

## Chapitre 8

# Réseaux linéaires en régime permanent sinusoïdal

### 8.1 Les signaux sinusoïdaux

Rappelons qu'un signal  $F(t)$  est sinusoïdal si son évolution dans le temps est décrite par une fonction sinusoïdale du type

$$F(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Ses paramètres sont les suivants :

- ♣ sa pulsation  $\omega$  ;
- ♣ son amplitude maximum  $A$  ;
- ♣ sa phase  $\theta$ .

Les évolutions de ce signal se répètent périodiquement dans le temps. En effet, les deux valeurs  $F(t + \frac{2\pi}{\omega})$  et  $F(t)$  sont égales. La quantité  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , homogène à un temps, est la *période* de répétition du signal. Le nombre de périodes effectuées par unité de temps, soit  $f = 1/T$  est la *fréquence* de répétition du signal. Ce nombre est homogène à l'inverse d'un temps et s'exprime en Hertz. Si par exemple  $f = 50$  Hz, cela signifie que le signal effectue 50 périodes (ou oscillations) pendant 1 seconde. Une représentation en est donnée à la figure 8.1.

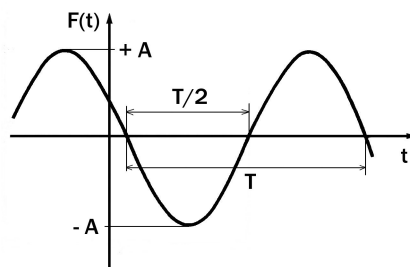


FIGURE 8.1 – Représentation d'un signal sinusoïdal

Bien sûr, un signal sinusoïdal pur qui évolue éternellement comme une fonction sinusoïdale du temps ne peut qu'être un signal idéal, une abstraction, car tous les signaux réels ont un début et une fin. Néanmoins, on peut utiliser ce modèle pour décrire avec une bonne approximation bon

nombre de signaux ayant des variations quasi-sinusoïdales pendant un laps de temps suffisamment long.

☛ Pourquoi, dans les régimes variables dans le temps, parle-t-on le plus souvent des signaux sinusoïdaux? Qu'est-ce qui justifie leur importance? Il y a tout d'abord une réponse pratique immédiate : on sait fabriquer des générateurs de tensions variables, tels que les alternateurs industriels, qui délivrent des tensions quasi-sinusoïdales; de même, les ondes porteuses utilisées dans les transmissions sont de nature quasi-sinusoïdale. Mais il y a aussi une raison théorique profonde qui rend incontournable l'étude des régimes sinusoïdaux. Elle fut établie par Fourier. Nous ferons seulement état du résultat essentiel, sans y mêler la rigueur mathématique qui ne serait pas de mise dans ce cours.

Soit  $F(t)$  un signal quelconque. Ce peut être aussi bien une tension variable appliquée aux bornes d'un circuit électrique, qu'une onde radio ou une onde acoustique. D'après la théorie de Fourier, ce signal peut être envisagé comme une superposition de signaux sinusoïdaux de diverses pulsations, selon une relation du type suivant

$$F(t) = \sum_{\omega} \mathcal{F}(\omega) \exp(j\omega t) , \text{ avec } j = +\sqrt{-1}$$

Le plus souvent, cette somme est plutôt une somme continue, c'est-à-dire une intégrale, et l'on parle alors d'intégrale de Fourier

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \tag{8.1}$$

L'amplitude *complexe* (au sens des nombres complexes!)  $\mathcal{F}(\omega)$  que l'on appelle aussi amplitude spectrale, définit le poids selon lequel le signal sinusoïdal élémentaire  $\exp(j\omega t)$  intervient dans la somme ci-dessus. Plus précisément, son module  $|\mathcal{F}(\omega)|$  est ce qu'on appelle le *spectre* en pulsation de  $F(t)$ . Si l'on connaît, pour toutes les fréquences (ou pulsations), la répartition en fréquence, c'est-à-dire la fonction  $\mathcal{F}(\omega)$ , alors, la formule ci-dessus permet en principe de reconstruire le signal  $F(t)$  par une recombinaison adéquate de signaux sinusoïdaux. Inversement, si l'on connaît le signal  $F(t)$  pour toutes les dates courant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on peut déduire l'amplitude spectrale associée à ce signal au moyen de l'*inversion* de Fourier

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt \tag{8.2}$$

Ces relations s'interprètent en disant que l'ensemble des fonctions telles que  $F(t)$  forme un espace vectoriel complexe pour lequel les fonctions  $\exp(j\omega t)$ , où  $\omega$  court de  $-\infty$  à  $+\infty$ , constituent une base. Un *vecteur* quelconque  $F(t)$  de cet espace vectoriel peut être développé suivant cette base au moyen de l'intégrale de Fourier, et la fonction  $\mathcal{F}(\omega)$  apparaît alors comme la composante de  $F(t)$  sur  $\exp(j\omega t)$ , obtenue par un produit scalaire défini par la formule inverse de Fourier<sup>1</sup>. On établit également la *relation de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \tag{8.3}$$

qui est en fait une identité sur la norme de  $F$  : le membre de gauche est une définition de cette norme et le membre de droite indique que cette norme peut s'exprimer comme la "somme" (intégrale) des carrés des composantes sur la base des fonctions  $\exp(j\omega t)$  (au facteur  $2\pi$  près). Elle s'interprète en termes énergétiques : l'énergie transportée par un signal étant proportionnelle au carré de son amplitude, le membre de droite représente l'énergie totale transportée par le signal  $F(t)$ , qui doit être égale à la somme des énergies transportées par ses composantes.

On notera que la représentation de Fourier d'un signal force déjà l'utilisation de la notation complexe  $e^{j\omega t}$  pour représenter un signal sinusoïdal. Comme nous le verrons dans la suite, elle s'avère en fait incontournable dans l'étude des circuits linéaires en régime permanent sinusoïdal.

1. Voir le complément I.

Donnons encore quelques définitions utiles pour la suite. La *valeur moyenne temporelle* d'une grandeur fonction du temps  $G(t)$  dans l'intervalle  $t_0 - (\Delta t)/2 \leq t \leq t_0 + (\Delta t)/2$  est définie par l'intégrale

$$\langle G \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} G(t) dt \quad (8.4)$$

Elle dépend a priori de  $t_0$ . Cependant, si  $G(t)$  est périodique de période  $T$ , l'opération 8.4 revient à faire la moyenne de  $G(t)$  sur une période et donne un résultat indépendant de  $t_0$  :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt \quad (8.5)$$

Si  $G(t) = G_0 \cos(\omega t + \theta)$ , on a bien sûr  $\langle G \rangle = 0$  car<sup>2</sup>

$$\int_0^T \cos \omega t dt = \int_0^T \sin \omega t dt = 0$$

En revanche la moyenne de  $G^2$  n'est pas nulle. En effet, écrivant

$$\cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \theta)]$$

et notant que<sup>3</sup>

$$\int_0^T \cos 2(\omega t + \theta) dt = 0$$

il vient

$$\langle G^2 \rangle = G_{\text{eff}}^2, \quad \text{avec} \quad G_{\text{eff}} = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \quad (8.6)$$

ce qui définit la *valeur efficace*  $G_{\text{eff}}$  de  $G$ .

## 8.2 Définition des réseaux linéaires

L'application des lois usuelles de l'Electricité en ARQS : lois de Kirchhoff (loi des mailles, loi des noeuds), loi d'Ohm, loi de Faraday, à des circuits comportant des résistances, des condensateurs, des bobines, conduit à des équations d'évolution portant sur une intensité, une charge de condensateur ou une tension quelconque, prenant la forme d'équations différentielles du type

$$D(F) = S \quad (8.7)$$

où

$$D = \sum_{r=0}^n a_r \frac{d^r}{dt^r} \quad (8.8)$$

est un opérateur différentiel portant sur la grandeur  $F$  étudiée et  $S$  un second membre qui s'exprime en fonction des diverses fem  $E_m$  intervenant dans le circuit envisagé sous la forme générale :

2. Ecrire  $\cos(\omega t + \theta) = \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta$ .

3. On peut aussi remarquer que  $\cos^2(\omega t + \theta)$  et  $\sin^2(\omega t + \theta)$  prenant le même ensemble de valeurs sur une période, on a  $\langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos^2 + \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

$$S = \sum_m^N \sum_{k=0}^{q_m} b_{m,k} \frac{d^k E_m}{dt^k} \quad (8.9)$$

Les coefficients  $a_r$  ( $r = 0, \dots, n$ ) et  $b_{m,k}$  ( $k = 0, \dots, q_m$ ;  $m = 1, \dots, N$ ) sont des *constantes réelles* qui s'expriment au moyen des paramètres caractérisant le circuit (résistances, capacités, coefficients d'auto-induction).

La propriété de ces équations, certes évidente, mais néanmoins fondamentale, est qu'elles sont *linéaires*<sup>4</sup>. En effet, l'opérateur de dérivation est lui-même linéaire en ce sens que, quelles que soient les deux fonctions  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$ , et quels que soient les deux nombres complexes constants  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , on a

$$\frac{d}{dt} \{\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2\} = \mu_1 \frac{dF_1}{dt} + \mu_2 \frac{dF_2}{dt} \quad (8.10)$$

d'où l'on déduit, d'une part, que

$$D(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2) = \mu_1 D(F_1) + \mu_2 D(F_2) \quad (8.11)$$

et, d'autre part que, considérant deux suites de fem  $E_m^{(1)}$  et  $E_m^{(2)}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) et deux nombres complexes constants  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on a

$$S \left( \left\{ \gamma_1 E_m^{(1)} + \gamma_2 E_m^{(2)} \right\} \right) = \gamma_1 S \left( \left\{ E_m^{(1)} \right\} \right) + \gamma_2 S \left( \left\{ E_m^{(2)} \right\} \right) \quad (8.12)$$

On en déduit notamment que si  $F_1$  et  $F_2$  sont les solutions générales de l'équation 8.7 avec pour seconds membres respectifs  $S \left( \left\{ E_m^{(1)} \right\} \right)$  et  $S \left( \left\{ E_m^{(2)} \right\} \right)$ , la solution générale de l'équation ayant pour second membre  $S \left( \left\{ \gamma_1 E_m^{(1)} + \gamma_2 E_m^{(2)} \right\} \right)$  est  $\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2$ . La notion de linéarité d'un réseau, déjà rencontrée lors de l'étude des régimes permanents continus, sera ainsi généralisée au cas des régimes variables de la façon suivante.

☞ Un réseau est dit *linéaire et invariant dans le temps* si toute grandeur (intensité, tension) caractérisant son état électrique est lié aux fem sources  $E_m$  par une équation différentielle telle que 8.7 avec des coefficients constants<sup>5-6</sup>.

Cette définition inclut aussi bien les régimes continus. La linéarité d'un réseau s'exprime le plus simplement et de la façon la plus spectaculaire sur les composantes sinusoïdales des signaux, telles que données par la transformation de Fourier définie par 8.1 et 8.2. En effet, les signaux  $e^{j\omega t}$  étant indépendants les uns des autres, si  $F(t)$  satisfait 8.7, chacune de ses composantes doit aussi la vérifier. Or, appliquée sur la fonction  $e^{j\omega t}$ , une dérivation temporelle revient à une simple multiplication par  $j\omega$ . La conséquence est que, pour chaque composante sinusoïdale, la relation différentielle 8.7 devient une relation algébrique :

$$D(\mathcal{F}(\omega) e^{j\omega t}) = P(p) \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \sum_m^N \mathcal{B}_m(p) \mathcal{E}_m(\omega) \quad (8.13)$$

où  $\mathcal{P}(p)$  et  $\mathcal{B}_m(p)$  sont des polynômes de la variable  $p = j\omega$  :

$$\mathcal{P}(p) = \sum_{r=0}^n a_r p^r, \quad \mathcal{B}_m(p) = \sum_{k=0}^{q_m} b_{m,k} p^k \quad (8.14)$$

4. Ce qui reflète le fait plus général que les équations de l'Electromagnétisme sont linéaires.

5. Certaines sources peuvent être en fait des sources de courant.

6. La notion d'invariance dans le temps est liée à la constance des coefficients de l'équation et ne sera plus mentionnée dans la suite.

et  $\mathcal{E}_m(\omega)e^{j\omega t}$  la composante sinusoïdale de  $E_m(t)$  correspondant à la pulsation  $\omega$ . Après simplification par le facteur commun  $e^{j\omega t}$  on obtient ainsi

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}(p)} \sum_m^N \mathcal{B}_m(p) \mathcal{E}_m(\omega) \quad (8.15)$$

A supposer que  $F(t)$  soit la grandeur intéressante sur le plan pratique, et qui pour cette raison sera appelée *grandeur de sortie*, les fractions rationnelles  $\mathcal{B}_m(p)/\mathcal{P}(p)$  décrivent la *réponse fréquentielle* du circuit en retour de *signaux d'entrée*, représentés ici par les fem  $\mathcal{E}_m(\omega)$ . Elle sont indépendantes de ces dernières : ce sont des caractéristiques du circuit. A l'aide de ces quantités, on peut alors, en principe, en combinant 8.15 et 8.1, reconstruire la solution  $F(t)$  résultant des excitations  $E_m(t)$ .

☛ La transformation de l'équation différentielle 8.7 en relation algébrique 8.15 montre tout l'intérêt qu'il y a, d'une part, à considérer d'emblée la réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale, et, d'autre part, à représenter cette dernière par la notation complexe  $e^{j\omega t}$ , comme l'incite la transformation de Fourier. Une représentation réelle telle que  $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ , bien que correspondant au signal observé qui, lui, est nécessairement réel, compliquerait en fait les calculs. En effet, une dérivation temporelle la transforme en  $Y(t) = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$  qui est une fonction indépendante d'elle, tandis que le résultat de cette opération sur la fonction  $e^{j\omega t}$  revient simplement à multiplier celle-ci par  $j\omega$ , donnant une fonction ayant la *même dépendance temporelle*. De même, l'intégration d'un cosinus le transforme en un sinus, alors qu'elle revient à diviser  $e^{j\omega t}$  par  $j\omega$ . Il en résulte que, dans une équation électrique donnée où peuvent intervenir à la fois des dérivations et des intégrations (une charge est l'intégrale d'une intensité), lesdites opérations deviennent purement algébriques (multiplication, division) lorsqu'elles sont appliquées à  $e^{j\omega t}$ , ce qui ne peut être réalisé avec la représentation réelle  $X(t)$ . En outre, étant commun à tous les termes de l'équation, le facteur  $e^{j\omega t}$  peut en être immédiatement extrait, ce qui conduit à une équation, certes complexe (au sens des nombres complexes), mais *algébrique* avec des termes indépendants du temps, ce qui représente un gain considérable de simplification<sup>7</sup>.

Précisons ici ce passage de la notation réelle à la notation complexe pour un régime permanent sinusoïdal :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta) \rightarrow x(t) = Ae^{j\theta} e^{j\omega t}, \quad \text{donc} \quad X(t) = \Re(x(t)) \quad (8.16)$$

Cherchons une solution *réelle* sinusoïdale  $X(t)$  de l'équation 8.7 avec des fem sinusoïdales *réelles*  $E_m(t) = E_{0m} \cos(\omega t + \theta_m)$  :

$$D(A \cos(\omega t + \theta)) = S(\{E_{0m} \cos(\omega t + \theta_m)\}) \quad (8.17)$$

Les coefficients de l'équation étant constants, une dérivation temporelle des deux membres de l'équation ou aussi bien le changement  $\omega t \rightarrow \omega t + \pi/2$  conduisent à cette autre équation

$$D(A \sin(\omega t + \theta)) = S(\{E_{0m} \sin(\omega t + \theta_m)\}) \quad (8.18)$$

Comme les opérateurs  $D$  et  $S$  sont *linéaires*, l'addition de 8.17 et de 8.18 que l'on a préalablement multipliée par  $j$  donne

$$D(Ae^{j\theta} e^{j\omega t}) = S(\{E_{0m} e^{j\theta_m} e^{j\omega t}\}) = D(x(t)) \quad (8.19)$$

La fonction  $x(t)$  satisfait donc 8.7 où le second membre est exprimé au moyen des représentations complexes des fem. On obtient alors immédiatement

$$x(t) = e^{j\omega t} \frac{1}{\mathcal{P}(p)} \sum_m^N \mathcal{B}_m(p) E_{0m} e^{j\theta_m} \quad (8.20)$$

7. Afin de ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous ne décrivons pas ici la *représentation de Fresnel* des tensions et des intensités qui fut supplantée en simplicité par la représentation complexe.

La solution *réelle*  $X(t)$  s'obtient ensuite simplement comme la partie réelle du complexe 8.20.

