2 en série, puisque la résistance r_3 n'est plus traversée par aucun courant et ne joue donc plus aucun rôle. On a donc

$$V_B - V_A = I_1 (r_1 + r_2) = I_1 (1/R_3 + 1/(R_1 + R_2))^{-1}$$

d'où l'on tire

$$r_1 + r_2 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{\Sigma}, \quad \text{avec } \Sigma = R_1 + R_2 + R_3 \quad (5.21)$$

Par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3, on obtient de même

$$r_2 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{\Sigma}, \quad r_3 + r_1 = \frac{R_2(R_3 + R_1)}{\Sigma} \quad (5.22)$$

Additionnant 5.21 et 5.22, on obtient, après division par 2,

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{\Sigma} \quad (5.23)$$

9. A. E. Kennelly, "On the Analogy between the Composition of Derivations in a Telegraph Circuit into a Resultant Fault and the Composition of Gravitation on the Particles of a Rigid Body into a Center of Gravity", *Electrical Review*, New York, XI (November 5, 1887), pp. 2-3; "On the Determination of Current Strength in Three-Pointed Star Resistance Systems", *The Electric World and Engineer*, XXXIV (August 19, 1899), pp. 268-270; "The Equivalence of Triangles and Three-Pointed Stars in Conducting Networks", *ibid.* (September 16, 1899), pp. 413-414.

En comparant 5.21 et 5.23 on déduit l'expression de r_3 en fonction des résistances R_k :

$$r_3 = \frac{R_1 R_2}{\Sigma} \quad (5.24)$$

puis, par permutation circulaire des indices :

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{\Sigma}, \quad r_2 = \frac{R_3 R_1}{\Sigma} \quad (5.25)$$

Ces relations définissent la transformation triangle \rightarrow étoile. Pour obtenir les expressions des résistances R_k en fonction des résistances r_k définissant la transformation inverse étoile \rightarrow triangle, notons que

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{R_1 R_2 R_3}{\Sigma} = r_1 R_1 = r_2 R_2 = r_3 R_3 \quad (5.26)$$

d'où, finalement,

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1}, \quad R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}, \quad R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_3} \quad (5.27)$$

5.10 Exemples d'applications

5.10.1 Application 1 : Le pont de Wheatstone¹⁰

Le dispositif du pont de Wheatstone est schématisé à la figure 5.12 (a). Il s'agit d'un instrument de mesure où un générateur de tension alimente un ensemble de quatre résistances montées comme indiqué, qui fut utilisé à l'origine pour effectuer des mesures sensibles de résistances.

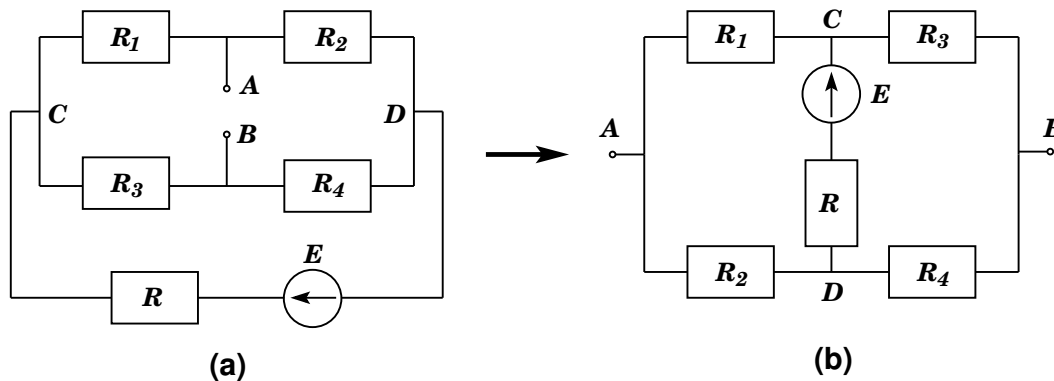


FIGURE 5.12 – Pont de Wheatstone-1

Entre les deux bornes A et B est généralement placé un détecteur de courant, galvanomètre ou microampèremètre. Nous montrerons plus loin que si les résistances satisfont la relation $R_1 R_4 = R_2 R_3$, il ne passe plus aucun courant dans la branche AB du détecteur. Le pont est alors dit *équilibré*. Cet effet est à la base d'une méthode de mesure d'une résistance inconnue, par exemple R_4 : R_1 et R_2 étant connues, il suffit de prendre pour R_3 un potentiomètre dont on ajustera

