

Chapitre 9

Systèmes linéaires invariants, fonctions de transfert, filtrage analogique

9.1 Définition et propriétés d'un système linéaire invariant

9.1.1 Définition

Envisageons un système physique lequel, à partir d'une excitation décrite par une fonction du temps $e(t)$ (signal d'entrée), produit une réaction, une réponse, caractérisée par une fonction $s(t)$ pouvant elle aussi dépendre du temps (signal de sortie)¹. Ce système possède l'invariance temporelle si une translation dans le temps ne change pas la relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie ; explicitement, il est dit *invariant temporellement*, ou, plus simplement, *invariant* (le caractère temporel de cette propriété étant alors sous-entendu), si au signal d'entrée $e(t + t_0)$ correspond le signal de sortie $s(t + t_0)$ ².

Un système invariant est de plus *linéaire* si la relation qu'il impose entre le signal d'entrée et le signal de sortie est de nature linéaire. Cela signifie que, étant donné deux signaux d'entrée $e_1(t)$ et $e_2(t)$ donnant respectivement lieu aux réponses $s_1(t)$ et $s_2(t)$, au signal d'entrée $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$, où λ_1 et λ_2 sont deux constantes complexes quelconques, le système répond par le signal de sortie $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$. Un système possédant les deux propriétés d'invariance temporelle et de linéarité est un *système linéaire invariant* (SLI). La relation de linéarité s'exprime au moyen d'un *opérateur* linéaire \mathcal{H} , caractéristique du système étudié :

$$s(t) = \mathcal{H}[e(t)] \quad (9.1)$$

Aux deux propriétés précédentes d'un SLI peuvent s'en rajouter d'autres comme

- la *causalité*; les systèmes physiques respectent le principe causal, selon lequel un effet ne peut précéder sa cause. Dans ce cas, on a nécessairement

$$\text{Si } e(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0, \text{ alors } s(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0 \quad (9.2)$$

- La *stabilité*; celle-ci peut prendre deux formes :

✓ le système est stable *au sens large*. Dans ce cas, à tout signal d'entrée *borné* correspond un signal de sortie *borné*.

1. Selon le système considéré, signal d'entrée et signal de sortie peuvent être multidimensionnels, c'est-à-dire, posséder plusieurs composantes. Dans les cas les plus "courants" en Electrocircuitique, ces grandeurs sont *scalaires*, c'est-à-dire, unidimensionnelles. C'est ce que nous supposons dans la suite.

2. On dit aussi que l'on a une invariance par translation dans le temps. Le choix de l'origine des dates est alors arbitraire.

✓ Le système est stable *au sens strict*. Dans ce cas, lorsque le système, initialement en équilibre, subit une perturbation, il revient au même équilibre, après un temps plus ou moins long, dès que la perturbation disparaît³.

9.1.2 Réponse impulsionnelle et réponse indicielle d'un SLI

Une *impulsion* est un signal d'entrée représenté par la distribution de Dirac $\delta(t)$. A cette perturbation, un système réagit par sa *réponse impulsionnelle* $h(t) = \mathcal{H}[\delta(t)]$. S'agissant d'un SLI, il est fondamental de connaître celle-ci pour la raison suivante. Par définition de la distribution de Dirac, pour tout signal d'entrée $e(t)$, on a

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u) e(u) du$$

Puisque par hypothèse l'opérateur \mathcal{H} , qui agit sur les fonctions de t , est linéaire, on peut écrire le signal de sortie comme suit :

$$s(t) = \mathcal{H}[e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u) \mathcal{H}[\delta(t-u)] du$$

et comme le système envisagé est invariant, on a $\mathcal{H}[\delta(t-u)] = h(t-u)$. On en déduit la formule

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u) e(u) du \quad (9.3)$$

qui montre que le signal de sortie s'exprime comme le *produit de convolution* du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle du système. Ce résultat révèle l'importance de cette dernière, dont on peut dire qu'elle caractérise entièrement ledit système.

La *réponse indicielle* d'un SLI est celle correspondant au signal d'entrée décrit par la fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside) $\Theta(t)$, telle que $\Theta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\Theta(t) = 1$ pour $t > 0$. D'après (9.3), elle est donnée par

$$s(t) = \int_0^{+\infty} h(t-u) du = \int_{-\infty}^t h(y) dy$$

C'est l'intégrale de la réponse impulsionnelle.