### 8.3 Impédances complexes<sup>8</sup>

Considérons à nouveau le circuit de la figure 8.2 en régime permanent sinusoïdal. En notation réelle, l'équation d'évolution de la charge  $Q$  du condensateur s'écrit

$$\dot{Q} + \frac{Q}{\tau} = \frac{E_0}{R} \cos \omega t \quad (8.21)$$

A ce point, il est utile de préciser que les conventions de signe qui prévalent en régime continu pour appliquer les lois de Kirchhoff deviennent ici des conventions de phase. Pour trouver 8.21, la phase de la tension  $E$  est prise comme référence, avec  $V_G - V_H = E_0 \cos \omega t$ .

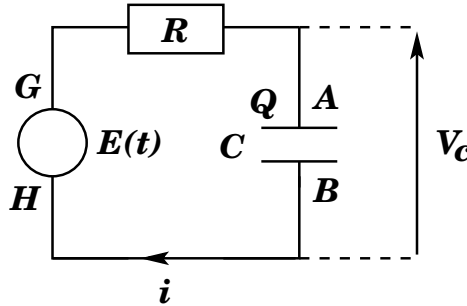


FIGURE 8.2 – Circuit  $(R, C)$  en régime permanent sinusoïdal

Posant  $Q = Q_0 \cos(\omega t + \psi)$ , puis  $q = Q_0 e^{j\psi} e^{j\omega t}$  et  $e = E_0 e^{j\omega t}$ , l'équation 8.21 transcrite en notation complexe est

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{e}{R}, \quad \text{soit} \quad q = \frac{1}{R} \frac{e}{j\omega + 1/\tau} \quad (8.22)$$

d'où

$$Q = \Re \left\{ \frac{E_0}{R} [\cos \omega t + j \sin \omega t] \frac{1/\tau - j\omega}{\omega^2 + 1/\tau^2} \right\} = \frac{E_0}{R(\omega^2 + 1/\tau^2)} \left\{ \frac{1}{\tau} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right\} \quad (8.23)$$

et l'on retrouve ainsi l'expression de  $Q$  obtenue au paragraphe 7.4.1. Intéressons-nous ensuite à l'intensité du courant. En notation complexe, on a

$$i = \dot{q} = j\omega q = \frac{e}{Z_{RC}}, \quad \text{avec} \quad Z_{RC} = R + \frac{1}{jC\omega} \quad (8.24)$$

L'utilisation de la notation complexe permet donc d'obtenir entre  $i$  et  $e$  une simple relation de proportionnalité, similaire à la loi d'Ohm pour une résistance. Ce fait, mis en évidence par A. E. Kennely en 1893<sup>9</sup>, donne un avantage décisif de cette notation sur la notation réelle. Le facteur de proportionnalité  $Z_{RC}$  est *l'impédance complexe* du circuit  $(R, C)$ , notion déjà abordée sous une autre forme au paragraphe 7.4.3, mais qui trouve ici toute sa signification. Écrivons

$$Z_{RC} = |Z_{RC}| e^{j\varphi}, \quad \text{avec} \quad |Z_{RC}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}, \quad \tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega} \quad (8.25)$$

8. Le terme *impédance* fut introduit en 1886 par O. Heaviside.

9. A. E. Kennely, "Impedance", Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, X (1893), pp175-216.

On obtient alors

$$i = \frac{e}{|Z_{RC}|} e^{-j\varphi}, \text{ puis } I = \Re(i) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (8.26)$$

En fait, il apparaît que la relation de proportionnalité intensité-tension en représentation complexe se vérifie pour toute portion de circuit linéaire. Ceci permet d'établir une véritable généralisation de la loi d'Ohm aux régimes permanents sinusoïdaux, avec des conséquences énormes sur la vision que l'on peut avoir d'un circuit linéaire, si compliqué soit-il. On se rappelle en effet que c'est de l'association des lois de Kirchhoff, de la loi de Pouillet et de la loi d'Ohm que découlent les nombreux théorèmes portant sur les réseaux linéaires en régime permanent continu, qui ont fait l'objet du chapitre 5. Comme ces lois sont toutes directement transposables en notation complexe, lesdits théorèmes sont tous également applicables aux réseaux linéaires en régime sinusoïdal permanent, le mot *résistance* étant alors purement et simplement remplacé par *impédance*.

### 8.3.1 Impédances de dipôles linéaires élémentaires et de leurs associations<sup>10</sup>

Une impédance est souvent notée  $Z$ . Son module est  $|Z|$  et  $\varphi$  est l'argument (ou phase) de ce nombre complexe. Sa partie réelle, toujours positive pour un dipôle passif (voir plus loin), est souvent appelée *partie résistive* ou *résistance* de l'impédance, bien que, pouvant dépendre de la pulsation, elle ne représente généralement pas une résistance pure. Sa partie imaginaire est appelée *réactance*.

#### ① Résistance pure

De façon évidente, la loi d'Ohm classique est ici préservée. La tension  $v$  aux bornes d'une résistance pure  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $i$  est donnée par  $v = Ri$ , d'où l'impédance de cette résistance :

$$Z \equiv R : |Z| = R, \quad \varphi = \arg(Z) = 0 \quad (8.27)$$

#### ② Inductance pure

La tension  $v$  aux bornes d'une bobine parfaite de coefficient d'auto-induction  $L$  étant donnée en fonction de l'intensité  $i$  du courant traversant celle-ci par  $v = L \frac{di}{dt} = j\omega L i$ , l'impédance correspondante est

$$Z = jL\omega : |Z| = L\omega, \quad \varphi = +\frac{\pi}{2} \quad (8.28)$$

C'est une réactance pure.

#### ③ Capacité pure

Le courant de charge d'un condensateur parfait de capacité  $C$  aux bornes duquel est établie la tension  $v$  a pour intensité  $i = C \frac{dv}{dt} = j\omega C v$ , d'où l'impédance de cet élément :

$$Z = \frac{1}{jC\omega} : |Z| = \frac{1}{C\omega}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (8.29)$$

C'est aussi une réactance pure.

#### ④ Association en série

L'association en série de  $N$  dipôles linéaires d'impédances respectives  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  est équivalente à un dipôle linéaire unique d'impédance

10. Dorénavant, par simplicité, nous dirons simplement *impédance* pour *impédance complexe*.

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \quad (8.30)$$

Par exemple, l'association en série  $(R, L, C)$  a pour impédance

$$Z = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) : |Z| = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}, \quad \tan \varphi = \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (8.31)$$

### ⑤ Association en parallèle

Une *admittance* est l'inverse d'une impédance et est souvent notée  $Y = \frac{1}{Z}$ . Une association en parallèle de  $N$  dipôles linéaires d'admittances respectives  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  est équivalente à un dipôle linéaire unique d'admittance

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (8.32)$$

Par exemple, un condensateur réel pouvant comporter une "résistance de fuite" est modélisé par l'association d'un condensateur parfait de capacité  $C$  en parallèle avec une résistance pure  $R$ . Son impédance  $Z$  est ainsi donnée par

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + jC\omega, \quad \text{soit} \quad Z = \frac{R}{1 + jRC\omega} : |Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}, \quad \tan \varphi = -RC\omega \quad (8.33)$$

Un autre exemple est celui du *circuit bouchon* comportant en parallèle une inductance pure et un condensateur parfait et dont l'impédance est donnée par

$$\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}, \quad \text{soit} \quad Z = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} \quad (8.34)$$

Son module devient très grand à l'approche de la pulsation de résonance  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , ce qui interdit alors le passage d'un courant (d'où le nom de ce dipôle).

## 8.3.2 Impédance et équation différentielle

Il est utile d'insister ici sur le fait que la structure d'une impédance est le reflet de l'équation différentielle dont celle-ci est issue. En effet, la présence d'un facteur  $j\omega$  est la trace d'une dérivation et celle d'un facteur  $1/(j\omega)$ , d'une intégration. Pour retrouver l'équation différentielle, il peut d'ailleurs être plus aisé de déterminer préalablement l'impédance qui en résulte. A titre d'exemple, considérons le circuit de la figure 8.3 et recherchons l'équation différentielle satisfaite par l'intensité  $i_2$ .

Pour ce faire, nous nous placerons en régime sinusoïdal permanent et déterminerons la tension  $v = V_A - V_B$  correspondante. L'intensité  $i_2$  s'en déduit par la relation  $i_2 = v/Z_2$  où  $Z_2 = R_2 + 1/(jC_2\omega)$  est l'impédance de la branche correspondante. L'impédance des branches  $AiB$  et  $AEB$  sont respectivement  $Z = R + jL\omega$  et  $Z_1 = R_1 + 1/(jC_1\omega)$ . La tension  $v$  s'obtient le plus simplement en appliquant le théorème de Millman :

$$v = \frac{e/Z_1}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z}$$

d'où

$$i_2 = \frac{eZ}{Z_1Z_2 + ZZ_1 + ZZ_2}, \quad \text{soit} \quad [Z_1Z_2 + ZZ_1 + ZZ_2] i_2 = Ze$$



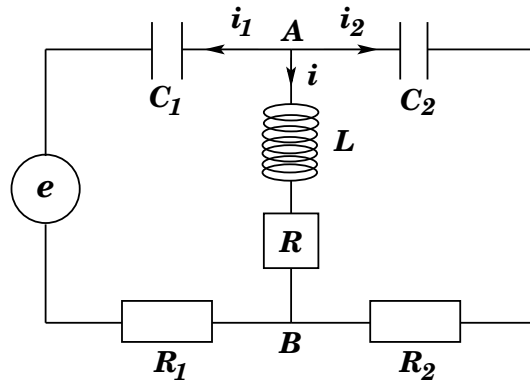


FIGURE 8.3 – Exemple de circuit linéaire

En explicitant les impédances, on obtient

$$\frac{1}{-C_1 C_2 \omega^2} \{ (1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2) + (R + jL\omega) [jC_2\omega(1 + jR_1 C_1\omega) + jC_1\omega(1 + jR_2 C_2\omega)] \} i_2 = (R + jL\omega) e$$

puis

$$\{ 1 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2) - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega R(C_1 + C_2) - \omega^2 R C_1 C_2 (R_1 + R_2) - \omega^2 L(C_1 + C_2) + (j\omega)^3 L C_1 C_2 (R_1 + R_2) \} i_2 = C_1 C_2 (R + jL\omega) (-\omega^2 e)$$

d'où l'équation différentielle

$$i_2 + [R_1 C_1 + R_2 C_2 + R(C_1 + C_2)] \frac{di_2}{dt} + \{ L(C_1 + C_2) + C_1 C_2 [R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)] \} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L C_1 C_2 (R_1 + R_2) \frac{d^3 i_2}{dt^3} = C_1 C_2 \left[ R \frac{d^2 e}{dt^2} + L \frac{d^3 e}{dt^3} \right]$$

Nous laissons au lecteur le soin de la retrouver directement par une méthode plus classique...

## 8.4 Puissance en régime sinusoïdal permanent

### 8.4.1 Facteur de puissance

Considérons un dipôle linéaire *passif*, c'est-à-dire, ne comportant aucune source interne d'énergie. En régime sinusoïdal permanent, nous écrivons la tension *réelle* aux bornes de ce dipôle sous la forme  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , avec  $V_0 > 0$ , en choisissant la phase de cette tension comme référence. Notons  $Z = |Z|e^{j\varphi}$  l'impédance du dipôle. L'intensité *réelle* du courant qui y circule aura donc pour expression  $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ , avec  $I_0 = V_0/|Z|$ . La puissance électrique *instantanée* développée dans le dipôle est <sup>11</sup>

$$P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \quad (8.35)$$

Sa valeur moyenne présente plus d'intérêt, tant sur le plan pratique que sur le plan théorique. Il s'agit de

11. Prendre garde au fait que cette puissance, qui est une grandeur réelle, ne s'exprime en aucun cas comme le produit *vi* des grandeurs *complexes*  $v$  et  $i$ !

$$P_m = \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (8.36)$$

où  $T = 2\pi/\omega$ . L'expression de cette puissance moyenne ressemble à celle qui prévaut en régime permanent continu, à condition de remplacer  $V$  et  $I$  par les valeurs efficaces  $V_{\text{eff}} = V_0/\sqrt{2}$  et  $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ , respectivement, mais à ceci près qu'un nouveau facteur intervient ici : le *facteur de puissance*  $\cos \varphi$ . Celui-ci est directement lié à la partie réelle de l'impédance du dipôle, puisque  $\Re(Z) = |Z| \cos \varphi$ . La puissance 8.36 étant *consommée* se doit d'être une grandeur *positive*. On en déduit que, quel que soit le dipôle passif considéré, son impédance a certainement une partie réelle *positive* :

$$\Re(Z) \geq 0 \quad (8.37)$$

En conséquence, un calcul d'impédance conduisant finalement à une valeur négative de sa partie réelle est certainement *faux*!

Le produit  $P_a = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  est souvent appelé *puissance apparente* et s'exprime en voltampère (VA) tandis que  $P_m$  s'exprime en Watt.

On notera que la puissance électrique moyenne développée dans une réactance pure est *nulle*, puisque pour celle-ci  $\varphi = \pm\pi/2$ .

#### 8.4.2 Puissance active, puissance réactive, “puissance complexe”, théorème de Boucherot

Utilisant des formules de trigonométrie élémentaire, l'expression 8.35 de la puissance instantanée peut être réécrite sous la forme

$$P = P_m [1 + \cos 2(\omega t - \varphi)] - P_r \sin 2(\omega t - \varphi) \quad (8.38)$$

avec  $P_m = \langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{I_0^2}{2} \Re(Z)$ ,  $P_r = \frac{V_0 I_0}{2} \sin \varphi = \frac{I_0^2}{2} \Im(Z)$

le premier terme de 8.38 est la puissance instantanée consommée dans les parties résistives du circuit ( $\Re(Z)$ ), oscillant à la pulsation  $2\omega$  autour de sa valeur moyenne  $P_m$ , dite aussi *puissance active*. Le second terme est une puissance instantanée développée dans les parties réactives ( $\Im(Z)$ ), oscillant aussi à la pulsation  $2\omega$  et dont la valeur moyenne est nulle ; la grandeur  $P_r$  est appelée *puissance réactive* et est exprimée en voltampères réactifs (VAR). En fait, la puissance active  $P_m$  est associée à la partie du courant en phase avec la tension, d'intensité  $I_1 = I_0 \cos \omega t \cos \varphi$ , tandis que la puissance réactive  $P_r$  est associée à la partie du courant en quadrature avec la tension, d'intensité  $I_2 = I_0 \sin \omega t \sin \varphi$ . L'intensité totale est la somme de ces intensités, mais seule  $I_1$  conduit à une puissance moyenne non nulle. C'est pourquoi  $I_1$  et  $I_2$  sont parfois appelées *courant watté* et *courant déwatté*, respectivement.

On note que

$$P_m = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \text{et} \quad P_r = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$$

peuvent être considérés comme, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire du complexe

$$\mathcal{P} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j\varphi} \quad (8.39)$$

appelé *puissance complexe* et dont le module est la puissance apparente  $P_a$ . On a donc

$$P_a = |\mathcal{P}| = \sqrt{P_m^2 + P_r^2} \quad (8.40)$$

On notera que la puissance complexe peut également s'exprimer au moyen des valeurs complexes instantanées de la tension et de l'intensité du courant :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} v i^* \quad (8.41)$$

où  $i^* = I_0 e^{-j(\omega t - \varphi)}$  est le complexe conjugué de  $i$ . La relation 8.40 peut être simplement représentée dans le plan complexe par un *triangle des puissances* (figure 8.4). La partie réelle  $P_m$  est toujours positive, tandis que la partie imaginaire  $P_r$  peut être positive, auquel cas le circuit est dit *inductif*, négative, le circuit est alors dit *capacitif*, ou bien nulle et le circuit est dit *résistif*.

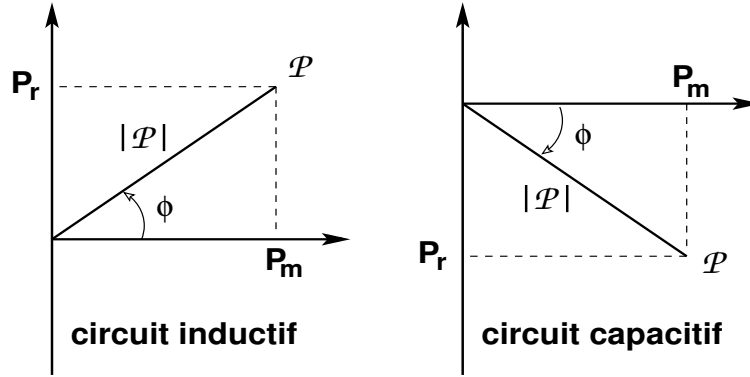


FIGURE 8.4 – Triangle des puissances

Supposons que le circuit ne comporte que des impédances en série. En notation complexe, notons  $v$  la tension aux bornes du circuit total et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les tensions aux bornes des diverses impédances. Comme l'intensité complexe  $i$  du courant est la même tout le long de cette chaîne, on a

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} v i^* = \frac{1}{2} \{v_1 i^* + v_2 i^* + \dots + v_n i^*\} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_n$$

Supposons ensuite que le circuit, sous la tension  $v$ , soit constitué de  $n$  impédances toutes en parallèle. L'intensité du courant total est la somme des intensités dans les diverses branches en parallèle et l'on a

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} v i^* = \frac{1}{2} \{v i_1^* + v i_2^* + \dots + v i_n^*\} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_n$$

En conclusion :

☞ La puissance complexe totale d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal permanent est égale à la somme des puissances complexes des impédances du réseau.

