

# Chapitre 7

## Régimes transitoires et régimes permanents variables

Dans ce chapitre, tous les régimes variables envisagés seront supposés vérifier l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) pour laquelle les lois de Kirchoff peuvent encore s'appliquer<sup>1</sup>.

### 7.1 Charge d'un condensateur

#### 7.1.1 Equation d'évolution de la charge

Relions les deux bornes  $A$  et  $B$  d'un condensateur initialement déchargé à celles,  $A'$  et  $B'$ , d'un générateur de fem constante  $E$  et de résistance interne  $r$  (figure 7.1).

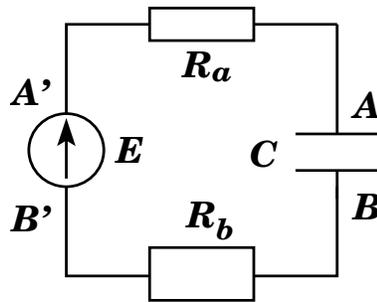


FIGURE 7.1 – Opération de charge d'un condensateur

Comme l'armature  $A$  est portée à un potentiel supérieur à celui de  $B$ , les électrons de conduction du circuit se mettent en mouvement de  $A$  vers  $B$  par les fils de liaison. Au cours du temps, il se crée alors un défaut d'électrons sur l'armature  $A$  et un excès d'électrons sur l'armature  $B$ . Ce transfert de charges cesse lorsque  $V_A = V_{A'}$  et  $V_B = V_{B'}$ . On a alors  $V_A - V_B = V_{A'} - V_{B'} = E$  et l'on dit que le condensateur est chargé. La charge  $Q_A$  de l'armature  $A$  dans cet état final est

$$Q_A = C(V_A - V_B) = CE \quad (7.1)$$

$C$  étant la capacité du condensateur.

Décrivons plus en détail le transfert de charges au cours du temps. Désignons par  $Q(t)$  la charge de l'armature  $A$  à la date  $t$  et  $i(t)$  le débit de charges positives de  $A'$  vers  $A$ . Il y a aussi un

1. Au premier chef, la loi des noeuds  $\sum_k' i_k = 0$ .

courant de  $B$  vers  $B'$  de même intensité, en vertu de la conservation de la charge. On a

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (7.2)$$

Or

$$V_A - V_B = Q/C = V_A - V_{A'} + V_{A'} - V_{B'} + V_{B'} - V_B \quad (7.3)$$

soit

$$Q/C = E + V_A - V_{A'} + V_{B'} - V_B \quad (7.4)$$

puisque  $E = V_{A'} - V_{B'}$ . D'autre part, la loi d'Ohm appliquée aux fils  $AA'$  et  $BB'$  de résistances  $R_a$  et  $R_b$  respectivement donne  $V_A - V_{A'} = R_a i$ ,  $V_B - V_{B'} = R_b i$  d'où

$$Q/C = E - R i \quad (7.5)$$

avec  $R = R_a + R_b$ . On aboutit ainsi à l'équation différentielle

$$Q/C + R \frac{dQ}{dt} = E \quad (7.6)$$

Posons  $\tau = RC$  et faisons le changement de fonction :  $y = Q - CE$ . Il vient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dt} = (E - Q/C)/R = -y/\tau \quad (7.7)$$

D'où

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\tau} \quad (7.8)$$

et après intégration

$$\log y = -t/\tau + \log y_0 \quad (7.9)$$

$y_0$  étant une constante d'intégration. Ainsi  $y = y_0 \exp(-t/\tau)$  et

$$Q(t) = CE + y_0 \exp(-t/\tau) \quad (7.10)$$

La condition initiale  $Q(0) = 0$  nous permet ensuite d'ajuster la constante  $y_0$  aux conditions de l'expérience de la charge. Il vient  $y_0 = -CE$ , d'où

$$Q(t) = CE(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (7.11)$$

On observe que la charge  $Q(t)$  tend bien vers  $CE$  lorsque  $t$  devient très grand par rapport à  $\tau = RC$ . Cette valeur de la charge n'est obtenue qu'au bout d'un temps  $t$  théoriquement infini. En pratique,  $Q(t)$  ne diffère de  $CE$  que pendant un *régime transitoire* dont la durée peut être très courte. Prenant par exemple  $R = 100 \Omega$  et  $C = 10 \mu\text{F}$ , on obtient  $\tau = 3 \text{ms}$  :  $Q(t)$  approche la valeur  $CE$  à moins de 5% au bout de  $t \sim 3\tau \sim 10^{-2} \text{s}$ . Le courant de charge est donné par

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} \exp(-t/\tau) \quad (7.12)$$

Il tend vers zéro lorsque  $t$  devient très grand par rapport à  $\tau$ . Cette grandeur  $\tau$  est ce qu'on appelle la *constante de temps* ou aussi *temps de réponse* d'un circuit  $R, C$  dont il caractérise la réaction à une excitation.

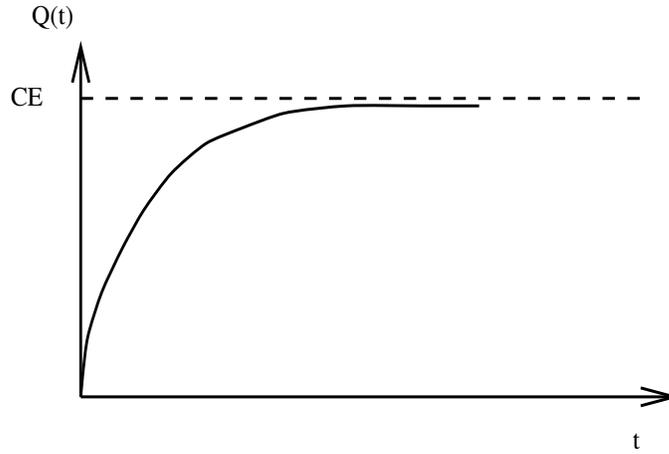


FIGURE 7.2 – Evolution de la charge du condensateur au cours du temps

A l'état d'équilibre, c'est-à-dire lorsque le condensateur est chargé, le transfert de charges a cessé, l'intensité du courant de charge est nulle. Donc, dans un régime continu *permanent*, c'est-à-dire établi, un condensateur est une interruption de circuit ; on dit aussi que c'est un *coupe-circuit*. En revanche, comme nous venons de le voir, en régime transitoire variable, on a un transfert de charge et le condensateur n'est alors plus un coupe-circuit.

### 7.1.2 Energie emmagasinée par un condensateur

Au stockage de charges dans un condensateur est associé un stockage d'énergie. En effet, la puissance électrique fournie au condensateur est

$$P_c(t) = V(t)i(t) = (Q/C)\frac{dQ}{dt} \quad (7.13)$$

et le travail électrique fourni au condensateur jusqu'à ce qu'il soit chargé est

$$W_c = \int_0^\infty P_c(t)dt = \int_0^\infty (Q/C)\frac{dQ}{dt}dt \quad (7.14)$$

soit

$$W_c = (1/C) \int_0^{Q_A} QdQ = Q_A^2/(2C) = CE^2/2 \quad (7.15)$$

Or, lorsqu'on déconnecte du générateur le condensateur chargé, les charges sur les armatures restent en place et l'énergie  $W_c$  est toujours présente à l'intérieur du condensateur. C'est une énergie *potentielle* qui peut être récupérée en partie ou en tout par une décharge partielle ou totale du condensateur. Dans l'opération de charge, le générateur a fourni l'énergie

$$W_G = \int_0^\infty P_G(t)dt = \int_0^\infty Ei(t)dt = \int_0^{Q_A} EdQ = EQ_A = CE^2 \quad (7.16)$$

c'est-à-dire le double de l'énergie stockée dans le condensateur. Une énergie  $CE^2/2$  a donc été dissipée par effet Joule dans les fils de liaison lors de la charge. On peut le vérifier facilement : l'énergie dissipée par effet Joule est

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2(t)dt = (E^2/R) \int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = E^2\tau/(2R) = CE^2/2 \quad (7.17)$$

## 7.2 Etablissement du courant dans un circuit L,R

### 7.2.1 Equation d'évolution du courant

Considérons le montage de la figure 7.3. Aux bornes d'une bobine de coefficient d'auto-induction  $L$  et de résistance  $R$  parcourue par un courant d'intensité variable  $i(t)$ , on a  $V_B - V_A = \mathcal{E} - Ri$ , et donc

$$V_A - V_B = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (7.18)$$

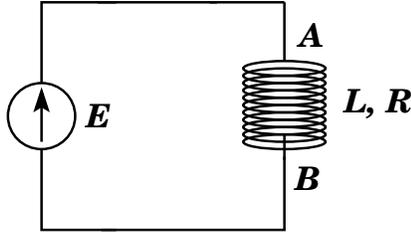


FIGURE 7.3 – Opération de “charge” d’une bobine

Si cette bobine est reliée à un générateur de tension de fem constante  $E$  et de résistance interne négligeable, on a  $V_A - V_B = E$ . D’où l’équation

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (7.19)$$

qui est une équation différentielle similaire à celle rencontrée dans l’étude de la charge du condensateur. La solution en est de la forme

$$i = E/R + i_0 \exp(-t/\tau) \quad (7.20)$$

avec  $\tau = L/R$ , constante de temps du circuit  $L, R$ . La constante  $i_0$  doit être ajustée selon les conditions de l’expérience. Supposons le branchement de la bobine au générateur effectué à la date  $t = 0$ . Avant branchement il n’y avait pas de courant et donc  $i(0) = 0$ . Il vient alors  $i_0 = -E/R$  et

$$i(t) = (E/R)(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (7.21)$$

On en déduit les courbes suivantes

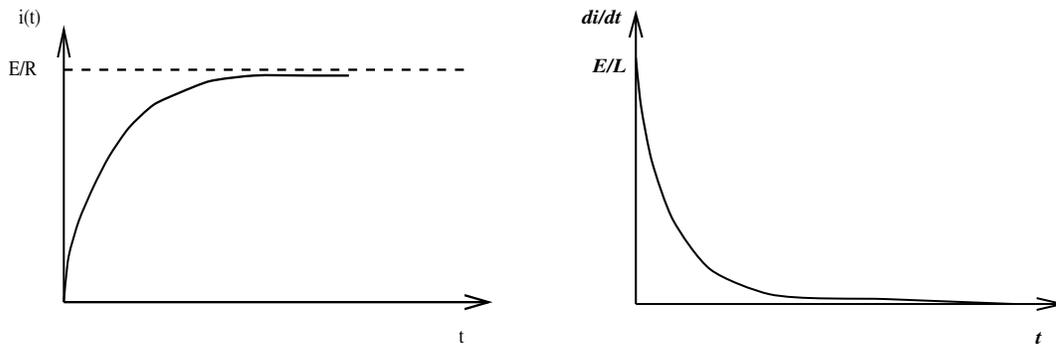


FIGURE 7.4 – Evolution du courant et de sa dérivée lors de la charge de la bobine

2. Ici, on considère la bobine comme un électromoteur et on lui applique la loi de Pouillet en tenant compte de l’orientation du courant, supposé aller de  $A$  vers  $B$ .

Ces courbes montrent bien l'effet de l'auto-induction. En l'absence de celle-ci, on verrait l'intensité du courant passer brusquement de la valeur 0, qui était sa valeur avant branchement aux bornes du générateur, à la valeur  $E/R$ , obtenue une fois le branchement effectué, ceci sur un laps de temps nul, c'est-à-dire que l'on observerait une discontinuité du courant dans le temps. L'auto-induction interdit une telle discontinuité et retarde l'établissement de cette valeur finale. On observe ainsi un régime transitoire dont la durée peut être estimée à l'aide du paramètre  $\tau = L/R$  qui représente pour ce circuit ( $L, R$ ) son temps de réponse. Il peut être très court : si  $L = 0,1$  H, et  $R = 100 \Omega$ , on obtient  $\tau \sim 1$  ms.