9.1.3 Fonctions propres d'un SLI, fonction de transfert

Notons T_u l'opérateur de translation dans le temps, transformant la valeur $f(t)$ d'une fonction quelconque du temps en $f(t+u)$: $T_u[f(t)] = f(t+u)$. C'est aussi un opérateur linéaire. En utilisant le développement en série de Taylor de $f(t+u)$ suivant les puissances de u , on établit aisément qu'on peut l'exprimer sous la forme

$$T_u = \exp\left[u \frac{d}{dt}\right] \quad (9.4)$$

qui montre clairement le lien entre T_u et l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$.

L'invariance temporelle d'un SLI exige que l'on ait $\mathcal{H}[e(t+u)] = s(t+u)$, soit $\mathcal{H}[T_u[e(t)]] = T_u[\mathcal{H}[e(t)]]$, pour *tout* signal d'entrée. L'invariance temporelle d'un SLI résulte donc du fait que son opérateur \mathcal{H} et l'opérateur T_u *commutent* :

$$\mathcal{H}T_u = T_u\mathcal{H} \quad (9.5)$$

3. Il s'agit là d'une stabilité asymptotique, au sens de Lyapounov.

D'après (9.4), l'opérateur \mathcal{H} d'un SLI doit donc commuter aussi avec l'opérateur de dérivation. Ce résultat est important pour la recherche des *fonctions propres* d'un SLI, c'est-à-dire, des signaux d'entrée satisfaisant

$$\mathcal{H}[e_\lambda(t)] = \lambda e_\lambda(t) \quad (9.6)$$

λ étant la valeur propre associée à la fonction propre e_λ . En effet, d'après (9.5) et (9.4), les opérateurs commutants \mathcal{H} , T_u et $\frac{d}{dt}$ ont nécessairement un ensemble de fonctions propres en commun. Or, les fonctions propres de l'opérateur de dérivation doivent vérifier

$$\frac{de_p}{dt}(t) = p e_p(t) \quad (9.7)$$

et ont donc l'unique forme $e_p(t) = C_p e^{pt}$, p et C_p étant des nombres complexes quelconques. Les fonctions propres d'un SLI sont donc uniquement de cette même forme. Cependant, certaines peuvent ne pas être admissibles. Un critère de stabilité peut notamment être imposé pour ne prendre en compte que les formes exponentielles dont le paramètre p a une partie réelle négative ou nulle : $\Re(p) \leq 0$. On conclut de ce qui précède qu'à un signal d'entrée $e_p(t) = e^{pt}$, un SLI répond par le signal de sortie $s_p(t) = H(p) e^{pt}$. La grandeur $H(p)$, fonction de la variable complexe p , est la valeur propre associée à la fonction propre e^{pt} . Elle est appelée *fonction de transfert* du SLI étudié.

Ce résultat pouvait déjà être déduit de (9.3). En effet,

$$s_p(t) = e^{pt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u) e^{p(u-t)} du = e^{pt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-py} dy = H(p) e^{pt}, \quad \text{avec}$$

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-py} dy \quad (9.8)$$

où l'on voit le rapport étroit entre $H(p)$ et la réponse impulsionnelle du SLI. Une autre façon de considérer les choses est de rappeler que la transformée de Laplace du produit de convolution de deux signaux est égale au produit usuel des transformées de Laplace de ces deux signaux⁴. Prenant la transformée de Laplace de (9.3), on en déduit que les transformées de Laplace $E(p)$ et $S(p)$ du signal d'entrée et du signal de sortie respectivement, sont liées par la relation de proportionnalité

$$S(p) = H(p) E(p) \quad (9.9)$$

où $H(p)$ est donc la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, donnée par (9.8). On constate ainsi le rôle majeur joué par les fonctions e^{pt} dans l'étude d'un SLI. On se rappelle aussi leur importance dans l'analyse temporelle et fréquentielle de la réponse d'un système, via les transformations de Laplace et de Fourier⁵. Les fonctions de transfert étudiées dans la suite en régime sinusoïdal permanent se définissent comme le rapport de deux tensions. Ces fonctions sont donc *sans dimension*⁶.