Egalant les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part, on en déduit le *théorème de Boucherot* :

♠ La puissance active consommée dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal permanent est égale à la somme des puissances actives consommées par les impédances du réseau :

$$P_m = P_a \cos \varphi = \sum_k P_{m,k} = \frac{1}{2} \sum_k (V_0)_k (I_0)_k \cos \varphi_k \quad (8.42)$$

Cette relation, dont tous les termes sont positifs, ne fait qu'exprimer la conservation de l'énergie.

♠ La puissance réactive du réseau est la somme algébrique des puissances réactives des diverses impédances du réseau :

$$P_r = P_a \sin \varphi = \sum_k P_{r,k} = \frac{1}{2} \sum_k (V_0)_k (I_0)_k \sin \varphi_k \quad (8.43)$$

Cette somme peut comporter des termes positifs comme des termes négatifs selon que les impédances sont de type inductif ou de type capacitif.

A noter que puisque  $P_a^2 = P_m^2 + P_r^2$ , on a

$$P_a^2 = \left( \sum_k V_{\text{eff}k} I_{\text{eff}k} \cos \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_k V_{\text{eff}k} I_{\text{eff}k} \sin \varphi_k \right)^2$$

et que par conséquent, la relation

$$P_a^2 = \sum_k P_{ak}^2$$

n'est généralement pas satisfaite.

### 8.4.3 Adaptation d'impédance

Dans la pratique, on peut vouloir disposer d'un maximum de puissance aux bornes d'un dipôle donné et pour cela chercher à améliorer son facteur de puissance, dont la valeur est cependant limitée à 1. Voyons comment cela pourrait être réalisé, en considérant le schéma de la figure 8.5

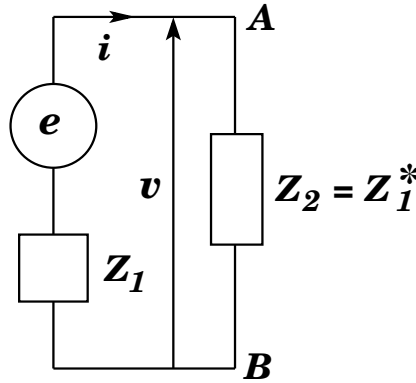


FIGURE 8.5 – Adaptation d'impédance

dans lequel le générateur de fem  $e$  et d'impédance interne  $Z_1$  peut être réel ou constituer un générateur équivalent de Thévenin. Dans un cas comme dans l'autre, ses caractéristiques sont supposées données. Pour le moment, on ne pré suppose rien sur l'impédance  $Z_2$ , dite *impédance de charge*. Posons  $v = v_A - v_B$ ,  $Z_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ ,  $Z_2 = \alpha_2 + j\beta_2$ . On a

$$i = \frac{e}{Z_1 + Z_2}, \quad v = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} e = Z_2 i$$

La puissance moyenne développée dans l'impédance  $Z_2$  est

$$P_2 = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} I_0^2 |Z_2| \cos \varphi_2 = \frac{E_0^2}{2} \frac{\alpha_2}{D}, \quad \text{avec } D = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 \quad (8.44)$$

Elle apparaît comme une fonction des deux paramètres libres  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ . Recherchons si elle peut présenter un maximum. On a

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} = \frac{E_0^2}{2D^2} \{ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 \} , \quad \frac{\partial P_2}{\partial \beta_2} = -\frac{E_0^2}{2D^2} (\beta_1 + \beta_2) \quad (8.45)$$

On voit que, vis-à-vis de  $\beta_2$ ,  $P_2$  a un maximum pour  $\beta_2 = -\beta_1$ , ce que l'on interprète en disant qu'il faut en premier lieu compenser la partie dite *réactive* de la source, représentée par  $\beta_1$ . On a alors

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} = \frac{E_0^2}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

et  $P_2$  est aussi maximum pour  $\alpha_2 = \alpha_1$  : les parties dites *résistives* de la source et de l'impédance de charge doivent être identiques. En conclusion, la puissance moyenne  $P_2$  présente un maximum absolu pour  $\alpha_2 = \alpha_1$  et  $\beta_2 = -\beta_1$ , c'est-à-dire, si  $Z_2$  est le *conjugué complexe* de  $Z_1$  :

$$P_2 \text{ maximum} = \frac{E_0^2}{8\alpha_1} \longleftrightarrow Z_2 = Z_1^* \quad (8.46)$$

En choisissant convenablement  $Z_2$  de telle sorte que le circuit soit le moins réactif possible (réactance totale nulle), on peut donc, théoriquement, augmenter la puissance qui y est délivrée. On dit alors que l'on a *adapté* l'impédance  $Z_2$ . Dans cette situation,  $i$  est en phase avec  $e$ .

La puissance totale moyenne délivrée par le générateur est quant à elle

$$P_g = \langle E(t)I(t) \rangle = \frac{1}{2} E_0 I_0 \frac{\Re(Z_1 + Z_2)}{|Z_1 + Z_2|} = \frac{E_0^2}{2} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{D^2} \quad (8.47)$$

Elle est aussi maximum pour  $\beta_2 = -\beta_1$  et devient alors

$$P_g = \frac{E_0^2}{2} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (8.48)$$

Cette expression est une fonction décroissante de  $\alpha_2$ . On augmente ou on diminue sa valeur selon que, initialement,  $\alpha_2$  était plus grand ou plus petit que  $\alpha_1$ , respectivement. Pour  $\alpha_2 = \alpha_1$ , elle est égale au *double* de  $P_2$ , une moitié de cette puissance étant alors dissipée dans l'impédance interne du générateur.

#### • Remarques

- On notera ici que l'adaptation ne consiste pas seulement à améliorer le facteur de puissance car toute modification de l'impédance de charge entraîne une modification de l'intensité du courant qui la traverse.
- Les impédances sont en toute généralité fonctions de la pulsation. Par conséquent, une adaptation peut n'être réalisable que pour une pulsation donnée.

### 8.4.4 Circuits adaptateurs d'impédances

Lorsque l'impédance de la source et l'impédance de charge sont quelconques, il est nécessaire d'avoir recours à un dispositif *adaptateur d'impédance* dont le rôle est de transformer  $Z_2$  en  $Z_1^*$ . Plus précisément, en interposant cet adaptateur entre la source et la charge, on fait en sorte que l'impédance globale de charge, vue depuis la source, soit égale à  $Z_1^*$  ou s'en approche. Pour simplifier le propos, supposons que les deux impédances soient des résistances pures :  $Z_1 = R_1$  et  $Z_2 = R_2$ . Pour circuit adaptateur, choisissons celui encadré dans la figure 8.6, dit *circuit en L*. Cette cellule comprend deux impédances purement *réactives*, c'est-à-dire sans partie réelle (réactances pures), l'une,  $jX_p$ , mise en parallèle, l'autre,  $jX_s$ , en série avec  $R_2$ .

Depuis la source, l'impédance  $Z_e$  vue entre  $A$  et  $B$  est donnée par

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{jX_p} + \frac{1}{R_2 + jX_s} \quad (8.49)$$

On détermine  $X_p$  et  $X_s$  de telle sorte qu'elle soit égale à  $R_1$ . D'où

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{j}{X_p} + \frac{R_2 - jX_s}{R_2^2 + X_s^2}, \text{ soit } R_2^2 + X_s^2 = R_1 R_2 = -X_p X_s$$

en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires. Pour que ce système fonctionne, deux conditions apparaissent immédiatement :

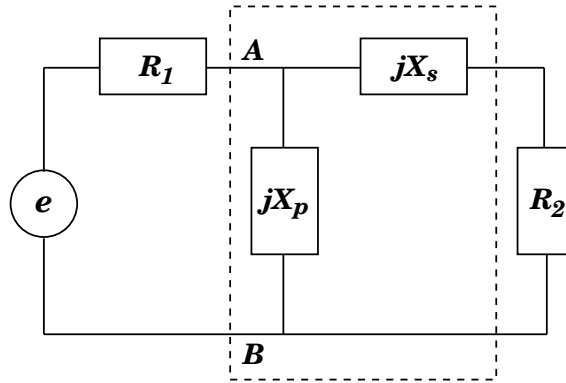


FIGURE 8.6 – Adaptation d'impédance par une cellule en L (I) : pour  $R_2 < R_1$

- comme  $X_p X_s = -R_1 R_2 < 0$ , les deux réactances  $X_p$  et  $X_s$  doivent être de signes opposés ;
- puisque  $X_s^2 = R_2(R_1 - R_2) > 0$ , l'impédance  $jX_s$  doit se trouver du côté de la résistance la plus faible, soit  $R_2$ .

On trouve les solutions :

$$X_s = \pm R_2 \sqrt{\rho - 1}, \quad X_p = \mp \frac{R_1}{\sqrt{\rho - 1}}, \quad \text{avec } \rho = \frac{R_1}{R_2} > 1 \quad (8.50)$$

Si  $R_2 > R_1$ , il faut placer  $A$  et  $B$  aux bornes de  $Z_2$ , l'impédance  $jX_s$  se trouvant alors du côté de  $R_1$ . La condition d'adaptabilité devient dans ce cas

$$R_1 = jX_s + \frac{1}{1/R_2 + 1/(jX_p)}$$

d'où l'on tire

$$X_s = \pm R_1 \sqrt{\rho' - 1}, \quad X_p = \mp \frac{R_2}{\sqrt{\rho' - 1}}, \quad \text{avec } \rho' = \frac{R_2}{R_1} > 1 \quad (8.51)$$

• Remarquons que, symétriquement, l'impédance du générateur équivalent de Thévenin, tel que vu depuis la charge, est égale à  $R_2$ .

Considérons l'exemple suivant :  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 5000 \Omega$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ MHz}$ . Comme  $R_2 > R_1$ , on doit appliquer les conditions 8.51. Choisissons pour impédances  $X_p$  et  $X_s$  celles d'une inductance pure et d'un condensateur parfait. On dispose des deux possibilités (a) et (b) représentées à la figure 8.7. On trouve, pour (a) :

$$L_a = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\rho' - 1} \simeq 1,1 \mu\text{H}, \quad C_a \simeq \frac{\sqrt{\rho' - 1}}{R_2 \omega} \simeq 2,2 \text{ pF} \quad (8.52)$$

et pour (b) :

$$L_b = \frac{R_2}{\omega \sqrt{\rho' - 1}} \simeq 1,1 \mu\text{H}, \quad C_b = \frac{1}{\omega R_1 \sqrt{\rho' - 1}} \simeq 2,3 \text{ pF} \quad (8.53)$$

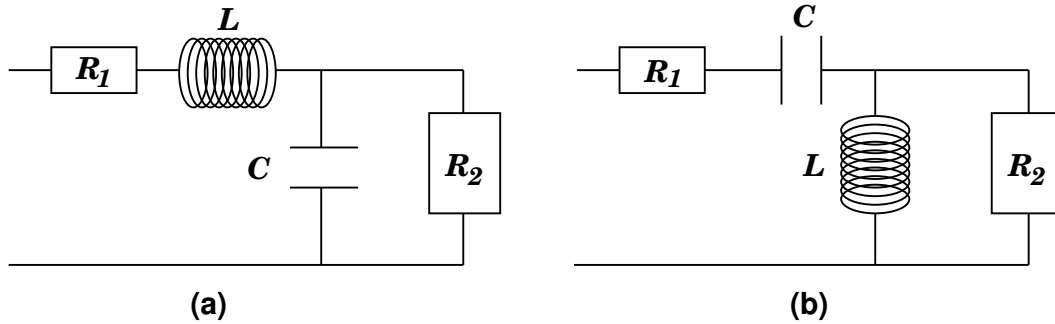


FIGURE 8.7 – Adaptation d'impédance par des cellules en L (II) : pour  $R_2 > R_1$

c'est-à-dire, sensiblement le même ensemble de valeurs pour les deux montages. On notera cependant que l'adaptation ne sera parfaitement réalisée que pour la pulsation indiquée.

Le lecteur pourra vérifier que, bien que l'adjonction d'un adaptateur change l'intensité  $i_2$  circulant dans  $R_2$ , la puissance moyenne consommée dans cette résistance est encore égale à la valeur maximum  $P_2 = E_0^2 / (8R_1)$  (voir 8.46). Ceci s'explique par le fait que la puissance moyenne développée dans les réactances pures est nulle.

#### 8.4.5 Autre procédé pour améliorer la puissance transmise

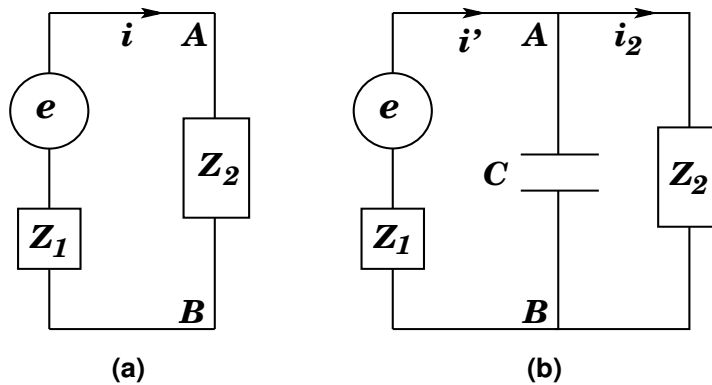


FIGURE 8.8 – Amélioration de la puissance transmise par adjonction d'un condensateur

Dans le circuit de la figure 8.8 (a), la puissance moyenne développée dans l'impédance de charge  $Z_2$  est

$$P_2 = \frac{E_0^2}{2} \frac{\Re(Z_2)}{|Z_1 + Z_2|^2} = \frac{E_0^2}{2|Z_1|^2} \frac{\Re(Z_2)}{|Z_2|^2} \frac{1}{|1/Z_1 + 1/Z_2|^2} = \frac{E_0^2}{2|Z_1|^2} \Re\left(\frac{1}{Z_2}\right) \frac{1}{|1/Z_1 + 1/Z_2|^2} \quad (8.54)$$

tandis que dans le circuit (b) de cette même figure, elle vaut

$$P'_2 = \frac{E_0^2}{2|Z_1|^2} \Re\left(\frac{1}{Z_2}\right) \frac{1}{|1/Z_1 + 1/Z_2'|^2}, \quad \text{avec} \quad 1/Z_2' = 1/Z_2 + jC\omega \quad (8.55)$$

Supposons que  $Z_2$  ait une réactance *positive* (type inductif<sup>12</sup>). Son admittance  $Y_2 = 1/Z_2$  a donc une partie imaginaire *négative*. En plaçant le condensateur de capacité  $C$  en dérivation avec  $Z_2$  l'idée est d'ajuster  $C$  de façon à éliminer cette partie imaginaire :

$$C\omega = -\Im(1/Z_2)$$

auquel cas  $Z_2'$  devient réelle, et présente alors un facteur de puissance égal à 1. Posons  $1/Z_1 = \gamma_1 + j\delta_1$ ,  $1/Z_2 = \gamma_2 + j\delta_2$ . Avec  $C\omega = -\delta_2 > 0$ , on a

$$\frac{P'_2}{P_2} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2 + C\omega)^2} = 1 + \frac{\delta_2(\delta_2 + 2\delta_1)}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + \delta_1^2} \quad (8.56)$$

Ce rapport est supérieur à 1 dès lors que  $|\delta_2| > 2\delta_1$ , ce qui est vérifié si  $Z_1$  est purement résistive. Notons que si  $\delta_1$  est aussi négatif, la capacité  $C$  pourrait être ajustée de façon à éliminer la somme  $\delta_1 + \delta_2$  (d'où une réactance totale nulle).

## 8.5 Les quadripôles linéaires

### 8.5.1 Définition, conventions

Le quadripôle représenté à la figure 8.9 (a) est une portion de circuit comportant quatre bornes : deux bornes  $A_1$  et  $B_1$ , dites *d'entrée*, et deux bornes  $A_2$  et  $B_2$ , dites *de sortie*. Le quadripôle est dit *actif* s'il comporte une source interne d'énergie. Il est dit *passif* s'il n'en contient pas. Nous ne considérerons ici que des quadripôles passifs et linéaires. Dans la description générale d'un quadripôle, on adopte la *convention récepteur*, aussi bien pour l'entrée que pour la sortie, comme indiqué dans la figure 8.9 (voir le chapitre 3).