Il est intéressant d'étudier l'évolution de la courbe de la figure 7.4 lorsque  $L$  devient de plus en plus petit : la partie de la courbe correspondant au régime transitoire se rapproche de plus en plus de l'axe  $t = 0$ , c'est-à-dire à mesure que la durée de ce régime devient de plus en plus courte. A l'extrême limite  $L \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat classique :  $i(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $i(t) = E/R$  pour  $t > 0$ , avec une discontinuité apparente à  $t = 0$ . Cependant, ce résultat classique n'est qu'un piètre modèle de la réalité car cette discontinuité du courant est inexistante physiquement. C'est justement la prise en compte du phénomène d'auto-induction qui permet d'obtenir une meilleure description de la réalité.

## 7.2.2 Energie magnétique

La puissance électrique développée dans la bobine est  $P_B(t) = V(t)i(t)$  avec  $V(t) = V_A - V_B = E$ . C'est aussi la puissance fournie par le générateur. Elle comprend une partie  $Ri^2$  dissipée par effet Joule et une partie  $iL \frac{di}{dt}$  correspondant à un stockage d'énergie magnétique dans la bobine, laquelle, depuis la date  $t = 0$  de fermeture du circuit jusque la date  $t$ , est donnée par

$$W_M = \int_0^t iL \frac{di}{dt} dt = Li^2(t)/2 \quad (7.22)$$

Cette énergie n'est pas emmagasinable à proprement parler car elle disparaît dès que le circuit est ouvert. Cependant, elle est restituée à ce moment d'une façon qui peut être violente (étincelle). On peut comparer cette énergie à l'énergie cinétique en Mécanique. Comme toute forme d'énergie, elle ne peut être discontinue (à l'échelle macroscopique). Par suite, la fonction  $i(t)$  est certainement une fonction continue de  $t$ . Ceci révèle le caractère inertiel du coefficient d'auto-induction  $L$  qui joue en Electricité un rôle analogue à celui de la masse en Mécanique.

## 7.3 Régimes transitoires du circuit R, L, C

### 7.3.1 Equation d'évolution

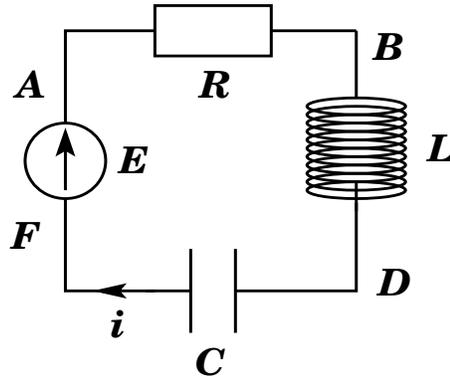
Envisageons le circuit de la figure 7.5 où une résistance  $R$ , une bobine de coefficient d'auto-induction  $L$  et un condensateur de capacité  $C$ , sont reliés, en série, à un générateur de tension de fem constante  $E$ . La résistance  $R$  peut inclure la résistance interne du générateur non parfait, celle de la bobine et celle des fils de liaison. Le condensateur est supposé parfait. A la date  $t = 0$ , le circuit est fermé.

La charge apparaissant sur l'armature  $D$  du condensateur sera notée  $Q$ . Nous supposons que le condensateur n'est pas chargé au moment de la fermeture du circuit. D'après la figure, on a

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Ecrivons

$$V_A - V_F = E, \quad V_A - V_B = Ri, \quad V_B - V_D = L \frac{di}{dt}, \quad V_D - V_F = \frac{Q}{C}$$


 FIGURE 7.5 – Circuit  $R, L, C$ 

d'où l'équation

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}, \text{ soit } L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \quad (7.23)$$

La fem  $E$  étant constante, on a intérêt à faire le changement de fonction  $q = Q - CE$ . La nouvelle fonction  $q$  satisfait l'équation du second ordre sans second membre

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \text{ avec } \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.24)$$

On sait que la résistance est un élément dissipatif et, comme nous l'avons vu précédemment, introduit dans les solutions des facteurs exponentiels décroissant avec le temps. Il est associé ici au facteur  $\alpha$  et à la dérivée première de la charge dans 7.24. Nous pouvons d'emblée tenir compte de cette décroissance en écrivant  $q(t)$  sous la forme

$$q(t) = e^{-\beta t} y(t) \quad (7.25)$$

et, en choisissant convenablement  $\beta$ , tenter d'éliminer le terme de dérivée première dans l'équation satisfaite par  $y(t)$ . On a<sup>3</sup>

$$\dot{q} = e^{-\beta t} (\dot{y} - \beta y), \quad \ddot{q} = e^{-\beta t} (\ddot{y} - 2\beta \dot{y} + \beta^2 y)$$

et l'on est conduit à l'équation

$$\ddot{y} + 2(\alpha - \beta) \dot{y} + (\beta^2 - 2\alpha\beta + \omega_0^2) y = 0 \quad (7.26)$$

Cette astuce permet effectivement d'éliminer le terme en  $\dot{y}$  en choisissant  $\beta = \alpha$  et l'on obtient finalement pour  $y$  l'équation

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = 0, \text{ avec } \Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \quad (7.27)$$

On doit prendre garde au fait que la grandeur  $\Omega^2$  n'est pas forcément positive et le type de solution pour  $y$  dépend de son signe. L'équation caractéristique de 7.27 est

$$\lambda^2 + \Omega^2 = 0$$

et trois cas sont à étudier séparément.

3. Pour simplifier l'écriture, nous utilisons maintenant la notation "point" (voir l'annexe).

### 7.3.2 Premier cas : $\Omega^2 > 0$ ( $\omega_0 > \alpha$ )

On a ici  $\lambda = \pm j\Omega$ , et la solution pour  $y$  est de type sinusoïdal avec la pulsation  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$y = A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t \quad (7.28)$$

les constantes  $A_1$  et  $B_1$  devant être ajustées aux conditions initiales  $Q(0) = 0$  et  $i(0) = 0$ . La première donne  $q(0) = y(0) = -CE$ , d'où  $A_1 = -CE$ . La seconde donne  $\dot{Q}(0) = \dot{q}(0) = 0 = \dot{y}(0) - \alpha y(0)$ , soit

$$B_1 = \frac{\alpha}{\Omega} A_1 = -\frac{\alpha}{\Omega} CE \quad (7.29)$$

et, finalement,

$$Q(t) = CE \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \Omega t + \frac{\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right\} \quad (7.30)$$

L'intensité du courant se déduit par dérivation de 7.30. On trouve

$$i(t) = CE \frac{\omega_0^2}{\Omega} e^{-\alpha t} \sin \Omega t \quad (7.31)$$

Ce régime, pour lequel l'amortissement est faible ou modéré ( $\alpha < \omega_0$ ), est celui des *oscillations amorties* : à la fermeture du circuit, l'ensemble  $R, L, C$  réagit par des oscillations qui sont amorties au fil du temps du fait de la dissipation d'énergie dans la résistance  $R$ . La charge du condensateur augmente jusqu'à atteindre la valeur limite  $Q_{\text{final}} = CE$ , théoriquement au bout d'un temps infini mais en fait dès que  $t \gg 1/\alpha$  : le condensateur est alors chargé et il n'y a plus de courant.

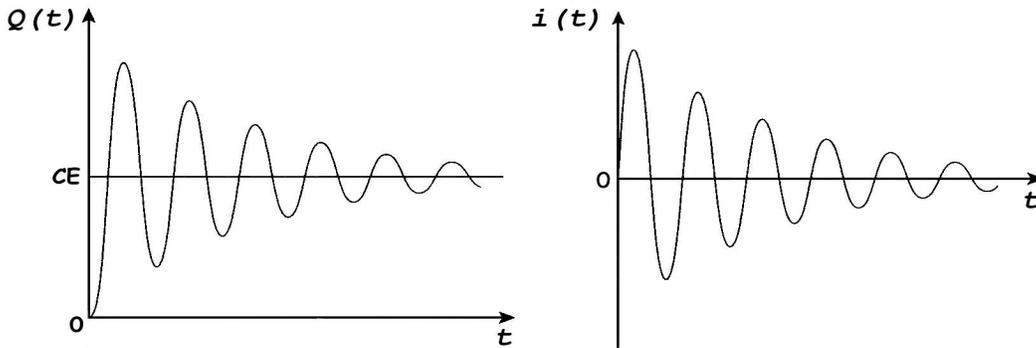


FIGURE 7.6 – Evolution de la charge et de l'intensité dans le cas 1

Les évolutions au cours du temps de la charge du condensateur et de l'intensité du courant de charge sont représentées qualitativement à la figure 7.6.

### 7.3.3 Deuxième cas : $\Omega = 0$ ( $\alpha = \omega_0$ )

Dans ce cas, la résolution de 7.27 est immédiate et donne pour  $y$  une fonction affine de  $t$  :

$$y = A_2 t + B_2 \quad (7.32)$$

et l'application des conditions initiales donne  $B_2 = -CE$ ,  $A_2 = \alpha B_2 = -\alpha CE$ . On trouve maintenant

$$Q(t) = CE \{1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t)\}, \quad i(t) = CE \omega_0^2 t e^{-\alpha t} \quad (7.33)$$

L'amortissement est ici plus important et la réaction se fait sans oscillation : on dit qu'il est *apériodique*. En outre, ce cas est dit *critique* car il correspond à un changement de signe de  $\Omega^2$ . On montre qu'en fait c'est le régime pour lequel la charge du condensateur se fait le plus rapidement. La valeur correspondante de la résistance :

$$R = R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.34)$$

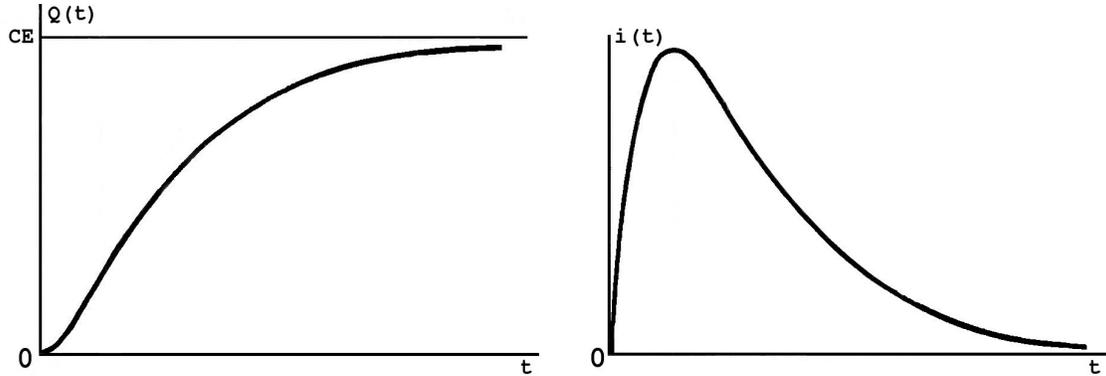


FIGURE 7.7 – Evolution de la charge et de l'intensité dans le cas 2

est appelée *résistance critique*. Les évolutions au cours du temps de la charge du condensateur et de l'intensité du courant de charge sont représentées qualitativement à la figure 7.7. Pour  $t = 1/\alpha$ , l'intensité passe par un maximum et la charge présente un point d'inflexion.