10. S. H. Christie, "The Bakerian Lecture : Experimental Determination of the Laws of Magneto-electric Induction in different masses of the same metal, and its intensity in different metals", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 123, 1833, pp. 95-142; C. Wheatstone, "The Bakerian Lecture : An Account of Several New Instruments and Processes for Determining the Constants of a Voltaic Circuit", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 133, 1843, pp. 303-327.

la résistance pour annuler le courant entre A et B , d'où la mesure de R_4 via la relation $R_4 = R_2 R_3 / R_1$.

D'un autre côté, à partir d'un équilibre du pont, toute perturbation de l'une des résistances, due à une cause quelconque extérieure (température, déformation,...), occasionne l'apparition d'un courant dans la branche AB , et ceci peut être détecté par un instrument sensible placé dans cette branche.

Notre but ici est de trouver les caractéristiques du générateur de Thévenin (ou de Norton) équivalent au réseau entre les deux bornes A et B , comme schématisé à la figure 5.12 (b).

Pour ne pas perdre la symétrie du réseau entre sa partie gauche comportant R_1 et R_2 et sa partie droite comportant R_3 et R_4 , et ainsi mieux contrôler les calculs, nous utiliserons l'astuce suivante.

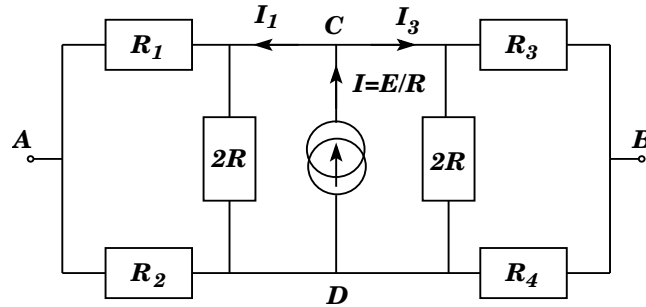


FIGURE 5.13 – Pont de Wheatstone-2

On sait que l'ensemble du générateur de tension parfait accompagné de la résistance R dans la branche CD peut être remplacé par un générateur parfait de courant d'intensité $I = E/R$, en parallèle avec la résistance R . Une dissymétrie pourrait alors apparaître si l'on associe cette résistance à une partie du réseau plutôt qu'à une autre. Une façon simple de l'éviter est de considérer que cette résistance résulte de l'association de deux résistances égales à $2R$ mises en parallèle, comme indiqué à la figure 5.13, et en associant symétriquement la même résistance $2R$ à chacune des parties. Dès lors, la partie gauche et la partie droite se présentent chacune comme une association de trois résistances montées en triangle, que l'on peut transformer en association en étoile comme indiqué à la figure 5.14, où

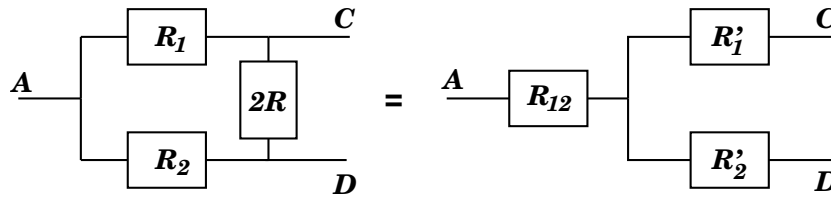


FIGURE 5.14 – Pont de Wheatstone-3

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{\sigma_{12}}, \quad R'_1 = \frac{2R R_1}{\sigma_{12}}, \quad R'_2 = \frac{2R R_2}{\sigma_{12}}, \quad \text{avec } \sigma_{12} = R_1 + R_2 + 2R \quad (5.28)$$

De façon symétrique, la transformation triangle-étoile pour la partie gauche donne

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{\sigma_{34}}, \quad R'_3 = \frac{2R R_3}{\sigma_{34}}, \quad R'_4 = \frac{2R R_4}{\sigma_{34}}, \quad \text{avec } \sigma_{34} = R_3 + R_4 + 2R \quad (5.29)$$

et l'on aboutit ainsi au schéma de la figure 5.15. A circuit extérieur AB ouvert, il ne passe aucun courant dans les résistances R_{12} et R_{34} et la différence de potentiel entre A et B peut être exprimée comme $V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_B = R'_3 I_3 - R'_1 I_1$.