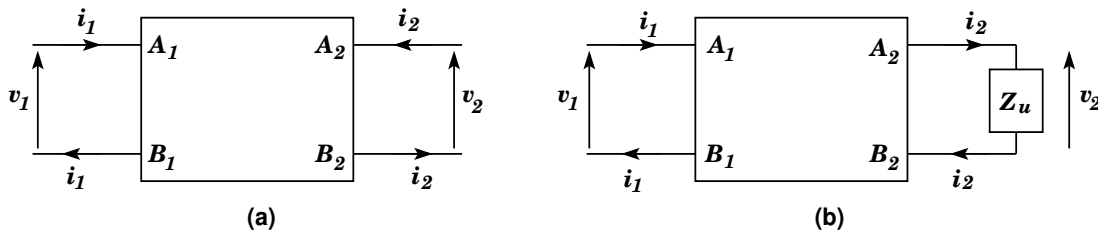


FIGURE 8.9 – Schémas d'un quadripôle - I -

Cependant, lorsqu'il est inséré dans un circuit, les bornes d'entrée du quadripôle sont reliées à une source de tension ou de courant tandis que ses bornes de sortie sont reliées à un sous-circuit passif dit *d'utilisation*. La partie du circuit en amont de ce sous-circuit peut être vue comme un générateur équivalent de Thévenin. Pour cette raison, il est préférable d'adopter alors la convention générateur pour la sortie du quadripôle, ce qui revient à changer  $i_2$  en  $-i_2$  (figure 8.9 (b)). Dans la suite, nous garderons donc la convention récepteur à l'entrée et la convention générateur à la sortie, comme indiqué à la figure 8.10. Les tensions et intensités de courant d'entrée et de sortie seront notées  $(v_1, i_1)$  et  $(v_2, i_2)$ , respectivement.

12. C'est une situation assez courante dans la pratique.



## 8.5.2 Equations du quadripôle

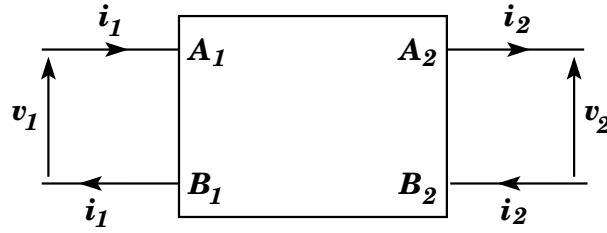


FIGURE 8.10 – Schémas d'un quadripôle - II -

Dans le schéma de la figure 8.9 (a), on peut imaginer que les tensions  $v_1$  et  $v_2$  sont des fem délivrées par des générateurs de tension parfaits. Vu de cette manière, l'ensemble apparaît comme un circuit classique comportant uniquement deux sources de tension. Comme ce circuit est linéaire, les deux intensités  $i_1$  et  $i_2$  s'expriment comme des combinaisons linéaires des deux tensions  $v_1$  et  $v_2$  :

$$i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2, \quad i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \quad (8.57)$$

Les coefficients  $Y_{k\ell}$  sont des coefficients *d'admittance*, indépendants des valeurs  $v_1$  et  $v_2$  des tensions et caractérisent donc le quadripôle. Ils peuvent cependant dépendre de la pulsation du régime sinusoïdal imposé. Les relations 8.57 peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$I = YV, \quad \text{avec } I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (8.58)$$

où  $I$  est le *vecteur courant*,  $V$  le *vecteur tension* et  $Y$  la *matrice admittance*.

Prenons  $v_1 = E$  et  $v_2 = 0$  : la sortie est mise en court-circuit. L'intensité  $i_2$  est alors  $i'_2 = Y_{21} E$ . Considérons ensuite le cas où  $v_1 = 0$  et  $v_2 = E$ , donnant à l'entrée en court-circuit l'intensité  $i'_1 = Y_{21} E$ . D'après le théorème de réciprocité et compte tenu des conventions d'orientation adoptées, on doit avoir  $i'_2 = -i'_1$  et donc

$$Y_{12} = -Y_{21} \quad (8.59)$$

Autrement dit, la matrice admittance  $Y$  est *antisymétrique*.

Bien entendu, on peut tout aussi bien exprimer les tensions  $v_1$  et  $v_2$  en fonction de  $i_1$  et  $i_2$ , en considérant cette fois que ces intensités sont délivrées par des générateurs parfaits de courant, à l'entrée et à la sortie du quadripôle, respectivement. Cela revient à inverser la relation 8.58 :

$$V = ZI, \quad \text{avec } Z = Y^{-1} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (8.60)$$

où  $Z$  est la *matrice impédance*. La matrice inverse d'une matrice antisymétrique étant elle-même antisymétrique, on a

$$Z_{12} = -Z_{21} \quad (8.61)$$

Dans de nombreux problèmes, on préfère exprimer les données de sortie  $(v_2, i_2)$  en fonction des données d'entrée  $(v_1, i_1)$  :

$$U_2 = \Gamma U_1, \quad \text{avec } U_k = \begin{pmatrix} v_k \\ i_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

où  $U$  est un *vecteur tension-courant* et  $\Gamma$  la *matrice de transfert*.

Ici encore, on peut trouver une relation entre les éléments de cette matrice en appliquant le théorème de réciprocité. Dans un premier temps, prenons  $v_2 = 0$ ,  $v_1 = E$ ; on a alors  $i_1' = -E \gamma_{11}/\gamma_{12}$ , d'où  $i_2' = -E \det \Gamma/\gamma_{12}$ . Puis, dans un deuxième temps, posons  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = E$ . Il vient alors  $i_1'' = E/\gamma_{12}$ . Comme on doit avoir  $i_1'' = -i_2'$ , on en déduit

$$\det \Gamma = \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12} \gamma_{21} = 1 \quad (8.63)$$

Autrement dit, la matrice de transfert est *unimodulaire*, de déterminant égal à +1.

Les relations 8.59, 8.61 et 8.63 montrent que le quadripôle peut être caractérisée par trois paramètres complexes seulement, que l'on peut choisir comme étant les trois coefficients d'impédance  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  et  $Z_{12}$ . On a alors

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \frac{1}{Z_{12}} \begin{pmatrix} Z_{22} & -\det Z \\ 1 & -Z_{11} \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

$$\det Z = Z_{11} Z_{22} + Z_{12}^2$$

On peut donner aux éléments du quadripôle une interprétation physique simple en considérant des situations facilement envisageables expérimentalement, correspondant à des essais à vide pour les impédances et des essais en court-circuit pour les admittances.

① Lorsque  $i_2 = 0$ , les bornes de sortie sont *ouvertes*, le quadripôle fonctionne à vide. On a alors

$$\frac{v_1}{i_1} = Z_{11}, \quad \frac{v_2}{i_1} = Z_{21} \quad (8.65)$$

$Z_{11}$  est donc l'impédance vue depuis les bornes d'entrée quand les bornes de sortie sont ouvertes : c'est *l'impédance d'entrée à vide*. Quant à  $Z_{21}$  c'est, au moins en module, la tension apparaissant à la sortie pour un courant de 1A à l'entrée. Ce paramètre joue le rôle d'une impédance dite *de couplage*.

② Lorsque  $i_1 = 0$ , le circuit d'entrée sont ouvertes et  $v_2/i_2 = Z_{22}$  est l'impédance vue depuis les bornes de sortie lorsque l'entrée est ouverte : c'est *l'impédance de sortie à vide*.

☛ On notera que si le quadripôle est symétrique, l'impédance d'entrée à vide est la même si l'on inverse le quadripôle. Compte tenu des orientations choisies, on aura dans ce cas

$$Z_{11} = -Z_{22}, \quad \text{et donc } \gamma_{11} = \gamma_{22} \quad (8.66)$$

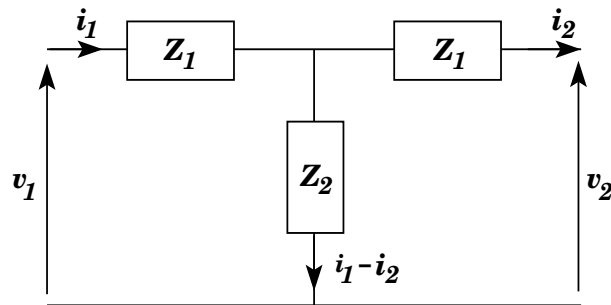


FIGURE 8.11 – Quadripôle symétrique

Considérons par exemple le quadripôle symétrique *en T* de la figure 8.11. En appliquant la loi des mailles, on trouve

$$v_1 = Z_1 i_1 + Z_2 (i_1 - i_2) = (Z_1 + Z_2) i_1 - Z_2 i_2$$

$$v_2 = -Z_1 i_2 + Z_2(i_1 - i_2) = Z_2 i_1 - (Z_1 + Z_2) i_2$$

d'où pour ce quadripôle la matrice impédance

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_1 + Z_2) \end{pmatrix} \quad (8.67)$$

③ Si  $v_2 = 0$ ,  $Y_{11} = i_1/v_1$  est l'admittance d'entrée de court-circuit.

④ Si  $v_1 = 0$ ,  $Y_{22} = i_2/v_2$  est l'admittance de sortie de court-circuit et  $Y_{12} = i_1/v_2$  est l'admittance de transfert.

### 8.5.3 Impédance d'entrée du dipôle équivalent au quadripôle en charge

Dans la configuration de la figure 8.9 (b), du point de vue du circuit en amont des bornes d'entrée l'ensemble du quadripôle et de l'impédance d'utilisation (ou de charge)  $Z_u$  se comporte comme un dipôle de bornes  $A_1$  et  $B_1$ , dont l'impédance, dite *impédance d'entrée*, est  $Z_e = v_1/i_1$ . Celle-ci dépend du circuit de charge, puisque  $V_2 = Z_u i_2$ . On obtient facilement :

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_u - Z_{22}} \quad (8.68)$$

• L'impédance d'entrée à vide, c'est-à-dire, pour  $Z_u$  infini, est

$$(Z_e)_v = Z_{11} \quad (8.69)$$

• L'impédance d'entrée en court-circuit, c'est-à-dire, pour  $Z_u = 0$  est

$$(Z_e)_{cc} = \frac{\det Z}{Z_{22}} \quad (8.70)$$

### 8.5.4 Association en chaîne de $n$ quadripôles, impédance caractéristique

Dans une telle association, les bornes de sortie d'un quadripôle sont directement reliées aux bornes d'entrée du suivant (figure 8.12).

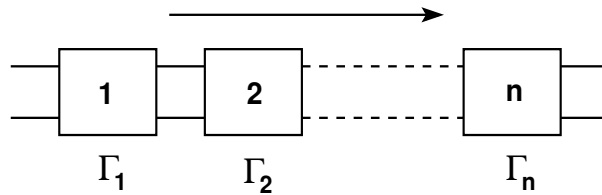


FIGURE 8.12 – Chaîne de quadripôles

On a  $(U_2)_1 = \Gamma_1(U_1)_1 = (U_1)_2$ ,  $(U_2)_2 = \Gamma_2(U_1)_2 = \Gamma_2\Gamma_1(U_1)_1 = (U_1)_4$ , etc, d'où

$$(U_2)_n = \Gamma(U_1)_1 \quad \text{avec} \quad \Gamma = \Gamma_n \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_1 \quad (8.71)$$

Par suite, l'ensemble est équivalent à un quadripôle unique dont la matrice de transfert  $\Gamma$  est le produit des matrices de transfert des quadripôles en chaîne dans lequel ces dernières apparaissent dans l'ordre inverse du montage des quadripôles.

Il est utile de préciser dès maintenant que le rapport  $v_s/v_e$  des tensions à la sortie et à l'entrée dépend de l'impédance d'utilisation  $Z_u = v_s/i_s$  sur laquelle la chaîne est fermée. Posons

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (8.72)$$

On a  $v_s = \alpha v_e + \beta i_e$ ,  $i_s = \gamma v_e + \delta i_e$ , d'où, éliminant  $i_e$  et tenant compte de  $\det \Gamma = 1$  :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{\delta - \beta/Z_u} \quad (8.73)$$

Si le circuit final est ouvert ( $Z_u$  infini), on a simplement

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{\delta} \quad (8.74)$$

• Montrons que l'on peut trouver, pour un quadripôle donné, une impédance de charge  $Z_u$  égale à son impédance d'entrée  $Z_e$ . Notons  $Z_c$  cette impédance, appelée *impédance caractéristique* du quadripôle. On doit avoir

$$v_1/i_1 = v_2/i_2 = Z_c \quad (8.75)$$

Dans cette circonstance, le vecteur tension  $V$  devient proportionnel au vecteur intensité :  $V = ZI = Z_c I$ . D'après cette relation,  $Z_c$  doit être valeur propre de la matrice impédance  $Z$  et donc satisfaire l'équation caractéristique de cette dernière :

$$\det(Z - Z_c \mathbb{1}) = 0 = Z_c^2 - (Z_{11} + Z_{22})Z_c + \det Z \quad (8.76)$$

où  $\mathbb{1}$  est la matrice unité  $2 \times 2$ . Mais 8.75 montre aussi que les deux vecteurs tension-courant  $U_1$  et  $U_2$  sont alors proportionnels :

$$U_2 = i_2 \begin{pmatrix} Z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda U_1 = \Gamma U_1, \quad \text{avec } \lambda = \frac{i_2}{i_1}$$

Leur rapport de proportionnalité  $\lambda$  doit être une valeur propre de la matrice de transfert  $\Gamma$  et donc vérifier l'équation caractéristique de cette matrice :

$$\lambda^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22})\lambda + 1 = 0 \quad (8.77)$$

où l'on a tenu compte de 8.63. Comme le produit des racines de 8.77 est égal à 1, l'une de ces racines peut avoir un module supérieur à 1 et correspondrait physiquement à une amplification, ce qui est inacceptable, s'agissant d'un quadripôle passif. On doit donc ne retenir que la solution de module inférieur à 1, correspondant à un affaiblissement.

Pour qu'un signal soit transmis sans affaiblissement, les deux racines de 8.77 doivent être de module unité et donc de la forme

$$\lambda_1 = e^{j\varphi_1}, \quad \lambda_2 = e^{j\varphi_2}, \quad \text{avec } \lambda_2 = \lambda_1^* \text{ puisque } \lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (8.78)$$

Leur somme  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \varphi_1$  est alors réelle et comprise entre -2 et +2. Cette condition est réalisée si

$$-2 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq +2, \quad \text{ou} \quad -2 \leq \frac{Z_{22} - Z_{11}}{Z_{12}} \leq +2 \quad (8.79)$$

Les coefficients d'impédance étant a priori fonctions de la pulsation, 8.79 peut n'être vérifiée que pour un certain intervalle de pulsation appelé *bande passante* du quadripôle. Dans ce domaine, le signal transmis n'est pas atténué. Par contre, en dehors de la bande passante, le signal transmis est affaibli d'un certain facteur  $\rho(\omega) < 1$ . Au bout d'une chaîne  $n$  quadripôle identiques pris en dehors de leur bande passante commune, le signal sera affaibli d'un facteur  $\rho^n(\omega)$ .

Prenons l'exemple d'un quadripôle symétrique comme celui de la figure 8.11. Pour celui-ci, on trouve

$$Z_c^2 = Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 \quad (8.80)$$

et que la bande passante est définie par

$$-2 \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0 \quad (8.81)$$

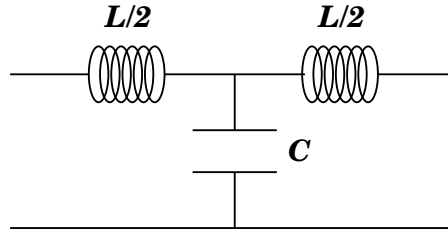


FIGURE 8.13 – Exemple de quadripôle en T

Cette condition est réalisable pour le quadripôle de la figure 8.13. En effet, comme  $Z_1 = jL\omega/2$ ,  $Z_2 = 1/(jC\omega)$ , le rapport  $Z_1/Z_2 = -LC\omega^2/2$  est bien réel et négatif, et la condition 8.81 s'exprime ici comme

$$-2 \leq -LC\omega^2/2 \leq 0$$

La bande passante de ce quadripôle est donc définie par

$$\omega \leq 2\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_c \quad (8.82)$$

où  $\omega_c$  représente une *pulsation de coupure*. Dans cet intervalle, son impédance caractéristique est purement résistive<sup>13</sup> :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}} \quad (8.83)$$

et à la sortie, le vecteur tension-courant est affecté du facteur de phase

$$\lambda = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \pm j \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}} = e^{j\varphi}, \quad \text{avec} \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \quad (8.84)$$

Pour  $\omega > 2\omega_0$ ,  $Z_c$  devient purement réactive :

$$Z_c = \pm j \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2}{4\omega_0^2} - 1} \quad (8.85)$$

et dans ce cas, le vecteur tension-courant se voit multiplié par le facteur

$$\lambda = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} + \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\omega^2}{4\omega_0^2} - 1} \quad (8.86)$$

13. La solution négative a été écartée.

réel négatif, de valeur absolue inférieure à 1. On remarquera ici qu'à l'intérieur de la bande passante du quadripôle, le signal de sortie conserve l'intensité du signal d'entrée, tandis que le déphasage  $\varphi$  du premier par rapport au second varie en fonction de la pulsation, alors qu'en dehors de la bande passante, le déphasage du signal à la sortie ne varie pas ( $\varphi = \pi$ ) tandis que son intensité est plus faible que celle du signal d'entrée.