9.1.4 SLI et équations différentielles

Pour de nombreux systèmes physiques, signaux d'entrée et de sortie sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k}(t) = b_0 e(t) + \sum_{\ell=1}^m b_\ell \frac{d^\ell e}{dt^\ell}(t) \quad (9.10)$$

4. A démontrer.

5. Voir le chapitre 8.

6. Mentionnons que certaines ont des analogues mécaniques.

où les ordres de dérivation m et n sont *finis*. Tous les coefficients a et b seront ici supposés *réels*. Les circuits électriques considérés dans les chapitres précédents font partie de cette catégorie, de même que la plupart des systèmes mécaniques. Du fait que les opérateurs de dérivation sont linéaires, la linéarité de ces systèmes est évidente. Ils sont également invariants temporellement car les coefficients sont constants, d'une part, et les opérations de dérivations sont insensibles à une translation constante du temps, d'autre part. Tout système dont le fonctionnement est régi par une équation telle que (9.10) est un SLI, mais la réciproque n'est pas vraie. Le contre-exemple est fourni par un système exécutant l'opération de translation dans le temps T_u considérée plus haut : $s(t) = T_u[e(t)] = e(t+u)$. On vérifie aisément qu'un tel système est un SLI, mais entrée et sortie ne sont pas reliées par une équation différentielle *d'ordre fini*. Comme le montre en effet (9.4), l'expression de $s(t)$ fait généralement intervenir une *infinité* de dérivations de $e(t)$.

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système linéaire invariant régi par une équation différentielle linéaire (SLI-ED) s'obtient aisément en posant dans (9.10) $e(t) = e^{pt}$ et $s(t) = H(p)e^{pt}$. L'opération de dérivation $\frac{d^k}{dt^k}$ appliquée à de telles fonctions revenant à multiplier celles-ci par p^k , on obtient immédiatement :

$$H(p) = \frac{b_0 + \sum_{\ell=1}^m b_\ell p^\ell}{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k p^k} \quad (9.11)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe 8.3.2 à propos des impédances complexes, la structure de la fonction de transfert est le reflet de l'équation différentielle dont elle est issue et à cet égard, il peut être techniquement plus simple de déterminer préalablement la fonction de transfert, puis, dans l'expression trouvée, remplacer chaque puissance de p par l'opérateur de dérivation pour reconstituer ladite équation différentielle.

La fonction de transfert (9.11) d'un SLI-ED se présente donc comme le quotient de deux polynômes de la variable complexe p , de degré m pour celui du numérateur et de degré n pour celui du dénominateur. On appelle *ordre* de la fonction de transfert le degré du polynôme de plus haut degré. Usuellement, on a $m \leq n$ et l'ordre de la fonction de transfert se confond avec le degré du polynôme figurant au dénominateur.

9.1.5 Stabilité d'un SLI-ED

Considérons qu'un SLI-ED est *stable* si, après avoir été soumis à une excitation passagère, le signal de sortie qu'il produit tend vers zéro à mesure que t augmente; autrement exprimé, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 0$ pour un signal d'entrée tel que $e(t) = 0$ pour $t > t_0$. Le système est *instable* si cette condition n'est pas réalisée. Or, pour $t > t_0$, l'équation différentielle (9.10) devient

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k}(t) = 0 \quad (9.12)$$

Cette nouvelle équation a pour solutions élémentaires les exponentielles $e^{p_r t}$, où les nombres p_r , a priori complexes, sont les racines, ici supposées *distinctes*, de l'équation caractéristique

$$F(p) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k p^k = 0 \quad (9.13)$$

et l'on exprime sa solution générale comme une combinaison linéaire desdites solutions élémentaires

$$s(t) = \sum_r C_r e^{p_r t} \quad (9.14)$$

où les constantes complexes C_r dépendent des conditions initiales à $t = t_0$. On voit immédiatement que $s(t)$ ne peut tendre vers zéro lorsque t croît indéfiniment que si et seulement *tous* les p_r ont chacun une partie réelle *négative* :

$$\Re(p_r) < 0 \quad (9.15)$$

Le cas où des racines de (9.13) sont multiples change la structure de la solution générale, mais ne change pas la conclusion (9.15).

Il est clair que l'équation (9.13) est aussi celle qui définit les *pôles* de la fonction de transfert (9.11). On peut alors énoncer qu'un SLI-ED *est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont situés dans la partie gauche du plan complexe, axe imaginaire exclu*.