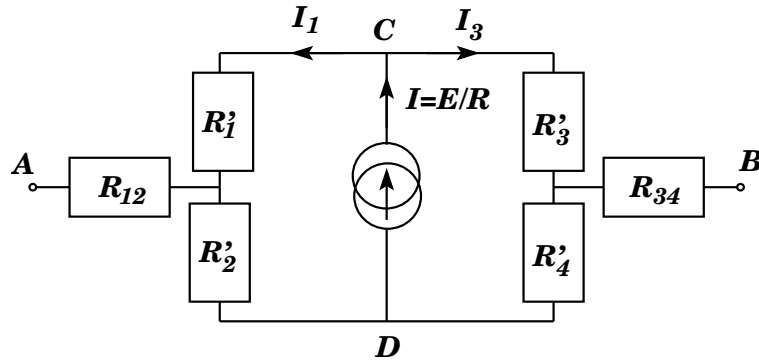


FIGURE 5.15 – Pont de Wheatstone-4

Or, $V_C - V_D = (R'_1 + R'_2)I_1 = (R'_3 + R'_4)I_3$ et $I = I_1 + I_3$, ce qui conduit à

$$I_1 = I \frac{R'_3 + R'_4}{\Sigma}, \quad I_3 = I \frac{R'_1 + R'_2}{\Sigma}, \quad \text{avec } \Sigma = R'_1 + R'_2 + R'_3 + R'_4 \quad (5.30)$$

et par suite, après des simplifications évidentes,

$$V_A - V_B = I \frac{R'_2 R'_3 - R'_1 R'_4}{\Sigma}, \quad \text{avec } R'_2 R'_3 - R'_1 R'_4 = 4R^2 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\sigma_{12} \sigma_{34}}$$

Posons alors

$$\sigma = \frac{1}{2R} \Sigma = \frac{R_1 + R_2}{\sigma_{12}} + \frac{R_3 + R_4}{\sigma_{34}}$$

et exprimons la différence de potentiel cherchée en fonction de la fem E . Il vient finalement

$$E_e = V_A - V_B = 2E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\sigma \sigma_{12} \sigma_{34}} \quad (5.31)$$

C'est la fem du générateur de Thévenin équivalent. Si l'on ouvre la branche CD (on débranche ainsi le générateur de courant), le dipôle AB obtenu se présente alors comme l'association en série de $R_{12} + R_{34}$ avec l'association en parallèle de $R'_1 + R'_3$ et $R'_2 + R'_4$, donnant la résistance équivalente cherchée

$$R_e = R_{12} + R_{34} + \frac{(R'_1 + R'_3)(R'_2 + R'_4)}{\Sigma} = R_{12} + R_{34} + 2R \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{\sigma} \quad (5.32)$$

Ces formules se simplifient grandement si l'on peut y négliger la résistance R . A la limite $R = 0$, on obtient ($\sigma = 2$)

$$E_e = E \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}, \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (5.33)$$

Ces dernières formules peuvent en fait être obtenues très simplement. En effet, en se référant à la figure 5.12 (a), on a, avec $V_C - V_D = E$,

$$V_C - V_A = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E, \quad V_C - V_B = \frac{R_3}{R_3 + R_4} E$$

soit

$$V_A - V_B = E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Ensuite, considérant la figure 5.12 avec $R = 0$ et dans laquelle on a éteint le générateur, on constate que, la branche CD étant un court-circuit, le dipôle devenu passif est l'association en série de deux associations en parallèle : la première avec R_1 et R_2 , la seconde avec R_3 et R_4 . Sa résistance est donc

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Les formules 5.31 et 5.33 montrent que, indépendamment de R , la fem E_e est nulle et donc le pont est équilibré lorsqu'est vérifiée la relation

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (5.34)$$

5.10.2 Application 2

Les théorèmes qui en principe ne s'appliquent qu'aux réseaux strictement linéaires peuvent néanmoins s'appliquer aussi à des réseaux comportant des composants non-linéaires, à condition que dans le domaine exploré de tensions et de courants, ces composants aient un comportement quasi-linéaire. En voici un exemple.