On remarque aussi que si  $\omega$  reste suffisamment faible devant la pulsation de coupure  $\omega_c$ , alors, à des termes du second ordre près en  $\omega/\omega_0$ , d'une part l'impédance caractéristique devient quasiment indépendante de la pulsation :

$$Z_c \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.87)$$

et, d'autre part, comme  $\cos \varphi \simeq 1 - \frac{\varphi^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ , le déphasage  $\varphi$  devient proportionnel à la pulsation :

$$\varphi \simeq \pm \frac{\omega}{\omega_0} \quad (8.88)$$

Ce résultat est mis à profit dans des *lignes à retard*, notamment utilisées en télévision et téléphonie. Leur principe est le suivant.

Imaginons qu'à l'entrée du quadripôle, fermé sur l'impédance caractéristique 8.87, soit injecté un signal d'entrée de forme quelconque, que la transformation de Fourier permet d'envisager comme une superposition de signaux sinusoïdaux. Le quadripôle joue le rôle d'un *filtre passe-bas*, puisque seules les composantes du signal dont les pulsations sont dans la bande passante ne seront pas affaiblies. Supposons alors que la distribution en pulsation  $\mathcal{F}(\omega)$  du signal soit concentrée dans un domaine  $D$  où  $\omega \ll \omega_c$ . Dans ce cas, à la traversée du quadripôle, chacune des composantes se verra seulement affectée du facteur de phase  $e^{j\varphi}$ , avec de plus  $\varphi \simeq \pm \omega \tau$  où  $\tau = 1/\omega_0$ . Admettons que l'on ait  $\varphi = -\omega \tau$ . D'après 8.1, le signal de sortie  $F_s(t)$  s'écrira

$$F_s(t) = \int_D \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = F_e(t - \tau) \quad (8.89)$$

$F_e(t)$  étant le signal d'entrée : le signal de sortie à la date  $t$  est égal au signal d'entrée à la date antérieure  $t - \tau$ . L'effet du quadripôle est donc de *retarder* le signal d'entrée d'une durée  $\tau$ . En disposant de tels quadripôles en cascade, on peut donc, en théorie, imposer un retard donné à un signal.

### 8.5.5 Autres associations de quadripôles linéaires

#### ① Montage en série

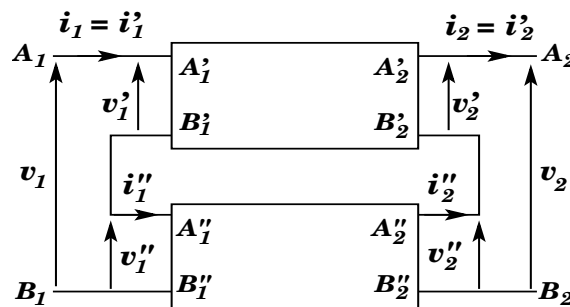


FIGURE 8.14 – Quadripôles en série

Dans le montage de la figure 8.14, on a  $v_1 = v'_1 + v''_1$ ,  $v_2 = v'_2 + v''_2$ ,  $i_1 = i'_1 = i''_1$ ,  $i_2 = i'_2 = i''_2$ , d'où

$$V = V' + V'' = Z'I + Z''I, \text{ donc } Z = Z' + Z'' \quad (8.90)$$

Ici, les matrices impédances s'ajoutent.

### ② Montage en parallèle

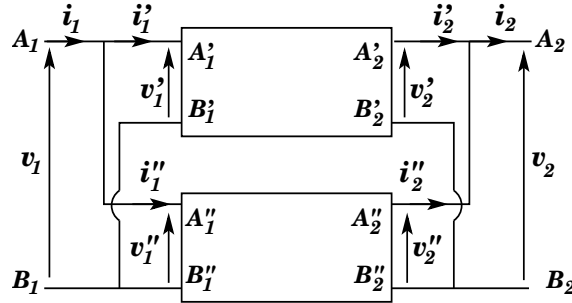


FIGURE 8.15 – Quadripôles en parallèle

On a maintenant (figure 8.15)  $i_1 = i'_1 + i''_1$ ,  $i_2 = i'_2 + i''_2$ ,  $v_1 = v'_1 = v''_1$ ,  $v_2 = v'_2 = v''_2$ , soit  $I = I' + I''$ , avec  $I' = Y'V'$ ,  $I'' = Y''V''$ , d'où

$$I = YV, \text{ avec } Y = Y' + Y'' \quad (8.91)$$

Dans cette association, les matrices admittances s'ajoutent.

### ③ Montage série-parallèle

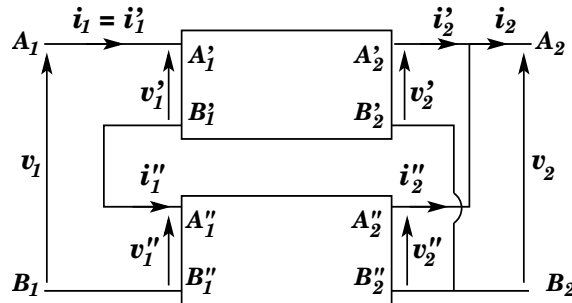


FIGURE 8.16 – Quadripôles en série-parallèle

Il s'agit d'un montage mixte, illustré à la figure 8.16. Pour un quadripôle simple, exprimons tout d'abord la tension d'entrée  $v_1$  et l'intensité  $i_2$  du courant de sortie en fonction de l'intensité  $i_1$  du courant d'entrée et de la tension de sortie  $v_2$  :

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2, \quad i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \quad (8.92)$$

soit, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad (8.93)$$

et, inversement,

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } G = H^{-1} \quad (8.94)$$

La matrice  $H$  est appelée *matrice hybride*. Il est facile de montrer que

$$H = \frac{1}{Z_{22}} \begin{pmatrix} \det Z & Z_{12} \\ Z_{12} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_{11}} \begin{pmatrix} -\gamma_{12} & 1 \\ 1 & \gamma_{21} \end{pmatrix} \quad (8.95)$$

En se référant à la figure 8.16, on a  $i_1 = i'_1 = i''_1$ ,  $i_2 = i'_2 + i''_2$ ,  $v_2 = v'_2 = v''_2$ ,  $v_1 = v'_1 + v''_1$ . On en déduit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ i'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v''_1 \\ i''_2 \end{pmatrix} \quad (8.96)$$

soit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } H = H' + H'' \quad (8.97)$$

Dans ce montage série-parallèle, ce sont les matrices  $H$  des quadripôles qui s'ajoutent.

#### ④ Montage parallèle-série

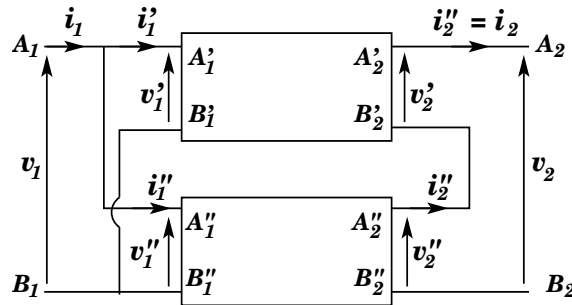


FIGURE 8.17 – Quadripôles en parallèle-série

Compte tenu de ce qui a été fait ci-dessus, il devient évident que pour le montage parallèle-série de la figure 8.17, les matrices  $G$  des quadripôles s'ajoutent :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } G = G' + G'' \quad (8.98)$$

### 8.5.6 Quadripôles typiques

Comme nous l'avons indiqué précédemment, un quadripôle est complètement défini par la donnée de trois grandeurs complexes fonctions de la pulsation. C'est pourquoi les quadripôles les plus simples sont disposés soit en forme de "T" (branchement en étoile, figure 8.18 (a)), soit en forme de "II" (branchement en triangle, figure 8.18 (b)). Selon le théorème de Kennely, ces deux dispositifs sont en fait équivalents.

On peut aussi envisager ces quadripôles comme des associations en chaîne de quadripôles plus élémentaires encore, ne comportant chacun qu'une seule impédance. Ainsi, le quadripôle en "T" se construit à partir des quadripôles suivants.

- Le quadripôle de la figure 8.19 (a) pour lequel



$$v_2 = v_1 - z_1 i_1, \quad i_2 = i_1$$

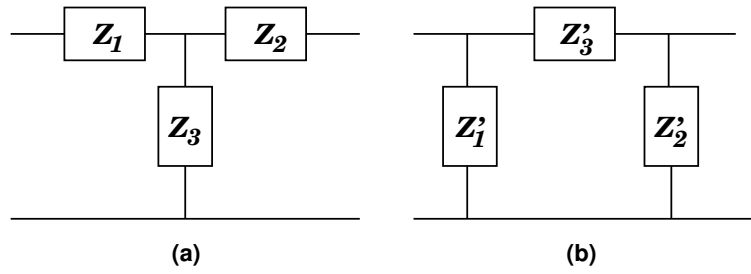


FIGURE 8.18 – Quadripôles typiques : (a) en “T” ; (b) en “II”

et dont la matrice de transfert a pour expression

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

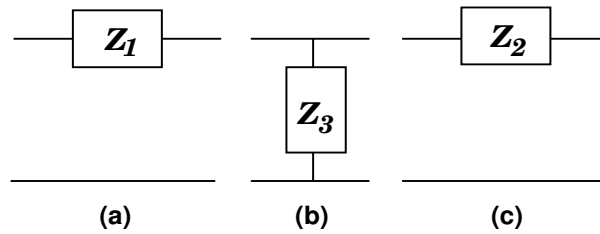


FIGURE 8.19 – Quadripôles typiques : (a) en “T” ; (b) en “II”

- Le quadripôle de la figure 8.19 (b) pour lequel la matrice de transfert s’obtient à partir de

$$v_1 = v_2 = z_3 (i_1 - i_2)$$

et qui a pour matrice de transfert

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_3} & 1 \end{pmatrix} \quad (8.100)$$

- Le quadripôle de la figure 8.19 (c) pour lequel la matrice de transfert s’obtient à partir de 8.99 en faisant le changement  $z_1 \rightarrow z_2$  :

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.101)$$

La matrice de transfert du quadripôle en “T” est ainsi :

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_1}{z_3} & -z_1 - z_2 - \frac{z_1 z_2}{z_3} \\ -\frac{1}{z_3} & 1 + \frac{z_2}{z_3} \end{pmatrix} \quad (8.102)$$

## 8.5.7 Quadripôle en treillis

Il est utile de remarquer que les lois d'associations de quadripôles exprimées en 8.90, 8.91, 8.97 et 8.98 sont assez formelles dans la mesure où les matrices associées à l'un et l'autre des deux quadripôles impliqués ne sont pas toujours indépendantes. Autrement dit, la matrice attribuée à l'un des quadripôles ne doit pas toujours être identifiée à celle que l'on obtiendrait si le quadripôle était seul dans la chaîne amont  $\rightarrow$  aval. Le quadripôle dit *en treillis* de la figure 8.20 (a) va nous donner un exemple d'une erreur à ne pas commettre.

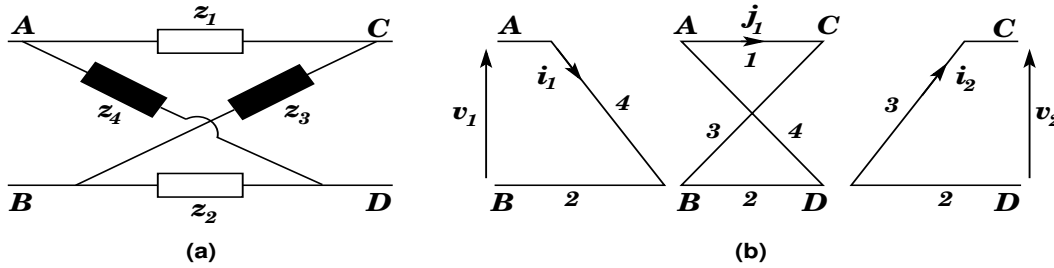


FIGURE 8.20 – Quadripôle en treillis

Considérant les trois mailles de la figure 8.20 (b), avec  $i_1$ ,  $j_1$  et  $i_2$  pour courants de mailles, on obtient

$$v_1 = (z_2 + z_4) i_1 - (z_2 + z_4) j_1 + z_2 i_2, \quad v_2 = -z_2 i_1 + (z_2 + z_3) j_1 - (z_2 + z_3) i_2$$

$$0 = j_1 \Sigma - (z_2 + z_4) i_1 - (z_2 + z_3) i_2, \quad \text{avec } \Sigma = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } Z = \frac{1}{\Sigma} \begin{pmatrix} (z_1 + z_3)(z_2 + z_4) & z_1 z_2 - z_3 z_4 \\ -(z_1 z_2 - z_3 z_4) & -(z_1 + z_4)(z_2 + z_3) \end{pmatrix} \quad (8.103)$$

On en déduit la matrice admittance

$$Y = Z^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (z_1 + z_4)(z_2 + z_3) & z_1 z_2 - z_3 z_4 \\ -(z_1 z_2 - z_3 z_4) & -(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) \end{pmatrix}$$

avec  $D = z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 z_4 + z_3 z_4 z_1 + z_4 z_1 z_2$  (8.104)

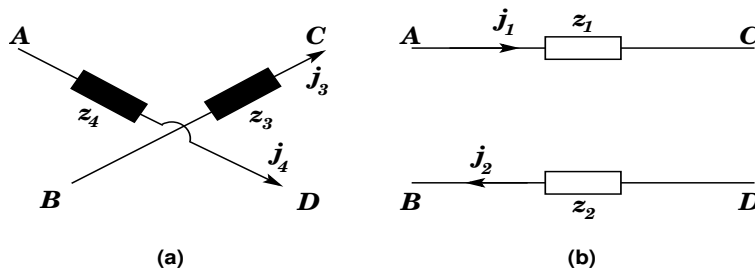


FIGURE 8.21 – Quadripôle élémentaires constituant le quadripôle en treillis

Or, il est clair qu'on peut envisager ce quadripôle comme l'association en parallèle des quadripôles élémentaires (a) et (b) représentés dans la figure 8.21. Si chacun était seul dans une chaîne amont  $\rightarrow$  aval, on écrirait

- pour (a) :  $v_A - v_D = z_4 j_4$ ,  $v_B - v_C = z_3 j_3$  et avec  $j_3 = -j_4$  on serait conduit à la matrice admittance

$$Y_a = \frac{1}{z_3 + z_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.105)$$

- pour (b) :  $v_A - v_C = z_1 j_1$ ,  $v_D - v_B = z_2 j_2$  et avec  $j_1 = j_2$  on obtiendrait pour matrice admittance

$$Y_b = \frac{1}{z_1 + z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.106)$$

L'erreur consisterait à écrire que puisque les deux quadripôles sont en parallèle, la matrice admittance correspondant au quadripôle de la figure 8.20 (a) doit être égale à

$$Y = Y_a + Y_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1 + z_2} + \frac{1}{z_3 + z_4} & -\frac{1}{z_1 + z_2} + \frac{1}{z_3 + z_4} \\ \frac{1}{z_1 + z_2} - \frac{1}{z_3 + z_4} & -\frac{1}{z_1 + z_2} - \frac{1}{z_3 + z_4} \end{pmatrix} \quad (8.107)$$

matrice qui ne correspond en rien à la matrice réelle 8.104.

L'erreur vient en fait des identifications  $j_3 = -j_4$  et  $j_2 = j_1$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'en réalité on a

$$j_1 = \frac{1}{D} [z_4(z_2 + z_3)v_1 - z_3(z_2 + z_4)v_2], \quad j_2 = \frac{1}{D} [z_3(z_1 + z_4)v_1 - z_4(z_1 + z_3)v_2]$$

$$j_3 = -\frac{1}{D} [z_2(z_1 + z_4)v_1 + z_1(z_2 + z_4)v_2], \quad j_4 = \frac{1}{D} [z_1(z_2 + z_3)v_1 + z_2(z_1 + z_3)v_2]$$

Si l'on attribue au quadripôle de la figure 8.21 (b) la matrice admittance  $Y_b$  telle que

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = Y_b \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \text{soit } Y_b = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} z_4(z_2 + z_3) & -z_3(z_2 + z_4) \\ z_3(z_1 + z_4) & -z_4(z_1 + z_3) \end{pmatrix}$$

et au quadripôle (a) de la même figure la matrice admittance  $Y_a$  telle que

$$\begin{pmatrix} j_4 \\ -j_4 \end{pmatrix} = Y_a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \text{soit } Y_a = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} z_1(z_2 + z_3) & z_2(z_1 + z_3) \\ -z_1(z_2 + z_3) & -z_2(z_1 + z_3) \end{pmatrix}$$

on a bien  $Y = Y_a + Y_b$ .