### 7.3.4 Troisième cas : $\Omega^2 < 0$ ( $\omega_0 < \alpha$ )

L'amortissement est ici encore plus important. Posons

$$\Omega^2 = -\chi^2, \quad \text{avec } \chi = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

L'équation caractéristique  $\lambda^2 - \chi^2$  donnant les deux solutions réelles  $\lambda = \pm\chi$  conduit à des solutions de type hyperbolique :

$$y = A_3 \cosh \chi t + B_3 \sinh \chi t \quad (7.35)$$

A nouveau, le régime est apériodique. Les courbes d'évolution de la charge et de l'intensité du courant de charge en fonction du temps sont similaires à celles de la figure 7.7, à ceci près qu'elles sont plus étirées parallèlement à l'axe des temps, du fait d'un plus fort amortissement. Compte tenu des conditions initiales on a maintenant

$$Q(t) = CE \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cosh \chi t + \frac{\alpha}{\chi} \sinh \chi t \right) \right\}, \quad i(t) = CE e^{-\alpha t} \frac{\omega_0^2}{\chi} \sinh \chi t \quad (7.36)$$

### 7.3.5 Remarques

① Bien entendu, les résultats précédents peuvent être obtenus par application directe de la méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants décrite en annexe, en résolvant d'emblée l'équation caractéristique de l'équation 7.24, soit

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (7.37)$$

donnant les solutions

a)  $\lambda = -\alpha \pm j\Omega$  si  $\omega_0 > \alpha$ , correspondant au régime d'oscillations amorties décrites par 7.30 et 7.31 ;

b)  $\lambda = -\alpha \pm \chi$  si  $\omega_0 < \alpha$ , correspondant au régime apériodique décrit par 7.36 ;

c) le cas  $\Omega = 0$ , donnant une unique solution de l'équation caractéristique, sort du cadre de la méthode exposée en annexe où l'on supposait les solutions toutes distinctes, et requiert donc un traitement particulier. Cela a pu être fait au paragraphe ②, grâce à l'astuce 7.25., mais il existe pour ce cas une méthode générale que le lecteur pourra trouver dans des ouvrages de mathématiques traitant du sujet. Notons aussi que les solutions 7.33 peuvent être déduites comme limite de 7.30 ou de 7.36 en faisant tendre  $\alpha$  vers  $\omega_0$ , ce qui peut être aisément vérifié.

② Selon le modèle couramment utilisé, l'opération de charge d'un condensateur est régie par l'équation différentielle du *premier ordre* 7.6 dont la solution mathématique 7.10 dépend d'une seule constante  $y_0$ . Comme d'habitude, cette constante est ajustée au protocole de l'expérience, pour lequel la charge initiale du condensateur a une certaine valeur, ici égale à zéro. On en déduit ainsi la loi horaire 7.11 puis l'intensité du courant de charge 7.12. A  $t = 0^+$ , juste après fermeture du circuit, le modèle prévoit une valeur non nulle du courant :

$$i(0^+) = \frac{E}{R}$$

Mais nous savons que ceci ne peut être vrai car, avant que ne se déclenche la charge, aucun courant ne circulait dans le circuit. L'intensité du courant était nulle pour  $t < 0$  et comme c'est une fonction continue du temps, elle doit aussi être nulle pour  $t = 0$ . En fait, le phénomène ignoré dans ce modèle est l'auto-induction du circuit de raccordement des deux bornes du condensateur. Aussi petit soit le coefficient d'auto-induction  $L$  de ce circuit, il doit jouer un rôle essentiel à  $t = 0$  pour assurer la continuité de l'intensité du courant. Détaillons ici cet effet.

En tenant compte de la force électromotrice d'auto-induction du circuit, l'équation d'évolution de la charge devient 7.23, et cette fois nous disposons d'une équation différentielle du *second ordre*, dont la solution générale dépend de *deux constantes*. Cette circonstance permet maintenant ce qu'il était impossible de faire avec l'équation du premier ordre précédente, à savoir, non seulement ajuster la solution générale à la condition initiale  $Q(0) = 0$ , mais aussi *imposer* la seconde condition  $i(0) = 0$  !

Puisque  $L$  est supposé très petit, on a très certainement  $\frac{R^2}{4L^2} \gg \frac{1}{LC}$ , soit  $\alpha \gg \omega_0$ , et l'on se trouve dans le cas étudié au paragraphe ③ plus haut pour lequel les solutions sont données par 7.36. Ici, on peut faire l'approximation

$$\chi \approx \alpha - \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC} \quad (7.38)$$

d'où

$$i(t) \simeq CE \frac{\omega_0^2}{2\alpha} e^{-\alpha t} \{e^{\chi t} - e^{-\chi t}\} \simeq \frac{E}{R} \left\{ e^{-t/\tau_{RC}} - e^{-t/\tau_{LR}} \right\} \quad (7.39)$$

avec  $\tau_{RC} = RC$ ,  $\tau_{LR} = \frac{L}{R}$

expression où apparaissent deux constantes de temps : l'une,  $\tau_{RC}$  est celle d'un circuit condensateur-résistance sans inductance ; l'autre,  $\tau_{LR}$  est celle d'un circuit inductance-résistance, sans condensateur. La condition de l'approximation ci-dessus se traduit maintenant par

$$\tau_{RC} \gg \tau_{LR} \quad (7.40)$$

révélant clairement que l'effet de l'auto-induction se produit dans un laps de temps beaucoup plus court que celui de la charge proprement dite, immédiatement après le début de l'expérience. L'effet de l'auto-induction apparaît clairement dans l'expression 7.39 de  $i(t)$ . Il intervient par le facteur exponentiel  $e^{-t/\tau_{LR}}$  qui s'oppose au facteur exponentiel  $e^{-t/\tau_{RC}}$  du modèle usuel de charge du condensateur. A  $t = 0$ , ces deux facteurs se compensent et l'intensité est bien nulle. Tant que  $t$  n'est pas trop grand devant  $\tau_{LR}$ , le facteur d'auto-induction  $e^{-t/\tau_{LR}}$  est toujours compétitif par rapport à  $e^{-t/\tau_{RC}} \approx 1$ . Dans cet intervalle de temps, l'intensité croît rapidement pour atteindre une valeur maximum très voisine de  $E/R$  qui est la valeur initiale attribuée à l'intensité dans le modèle usuel. Par exemple, si  $\tau_{RC}/\tau_{LR} = 10^4$ , cette valeur maximum est atteinte à la date  $t_M \approx 9\tau_{LR}$ . A partir de cette date, le facteur  $e^{-t/\tau_{LR}}$  devient complètement négligeable devant  $e^{-t/\tau_{RC}}$  : dès lors, les variations de l'intensité ne sont plus suffisamment violentes pour que l'auto-induction puisse encore jouer un rôle appréciable. On retrouve alors l'expression classique 7.12 de l'intensité.

Le traitement usuel de l'opération de charge du condensateur revient donc à ignorer le phénomène d'auto-induction qui se déroule dans un laps de temps très court après que les deux bornes du condensateur aient été reliées au générateur de tension. L'exemple étudié ici illustre bien le fait que, même dans un circuit où des composants inductifs clairement identifiés (comme des bobines de coefficients d'auto-induction appréciables) sont absents, l'auto-induction n'en est pas moins toujours présente et se révèle pleinement comme phénomène modérateur, dès lors que le courant subit des variations temporelles rapides (régimes de très haute fréquence), voire violentes (ouverture ou fermeture d'un interrupteur), et doit alors être prise en compte dans une description complète des phénomènes associés.

## 7.4 Régimes permanents variables

### 7.4.1 Circuit $R, C$

Considérons à nouveau le montage dédié à l'opération de charge d'un condensateur (figure 7.8), mais en prenant cette fois un générateur dont la fem  $E(t)$  est variable dans le temps. La date de fermeture du circuit est  $t = 0$ . Nous négligerons tout effet inductif du circuit.

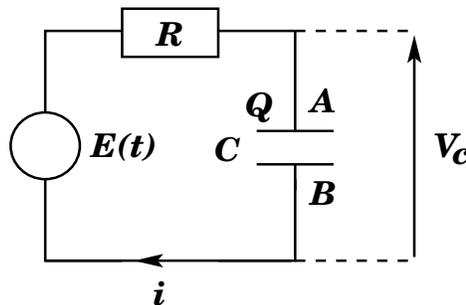


FIGURE 7.8 – Circuit  $(R, C)$  en régime forcé

L'équation d'évolution de la charge  $Q$  est maintenant

$$\frac{Q}{\tau} + \dot{Q} = \frac{E(t)}{R} \quad (7.41)$$

avec cette fois un second membre dépendant du temps. D'après le paragraphe 7.4.2 en annexe, la solution générale de cette équation se présente sous la forme d'une somme

$$Q(t) = Q^{(0)}(t) + Q_p(t) \quad (7.42)$$

où  $Q^{(0)}(t)$  est une solution générale de l'équation homogène :

$$Q^{(0)}(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (7.43)$$

et  $Q_p(t)$  une solution particulière de l'équation complète, que l'on peut prendre sous la forme

$$Q_p(t) = \frac{1}{R} \int_0^t E(s) e^{(s-t)/\tau} ds \quad (7.44)$$

Notons que cette séparation n'est pas unique et que la solution particulière peut toujours contenir elle-même une partie vérifiant l'équation homogène. Nous supposons ici que le signal  $E(t)$  délivré par le générateur est persistant. Le paramètre  $\tau = RC$  détermine en quelque sorte la "durée de vie" de  $Q^{(0)}$  et permet de séparer l'évolution complète de la charge en deux épisodes :

- le premier, pouvant être défini par  $0 \leq t \leq$  quelques  $\tau$ , est un régime transitoire pendant lequel les deux termes de 7.42 sont du même ordre.
- le second, où  $t$  est suffisamment grand ( $\gg \tau$ ) pour que  $Q^{(0)}$  soit devenu négligeable et où la charge est donnée par une expression de  $Q_p(t)$  dont la forme est imposée par le type de variation temporelle de  $E(t)$  dans ce domaine. Cet épisode, qui est un régime forcé par ce signal excitateur  $E(t)$ , dure aussi longtemps que ce dernier. Comme nous l'avons vu, il s'agit d'un régime permanent *statique*, de durée infinie, si la fem imposée est constante. En revanche, si  $E(t)$  est une fonction périodique du temps, on a alors affaire à un régime permanent *variable*, dont la durée est aussi infinie.

### ① Régime forcé par un signal en créneaux

En première illustration, nous étudierons le comportement du circuit ( $R, C$ ) excité par le signal périodique en créneaux représenté à la figure 7.9 ;  $T$  en représente la période.

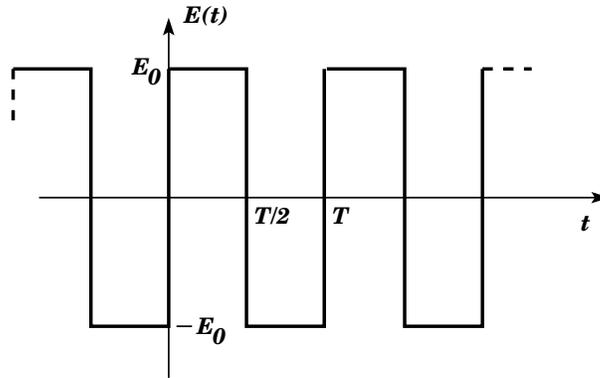


FIGURE 7.9 – Signal en créneaux

Si l'on tient compte de la condition initiale  $Q(0) = 0$ , le terme  $Q^{(0)}$  dans 7.42 s'annule strictement si l'on prend  $Q_p$  sous la forme 7.44.