Dans le circuit de la figure 5.16, le dipôle D est une diode Zener dont la caractéristique est schématisée dans cette même figure.

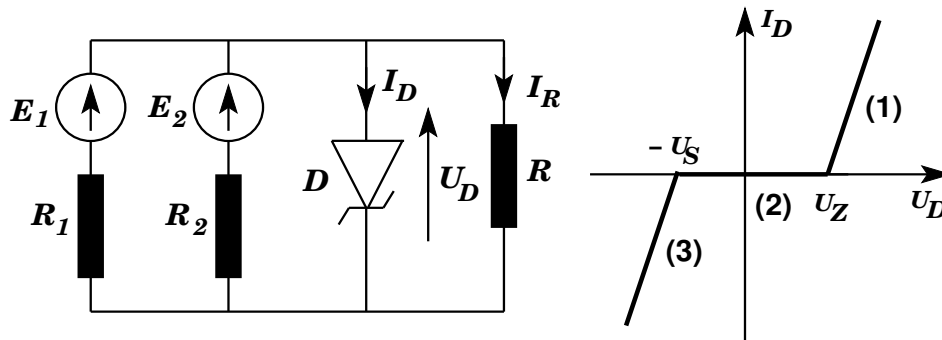


FIGURE 5.16 – Application 2

Nous voulons déterminer, en fonction des paramètres du réseau, l'intensité I_R du courant circulant dans la résistance R . Comme on a toujours $U_D = R I_R$, cela revient à trouver U_D . Pour ce faire, nous considérerons séparément les domaines (1), (2) et (3) indiqués dans la figure. Dans les domaines (1) et (3), les branches de la caractéristique $I_D = f(U_D)$ sont des droites. Nous supposerons que leurs pentes sont égales et noterons $1/r$ leur valeur commune, où r a la dimension d'une résistance.

- Domaine (1) : $U_D \geq U_Z$

On a ici

$$I_D = \frac{1}{r} (U_D - U_Z) \text{ , soit } U_D = U_Z + r I_D$$

Dans ce domaine, la diode se comporte donc comme l'association d'un générateur de tension parfait de fem U_Z , orienté comme indiqué à la figure 5.17 (1), en série avec une résistance r .

- Domaine (2) : $-U_S \leq U_D \leq U_Z$, $I_D = 0$

Ici, tout se passe comme si la branche de la diode était ouverte. On peut encore dire que le comportement de la diode équivaut à une résistance r infinie de la branche.

- Domaine (3) : $U_D \leq -U_S$

Dans ce domaine, on a

$$I_D = \frac{1}{r} (U_D + U_S) , \text{ soit } U_D = -(U_S - rI_D)$$

La diode se comporte ici comme l'association d'un générateur de tension parfait de fem U_S , orienté comme indiqué à la figure 5.17 (3), en série avec une résistance r .

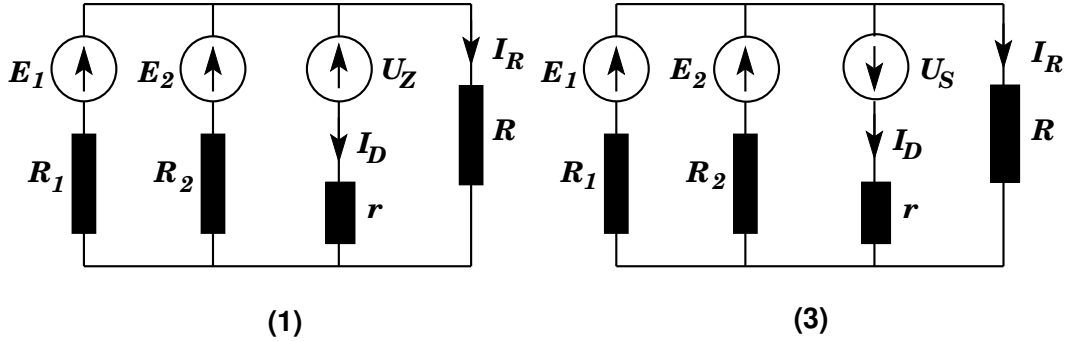


FIGURE 5.17 – Comportement de la diode Zener dans les domaines (1) et (3)