## 8.6 Complément I : Transformation de Fourier, distribution de Dirac

Sur la base de la formule 8.2, nous donnons ci-après les transformées de Fourier de quelques signaux caractéristiques et en profitons pour introduire de façon succincte la distribution de Dirac.

### 8.6.1 Impulsion brève en forme de rectangle ; distribution de Dirac

Le signal rectangulaire représenté à la figure 8.22 se définit par :

$$F(t) = 0 \quad \text{si } t > T/2 \text{ ou } t < -T/2$$

$$F(t) = E = \text{cste} \quad \text{si } -T/2 < t < T/2$$

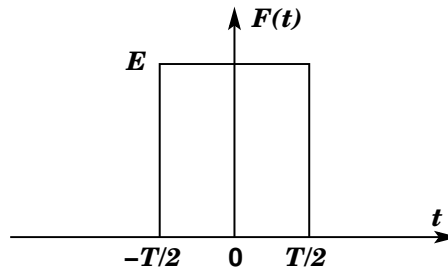


FIGURE 8.22 – Signal rectangulaire de durée  $T$

Il a pour transformée de Fourier

$$\hat{F}(\omega) = \frac{E}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{ET}{2\pi} \text{sinc}(u) \quad \text{avec} \quad \text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega T}{2}$$

Les variations de la fonction  $\text{sinc}(u)$  (sinus cardinal) sont représentées à la figure 8.23 en fonction de  $x = \frac{u}{2\pi}$ .

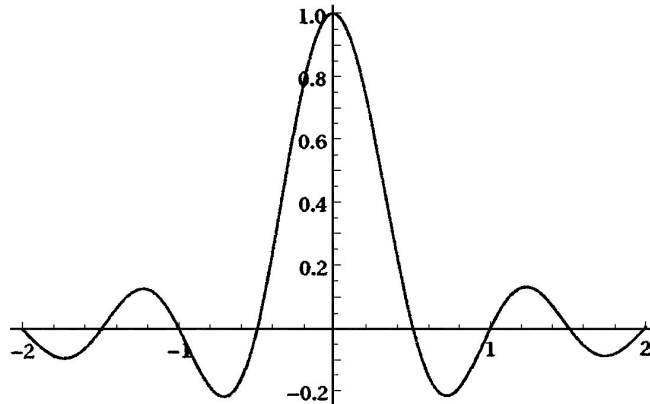


FIGURE 8.23 – Variations de  $\text{sinc}(2\pi x)$  pour  $-2 \leq x \leq 2$

Cette fonction vaut 1 pour  $x = 0$ , c'est sa valeur maximum. Elle s'annule pour  $x = \pm n/2$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1 et possède des extremas secondaires sensiblement localisés à  $x = \pm(n + 1/2)/2$  ( $n$  entier  $\geq 1$ ) en y prenant approximativement les valeurs  $\frac{(-1)^n}{(n + 1/2)\pi}$ , respectivement et dont les amplitudes décroissent donc rapidement à mesure que  $n$  augmente. La grandeur  $|\hat{F}(\omega)|$  quantifie le poids du signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  dans la décomposition de Fourier de  $F(t)$  : c'est le *spectre* en pulsation de ce signal. La *largeur* de ce spectre est l'intervalle en pulsation à l'intérieur duquel se trouve les pulsations des signaux sinusoïdaux les plus importants dans la décomposition de  $F(t)$ . On peut définir celle du signal rectangulaire considéré ici, comme l'intervalle entre les deux premiers zéros de  $\hat{F}(\omega)$  situés à  $x = \pm 1/2$ , soit

$$\Delta\omega = 4\pi\Delta x/T = 4\pi/T$$

Cet intervalle est donc d'autant plus étroit que la durée  $T$  de l'impulsion est grande et, inversement, d'autant plus large que cette durée est petite. Autrement dit, plus l'impulsion est brève, plus elle comporte de composantes sinusoïdales. C'est un résultat général, valable pour tout signal.

Supposons que l'on ait  $ET = 1$ . Lorsque  $T \rightarrow 0$ , la fonction  $F(t)$  prend l'allure d'une impulsion de très grande amplitude mais de durée extrêmement courte. A la limite, elle s'identifie à la *distribution de Dirac*  $\delta(t)$  qui est telle que

$$\delta(t) = 0 \quad \text{si } t \neq 0; \quad \delta(0) = +\infty \quad (8.108)$$

Donnons ici quelques propriétés de cette distribution<sup>14</sup>. Tout d'abord, elle est paire :  $\delta(-t) = \delta(t)$ . Ensuite, soit  $G(t)$  une fonction intégrable, et continue en  $t = 0$ . On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) G(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} G(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} G(Tu) du$$

où dans la dernière intégrale on a effectué le changement de variable  $t = Tu$ . Il est évident que lorsque  $T \rightarrow 0$ , cette intégrale tend vers  $G(0)$ . On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) G(t) dt = G(0) \quad (8.109)$$

Comme le support de  $\delta(t)$  est limité au seul point  $t = 0$ , on peut en fait étendre le résultat précédent au cas où  $G(t) = \text{cste} = 1$ . D'où la propriété

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8.110)$$

Supposons que  $G(t) = \phi(t + t_0)$ . Il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \phi(t + t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u - t_0) \phi(u) du = \phi(t_0)$$

La distribution  $\delta(t - t_0)$  est la distribution de Dirac décalée de  $t = 0$  à  $t = t_0$  :

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{si } t \neq t_0; \quad \delta(t - t_0) = +\infty \quad \text{si } t = t_0 \quad (8.111)$$

Les distributions de Dirac décalées vérifient la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \delta(t - t_1) dt = \delta(t_1 - t_0) \quad (8.112)$$

14. Des exposés de la *Théorie des distributions* (initiée par S. Sobolev) se trouvent dans les ouvrages suivants : L. Schwartz "Théorie des distributions", Hermann ed. Paris, 1950; I. M. Gel'fand, G.E. Shilov "Generalized functions", Academic Press, 1964; J. Bass : Cours de Mathématiques, Tome III, p167, Masson et Cie ed., Paris, 1971.

D'après ce qui précède, la transformée de Fourier de  $\delta(t)$  est  $\hat{\delta} = 1/(2\pi)$  et l'on a

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (8.113)$$

La distribution de Dirac peut être approchée par diverses fonctions. Considérons l'exemple suivant :

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2}$$

où  $\varepsilon$  est un réel positif. Il est clair que pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $H(t)$  devient nul pour tout  $t \neq 0$  et infini pour  $t = 0$ . En outre, effectuant le changement de variable  $t = \varepsilon \tan \theta$ , il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta = 1$$

puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) G(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} G(\varepsilon \tan \theta) d\theta \rightarrow G(0)$$

Par conséquent

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} \quad (8.114)$$

Une autre approche plus directe est fournie par la formule 8.113. En effet, lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \lambda t}{\pi t}$$

doit tendre vers  $\delta(t)$ . Ainsi :

$$\delta(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\sin \lambda t}{\pi t} \quad (8.115)$$

Les variables  $t$  et  $\omega$  jouant des rôles symétriques, il est évident que l'on a tout aussi bien

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega - \omega')t} dt = \delta(\omega - \omega') \quad (8.116)$$

Cette dernière formule s'interprète comme suit. Définissons

$$\mathcal{V}_\omega(t) = \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \quad (8.117)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'ensemble des  $\mathcal{V}_\omega(t)$  pour  $\omega$  courant de  $-\infty$  à  $+\infty$  forme une base *continue*<sup>15</sup> de l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes de la variable  $t$ , muni du produit scalaire

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t) f(t) dt \quad (8.118)$$

Relativement à ce produit scalaire, on a, d'après 8.116,

15. C'est-à-dire, une base dont les éléments sont repérés au moyen d'un indice variant continument, en l'occurrence  $\omega$ .

$$(\mathcal{V}_{\omega'}, \mathcal{V}_{\omega}) = \delta(\omega' - \omega) \quad (8.119)$$

Cette formule généralise la notion d'orthogonalité et de base orthonormée au cas des bases continues : le produit scalaire entre vecteurs d'indices différents ( $\omega' \neq \omega$ ) est bien nul ; en termes classiques de fonctions, il est infini si les indices sont égaux. En réalité le produit scalaire s'exprimant au moyen de la distribution de Dirac doit plutôt s'interpréter dans le cadre de la théorie mathématique des distributions. La formule 8.119 constitue en fait la définition d'une base continue orthonormée. La composante de Fourier d'une fonction  $F(t)$  selon la base 8.117 s'exprime comme

$$(\mathcal{V}_{\omega}, F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} F(t) dt = \sqrt{2\pi} \hat{F}(\omega) \quad (8.120)$$

### 8.6.2 Fonction de Heaviside et distribution de Dirac

Considérons la fonction  $F(t)$  définie par

$$F(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad F(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad \text{si } t \geq 0$$

$\tau$  étant un paramètre strictement positif. Sa dérivée :

$$F'(t) = 0 \quad \text{si } t < 0; \quad F'(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{si } t > 0$$

a pour transformée de Fourier

$$\hat{F}'(\omega) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , celle-ci tend vers  $1/(2\pi)$  qui est la transformée de Fourier de  $\delta(t)$ . On en déduit que

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F'(t) \quad (8.121)$$

D'un autre côté, dans cette limite, la fonction  $F(t)$  tend vers la *fonction de Heaviside* définie par

$$\Theta(t) = 0 \quad \text{si } t < 0, \quad \Theta(t) = 1 \quad \text{si } t > 0 \quad (8.122)$$

On établit ainsi le lien entre cette fonction *discontinue* et la distribution de Dirac :

$$\delta(t) = \Theta'(t) \quad (8.123)$$

ouvrant la voie à l'interprétation des dérivées de fonctions discontinues en termes de distributions.

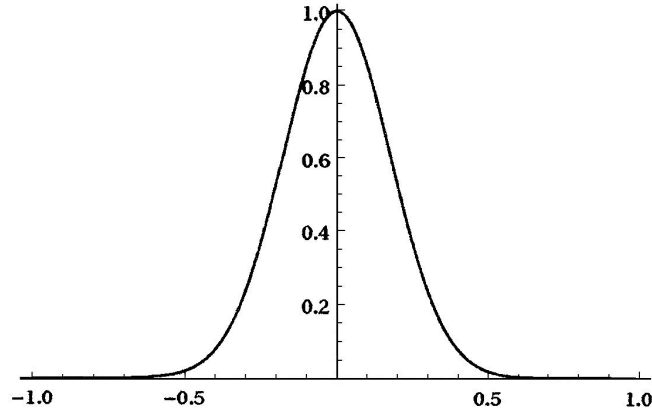
### 8.6.3 Signal gaussien

Il s'agit du signal  $G(t)$  défini par :

$$G(t) = E \exp(-\alpha t^2) \quad (8.124)$$

où  $\alpha$  est un réel strictement positif, et dont les variations avec  $t$  sont représentées par une *courbe de Gauss*, en forme de cloche, telle que celle de la figure 8.24. Calculons

$$I(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{j\omega t} dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t dt$$


 FIGURE 8.24 – Variations de  $e^{-16t^2}$  pour  $-1 \leq t \leq 1$ 

On a

$$I' = \frac{\partial I}{\partial \alpha} = - \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\alpha t^2} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [-2\alpha t e^{-\alpha t^2}] [t \cos \omega t] \, dt$$

Intégrons par parties :

$$2\alpha I' = [t e^{-\alpha t^2} \cos \omega t]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} [\cos \omega t - t \omega \sin \omega t] \, dt = -I + \omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} t \sin \omega t \, dt$$

$$2\alpha I' + I = -\frac{\omega}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [-2\alpha t e^{-\alpha t^2}] \sin \omega t \, dt = -\frac{\omega}{2\alpha} \left\{ [e^{-\alpha t^2} \sin \omega t]_{-\infty}^{+\infty} - \omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t \, dt \right\}$$

D'où l'équation

$$2\alpha I' + I = \frac{\omega^2}{2\alpha} I \quad \text{soit} \quad \frac{I'}{I} = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \quad (8.125)$$

L'intégration de 8.125 par rapport à  $\alpha$  donne

$$I(\alpha, \omega) = \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right]$$

où  $C$  est une constante. Pour la déterminer, calculons  $I_0 = I(\alpha, 0) = \frac{C}{\sqrt{\alpha}}$ . On a

$$\begin{aligned} I_0^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} e^{-\alpha v^2} \, dt = \int_0^\infty r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\alpha r^2} = \pi \int_0^\infty 2r \, dr e^{-\alpha r^2} \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-\alpha z} \, dz = \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $C = \sqrt{\pi}$  et

$$I(\alpha, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right], \quad \hat{G}(\omega) = \frac{E}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right] \quad (8.126)$$

La transformée de Fourier d'un signal gaussien est aussi une répartition gaussienne sur les pulsations. A partir de son maximum obtenu à  $\omega = 0$ , elle décroît très rapidement à mesure que  $|\omega|$



augmente. On peut en définir la largeur comme l'intervalle entre les pulsations  $\omega = \pm 2\sqrt{\alpha}$  pour lesquelles la valeur prise par  $\hat{G}$  est la fraction  $1/e$  de sa valeur maximum ( $e = 2,718 \simeq 3$ ) :

$$\Delta\omega = 4\sqrt{\alpha} \quad (8.127)$$

Or, aux dates  $t = \pm 1/\sqrt{\alpha}$ , l'amplitude du signal  $G(t)$  n'est plus qu'environ le tiers de sa valeur maximum obtenue à  $t = 0$ . La durée  $\Delta t = 2/\sqrt{\alpha}$  peut ainsi servir comme estimation de la durée de vie du signal. Ici encore, on a une corrélation étroite entre cette durée de vie et la largeur du spectre en pulsations, puisque :

$$\Delta\omega \Delta t = 8 \quad (8.128)$$

Plus longue est la durée de vie, plus étroit est le spectre en pulsations. On observe d'ailleurs que lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , le signal  $G(t)$  tend vers une constante  $E$ , sa durée de vie devient infinie. Corrélativement,  $\hat{G}(\omega)$  tend vers zéro pour tout  $\omega$  différent de zéro, ce qui est normal puisque  $G(t)$  devient un signal continu (plus aucune variation temporelle), tandis que  $\hat{G}(0)$  tend vers l'infini. On obtient alors une autre approche de la distribution de Dirac. Prenant  $E = 1$  et  $\alpha \rightarrow 0$ , on a en effet

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{j\omega t} dt \longrightarrow \delta(\omega)$$

d'où

$$\delta(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right] \quad (8.129)$$

#### 8.6.4 Signal sinusoïdal "limité"

Considérons ensuite la fonction définie par

$$F(t) = \cos \omega_0 t \quad \text{si} \quad -t_0 \leq t \leq t_0 ; \quad F(t) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (8.130)$$

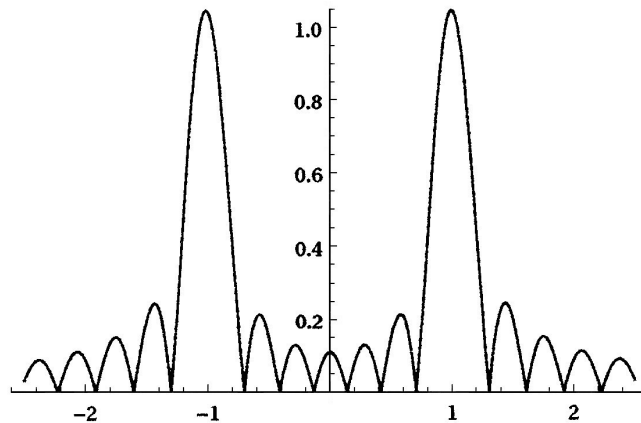


FIGURE 8.25 – Variations de  $|\text{sinc}[10(x-1)] + \text{sinc}[10(x+1)]|/10$  pour  $-2.5 \leq x \leq 2.5$

Il s'agit d'un signal sinusoïdal limité dans le temps, de durée de vie égale à  $2t_0$ . Sa transformée de Fourier est facilement calculable :

$$\hat{F}(\omega) = \frac{t_0}{2\pi} \{ \text{sinc}[(\omega - \omega_0)t_0] + \text{sinc}[(\omega + \omega_0)t_0] \}$$

La figure 8.25 donne une représentation qualitative de  $|\hat{F}(\omega)|$  en fonction de  $x = \omega/\omega_0$  (les graduations verticales sont arbitraires), pour  $\omega_0 t_0 = 10$ . On y voit que, à côté des deux signaux de pulsations respectives  $-\omega_0$  et  $+\omega_0$  déjà présents dans 8.130 (puisque  $\cos \omega_0 t = [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]/2$ ), d'autres composantes sinusoïdales interviennent. Clairement, ceci est dû à la durée de vie limitée du signal. En effet, on observe que si  $t_0 \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &\longrightarrow \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(\omega - \omega_0)t_0]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)t_0]}{\omega + \omega_0} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \} \end{aligned} \quad (8.131)$$

auquel cas le spectre se compose de deux raies bien localisées à  $\omega = \pm\omega_0$ . Pour  $t_0$  fini, le spectre s'étale de part et d'autre de ces deux pulsations fondamentales  $\pm\omega_0$ , avec des pics secondaires, moins accentués.