 Envisageons  $t$  dans l'intervalle  $NT \leq t \leq (N + 1)T$ , avec  $N \gg 1$ . On a

$$Q(t) = \frac{1}{R} e^{-t/\tau} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \int_{pT}^{(p+1)T} E(s) e^{s/\tau} ds + \int_{NT}^t E(s) e^{s/\tau} ds \right\}$$

Or, par le changement de variable  $s = pT + s'$  et en tenant compte de la périodicité de  $E(t)$ ,

$$\int_{pT}^{(p+1)T} E(s)e^{s/\tau} ds = e^{pT} \int_0^T E(s' + pT)e^{s'/\tau} ds' = e^{pT} \int_0^T E(s)e^{s/\tau} ds$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^{N-1} \int_{pT}^{(p+1)T} E(s)e^{s/\tau} ds = \mathcal{J}_1 \sum_{p=0}^{N-1} e^{pT/\tau}, \quad \text{avec } \mathcal{J}_1 = \int_0^T E(s)e^{s/\tau} ds$$

Comme

$$\sum_{p=0}^{N-1} e^{pT/\tau} = e^{(N-1)T/\tau} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-pT/\tau} = e^{(N-1)T/\tau} \frac{1 - e^{-NT/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} = e^{NT/\tau} \frac{1 - e^{-NT/\tau}}{e^{T/\tau} - 1}$$

il vient

$$e^{-t/\tau} \sum_{p=0}^{N-1} \int_{pT}^{(p+1)T} E(s)e^{s/\tau} ds = e^{-t'/\tau} \frac{\mathcal{J}_1}{e^{T/\tau} - 1}$$

où l'on a posé  $t' = t - NT$  et où le terme infinitésimal  $e^{-NT/\tau}$  a été négligé. Calculons  $\mathcal{J}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= E_0 \left\{ \int_0^{T/2} e^{s/\tau} ds - \int_{T/2}^T e^{s/\tau} ds \right\} = E_0 \tau \left\{ e^{T/(2\tau)} - 1 - e^{T/\tau} + e^{T/(2\tau)} \right\} \\ &= -E_0 \tau \left( e^{T/(2\tau)} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$e^{-t/\tau} \sum_{p=0}^{N-1} \int_{pT}^{(p+1)T} E(s)e^{s/\tau} ds = -E_0 \tau e^{-t'/\tau} \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1}$$

• Maintenant, si  $NT \leq t \leq NT + T/2$ , soit  $0 \leq t' \leq T/2$ , on a

$$e^{-t/\tau} \int_{NT}^t E(s)e^{s/\tau} ds = \tau E_0 \left\{ 1 - e^{-t'/\tau} \right\}$$

et par suite

$$Q(t) = CE_0 \left\{ 1 - e^{-t'/\tau} - e^{-t'/\tau} \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1} \right\} \quad (7.45)$$

Les valeurs trouvées pour la charge à  $t' = 0$  et  $t' = T/2$  sont respectivement

$$Q_0 = -CE_0 \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1}, \quad \text{et } Q_{1/2} = CE_0 \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1} = -Q_0 \quad (7.46)$$

• Pour  $NT + T/2 \leq t \leq (N+1)T$  ou  $T/2 \leq t' \leq T$ , on a

$$e^{-t/\tau} \int_{NT}^t E(s)e^{s/\tau} ds = E_0 \left\{ \int_{NT}^{NT+T/2} + \int_{NT+T/2}^t \right\} = \tau E_0 \left\{ e^{-t'/\tau} (e^{T/2\tau} - 1) - 1 + e^{-t'/\tau} e^{T/(2\tau)} \right\}$$

$$= \tau E_0 \left\{ 2e^{-t'/\tau} e^{T/(2\tau)} - e^{-t'/\tau} - 1 \right\}$$

On en déduit pour cet intervalle l'expression

$$Q(t) = CE_0 \left\{ 2e^{-t'/\tau} e^{T/(2\tau)} - e^{-t'/\tau} - 1 - e^{-t'/\tau} \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1} \right\} \quad (7.47)$$

On vérifie que pour  $t' = T/2$  et  $t' = T$  elle prend respectivement les valeurs

$$Q'_{1/2} = Q_{1/2}, \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_0 \quad (7.48)$$

♣ On en conclut qu'en régime permanent, la charge évolue périodiquement entre les deux valeurs opposées  $-Q_{1/2}$  et  $+Q_{1/2}$ . Posons

$$a = \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1}, \quad \text{et donc} \quad e^{T/(2\tau)} = \frac{1+a}{1-a}$$

On a donc, tous calculs faits :

$$Q(t' + NT) = CE_0 \left\{ 1 - (1+a)e^{-t'/\tau} \right\}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq t' \leq T/2 \quad (7.49)$$

et

$$Q(t' + NT) = CE_0 \left\{ (1+a)e^{-(t'-T/2)/\tau} - 1 \right\}, \quad \text{pour} \quad T/2 \leq t' \leq T \quad (7.50)$$

♣ Les calculs précédents, bien que très instructifs, sont néanmoins fastidieux. Une méthode plus élégante pour trouver les résultats 7.49 et 7.50 est la suivante.

Dans l'intervalle  $0 \leq t' \leq T/2$ , l'équation différentielle 7.41 prend la forme

$$\frac{Q}{\tau} + \dot{Q} = E_0$$

et l'on écrit la solution comme

$$Q = CE_0 + A e^{-t'/\tau}$$

Fixons la constante  $A$  en posant  $Q = Q_0$  pour  $t' = 0$ . Donc  $A = Q_0 - CE_0$  et

$$Q = CE_0 + (Q_0 - CE_0) e^{-t'/\tau} \quad (7.51)$$

Pour  $T/2 \leq t' \leq T$ , l'équation différentielle devient

$$\frac{Q}{\tau} + \dot{Q} = -E_0$$

et a pour solution

$$Q = -CE_0 + B e^{-(t'-T/2)/\tau} \quad (7.52)$$

La constante  $B$  peut être ajustée en écrivant que les expressions 7.51 et 7.52 doivent coïncider à  $t' = T/2$  :

$$CE_0 + (Q_0 - CE_0) e^{-T/(2\tau)} = -CE_0 + B, \quad \text{donc} \quad B = 2CE_0 + (Q_0 - CE_0) e^{-T/(2\tau)}$$

Le point fort maintenant est de dire que  $Q(t)$  doit être périodique et reprendre à  $t = (N + 1)T$  ( $t' = T$ ) la valeur  $Q_0$  prise à  $t = NT$  ( $t' = 0$ ) :

$$Q_0 = -CE_0 + Be^{-T/(2\tau)} = -CE_0 + 2CE_0e^{-T/(2\tau)} + (Q_0 - CE_0)e^{-T/\tau}$$

d'où

$$Q_0 = -CE_0 \frac{e^{T/(2\tau)} - 1}{e^{T/(2\tau)} + 1}$$

Pour  $t' = T/2$  on obtient  $Q_{1/2} = CE_0 + (Q_0 - CE_0)e^{-T/(2\tau)}$ , soit

$$Q_{1/2} = -Q_0$$

Il vient ensuite

$$A = Q_0 - CE_0 = -CE_0(1+a), \quad B = CE_0 \left\{ 2 - (1+a)e^{-T/(2\tau)} \right\} = CE_0 \{ 2 - (1-a) \} = CE_0(1+a)$$

d'où, immédiatement, 7.49 et 7.50.

## ② Circuit intégrateur

Les variations de  $Q(t)$  en régime permanent sont représentées à la figure 7.10.

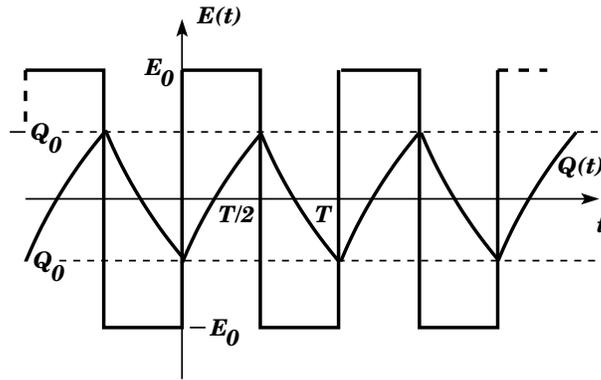


FIGURE 7.10 – Réponse en régime permanent du circuit  $(R, C)$  à un signal en créneaux

Envisageons le cas où  $T$  est petit devant  $\tau$ . On peut alors faire les approximations

$$e^{-t'/\tau} \simeq 1 - \frac{t'}{\tau}, \quad a \simeq \frac{T}{4\tau}$$

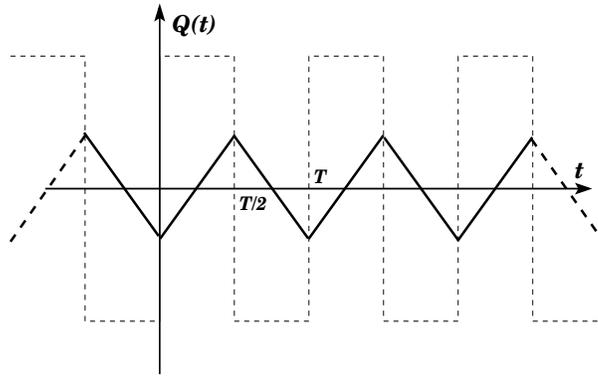
Les résultats 7.49 et 7.50 deviennent alors<sup>4</sup>

$$Q(t' + NT) = \frac{E_0}{R} \left\{ t' - \frac{T}{4} \right\}, \quad \text{pour } 0 \leq t' \leq \frac{T}{2} \quad (7.53)$$

et

$$Q(t' + NT) = \frac{E_0}{R} \left\{ \frac{3T}{4} - t' \right\}, \quad \text{pour } \frac{T}{2} \leq t' \leq T \quad (7.54)$$

4. Le vérifier.


 FIGURE 7.11 – Circuit  $(R, C)$  en intégrateur d'un signal en créneaux

Autrement dit, la charge est alors, par morceaux, une fonction affine de  $t'$ . Or, une telle fonction est la primitive d'une constante et, précisément  $E(t)$  est une constante, par morceaux. Ainsi, pour  $T \ll \tau$ , le circuit  $(R, C)$  "intègre"  $E(t)$ . C'est pourquoi ce circuit est qualifié de *circuit intégrateur* : la tension  $V_c$  aux bornes du condensateur, prise comme "signal de sortie", donne l'intégrale du "signal d'entrée"  $E(t)$ . En l'occurrence, ici, le signal en créneaux est transformé en signal triangulaire (figure 7.11).

Cet effet peut s'expliquer simplement si l'on compare les deux termes du premier membre de 7.41. En effet, puisque le temps de réponse  $\tau$ , qui caractérise l'inertie du circuit  $(R, C)$  dans sa réponse à une excitation, est supposé grand devant la période  $T$  qui caractérise, dans ce régime permanent, la durée d'évolution de la charge, le premier terme  $Q/\tau$  est négligeable devant le second  $\dot{Q}$  et l'équation revient alors à

$$\dot{Q} \simeq \frac{E(t)}{R} \quad (7.55)$$

et  $Q(t)$  prend la forme d'une primitive de  $E(t)$  ; d'où l'effet intégrateur du circuit  $(R, C)$ .

### ③ Régime forcé sinusoïdal

L'expérience montre que les circuits linéaires alimentés par une source de tension (ou de courant) sinusoïdal ont un régime permanent lui aussi sinusoïdal et de même période. Ceci peut être vérifié théoriquement pour le circuit  $(R, C)$  en utilisant la formule mentionnée plus haut :

$$Q(t) = \frac{1}{R} e^{-t'/\tau} \left\{ \frac{\mathcal{J}_1}{e^{T/\tau} - 1} + \int_0^{t'} E(s) e^{s/\tau} ds \right\}, \quad \text{pour } NT \leq t \leq (N+1)T \quad (N \gg 1) \quad (7.56)$$

(voir aussi l'annexe). Cependant, nous procéderons beaucoup plus simplement en recherchant la solution du régime permanent directement sous forme sinusoïdale, le fait de la trouver servant de preuve. Ainsi, avec  $E(t) = E_0 \cos \omega t$  et en exprimant la charge comme  $Q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ , ce qui est la forme la plus générale d'une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , l'équation différentielle 7.41 donne

$$\cos \omega t \left\{ \frac{A}{\tau} + \omega B \right\} + \sin \omega t \left\{ \frac{B}{\tau} - \omega A \right\} = \frac{E_0}{R} \cos \omega t \quad (7.57)$$

En utilisant le fait que  $\cos \omega t$  et  $\sin \omega t$  sont deux fonctions indépendantes, on obtient, par identification<sup>5</sup>,

5. Ou peut également poser successivement  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \pi/2$ .

$$\frac{A}{\tau} + \omega B = \frac{E_0}{R}, \quad \frac{B}{\tau} = \omega A, \quad \text{soit} \quad A = CE_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad B = CE_0 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

On trouve bien de cette manière la solution du régime permanent :

$$Q(t) = \frac{CE_0}{1 + \omega^2 \tau^2} \{ \cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t \}, \quad i(t) = \frac{E_0}{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \left\{ R \cos \omega t - \frac{1}{C \omega} \sin \omega t \right\} \quad (7.58)$$

On remarque que pour  $\omega \tau \gg 1$ , ce qui équivaut à considérer que  $\tau$  est très grand devant la période du signal sinusoïdal, on obtient approximativement

$$Q(t) \simeq \frac{E_0}{R} \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (7.59)$$

Or,  $\frac{\sin \omega t}{\omega}$  est une primitive de  $\cos \omega t$  : sous la même condition  $\tau \gg T$ , le circuit  $(R, C)$  joue ici encore un rôle d'intégrateur.