On voit donc que, bien que la diode Zener ne soit pas globalement un composant strictement linéaire, elle se comporte comme tel par morceaux. Au vu de la figure 5.17, il devient d'ailleurs évident que l'application du théorème de Millman fournit immédiatement la solution. On trouve ainsi :

- dans le domaine (1)

$$U_D = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2 + U_Z/r}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/r + 1/R} \quad (5.35)$$

- dans le domaine (3)

$$U_D = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2 - U_S/r}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/r + 1/R} \quad (5.36)$$

- dans le domaine (2)

$$U_D = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R} \quad (5.37)$$

car, comme nous l'avons dit, tout se passe dans ce domaine comme si r était infinie.

Bien entendu, chacune des expressions ci-dessus n'est réalisée que si la valeur qu'elle donne pour U_D tombe bien dans le domaine auquel elle doit correspondre¹¹, ce qui contraint donc pour chacune les paramètres du réseau.

11. Plus précisément, $U_D \geq U_Z$ pour le domaine (1), $-U_S \leq U_D \leq U_Z$ pour le domaine (2), $U \leq -U_S$ pour le domaine (3).

5.10.3 Application 3

A titre de comparaison des différentes méthodes de résolution des réseaux linéaires, considérons le montage de la figure 5.18, déjà étudié au chapitre 4 par la méthode matricielle.

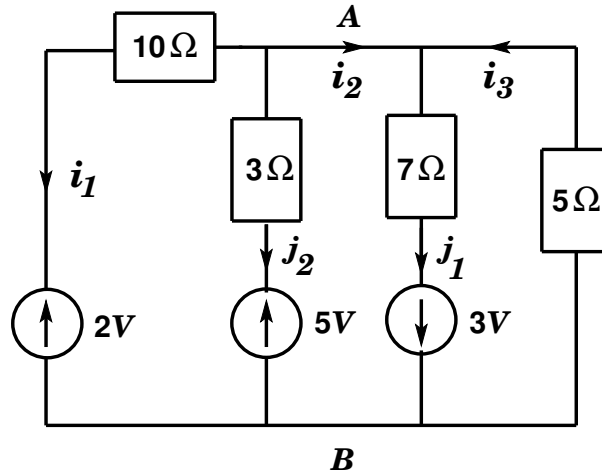


FIGURE 5.18 – Application 3

La grandeur essentielle à déterminer en premier pour ce réseau est la tension $U = V_A - V_B$. Le théorème de Millman nous fournit immédiatement la solution :

$$U = \frac{2/10 + 5/3 - 3/7}{1/10 + 1/3 + 1/7 + 1/5} = \frac{302}{163} \text{ V} \quad (5.38)$$

Il vient de suite

$$\begin{aligned} i_3 &= -U/5 = -\frac{302}{815} = -0,37 \text{ A} \\ j_1 &= (3 + U)/7 = \frac{791}{1141} \text{ A}, \quad i_2 = j_1 - i_3 = \frac{867}{815} = 1,0638 \text{ A} \\ i_1 &= (U - 2)/10 = -\frac{12}{815} = -1,4710^{-2} \text{ A} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les résultats du paragraphe 4.5.3, mais par une méthode plus rapide !

5.10.4 Application 4

Appliquons le théorème de Thévenin au calcul de l'intensité i du courant dans la branche AB du réseau de la figure 5.19 (a). L'idée est de remplacer la partie du réseau en dehors de ladite branche par un générateur de Thévenin équivalent.