## 8.7 Complément II : Séries de Fourier <sup>16</sup>

### 8.7.1 Préalable

Calculons

$$\begin{aligned}\phi_N(x) &= \sum_{k=-N}^N e^{2\pi j x k} = \sum_0^N + \sum_{-N}^{-1} = \sum_0^N \{e^{2\pi j x k} + e^{-2\pi j x k}\} - 1 \\ \frac{1 - e^{2j\pi x(N+1)}}{1 - e^{2j\pi x}} + \frac{1 - e^{-2j\pi x(N+1)}}{1 - e^{-2j\pi x}} - 1 &= \frac{1}{1 - e^{2j\pi x}} \left\{ -e^{2j\pi x(N+1)} + e^{2j\pi x N} \right\}\end{aligned}$$

d'où

$$\phi_N(x) = \frac{\sin \pi x(2N + 1)}{\sin \pi x} \quad (8.132)$$

Soit  $f(x)$  une fonction de la variable réelle  $x$ . On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_N(x) dx = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \int_{p-1/2}^{p+1/2} (\dots) dx = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f(p+x') \phi_N(p+x') dx'$$

Comme  $\phi_N(x)$  est périodique de période 1, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_N(x) dx = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f(p+x') \phi_N(x') dx'$$

Faisons tendre  $N$  vers l'infini. On a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_N(x') = \frac{\pi x'}{\sin \pi x'} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sin \pi x'(2N + 1)}{\pi x'} = \frac{\pi x'}{\sin \pi x'} \delta(x') = \delta(x') \quad (8.133)$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_N(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_N(x) dx = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} f(p) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \delta(x-p) dx\end{aligned} \quad (8.134)$$

Mais

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_N(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{2j\pi x k} \quad (8.135)$$

Au sens usuel, cette dernière série 8.135 est *divergente*. Cependant, d'après 8.134, elle peut être réinterprétée en termes de distributions et l'on a

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \delta(x-p) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{2j\pi x k} \quad (8.136)$$

16. Nous laissons au lecteur le soin de justifier toutes les opérations mathématiques qui suivent...

### 8.7.2 Séries de Fourier

Dans 8.136, faisons le changement  $x \rightarrow x - y$  et calculons

$$\mathcal{P}(x) = \int_0^1 dy f(y) \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \delta(x - y - p) \quad (8.137)$$

Dans la somme, seul contribue le terme pour lequel  $0 < y = x - p < 1$ , c'est-à-dire, celui dont l'indice  $p$  est tel que  $p < x < p + 1$ . L'intégrale 8.137 est ainsi égale à  $f(x - p)$  où  $x$  se trouve dans l'intervalle  $]p, p + 1[$ . D'un autre côté, d'après 8.136, on a

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{2j\pi x k} c_k \quad \text{avec} \quad c_k = \int_0^1 dy f(y) e^{-2j\pi k y} \quad (8.138)$$

Manifestement,  $\mathcal{P}(x)$  est une fonction périodique de  $x$ , de période 1. Dans l'intervalle  $]0, 1[$ , elle s'identifie à  $f(x)$ . Autrement dit,  $\mathcal{P}(x)$  se définit comme ( $K$  entier)

$$\mathcal{P}(x + K) = \mathcal{P}(x) ; \quad \mathcal{P}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \quad (8.139)$$

La fonction  $\mathcal{P}(x)$  est donc une répétition, dans les divers intervalles  $]K, K + 1[$ , des variations de  $f(x)$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ . La formule 8.138 montre que cette fonction périodique de période 1 peut être décomposée sur la base discrète  $\{\psi_k(x) = e^{2j\pi k x}\}$  des fonctions sinusoïdales périodiques de même période 1, selon une série appelée *série de Fourier*. Les coefficients  $c_k$  qui apparaissent dans cette série sont appelés *coefficients de Fourier* de  $\mathcal{P}(x)$ .

Selon le produit scalaire

$$(g, h) = \int_0^1 g^*(x) h(x) dx \quad (8.140)$$

ladite base est orthonormée. On vérifie en effet que

$$(\psi_k, \psi_\ell) = \int_0^1 e^{-2j\pi k x} e^{2j\pi \ell x} dx = \delta_{k, \ell} \quad (8.141)$$

$\delta_{k, \ell}$  étant le symbole de Kronecker<sup>17</sup>. De là, on déduit l'égalité de Parseval :

$$\|\mathcal{P}\|^2 = \int_0^1 |\mathcal{P}(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2 \quad (8.142)$$

A titre d'exemple, considérons la fonction périodique définie par

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 ; \quad \mathcal{P}(x + K) = \mathcal{P}(x)$$

On calcule aisément

$$c_0 = 0, \quad c_k = \frac{1}{2j\pi k} \quad \text{pour} \quad k \neq 0$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2\pi k x}{k} \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1$$

17. Egal à 0 si  $k \neq \ell$ , égal à 1 si  $k = \ell$ .

Par ailleurs,

$$\|\mathcal{P}\|^2 = \frac{1}{12} = \sum_1^{\infty} [|c_k|^2 + |c_{-k}|^2] = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}$$

On retrouve ainsi la formule bien connue :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ecrivons maintenant les formules relatives à une fonction périodique de période  $T_0$  d'une variable réelle  $t$ . Partant des formules précédentes, posons  $x = t/T_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Il vient

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{jk\omega_0 t} c_k \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt \mathcal{P}(t) e^{-jk\omega_0 t} \quad (8.143)$$

et la transformée de Fourier de cette fonction est

$$\hat{\mathcal{P}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (8.144)$$

## 8.8 Complément III : intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants au moyen de la transformation de Fourier

Prenons comme exemple l'équation différentielle du circuit  $(R, L, C)$  alimenté par un générateur de tension variable  $E(t)$ , portant sur la charge  $q$  du condensateur :

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = E(t) \quad (8.145)$$

Effectuant une décomposition de Fourier de  $q(t)$  et de  $E(t)$ , la traduction de cette équation pour la pulsation  $\omega$  est

$$\hat{q}(\omega) \left\{ \frac{1}{C} + j\omega R + (j\omega)^2 L \right\} = \hat{E}(\omega) \quad (8.146)$$

$\hat{q}(\omega)$  et  $\hat{E}(\omega)$  étant, pour cette pulsation, les composantes sinusoïdales respectives de  $q(t)$  et  $E(t)$ . On en déduit

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{\frac{1}{C} + j\omega R + (j\omega)^2 L} \quad (8.147)$$

Réexprimant la composante  $\hat{E}(\omega)$  au moyen de la formule inverse de Fourier, il vient

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds E(s) \mathcal{A}(t-s) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}(t-s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega e^{j\omega(t-s)}}{\frac{1}{C} + j\omega R + (j\omega)^2 L} \quad (8.148)$$

La fonction  $\mathcal{A}(t-s)$  caractérise entièrement la réponse temporelle du circuit  $(R, L, C)$ . On la nomme *fonction de Green* de l'équation différentielle 8.145 considérée. Pour la calculer explicitement, nous utiliserons le théorème des résidus<sup>18</sup>. Posons  $z = j\omega$ . Envisagée dans le plan complexe, l'intégrale donnant  $\mathcal{A}$  s'effectue tout le long de l'axe des imaginaires  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{A}(t-s) = \frac{1}{2j\pi L} \int_{\mathcal{J}} \frac{dz e^{z(t-s)}}{\omega_0^2 + 2\alpha z + z^2}, \quad z = j\omega, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Le dénominateur  $\Delta = z^2 + 2\alpha z + \omega_0^2$  de l'intégrand présente deux zéros. Supposons ici que l'on ait  $\omega_0 > \alpha$ . Les deux zéros sont dans ce cas

$$z_+ = -\alpha + j\Omega, \quad z_- = z_+^* = -\alpha - j\Omega, \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Pour l'intégrand, ils représentent deux pôles simples dont les parties réelles sont *negatives*. Nous constituerons un contour fermé dans le plan complexe en adjoignant à l'axe  $\mathcal{J}$  un demi-cercle de rayon  $r$  tendant vers l'infini et dont le centre est à l'origine (voir figure 8.26). Ce demi-cercle sera choisi tel que la partie réelle du complexe  $z$  courant y soit positive si  $s > t$  (ce sera alors le demi-cercle  $C_+$ ), négative si  $s < t$  (il s'agira alors du demi-cercle  $C_-$ ). Dans un cas comme dans l'autre, posant  $z = re^{j\theta}$ , pour  $r \rightarrow \infty$  on a

$$\left| \frac{dz e^{z(t-s)}}{\omega_0^2 + 2\alpha z + z^2} \right| \simeq \frac{d\theta}{r} e^{-r \cos \theta |t-s|} \rightarrow 0$$

18. Voir par exemple : J. Bass : "Cours de Mathématiques", Tome II, ed. Masson et Cie, Paris, 1964 ; M. Lavrentiev et B. Chabat "Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe", ed. Mir, Moscou, 1977.

et l'intégrale le long du demi-cercle est donc nulle. Il s'ensuit que l'intégrale le long de  $\mathcal{J}$  s'identifie à l'intégrale le long d'un contour fermé auquel on peut appliquer le théorème des résidus. Pour  $s > t$ , le contour fermé n'entoure aucune singularité de l'intégrant et l'intégrale correspondante est nulle. Pour  $s < t$  il vient

$$\mathcal{A}(t-s) = \frac{1}{L} \left\{ \frac{e^{z_+(t-s)}}{z_+ - z_-} + \frac{e^{z_-(t-s)}}{z_- - z_+} \right\} = \frac{1}{L\Omega} e^{-\alpha(t-s)} \sin \Omega(t-s) \quad (8.149)$$

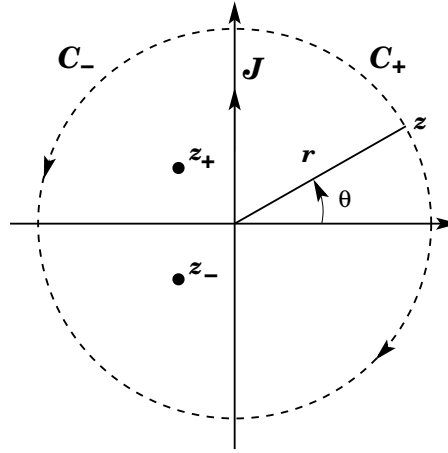


FIGURE 8.26 – Les deux demi-cercles  $C_+$  et  $C_-$  constituant avec  $\mathcal{J}$  des contours fermés dans le plan complexe, auxquels on applique le théorème des résidus

En résumé :

$$\mathcal{A}(t-s) = \Theta(t-s) \frac{1}{L\Omega} e^{-\alpha(t-s)} \sin \Omega(t-s) \quad (8.150)$$

et

$$q(t) = \int_{-\infty}^t ds E(s) \mathcal{A}(t-s) \quad (8.151)$$

résultat à comparer avec l'équation 7.148 du chapitre 7. La fonction  $\mathcal{A}(t)$  représente aussi ce qu'on appelle la *réponse impulsionnelle* du circuit  $(R, L, C)$ , correspondant à une excitation du circuit par un signal en forme de distribution de Dirac. En effet, pour  $E(s) = \delta(s)$ , on obtient

$$q(t) \equiv \mathcal{A}(t) \quad (8.152)$$

Elle vérifie donc l'équation différentielle

$$\left[ \frac{1}{C} + R \frac{d}{dt} + L \frac{d^2}{dt^2} \right] \mathcal{A}(t-s) = \delta(t-s) \quad (8.153)$$

dont la forme générale définit une fonction de Green de toute équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Supposons que le circuit  $(R, L, C)$  soit excité par un signal périodique  $E(t)$  de période  $T_0$  et de forme quelconque. D'après 8.147 et 8.144, la charge instantanée du condensateur est alors donnée par

$$q(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2j\alpha\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) = -\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{jn\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2 - \omega_0^2 - 2j\alpha n\omega_0}$$

$$= -\frac{c_0}{L} + \frac{C\omega_0}{2\alpha} \Re \{ j c_1 e^{j\omega_0 t} \} + \dots \quad (8.154)$$

Dans ce développement, l'amplitude de la composante sinusoïdale fondamentale de pulsation  $\omega_0$  (pulsation propre du circuit) est multipliée par le facteur

$$\frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \tilde{Q}$$

qui est le facteur de qualité du circuit. Plus grand est ce facteur, plus intense est la résonance sur cette composante fondamentale.



## 8.9 Complément IV : Transformation de Laplace

Dans les années 1880, O. Heaviside développa un *calcul symbolique* permettant de résoudre des équations différentielles. Celui-ci consiste à remplacer, dans ces équations, l'opération de dérivation par la multiplication par un nombre  $p$  et l'opération inverse d'intégration par la division par ce même nombre  $p$ , permettant ainsi un traitement algébrique des équations différentielles linéaires. D'une grande efficacité dans son application aux circuits, la méthode a notamment permis l'émergence des notions d'impédance et de fonction de transfert. Dans ce contexte, elle s'apparente de façon évidente à celle issue de la transformation de Fourier,  $p$  s'identifiant alors à  $j\omega$ . Ce procédé ne fut justifié mathématiquement que plus tard<sup>19</sup>, au moyen de la *transformation de Laplace* décrite ci-après<sup>20</sup>.

### 8.9.1 La transformation de Laplace

Moyennant des conditions de régularité et de "finitude" couramment vérifiées en Physique, on peut associer à tout signal  $F(t)$ , nul pour  $t < 0$ , sa *transformée de Laplace*  $\tilde{F}(p)$  définie par

$$\mathcal{L}[F] = \tilde{F}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(t) dt \quad (8.155)$$

où  $p$  est un nombre complexe tel que  $s = \Re(p) > 0$ ;  $\tilde{F}(p)$  est aussi appelée *image* de  $F(t)$  tandis que  $F(t)$  est l'*original* de  $\tilde{F}(p)$ . Cette opération est manifestement *linéaire*. On établit les résultats suivants.

#### ① "Finitude"

Pourvu que soit réalisée la condition  $|F(t)| < M e^{s_0 t}$  où  $s_0$  est un réel positif, pour  $s > s_0$  on a

$$|\tilde{F}(p)| < \int_0^{+\infty} e^{-st} |F(t)| dt < \frac{M}{s - s_0}, \quad \text{et par suite} \\ \lim_{|p| \rightarrow +\infty} |\tilde{F}(p)| = 0 \quad (8.156)$$

#### ② Dérivation, intégration

L'image de la dérivée  $F'(t)$  est

$$\tilde{F}'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} F'(t) dt = [F(t)e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(t) dt, \quad \text{soit} \\ \tilde{F}'(p) = p\tilde{F}(p) - F(0^+) \quad (8.157)$$

où  $F(0^+)$  est la valeur de  $F(t)$  lorsque  $t$  tend vers zéro par valeurs positives. On prendra garde ici à la notation :  $\tilde{F}'$  n'est en aucun cas la dérivée de  $\tilde{F}$  !

Si  $F(0^+) = 0$ , on obtient donc

$$\tilde{F}'(p) = p\tilde{F}(p), \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{F}'(p)}{p} = \tilde{F}(p) \quad (8.158)$$

Autrement dit, l'opération de dérivation faisant passer de  $F$  à sa dérivée  $F'$  équivaut à une multiplication par  $p$  de l'image  $\tilde{F}(p)$ ; inversement, l'opération d'intégration faisant passer d'une dérivée  $F'$  à sa primitive  $F$  équivaut à une division par  $p$  de l'image  $\tilde{F}'$ .

19. T. Bromwich (1916), J.R. Carson (1917), G. Doetsch (1930).

20. Voir par exemple : M. Larentiev, B. Chabat, loc. cit. Chap. VI.

③ **Théorèmes des valeurs initiale et finale**

Appliquant 8.156 à l'image  $\tilde{F}'$ , la relation 8.157 conduit au théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [p \tilde{F}(p)] = F(0^+) \quad (8.159)$$

En faisant tendre  $p$  vers zéro, il vient

$$\tilde{F}'(p) \simeq \int_0^{+\infty} F'(t) dt = F(+\infty) - F(0^+)$$

D'après 8.157, on en déduit le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{p \rightarrow 0} [p \tilde{F}(p)] = F(+\infty) \quad (8.160)$$

Ces résultats permettent par exemple de prévoir le comportement de l'image  $\tilde{F}$  pour  $p$  tendant vers zéro ou vers l'infini ou inversement, connaissant l'image, de prévoir celui de l'original aux limites de l'intervalle de définition.