#### 7.4.2 Circuit $(L, R)$ en régime permanent sinusoïdal

Pour obtenir l'expression de l'intensité  $i(t)$  du courant dans le circuit  $(L, R)$  pour une fem d'entrée sinusoïdale  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ , nous procéderons comme au paragraphe précédent. Ecrivons

$$i(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

l'équation différentielle 7.19 conduit à

$$\cos \omega t \left\{ \frac{A}{\tau} + \omega B \right\} + \sin \omega t \left\{ \frac{B}{\tau} - \omega A \right\} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t, \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$

soit

$$\frac{A}{\tau} + \omega B = \frac{E_0}{L}, \quad B = \omega \tau A, \quad \text{et} \quad A = \frac{E_0}{R} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad B = \frac{E_0}{R} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

La solution cherchée existe donc et a pour expression

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \{ \cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t \} = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \{ R \cos \omega t + L \omega \sin \omega t \} \quad (7.60)$$

L'intensité  $i(t)$  pour ce régime est bien une fonction sinusoïdale, avec la pulsation  $\omega$  imposée par le signal d'entrée. On observe que pour  $\omega \tau \gg 1$ , 7.60 devient

$$i(t) \simeq \frac{E_0}{L} \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (7.61)$$

et que, pour ce circuit aussi, il y a un effet intégrateur en prenant comme signal de sortie la tension aux bornes d'une résistance insérée dans le circuit. Cependant, pour des raisons pratiques, c'est plutôt le circuit  $(R, C)$  qui est généralement utilisé dans des circuits complexes pour remplir cette fonction d'intégrateur.

### 7.4.3 Circuit $(R, L, C)$ en régime permanent sinusoïdal

#### ① Expressions de la charge et de l'intensité du courant

Pour ce circuit, excité par une fem sinusoïdale, le régime permanent est aussi sinusoïdal, de même pulsation que celle de cette fem. La solution  $Q(t)$  cherchée pour ce régime sera écrite sous la forme  $A \cos \omega t + B \sin \omega t$  puis injectée dans 7.23, où maintenant  $E = E_0 \cos \omega t$ , afin de trouver  $A$  et  $B$  :

$$\cos \omega t \left\{ A \left( \frac{1}{C} - L\omega^2 \right) + R\omega B \right\} + \sin \omega t \left\{ B \left( \frac{1}{C} - L\omega^2 \right) - R\omega A \right\} = E_0 \cos \omega t$$

ce qui donne

$$A \left( \frac{1}{C} - L\omega^2 \right) + R\omega B = E_0, \quad \text{et} \quad B \left( \frac{1}{C} - L\omega^2 \right) = R\omega A$$

d'où l'on tire

$$A = CE_0 \frac{1 - LC\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}, \quad B = CE_0 \frac{RC\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

On obtient ainsi

$$Q(t) = \frac{CE_0}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2} \left\{ (1 - LC\omega^2) \cos \omega t + RC\omega \sin \omega t \right\} \quad (7.62)$$

et

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{C\omega E_0}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2} \left\{ RC\omega \cos \omega t - (1 - LC\omega^2) \sin \omega t \right\} \\ &= \frac{E_0}{R^2 + \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2} \left\{ R \cos \omega t + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \sin \omega t \right\} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Nous retrouverons ces expressions, sous un éclairage différent, dans le chapitre consacré aux régimes permanents sinusoïdaux. L'expression 7.63 peut être réécrite sous la forme

$$i = G \cos \omega t + H \sin \omega t = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

avec

$$G = I_0 \cos \varphi = \frac{E_0 R}{R^2 + \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}, \quad H = I_0 \sin \varphi = \frac{E_0 \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R^2 + \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}$$

d'où l'on tire

$$I_0 = \frac{E_0}{Z_0}, \quad \text{avec} \quad Z_0 = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (7.64)$$

#### ② Résonance

La réponse du circuit  $(R, L, C)$  en régime permanent sinusoïdal est entièrement déterminée par l'association  $(Z_0, \varphi)$  que nous appellerons dès maintenant *impédance complexe*, terminologie qui sera pleinement justifiée au chapitre portant sur l'étude du comportement des réseaux linéaires en régime permanent sinusoïdal;  $Z_0$  en est le *module* et  $\varphi$  la *phase*. Comme l'indique 7.64, cette réponse dépend de la pulsation du signal d'entrée.

Répertorions d'abord les impédances complexes caractérisant les éléments résistance, bobine ou condensateur, si chacun était seul présent dans le circuit.

• Un circuit ne comportant qu'une résistance pure  $R$  donne une intensité directement proportionnelle à la fem appliquée  $i(t) = E(t)/R$ . L'impédance complexe correspondante est donc

$$Z_R = (R, 0) \quad (7.65)$$

la phase  $\varphi_R$  étant nulle, on dit aussi que le courant est *en phase* avec la tension appliquée.

• D'après 7.58, un condensateur seul ( $R = 0$ ) répond à une fem sinusoïdale par un courant d'intensité

$$i(t) = C\omega E_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

et a donc pour impédance complexe

$$Z_C = (\frac{1}{C\omega}, -\frac{\pi}{2}) \quad (7.66)$$

Le déphasage entre le courant et la tension appliquée est dans ce cas égal à  $+\pi/2$  et l'on dit que le courant est en *quadrature avance* sur cette tension. Le module  $1/(C\omega)$  tend vers l'infini pour  $\omega \rightarrow 0$ , auquel cas  $I_0 \rightarrow 0$ . Ceci s'explique simplement par le fait que cette limite correspond à un régime permanent *statique* ( $\omega = 0$ , donc la fem appliquée est constante!) où le condensateur est chargé et l'intensité du courant de charge nulle. Le condensateur est alors un *coupe-circuit*. Pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $1/(C\omega)$  tend vers zéro et l'intensité devient de plus en plus grande<sup>6-7</sup>. La raison est que dans un régime hautement variable, où alternances positives et négatives se succèdent à fréquence élevée, le condensateur n'a plus le temps de se charger et se comporte alors comme un *court-circuit*.

• D'après 7.60, une bobine seule répond à une fem sinusoïdale par un courant d'intensité

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

et a donc pour impédance complexe

$$Z_L = (L\omega, \frac{\pi}{2}) \quad (7.67)$$

ayant pour phase  $\varphi_L = \pi/2$  : le courant est alors en *quadrature retard* sur la tension appliquée. Pour  $\omega \rightarrow \infty$ , le module  $Z_0 = L\omega$  tend vers l'infini et l'intensité tend vers zéro. L'explication est que, conformément à la loi de Lenz, l'effet modérateur de la fem induite dans la bobine est d'autant plus important que le régime est hautement variable, au point d'étouffer complètement l'intensité dont les variations ultra-rapides lui ont donné naissance. La bobine est alors un *coupe-circuit* ( $L\omega \rightarrow \infty$ ). Par contre, cet effet modérateur est infime pour  $\omega \rightarrow 0$ , c'est-à-dire, pour un régime permanent quasi-continu. La bobine ne réagit plus et représente alors un *court-circuit* ( $L\omega \rightarrow 0$ ).

Le comportement de l'impédance 7.64 avec la pulsation (ou la fréquence  $\omega/(2\pi)$ ) peut maintenant s'expliquer. A basse fréquence, le circuit (*RLC*) est plutôt *capacitif*,  $Z_0 \rightarrow \infty$ ,  $I_0$  tend vers zéro. A très haute fréquence, ce circuit est plutôt *inductif* : à nouveau  $Z_0 \rightarrow \infty$ ,  $I_0 \rightarrow 0$ . Entre ces deux extrêmes, l'intensité maximum  $I_0$  présente un maximum lorsque les effets capacitif et inductif se compensent, ce qui intervient lorsque

6. Dans la réalité, bien que la valeur de l'intensité puisse devenir très grande, elle est néanmoins limitée par la résistance des fils de liaison : voir 7.58 avec  $R \neq 0$ .

7. En fait, surtout en ARQS, cette limite paraît illusoire. On veut signifier ici en abrégé que  $\omega$  est suffisamment grand devant tout paramètre homogène à une pulsation, caractérisant le circuit réel.

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}, \text{ soit pour } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (7.68)$$

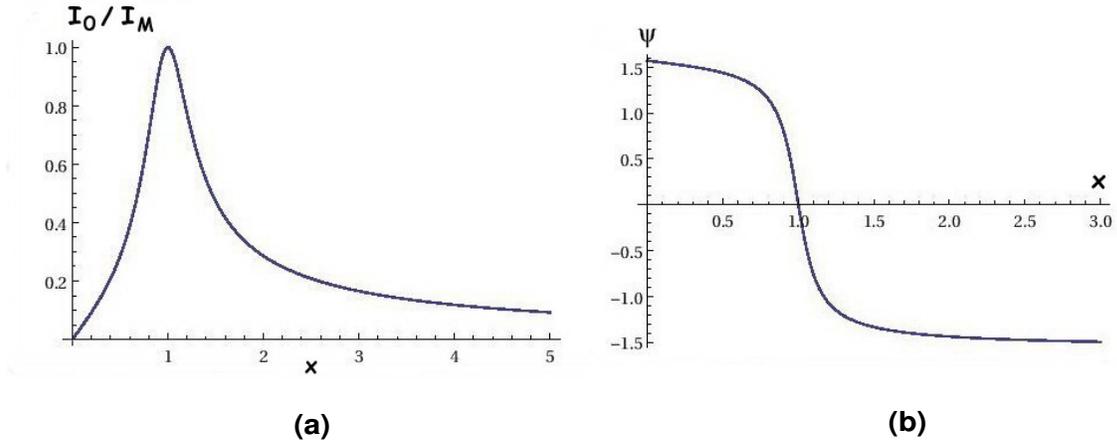


FIGURE 7.12 – Réponse du circuit  $(R, L, C)$  à une tension sinusoïdale en intensité (a) et en phase (b), en fonction de  $x = \omega/\omega_0$  et pour  $Q = 5$ .

L'impédance équivaut alors à la seule résistance  $R$  et l'on a  $I_0 = I_M = E_0/R$ . Ce phénomène de maximum s'appelle une *résonance*. Les variations de  $I_0/I_M$  en fonction de  $x = \omega/\omega_0$  sont représentées à la figure 7.12 (a). On peut caractériser l'acuité de la résonance en définissant une "largeur" de la courbe  $I_0(\omega)$  comme l'écart entre les valeurs  $\omega_-$  et  $\omega_+$  pour lesquelles  $I_0 = I_M/\sqrt{2}$ . Celles-ci satisfont l'équation

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

qui donne les racines *positives*

$$\omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \alpha, \quad \omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \alpha, \quad \text{avec } \alpha = \frac{R}{2L} \quad (7.69)$$

L'écart  $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = R/L$  s'appelle aussi *bande passante*. Pour comprendre la signification physique de cette appellation, supposons que le circuit ne soit plus alimenté par une tension de pulsation bien définie, mais par une tension comportant plusieurs signaux de pulsations diverses réparties autour de la pulsation de résonance  $\omega_0$  :

$$E(t) = \sum_{\omega} E_0(\omega) \cos(\omega t + \Theta(\omega))$$

Comme conséquence de la linéarité du circuit<sup>8</sup>, l'intensité du courant total qui y circule est alors la somme des intensités des courants dus à chacun des signaux :

$$i(t) = \sum_{\omega} I_0(\omega) \cos(\omega t + \Theta(\omega) - \varphi(\omega))$$

Il est clair que dans cette dernière somme, du fait de l'effet de résonance, seront les plus favorisés les courants dont les pulsations se trouvent à l'intérieur de la bande passante au voisinage de  $\omega_0$ . Ceci justifie également l'appellation courante de *filtre passe-bande* pour le circuit  $(R, L, C)$ . Cette sélection est d'autant plus fine que la bande passante est étroite. Cette finesse peut être quantifiée par l'écart relatif :

8. Ce point sera éclairci au chapitre concernant l'étude des réseaux linéaires en régime permanent sinusoïdal.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\check{Q}} \quad (7.70)$$

où  $\check{Q}$ , qui n'a rien à voir avec une charge, est le *coefficient de qualité* du circuit. Pour le circuit  $(R, L, C)$ , on a

$$\check{Q} = \frac{L\omega_0}{R} = RC\omega_0 \quad (7.71)$$

et  $\check{Q} \gg 1$ , auquel cas la bande passante est relativement étroite, si la résistance du circuit est faible. Il est intéressant de noter que cette condition peut s'exprimer sous la forme

$$\tau_{RC} \ll T_0 \ll \tau_{LR}$$

où  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  est la période de résonance : celle-ci doit être grande devant le temps de réponse  $\tau_{RC}$  de l'association  $(R, C)$ , afin de permettre au condensateur d'emmagasiner suffisamment de charge et donc d'énergie potentielle ; mais  $T_0$  doit être aussi suffisamment petite devant le temps de réponse  $\tau_{LR}$  de l'association  $(L, R)$  de façon à ce que la bobine ne contrarie pas trop cette opération.