Une fois la branche AB retirée du réseau, on voit apparaître dans la partie CAD une structure en triangle de trois résistances identiques R que l'on peut transformer en une structure en étoile de trois résistances $R/3$ pour aboutir au schéma de la figure 5.19 (b). Comme dans cette situation aucun courant ne passe entre A et B , la résistance entre O et A est inopérante et $V_O = V_A$. Ici encore, le théorème de Millman est d'un grand secours pour déterminer $V_O - V_B$:

$$V_O - V_B \equiv V_A - V_B = E_e = \frac{\frac{E_1}{4R/3} + \frac{E_2}{R/3}}{\frac{3}{4R} + \frac{1}{R}} = \frac{E_1 + 4E_2}{5} \quad (5.39)$$

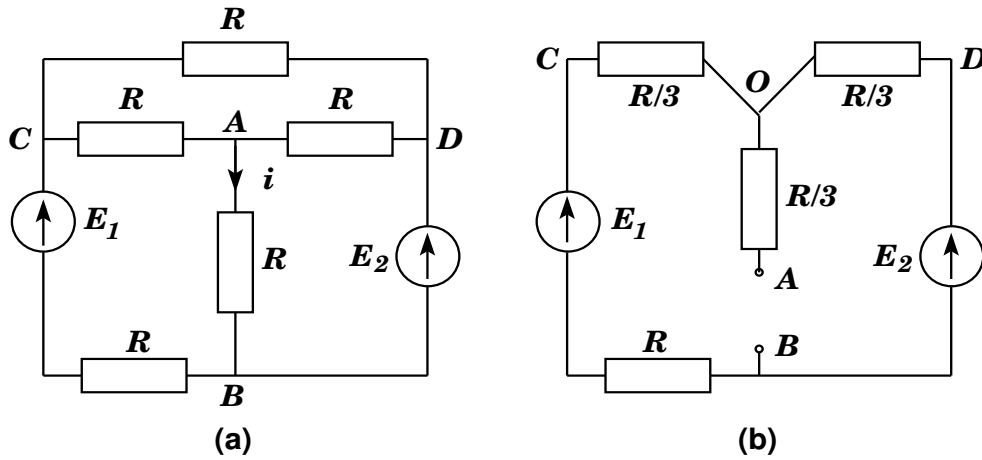


FIGURE 5.19 – Application 4-1

qui représente la fem du générateur de Thévenin équivalent. Il reste à déterminer la résistance interne R_e de ce générateur. Celle-ci est obtenue après avoir éteint les fem des générateurs dans la figure 5.19 (b), ce qui donne la figure 5.20. D'où

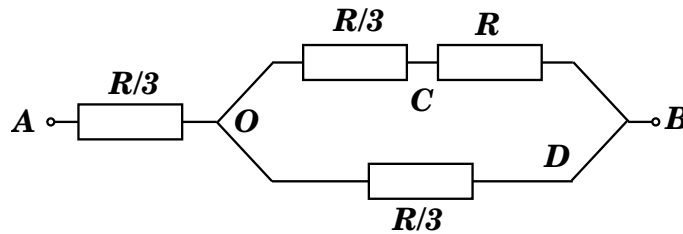


FIGURE 5.20 – Application 4-2

$$R_e = \frac{R}{3} + \left(\frac{3}{R} + \frac{1}{R/3 + R} \right)^{-1} = \frac{3R}{5} \quad (5.40)$$

On en déduit

$$i = \frac{E_e}{R + R_e} = \frac{E_1 + 4E_2}{8R} \quad (5.41)$$

Notons ici que la relation 5.39 peut également être obtenue tout aussi rapidement de la façon suivante.

En considérant le réseau de la figure 5.19 (a) une fois enlevée la branche AB , la résistance équivalente de l'association entre C et D est

$$R' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \frac{2R}{3}$$

d'où la différence de potentiel

$$V_C - V_D = \frac{2R}{3} \frac{E_1 - E_2}{R + 2R/3} = \frac{2}{5}(E_1 - E_2)$$

Or

$$V_C - V_A = V_A - V_D = \frac{1}{2}(V_C - V_D) = \frac{E_1 - E_2}{5}$$

et comme $V_D - V_B = E_2$, il vient

$$V_A - V_B = V_A - V_D + V_D - V_B = \frac{E_1 + 4E_2}{5}$$