④ **Théorème de translation**

Pour tout nombre complexe  $z$  on a

$$\mathcal{L} [e^{zt} F(t)] = \tilde{F}(p - z) \quad (8.161)$$

⑤ Le tableau suivant donne les images de fonctions dont la plupart sont couramment rencontrées dans l'étude des circuits.

Original	Image	Original	Image	Original	Image
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$t \sinh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\delta(t - T)$	$e^{-pT}$	$\cosh \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$e^{-at} \cosh \omega t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 - \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$e^{-at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 - \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$t \cosh \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$t^n e^{j\omega t}$	$\frac{n!}{(p - j\omega)^{n+1}}$

Certaines de ces images s'obtiennent à partir d'autres par simple dérivation, par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}[1] = -\mathcal{L}[t], \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}[t \cos \omega t], \quad \text{etc}$$

et le passage des fonctions sinusoïdales d'argument  $\omega t$  aux fonctions hyperboliques de même argument s'effectue par les changements

$$\omega \rightarrow j\omega, \quad \cos(j\omega t) = \cosh \omega t, \quad \sin(j\omega t) = j \sinh \omega t$$

### 8.9.2 Détermination d'un original

En Electrocinétique notamment, on a généralement affaire à des fonctions images se présentant comme un quotient de deux polynômes en  $p$  :

$$\tilde{F}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (8.162)$$

le degré du numérateur  $N$  étant inférieur à celui du dénominateur  $D$ . On peut toujours faire en sorte de ramener à l'unité le coefficient du terme de plus haut degré de  $D$ . Pour revenir à l'original, on doit tout d'abord décomposer  $\tilde{F}(p)$  en éléments simples. Cela nécessite de rechercher les racines de  $D$ , qui peuvent être réelles ou complexes. Supposons qu'elles soient toutes distinctes. On a alors

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n)$$

et 8.162 s'exprime sous la forme

$$\tilde{F}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} \quad (8.163)$$

les grandeurs  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) étant des constantes. Pour déterminer  $A_k$  par exemple, il suffit de multiplier  $\tilde{F}(p)$  par  $p - p_k$  puis de faire tendre  $p$  vers  $p_k$ . On obtient ainsi :

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ \tilde{F}(p) (p - p_k) \right\} \quad (8.164)$$

En se reportant à une table donnant les originaux connaissant leurs images, on en déduit l'original :

$$F(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (8.165)$$

Si l'une des racines de  $D$  est multiple, la décomposition est moins simple à effectuer. Soit  $p_1$  cette racine,  $r$  sa multiplicité. Le dénominateur prend la forme  $D(p) = (p - p_1)^r G(p)$  avec  $G(p_1) \neq 0$  et  $\tilde{F}(p)$  s'exprime comme

$$\tilde{F}(p) = \frac{B_r}{(p - p_1)^r} + \frac{B_{r-1}}{(p - p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_1}{p - p_1} + \tilde{H}(p) \quad (8.166)$$

où  $\tilde{H}(p)$  est régulier pour  $p = p_1$  ( $p_1$  n'est pas un pôle de  $\tilde{H}(p)$ ). On en déduit :

$$B_{r-q} = \frac{1}{q!} \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{d^q}{dp^q} \left[ (p - p_1)^r \tilde{F}(p) \right], \quad q = 0, 1, \dots, r - 1 \quad (8.167)$$

et l'original sera alors donné par

$$F(t) = e^{p_1 t} \sum_{q=0}^{r-1} \frac{1}{q!} B_{q+1} t^q + H(t) \quad (8.168)$$

$H(t)$  étant l'original de  $\tilde{H}(p)$ .

On sait qu'un polynôme possède toutes ses racines dans l'ensemble des complexes. Cependant, si le degré de  $D(p)$  excède 4, on ne dispose actuellement d'aucune méthode analytique générale permettant d'exprimer ces racines en fonction des coefficients de  $D(p)$ , ce qui compromet le retour à l'original. Fort heureusement, la connaissance de l'original est le plus souvent inutile car on peut faire une étude complète d'un système linéaire en raisonnant uniquement sur sa fonction image. En effet, celle-ci, que l'on extrait de l'équation différentielle régissant le comportement du système, en recèle de ce fait les caractéristiques essentielles. A cet égard, le calcul symbolique a fourni une méthode d'investigation efficace en matière d'ingénierie.

### 8.9.3 Application aux circuits linéaires

#### ① Réponse indicielle du circuit $(R, C)$

La réponse *indicielle* d'un circuit est celle résultant de son excitation par le signal *échelon*  $E(t) = E\Theta(t)$ ,  $\Theta(t)$  étant la fonction de Heaviside 8.122 et  $E$  une constante.

Reprenons l'équation différentielle correspondante du circuit  $(R, C)$  :

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} = E \quad \text{pour } t > 0$$

Par transformation de Laplace, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}}{C} + R[p\tilde{Q} - Q(0^+)] &= \tilde{E} = \frac{E}{p} \quad \text{soit} \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{Rp + 1/C} \left[ \frac{E}{p} + RQ(0^+) \right] = \frac{Q(0^+)}{p + 1/\tau} + CE \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right] \end{aligned}$$

où  $\tau = 1/(RC)$ . Retournant aux originaux de chacun des termes, il vient

$$Q(t) = Q(0^+)e^{-t/\tau} + CE \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

avec la condition initiale  $Q = Q(0^+)$  à  $t = 0^+$ . On vérifie ici que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{Q} = Q(0^+), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{Q} = Q(+\infty) = CE$$

On notera que l'image  $\tilde{i}(p)$  de l'intensité  $i(t) = \dot{Q}(t)$  du courant de charge n'est égale à  $p\tilde{Q}(p)$  que si  $Q(0^+) = 0$ . Si l'on fait le remplacement  $\tilde{Q} = (\tilde{i} + Q(0^+))/p$  dans les équations précédentes, on obtient l'équation donnant  $\tilde{i}$  :

$$\tilde{i} \left( R + \frac{1}{pC} \right) = \tilde{E} - \frac{Q(0^+)}{pC} \quad (8.169)$$

Pour  $\tilde{E} = E/p$ , on trouve ainsi, comme il se doit,

$$\tilde{i} = \frac{1}{R} \left( E - \frac{Q(0^+)}{C} \right) \frac{1}{p + 1/\tau}, \quad \text{puis } i(t) = \frac{1}{R} \left( E - \frac{Q(0^+)}{C} \right) e^{-t/\tau}$$

Cependant, écrite sous la forme générale 8.169, l'équation donnant l'image de l'intensité est remarquable à deux points de vue.

- D'une part, l'image  $\tilde{i}$  y est multipliée par le facteur

$$Z_{RC}(p) = R + \frac{1}{pC} \quad (8.170)$$

que l'on reconnaît comme étant l'impédance du circuit  $(R, C)$  où  $p$  a pris la place de  $j\omega$ . On la nomme aussi *impédance opérationnelle*.

- D'autre part, on voit que la condition initiale sur la charge peut être prise en compte dans l'équation donnant l'image  $\tilde{i}$  au moyen d'une source fictive délivrant la tension  $-Q(0^+)/pC$ . A ce prix minime, l'équation 8.169 est en tout point semblable à une équation de maille classique.

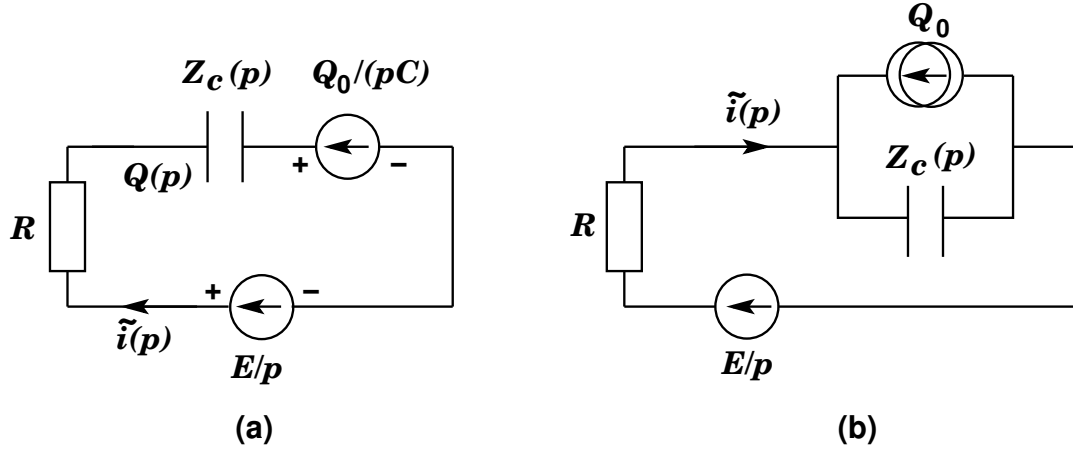


FIGURE 8.27 – Les deux modélisations possibles, dans l'espace des images, d'un condensateur initialement chargé

Comme indiqué à la figure 8.27, on peut d'ailleurs, dans l'espace des images, modéliser le condensateur initialement chargé :

- (a) soit, comme on vient de le voir et comme illustré par la figure 8.27 (a), par l'association en série d'un condensateur parfait d'impédance  $Z_c(p) = 1/pC$  et d'un générateur délivrant la tension  $-Q(0^+)/pC$ , le signe “-” indiquant que cette tension est orientée en sens inverse du courant ;
- (b) soit par l'association en parallèle de ce condensateur et d'une source de courant d'intensité constante  $-Q(0^+)$  (figure 8.27 (b)). En effet,  $\tilde{v}$  étant l'image de la la tension aux bornes du condensateur, on a alors

$$\tilde{i} = -Q(0^+) + \frac{\tilde{v}}{Z_c(p)}, \quad \tilde{v} = \tilde{E} - R\tilde{i}$$

ce qui redonne bien l'équation 8.169.

## ② Réponse indicielle du circuit $(L, R)$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

est

$$R\tilde{i} + L(p\tilde{i} - i(0^+)) = \tilde{E} \quad \text{soit} \quad (R + pL)\tilde{i} = \tilde{E} + Li(0^+) \quad (8.171)$$

Pour  $\tilde{E} = E/p$ , on en déduit la réponse indicielle de ce circuit

$$\tilde{i} = \frac{E}{R} \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right] + \frac{i(0^+)}{p + 1/\tau}, \quad \text{puis} \quad i(t) = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] + i(0^+) e^{-t/\tau}$$

où  $\tau = L/R$ . Ici encore, on vérifie :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{i} = i(0^+), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{i} = i(+\infty) = \frac{E}{R}$$

Comme au paragraphe précédent, on peut interpréter l'équation 8.171 comme une simple équation de maille où

$$Z_{LR} = R + pL \quad (8.172)$$

est l'impédance opérationnelle du circuit ( $L, R$ ) et où le terme  $Li(0^+)$ , provenant d'une intensité de courant initial a priori non nulle, joue le rôle d'une tension constante délivrée par un générateur de tension fictif (figure 8.28 (a)).

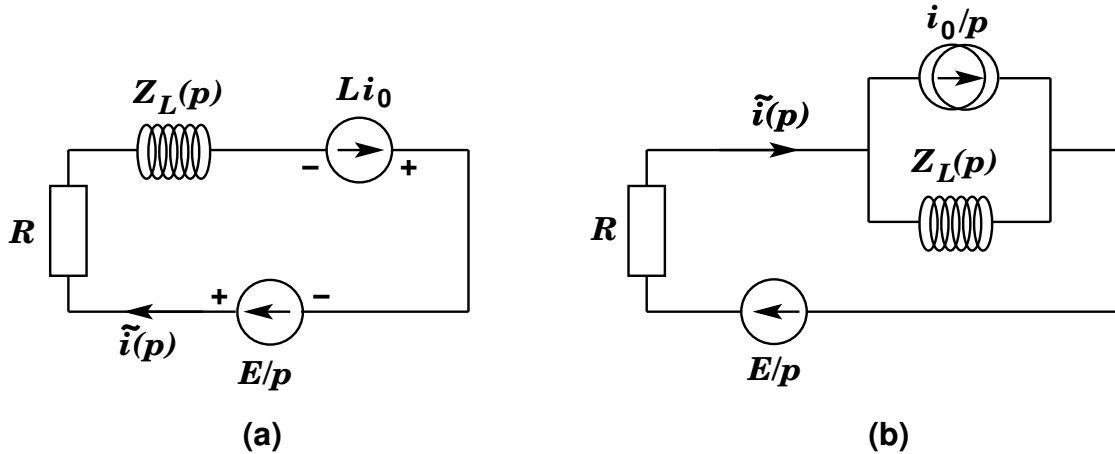


FIGURE 8.28 – Les deux modélisations possibles, dans l'espace des images, d'une bobine dans laquelle circule un courant initial non nul

Comme indiqué à la figure 8.28 (b), et comme on le vérifie aisément, la bobine traversée par un courant initial non nul peut aussi être modélisée par l'association en parallèle d'une bobine idéale d'impédance  $Z_L(p) = pL$  et d'une source de courant d'intensité  $i(0^+)/p$ .

### ③ Réponse indicielle en courant du circuit ( $R, L, C$ ) avec $Q(0^+) \neq 0$ et $i(0^+) \neq 0$

Compte tenu de ce qui précède, nous écrirons directement l'équation de maille

$$\tilde{i} \left( R + pL + \frac{1}{pC} \right) = \tilde{E} + Li(0^+) - \frac{Q(0^+)}{pC}$$

d'où l'on tire

$$\tilde{i} = \frac{pLi(0^+) + [E - Q(0^+)/C]/L}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour tester la méthode, supposons que l'on ait  $\alpha = \omega_0$ , auquel cas

$$\tilde{i} = \frac{pLi(0^+) + [E - Q(0^+)/C]/L}{(p + \alpha)^2}$$

Cette dernière expression présente un pôle double  $p_1 = -\alpha$ . Sa décomposition en éléments simples donne

$$\tilde{i} = i_0 \left( \frac{1}{p + \alpha} - \frac{\alpha}{(p + \alpha)^2} \right) + \frac{1}{L} \left( E - \frac{Q(0^+)}{C} \right) \frac{1}{(p + \alpha)^2} \quad (8.173)$$

ce qui conduit à l'original

$$i(t) = i_0 (1 - \alpha t) e^{-\alpha t} + \frac{1}{L} \left( E - \frac{Q(0^+)}{C} \right) t e^{-\alpha t} \quad (8.174)$$

Comparons ce procédé à une intégration directe de l'équation différentielle

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = E \quad \text{soit} \quad \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \alpha^2q = 0 \quad \text{avec} \quad q = Q - CE \quad \text{et} \quad \omega_0 = \alpha$$

Celle-ci peut être réexprimée sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} [qe^{\alpha t}] = 0$$

dont une double intégration donne

$$q(t) = Q - CE = (At + B)e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad i(t) = Ae^{-\alpha t} - \alpha(At + B)e^{-\alpha t}$$

$A$  et  $B$  étant des constantes que l'on détermine par les conditions initiales, soit

$$Q(0^+) = B + CE, \quad i(0^+) = A - \alpha B \quad \text{donc} \quad B = Q(0^+) - CE, \quad A = i(0^+) + \alpha [Q(0^+) - CE]$$

Nous invitons le lecteur à vérifier que ces valeurs des constantes redonnent bien 8.174 et que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{i} = i(0^+), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{i} = i(+\infty) = 0$$

#### ④ Conclusion

Sans aller plus loin, les exemples classiques considérés ci-dessus donnent déjà un aperçu de ce que la transformation de Laplace peut offrir dans son application aux circuits linéaires, au-delà de sa vocation première à résoudre les équations différentielles linéaires, d'une façon méthodique qui permet notamment de traiter des régimes transitoires en incorporant d'emblée les conditions initiales, comme spécifié plus haut. Tout comme la transformation de Fourier, elle donne de plus la possibilité, en se plaçant dans l'espace des images, d'envisager les circuits linéaires de la même manière que les circuits purement résistifs en régime permanent continu, et de leur appliquer tous les théorèmes établis pour ces derniers, les impédances opérationnelles prenant la place des résistances. En outre, la notion d'impédance complexe se voit élargie à celle d'impédance opérationnelle  $Z(p)$  dépendant d'une variable complexe  $p$ , ce qui ouvre la voie à une étude systématique de ces grandeurs dans tout le plan complexe de  $p$ . Nous reviendrons plus loin sur ce sujet <sup>21</sup>.

21. En principe, la variable  $p$  est assujettie à la condition  $\Re(p) > 0$  afin d'assurer la convergence de l'intégrale de Laplace. Cependant, il est possible d'envisager un *prolongement analytique* des impédances et des fonctions de transfert à tout le plan complexe. C'est justement ce que nous avons commencé à faire dans les exemples précédents où nous avons recherché, sans restriction, les pôles des impédances  $Z(p)$  correspondantes, lesquels, du reste, étaient tous des réels *négatifs*!