On peut également interpréter le coefficient  $\check{Q}$  en termes énergétiques. En effet, l'énergie moyenne (au sens d'une moyenne temporelle sur une période<sup>9</sup>) que le circuit emmagasine a pour expression

$$\langle W \rangle = \frac{Q_0^2}{4C} + \frac{LI_0^2}{4} \quad (7.72)$$

$Q_0$  étant l'amplitude maximum de la charge, tandis que l'énergie moyenne dissipée par effet Joule sur une période est

$$\langle W_R \rangle = \frac{RI_0^2}{2} T \quad (7.73)$$

On attribuera une bonne qualité au circuit si  $\langle W \rangle \gg \langle W_R \rangle$ , et notamment à la résonance où l'intensité est la plus grande, auquel cas  $I_0 = \omega_0 Q_0$ ,

$$\langle W \rangle \equiv \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} \gg \frac{RI_0^2}{2} T_0, \text{ soit } \tau_{LR} \gg T_0$$

Le coefficient de qualité se rencontre aussi en régime transitoire et de ce fait reçoit une autre interprétation. Dans le cas d'une faible résistance, le circuit, excité par un bref signal quelconque, effectue des oscillations dont l'amplitude est amortie par le facteur  $e^{-\alpha t}$ , décroissant au fil du temps, avec  $\alpha = R/2L$ . Soit  $N$  le nombre d'oscillations que le circuit peut effectuer avant que leur amplitude ne soit divisée par  $e = 2,718 \simeq 3$ . Le laps de temps correspondant est  $\Delta t = 1/\alpha$ . La (pseudo)-période de ces oscillations étant  $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 + \alpha^2} \simeq 2\pi/\omega_0 = T_0$ , le nombre cherché est

$$N = \frac{\Delta t}{T_0} = \frac{1}{\alpha T_0} = 2 \frac{\tau_{LR}}{T_0} \equiv \frac{\check{Q}}{\pi} \quad (7.74)$$

et  $N$  et  $\check{Q}$  sont donc liés : le circuit oscille d'autant plus longtemps que  $N$  est grand ( $N \gg 1$ ), c'est-à-dire, que son coefficient de qualité est grand ( $\check{Q} \gg \pi$ ).

La figure 7.12 (b) donne les variations du déphasage  $\psi = -\varphi$  de l'intensité en fonction de  $x = \omega/\omega_0$ . Ce déphasage tend vers  $\pi/2$  pour  $\omega \rightarrow 0$  et vers  $-\pi/2$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ , et passe par la valeur 0 pour  $\omega = \omega_0$ . Dès que  $\check{Q}$  est suffisamment grand,  $\psi$  reste assez voisin de  $\pi/2$  pour  $\omega < \omega_0$  et assez voisin de  $-\pi/2$  pour  $\omega > \omega_0$ . Le passage d'une valeur à l'autre s'effectue dans la

9. La définition précise de cette moyenne sera donnée au chapitre 8.

bande passante et est d'autant plus abrupt que  $\check{Q}$  est grand. On notera que les valeurs  $\omega_-$  et  $\omega_+$  de la pulsation, qui définissent cette bande passante, correspondent respectivement à  $\psi = +\pi/4$  et  $\psi = -\pi/4$ .

## 7.5 Annexe : notes sur les équations différentielles linéaires

### 7.5.1 Problème général des équations différentielles

Une fonction  $f(t)$  à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle  $t$  est dite satisfaire une *équation différentielle d'ordre  $n$*  s'il existe une relation entre  $f$  et ses  $n$  premières dérivées  $f^{(p)} = \frac{d^p f}{dt^p}$  que l'on écrit sous la forme générale

$$F(f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)}, \dots, f^{(n)}) = 0 \quad (7.75)$$

Bien entendu, il est possible que certaines des dérivées n'interviennent pas explicitement dans cette relation.

L'équation est dite *linéaire* si elle s'écrit

$$a_0(t)f(t) + a_1(t)f^{(1)}(t) + \dots + a_n(t)f^{(n)}(t) = S(t) \quad (7.76)$$

où les coefficients  $a_p(t)$ ,  $p = 0, \dots, n$  sont  $n + 1$  fonctions de  $t$  a priori connues. La fonction  $S(t)$ , elle aussi a priori connue, est qualifiée de *second membre* de l'équation. Si  $S(t) = 0$ , l'équation est dite *sans second membre* ou *homogène*. La propriété de linéarité vient du fait que si  $f_1(t)$  est solution de l'équation pour un second membre égal à  $S_1(t)$  et  $f_2(t)$  solution de l'équation pour un second membre égal à  $S_2(t)$ , alors toute combinaison linéaire  $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$  où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des constantes réelles ou complexes quelconques, est solution de l'équation ayant  $\lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t)$  pour second membre<sup>10</sup>. L'équation est dite à *coefficients constants* si les  $n + 1$  fonctions  $a_p(t)$  sont indépendantes de  $t$ .

Le problème mathématique qui se pose consiste :

 d'une part à établir l'existence de solutions et rechercher leurs formes explicites, la seconde opération étant appelée *intégration de l'équation*;

 d'autre part, si possible établir l'unicité de la ou des solutions trouvées.

Ces deux points ne sont pas toujours réalisables. Il existe cependant un cas important pour lequel on a construit une méthode générale de résolution et établi l'unicité des solutions : c'est celui des équations linéaires dont il a été question plus haut.

### 7.5.2 Equation linéaire du premier ordre à coefficients constants

#### ① Sans second membre

Considérons l'équation linéaire sans second membre

$$\lambda f(t) + f'(t) = 0 \quad (7.77)$$

où, selon la notation usuelle,  $f'(t)$  est la dérivée première de  $f$ , et  $\lambda$  une constante réelle ou complexe.

L'intégration de l'équation est en fait immédiate. En effet, multiplions chacun des membres de l'équation par  $e^{\lambda t}$  ; On a

$$e^{\lambda t} [\lambda f(t) + f'(t)] = \frac{d}{dt} [f e^{\lambda t}] = 0 \quad (7.78)$$

d'où l'on tire *l'unique solution*

$$f(t) = C e^{-\lambda t} \quad (7.79)$$

10. En fait, une véritable linéarité est seulement obtenue pour l'équation sans second membre. En présence de seconds membres, on devrait plutôt la qualifier d'affine.

$C$  étant une constante. Mathématiquement, on conclut de ce résultat que pour ladite équation, il n'existe qu'une seule solution dépendant d'une seule constante *arbitraire*. Cependant, pour un problème de Physique, cette constante ne peut être arbitraire, en ce sens que la solution trouvée doit correspondre à une situation physique bien particulière, définie par un protocole d'expérience précis. Par exemple, si  $t$  représentait le temps et  $f(t)$  l'abscisse d'un mobile, la constante  $C$  devrait être ajustée de telle sorte à reproduire la valeur connue  $x_0$  de l'abscisse à une certaine date  $t_0$  connue, ce qui donnerait

$$C = x_0 e^{\lambda t_0} \quad (7.80)$$

La constante  $C$  doit donc être déterminée soit par des conditions aux limites, soit, ce qui est le plus courant, par des conditions initiales. Une fois la constante  $C$  ainsi ajustée, la loi unique  $f(t)$  trouvée plus haut permet de faire des prévisions avec un déterminisme total.

## ② Avec second membre

Considérons ensuite l'équation

$$\lambda f(t) + f'(t) = g(t) \quad (7.81)$$

où  $g(t)$  est une fonction connue de  $t$ . On a

$$e^{\lambda t} [\lambda f(t) + f'(t)] = \frac{d}{dt} [f e^{\lambda t}] = g(t) e^{\lambda t} \quad (7.82)$$

ce qui, par intégration, donne

$$e^{\lambda t} f(t) = C + \int_{t_0}^t g(s) e^{\lambda s} ds \quad (7.83)$$

$C$  étant une constante, soit

$$f(t) = C e^{-\lambda t} + \int_{t_0}^t g(s) e^{\lambda(s-t)} ds \quad (7.84)$$

De ce résultat il ressort que *l'unique solution générale* de l'équation avec second membre se présente comme la somme de deux termes. Le premier

$$f_g(t) = C e^{-\lambda t} \quad (7.85)$$

est la solution générale de l'équation *sans second membre*. Le second

$$f_p(t) = \int_{t_0}^t g(s) e^{\lambda(s-t)} ds \quad (7.86)$$

est en fait une *solution particulière* de l'équation complète, *avec second membre*. Il s'agit là d'un résultat tout à fait général concernant les équations linéaires, d'ordre quelconque, et utile à connaître dans la recherche de solution :

📖 *la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation et de la solution générale de l'équation homogène.*

Supposons par exemple que le second membre soit donné par  $g(t) = kt$ ,  $k$  étant une constante. L'expression obtenue précédemment pour la solution particulière conduit alors à un calcul un peu long :

$$f_p(t) = k \int_{t_0}^t s e^{\lambda(s-t)} ds = \frac{k}{\lambda} \left[ s e^{\lambda(s-t)} \right]_{t_0}^t - \frac{k}{\lambda} \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t)} ds \quad (7.87)$$

soit

$$f_p(t) = \frac{k}{\lambda} \left[ t - t_0 e^{\lambda(t_0-t)} \right] - \frac{k}{\lambda^2} \left[ 1 - e^{\lambda(t_0-t)} \right] \quad (7.88)$$

ce que l'on peut récrire sous la forme

$$f_p(t) = \frac{k}{\lambda} \left[ t - \frac{1}{\lambda} \right] - \frac{k}{\lambda} \left[ t_0 - \frac{1}{\lambda} \right] e^{\lambda(t_0-t)} \quad (7.89)$$

On constate alors que la solution complète peut être écrite sous la forme

$$f(t) = \frac{k}{\lambda} \left[ t - \frac{1}{\lambda} \right] + D e^{-\lambda t} \quad (7.90)$$

$D$  étant une nouvelle constante. En fait, la fonction

$$h(t) = \frac{k}{\lambda} \left[ t - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (7.91)$$

constitue une solution particulière de l'équation complète, comme on peut le vérifier facilement. Or, cette solution particulière pouvait être obtenue plus simplement, avec un peu d'expérience et/ou un certain sens physique. En effet, le second membre étant ici un monôme en  $t$ , on peut tenter directement une solution de la forme

$$f_p(t) = at + b \quad (7.92)$$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle, il vient

$$\lambda(at + b) + a = kt \quad (7.93)$$

d'où, par identification,  $a = \frac{k}{\lambda}$  et  $b = -\frac{a}{\lambda} = -\frac{k}{\lambda^2}$ . On retrouve ainsi très facilement la solution précédente. On notera en passant que les solutions particulières ne peuvent différer les unes des autres que par un terme additionnel vérifiant l'équation homogène.

Un autre exemple utile à connaître est celui pour lequel le second membre est une fonction sinusoïdale :

$$g(t) = E \cos \omega t \quad (7.94)$$

$E$  et  $\omega$  étant deux constantes, supposées positives. Si par exemple  $t$  représente le temps et  $f(t)$  une intensité de courant dans un circuit électrique et  $g(t)$  une tension imposée par un générateur, on sait d'expérience qu'après un temps suffisamment long, l'observation à l'oscilloscope de l'intensité montre pour celle-ci une variation temporelle sinusoïdale, elle aussi.

Cette constatation incite à rechercher une solution particulière sinusoïdale :

$$f_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7.95)$$

$A$  et  $B$  étant deux constantes à déterminer. Reportant cette expression dans l'équation, on obtient

$$\lambda [A \cos \omega t + B \sin \omega t] + \omega [-A \sin \omega t + B \cos \omega t] = E \cos \omega t \quad (7.96)$$

D'où, ici encore par identification :

$$B = \frac{\omega}{\lambda} A \quad , \quad \lambda A + \omega B = E \quad (7.97)$$

Une telle solution particulière existe donc et l'on a

$$A = \frac{\lambda E}{\omega^2 + \lambda^2} \quad (7.98)$$

Dans un cas comme dans l'autre, on observe que dès lors que  $\lambda$  a une partie réelle  $\alpha$  positive (ce qui est le cas usuel dans les problèmes de Physique), la solution générale de l'équation tend vers zéro lorsque  $t \gg 1/\alpha$ . Ne subsiste alors que la solution particulière dont la forme dépend

crucialement de celle du second membre. En physique, on parle alors de *régime forcé* du système étudié sous l'action d'un signal externe représenté par  $g(t)$ . On note qu'alors le système n'a plus souvenir d'une quelconque condition initiale, information qui était contenue dans la solution générale de l'équation homogène.

### 7.5.3 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

#### ① Equation de l'oscillateur harmonique libre et sans amortissement

Il s'agit de l'équation, bien connue, décrivant, par exemple, l'évolution temporelle du mouvement le long d'un axe  $Ox$  et sans amortissement d'une masse reliée à un ressort <sup>11</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.99)$$

$\omega_0$  étant une constante positive. Nous supposons ici que  $x(t)$  est à valeurs réelles. Pour résoudre cette équation, nous utiliserons deux méthodes paraissant différentes, mais en fait apparentées.

#### ☛ Méthode "cinématique"

Posons  $y = -\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ , et interprétons  $x$  et  $y$  comme les coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  évoluant dans un plan fictif  $xOy$ . Comme  $\dot{y} = -\frac{\ddot{x}}{\omega_0}$ , pour ce point, les équations du mouvement sont

$$\dot{x} = -\omega_0 y \quad , \quad \dot{y} = \omega_0 x \quad (7.100)$$

Il est alors facile de montrer que la distance  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  de ce point  $M$  à l'origine reste constante. En effet, on a

$$x\dot{x} + y\dot{y} = -\omega_0 xy + y\omega_0 x = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0 \quad (7.101)$$

et donc  $r = \text{constante} = R$ . Le point  $M$  décrit donc un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Repérons alors la position de  $M$  au moyen de ses coordonnées polaires  $r = R$  et  $\theta$  :

$$x = R \cos \theta \quad , \quad y = R \sin \theta \quad (7.102)$$

Il vient, par dérivation

$$\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta} y = -\omega_0 y \quad (7.103)$$

On en déduit la relation  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Le mouvement de  $M$  est non seulement circulaire, il est aussi uniforme. L'intégration de cette dernière relation donne  $\theta = \omega_0 t + \phi$ , où  $\phi$  est une constante, ce qui donne pour  $x$  l'*unique solution*

$$x = R \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (7.104)$$

que l'on peut tout aussi bien écrire sous la forme

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (7.105)$$

La solution générale dépend de deux constantes  $R$  et  $\phi$ , ou  $a$  et  $b$ , ce qui est conforme au résultat annoncé précédemment. L'ajustement de ces constantes peut se faire au moyen de deux conditions initiales impliquant la coordonnée  $x$  et sa vitesse  $\dot{x}$ . Imaginons par exemple qu'à  $t = 0$ , on ait  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = 0$ . Il vient alors  $b = 0$  et  $a = x_0$ .

11. Nous utilisons ici la notation "point" pour désigner la dérivation par rapport au temps  $t$ , à savoir  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ , etc.

### ☛ Méthode utilisant les nombres complexes

Introduisons le nombre complexe

$$z = x - j \frac{\dot{x}}{\omega_0} \quad (7.106)$$

où  $j$  est le nombre complexe tel que<sup>12</sup>  $j^2 = -1$  (soit :  $j = +\sqrt{-1}$ ). La fonction  $x(t)$  étant supposée réelle, elle peut être déduite très simplement en prenant la partie réelle de  $z(t)$ . On obtient immédiatement

$$\dot{z} = \dot{x} - \frac{j}{\omega_0} \ddot{x} = \dot{x} + j\omega_0 x = j\omega_0 \left( x - j \frac{\dot{x}}{\omega_0} \right) = j\omega_0 z \quad (7.107)$$

La fonction  $z(t)$  satisfait donc une équation du premier ordre, dont l'unique solution s'écrit

$$z(t) = C e^{j\omega_0 t} \quad (7.108)$$

$C$  étant une constante *complexe*. Ecrivant celle-ci sous la forme

$$C = R e^{j\phi} \quad (7.109)$$

où  $R = |C|$  et  $\phi = \text{Arg}(C)$ , on obtient

$$z(t) = R e^{j(\omega_0 t + \phi)} \quad \text{et} \quad x = \Re(z) = R \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (7.110)$$

Cette méthode, finalement plus "expéditive" que la précédente, lui est apparentée pour deux raisons.

- D'une part, on sait que les représentations du plan par les vecteurs ou par les nombres complexes sont équivalentes, la première étant cependant moins pratique que la seconde qui ne fait intervenir que des calculs algébriques.
- D'autre part, l'une et l'autre visent, grâce à une paramétrisation appropriée, à transformer l'équation initiale du second ordre en une ou deux équations du premier ordre dont on connaît la solution.

### ② Méthode générale

La méthode générale de résolution des équations linéaires utilise ce type de réduction de l'ordre de dérivation. Le prix modique à payer est l'augmentation formelle du nombre de fonctions à considérer. Considérons l'équation linéaire

$$a_1 f(t) + a_2 f^{(1)}(t) + \dots + a_{n+1} f^{(n)}(t) = S(t) \quad (7.111)$$

avec des coefficients *constants*  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  et posons

$$x_1 = f(t) \quad , \quad x_2 = f^{(1)}(t) \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = f^{(n-1)}(t) \quad (7.112)$$

Entre les nouvelles fonctions  $x_p(t)$  ainsi définies on a les relations

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad \dot{x}_{n-1} = x_n \quad (7.113)$$

et

$$\dot{x}_n = \frac{1}{a_{n+1}} [S(t) - a_1 x_1 - a_2 x_2 \dots - a_n x_n] \quad (7.114)$$

Ces relations peuvent être transcrites en notation matricielle. En effet, introduisant les vecteurs unicolonnes à  $n$  composantes suivants

12. Comme d'habitude en électrocinétique, pour ne pas faire de confusion avec une intensité de courant assez systématiquement notée  $i$ , le nombre complexe  $i$  des mathématiques est noté  $j$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\mathcal{S}(t)}{a_{n+1}} \end{pmatrix} \quad (7.115)$$

et la matrice  $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_{n+1}} & -\frac{a_2}{a_{n+1}} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} & -\frac{a_n}{a_{n+1}} \end{pmatrix} \quad (7.116)$$

on peut écrire l'équation matricielle

$$\dot{X} = AX + \mathcal{S} \quad (7.117)$$

L'étape suivante consiste à chercher les vecteurs propres de la matrice  $A$ , c'est-à-dire des vecteurs  $V_\lambda$  à  $n$  composantes tels que

$$AV_\lambda = \lambda V_\lambda \quad (7.118)$$

où  $\lambda$  est un nombre a priori complexe, appelé *valeur propre* de la matrice  $A$ . L'équation permettant de déterminer ces valeurs propres est

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (7.119)$$

où  $I$  est la matrice unité d'ordre  $n \times n$ . Elle exprime le fait que la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible et, tout développement fait, elle conduit à une équation algébrique de degré  $n$  sur l'inconnue  $\lambda$ . On montre que cette équation dite *équation aux valeurs propres* peut être obtenue simplement à partir de l'équation homogène en injectant dans cette dernière la fonction  $\exp(\lambda t)$ , ce qui donne l'équation

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^2 + \cdots + a_{n+1} \lambda^n = 0 \quad (7.120)$$

appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle. Comme on sait, une telle équation possède  $n$  racines, distinctes ou non, dans l'ensemble des complexes, soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Si les  $n$  racines sont distinctes, alors la matrice  $A$  est *diagonalisable* et l'ensemble correspondant des vecteurs propres  $V_1, V_2, \dots, V_n$  forme une base dans l'espace à  $n$  dimensions des vecteurs unicolonnes à  $n$  composantes. Cela signifie que le vecteur  $X$  défini précédemment peut être exprimé comme une combinaison linéaire des  $V_k$  :

$$X(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) V_k \quad (7.121)$$

où les coefficients  $C_k(t)$  sont  $n$  fonctions de  $t$  à valeurs a priori complexes. On développera de la même manière le vecteur  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{k=1}^n S_k(t) V_k \quad (7.122)$$

L'équation (7.117) s'écrit alors

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^n \dot{C}_k V_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k C_k V_k + \sum_{k=1}^n S_k(t) V_k \quad (7.123)$$

Comme les  $n$  vecteurs  $V_k$  sont *indépendants*, une identification terme par terme conduit aux  $n$  équations du *premier ordre*

$$\dot{C}_k = \lambda_k C_k + S_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7.124)$$

similaires à celles étudiées précédemment. Chaque  $C_k(t)$  s'écrira donc sous la forme

$$C_k(t) = e^{\lambda_k t} A_k + P_k(t) \quad (7.125)$$

où  $A_k$  est une constante (complexe) et  $P_k(t)$  une solution particulière de la  $k$ ème équation. Pour résumer, ce formalisme montre que la solution générale de l'équation (7.111) s'obtient ici encore comme somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. La solution générale de l'équation homogène se présente comme une combinaison linéaire de toutes les fonctions de la forme  $\exp \lambda t$  pour lesquelles  $\lambda$  satisfait l'équation aux valeurs propres (7.120) :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} + P(t) \quad (7.126)$$

Pour illustrer ce formalisme matriciel, reconsidérons l'équation (7.99) de l'oscillateur harmonique et posons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.127)$$

On a

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (7.128)$$

d'où les deux solutions

$$\lambda_+ = j\omega_0 \quad , \quad \lambda_- = -j\omega_0 \quad (7.129)$$

auxquelles correspondent deux vecteurs propres  $V_+$  et  $V_-$ , respectivement, que l'on trouve en résolvant l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (7.130)$$

qui conduit à la relation  $\beta = \lambda\alpha$  (avec  $\lambda^2 = -\omega_0^2$ ). On en déduit les vecteurs propres

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ j\omega_0 \end{pmatrix} \quad , \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -j\omega_0 \end{pmatrix} \quad (7.131)$$

La solution générale  $X(t)$  s'écrit ainsi

$$X(t) = a_+ e^{j\omega_0 t} V_+ + a_- e^{-j\omega_0 t} V_- \quad (7.132)$$

dont la première composante  $x(t)$  est donc

$$x(t) = a_+ e^{j\omega_0 t} + a_- e^{-j\omega_0 t} = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (7.133)$$

Nous avons supposé jusqu'à présent que toutes les valeurs propres sont distinctes. Dans le cas où certaines d'entre elles sont égales, la matrice  $A$  peut ne pas être diagonalisable et le développement précédent doit être modifié. On a alors recours au *théorème de Jordan* sur la réduction des matrices<sup>13</sup>.

- On appelle *matrice réduite de Jordan*  $\mathcal{D}_p(\lambda)$  une matrice carrée  $p \times p$  dont la diagonale principale est formée des mêmes  $p$  nombres complexes  $\lambda$ , dont les éléments situés immédiatement à droite des éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et dont tous les autres éléments sont nuls :

$$\mathcal{D}_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- Le théorème énonce que toute matrice  $A$  carrée  $n \times n$  est semblable à une matrice de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{D}_{p_1}(\lambda_1)} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \boxed{\mathcal{D}_{p_2}(\lambda_2)} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \boxed{\mathcal{D}_{p_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad (7.134)$$

où les éléments au voisinage de la diagonale principale sont disposés en suite de matrice de Jordan réduite de rangs respectifs  $p_1, \dots, p_r$ , avec  $p_1 + \dots + p_r = n$ , tous les autres éléments étant nuls. Lorsque toutes les valeurs propres de  $A$  sont distinctes, chaque matrice élémentaire de Jordan est de rang 1.

Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son équation aux valeurs propres

$$(2 - \lambda)(-\lambda) + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad (7.135)$$

donne une seule valeur propre  $\lambda = 1$ , et l'équation aux vecteurs propres

$$(A - 1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = 0$$

la seule solution  $\alpha = \beta$ . D'où, en choisissant  $\alpha = 1$ , l'unique vecteur propre

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour constituer une base à deux dimensions avec  $V_1$ , cherchons un vecteur  $V_2$  tel que

$$AV_2 = \lambda V_2 + V_1$$

On trouve par exemple que le vecteur

13. C. Jordan, "Traité des substitutions et des équations algébriques", ed. Gauthier-Villars, Paris, 1870, p125; voir J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, "Cours de mathématiques-1, Algèbre" ed. Dunod, 1994, p660.

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

convient. La matrice de passage de la base standard à la base  $(V_1, V_2)$  est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad (7.136)$$

L'équation 7.135 est aussi l'équation caractéristique de l'équation différentielle

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0 \quad (7.137)$$

cette dernière pouvant être réécrite sous la forme

$$\dot{X} = AX, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 = \dot{x} \\ x_2 = x \end{pmatrix}$$

En posant

$$Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad (7.138)$$

l'équation devient

$$\dot{Y} = JY, \text{ soit } \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (7.139)$$

L'équation  $\dot{y}_2 = y_2$  conduit à  $y_2 = C_2 e^t$  où  $C_2$  est une constante, tandis que de l'équation  $\dot{y}_1 = y_1 + y_2$ , réécrite comme

$$e^{-t}(\dot{y}_1 - y_1) = \frac{d}{dt}(e^{-t}y_1) = C_2$$

on déduit

$$y_1 = (C_2 t + C) e^t = x_2 = x$$

Cette fois, la solution se présente comme le produit d'une exponentielle et d'une fonction affine.

Pour la généralisation de la méthode aux équations différentielles d'ordre supérieur, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de mathématiques traitant ce sujet.

### ③ Equation de l'oscillateur harmonique avec amortissement, soumis à une action extérieure

Sous forme "canonique", l'équation différentielle régissant l'évolution d'un oscillateur harmonique à une dimension, avec amortissement et soumis à une action extérieure caractérisée par une fonction  $f(t)$  s'écrit

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (7.140)$$

L'amortissement, supposé du type "frottement fluide", a pour effet d'introduire dans l'équation 7.99 un terme proportionnel à la vitesse  $\dot{x}$  avec un "coefficient de frottement"  $2\alpha$ . Pour résoudre 7.140, nous utiliserons encore une astuce similaire à celle de 7.106 en posant

$$z = x - \frac{1}{\lambda} \dot{x} \quad (7.141)$$

qui nous permettra de réduire de 2 à 1 l'ordre de l'équation. On a en effet

$$\dot{z} = \dot{x} - \frac{1}{\lambda} \ddot{x} = \dot{x} - \frac{1}{\lambda} (-2\alpha\dot{x} - \omega_0^2 x + f(t)) = \frac{\omega_0^2}{\lambda} \left\{ x + \frac{\lambda}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\lambda} \right) \dot{x} \right\} - \frac{1}{\lambda} f(t)$$

On trouve effectivement une équation du premier ordre en  $z$  à condition de poser

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\lambda} \right), \text{ soit} \\ \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (7.142)$$

c'est-à-dire, en choisissant pour  $\lambda$  l'une des solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}, \text{ avec } \Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 \quad (7.143)$$

Nous supposons ici que le discriminant  $\Delta$  est différent de zéro et qu'il y a donc deux solutions bien distinctes de 7.143, correspondant chacune à un possible  $z$ . Compte tenu de ce que  $\lambda_+ \lambda_- = \omega_0^2$ , nous poserons

$$z_{\pm} = x - \frac{1}{\lambda_{\mp}} \dot{x}, \text{ de sorte que } \dot{z}_{\pm} = \lambda_{\pm} z - \frac{\lambda_{\pm}}{\omega_0^2} f(t) \quad (7.144)$$

La résolution de cette dernière équation est immédiate (voir le paragraphe 7.3.2) et donne

$$z_{\pm} = C_{\pm} e^{\lambda_{\pm} t} - \frac{\lambda_{\pm}}{\omega_0^2} \int_{t_0}^t e^{\lambda_{\pm}(t-s)} f(s) ds \quad (7.145)$$

où  $C_{\pm}$  sont des constantes pouvant être complexes. On en déduit

$$x = \frac{\lambda_+ z_- - \lambda_- z_+}{\lambda_+ - \lambda_-} = x^{(0)} + x_p \quad (7.146)$$

où

$$x^{(0)} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \{ \lambda_+ C_- e^{\lambda_- t} - \lambda_- C_+ e^{\lambda_+ t} \} \quad (7.147)$$

est une solution générale de l'équation homogène et

$$x_p = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \int_{t_0}^t f(s) \{ e^{\lambda_+(t-s)} - e^{\lambda_-(t-s)} \} ds \quad (7.148)$$

une solution particulière de l'équation complète.

Si  $\Delta > 0$ ,  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  sont tous deux *négatifs*, et si  $\Delta < 0$  ces grandeurs sont complexes, mais leur partie réelle commune  $-\alpha$  est *negative*. Aussi, dans tous les cas, la solution générale 7.147 tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. Plus précisément, dès que  $t \gg 1/\alpha$  cette partie de la solution  $x$  devient négligeable. Le paramètre  $1/\alpha$  peut ainsi servir à séparer deux régimes. Lorsque  $t \leq 1/\alpha$ , les deux solutions  $x^{(0)}$  et  $x_p$  interviennent simultanément. On note d'ailleurs que la présence des deux est indispensable pour appliquer les conditions initiales. Le régime est alors qualifié de *transitoire*. Lorsque  $t \geq 1/\alpha$  on rentre dans un domaine où l'amplitude de  $x^{(0)}$  diminue de plus en plus à mesure que  $t$  augmente. La partie  $x_p$  peut également varier en amplitude, mais si l'excitation représentée par  $f(t)$  persiste, elle peut subsister sous une forme caractéristique à la fois de la nature de cette excitation et de la réaction de l'oscillateur. On atteint alors ce qu'on appelle un *régime forcé*.

Le paradigme de régime forcé est celui d'oscillations forcées par une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  :

$$f(t) = A \cos \omega t$$

Prenons  $t_0 = 0$  et écrivons

$$x_p = \frac{A}{2(\lambda_+ - \lambda_-)} \int_0^t \{e^{j\omega s} + e^{-j\omega s}\} \{e^{\lambda_+(t-s)} - e^{\lambda_-(t-s)}\} ds$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{j\omega s} e^{\lambda_{\pm}(t-s)} ds &= \frac{e^{\lambda_{\pm}t}}{j\omega - \lambda_{\pm}} \left[ e^{(j\omega - \lambda_{\pm})t} - 1 \right] = \frac{e^{j\omega t} - e^{\lambda_{\pm}t}}{j\omega - \lambda_{\pm}} \\ \int_0^t e^{-j\omega s} e^{\lambda_{\pm}(t-s)} ds &= \frac{e^{\lambda_{\pm}t}}{-j\omega - \lambda_{\pm}} \left[ e^{(-j\omega - \lambda_{\pm})t} - 1 \right] = \frac{e^{-j\omega t} - e^{\lambda_{\pm}t}}{-j\omega - \lambda_{\pm}} \end{aligned}$$

Pour  $t \gg 1/\alpha$ ,  $x_p$  tend vers

$$\begin{aligned} (x_p)_{\text{lim}} &= \frac{A}{2(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ e^{j\omega t} \left( \frac{1}{j\omega - \lambda_+} - \frac{1}{j\omega - \lambda_-} \right) + e^{-j\omega t} \left( \frac{1}{j\omega + \lambda_-} - \frac{1}{j\omega + \lambda_+} \right) \right\} \\ &= \frac{A}{2} \left\{ \frac{e^{j\omega t}}{(j\omega - \lambda_+)(j\omega - \lambda_-)} + \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega + \lambda_+)(j\omega + \lambda_-)} \right\} \end{aligned}$$

Or

$$(j\omega - \lambda_+)(j\omega - \lambda_-) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega, \quad (j\omega + \lambda_+)(j\omega + \lambda_-) = \omega_0^2 - \omega^2 - 2j\alpha\omega$$

d'où

$$\begin{aligned} (x_p)_{\text{lim}} &= \frac{A}{2} \left\{ e^{j\omega t} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} + e^{-j\omega t} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \right\} \\ &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t \} \end{aligned} \quad (7.149)$$

Le régime forcé, imposé, est donc dans ce cas un régime sinusoïdal de même pulsation  $\omega$  que celle du signal excitateur.

#### ④ Réaction de l'oscillateur harmonique non amorti à une brève action extérieure

Pour un oscillateur harmonique non amorti, on a  $\lambda_{\pm} = \pm j\omega_0$  et la relation 7.148 devient

$$x_p = \frac{1}{2j\omega_0} \int_{t_0}^t f(s) \{e^{j\omega_0(t-s)} - e^{-j\omega_0(t-s)}\} ds \quad (7.150)$$

En supposant qu'à  $t = -\infty$  l'oscillateur était au repos à  $x = 0$ , l'amplitude totale  $x(t)$  peut être écrite comme

$$x(t) = \frac{1}{2j\omega_0} \int_{-\infty}^t f(s) \{e^{j\omega_0(t-s)} - e^{-j\omega_0(t-s)}\} ds \quad (7.151)$$

et l'on a

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t f(s) \left\{ e^{j\omega_0(t-s)} + e^{-j\omega_0(t-s)} \right\} ds \quad (7.152)$$

d'où

$$z = \dot{x} - j\omega_0 x = \int_{-\infty}^t f(s) e^{-j\omega_0(t-s)} ds \quad (7.153)$$

Cette grandeur complexe est particulièrement utile pour exprimer l'énergie de l'oscillateur. Considérons l'exemple de l'oscillateur mécanique à une dimension dont l'énergie totale s'exprime comme

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 \}, \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

soit  $E = \frac{m}{2} |z|^2$  (7.154)

Cette expression permet notamment de déterminer l'énergie acquise par l'oscillateur au bout d'un temps infini comme <sup>14</sup>

$$\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) = \frac{m}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{j\omega_0 s} ds \right|^2 \quad (7.155)$$

sous réserve de convergence de l'intégrale apparaissant dans cette expression et qui représente la *transformée de Fourier* de  $f(s)$ , pour la pulsation  $\omega_0$ . Cette transformée de Fourier est certainement finie dans le cas d'une excitation limitée dans le temps. Par exemple, si

$$f(s) = \frac{F_0}{m}, \quad \text{pour } -\tau/2 < t < +\tau/2, \quad \text{et } f(s) = 0 \text{ si } t < -\tau/2 \text{ ou } t > +\tau/2$$

on obtient

$$\Delta E = \frac{F_0^2 \tau^2}{2m} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad \text{avec } u = \frac{\omega_0 \tau}{2}$$

et si  $u \ll 1$ , c'est-à-dire, s'il s'agit d'une très brève impulsion, auquel cas  $(\sin u)/u \simeq 1$ , il vient

$$\Delta E = \frac{F_0^2 \tau^2}{2m}$$

ce qui était prévisible, puisque  $\Delta p = F_0 \tau$  représente exactement la quantité de mouvement transférée à l'oscillateur par cette très brève impulsion qui s'apparente à un choc.

14. Voir : L. Landau, E. Lifchitz, "Physique Théorique, Tome 1, Mécanique", Ed. Mir, Moscou (1966), §22.