9.1.6 Critère de Routh-Hurwitz

Les coefficients a_k dans (9.13) étant supposés réels, si p_r est une racine complexe de cette équation, son conjugué complexe p_r^* en est aussi une racine, de même multiplicité $k_r \geq 1$. Le polynôme $F(p)$ peut également posséder des zéros réels, de multiplicité $\ell_s \geq 1$. On peut ainsi exprimer ce polynôme sous la forme

$$F(p) = a_n G(p), \quad \text{avec} \quad G(p) = \prod_{r=1}^N (p - p_r)^{k_r} (p - p_r^*)^{k_r} \prod_{s=1}^M (p - p_s)^{\ell_s}, \quad \text{ou}$$

$$G(p) = \prod_{r=1}^N [p^2 - 2p \Re(p_r) + |p_r|^2]^{k_r} \prod_{s=1}^M (p - p_s)^{\ell_s}, \quad \text{avec} \quad 2N + M = n \quad (9.16)$$

Comme le critère de stabilité impose $\Re(p_r) < 0$ et $p_s < 0$, le développement des produits dans l'expression de $G(p)$ ne peut que conduire à un polynôme dont *tous* les coefficients sont *positifs*. Il s'ensuit que les coefficients a_k de $F(p)$ doivent être tous de même signe. On en déduit une condition nécessaire de stabilité :

☞ *une condition nécessaire pour que tous les pôles de $H(p)$ aient leur partie réelle négative, est que tous les coefficients de $F(p)$ soient de même signe.*

Sans perte de généralité, ce signe peut être pris positif. Cette condition est importante dans la mesure où elle ne nécessite pas de connaître explicitement les pôles. Il est facile de montrer qu'elle est suffisante dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Cependant, elle ne l'est plus pour $n \geq 3$. Considérons par exemple le polynôme d'ordre 3 :

$$F(p) = 2p^3 + p^2 + p + 1 \quad (9.17)$$

S'il a un zéro réel, ce zéro est nécessairement négatif car tous les coefficients sont positifs. Mais si les deux autres zéros sont complexes (ils sont alors conjugués l'un de l'autre), rien ne dit que leur partie réelle est négative. De fait, les zéros de (9.17) sont $p_1 \simeq -0,74$, $p_{2,3} \simeq 0,12 \pm j0,81$.

Au 19^{ème} siècle, les mathématiciens Routh et Hurwitz ont établi un critère général de stabilité, connu sous le nom de *critère de Routh-Hurwitz*, qui s'affranchit de la connaissance des pôles⁷ :

☞ *La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros du polynôme à coefficients réels $F(p)$, où $a_0 > 0$, aient tous leur partie réelle négative, est que les déterminants $\Delta_\alpha = a_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ soient tous positifs, en posant, pour $\alpha > 1$,*

7. E.J. Routh, Dynamique, t. 2., Chap. VI, 1874; "A treatise on The Stability of Motion", London, U.K., Macmillan; Hurwitz A., "Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negative reellen Theilen besitzt", Mathematische Annalen, t. 46, 1895, p. 273-284. Voir aussi : Schur I., "Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realtheilen besitzen", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1 (1921), 307-311; J. Dieudonné, "La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconque)", Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 93 (1938).

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2\alpha-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2\alpha-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2\alpha-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2\alpha-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & a_\alpha \end{vmatrix} \quad (9.18)$$

Le critère de stabilité stricte impose une positivité stricte des déterminants. Si l'un d'eux est nul, cela signifie que des zéros sont situés sur l'axe imaginaire, ce qui conduit à des oscillations permanentes dans (9.14). Notons aussi que les coefficients a_k pour lesquels $k > n$ étant bien entendu inexistant, on les remplace simplement par zéro dans les déterminants où ils seraient susceptibles d'apparaître. Pour le polynôme (9.17), dont tous les coefficients sont positifs, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = -2$$

Ce polynôme est donc bien "instable". Pour

$$F(p) = p^4 + p^3 + 6p^2 + p + 4$$

dont tous les coefficients sont également positifs, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = +1$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = +1$$

et ce polynôme est donc "stable" ⁸.

Le tableau (9.19) ci-dessous résume explicitement les conditions nécessaires et suffisantes requises (CNS) pour $n = 1, 2, 3, 4$ (en prenant $a_0 > 0$).

n	CNS
1	$a_0 > 0, a_1 > 0$
2	$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$
3	$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, et $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
4	$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ et $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$

(9.19)

8. Les zéros correspondants sont tous complexes : $p_{1,2} \simeq -0,47 \pm j 2,22$; $p_{3,4} \simeq -0,026 \pm j 0,88$.

Citons également le critère de Liénart-Chipart⁹, qui est très utile car il permet de réduire de moitié le nombre de déterminants à considérer. En effet, en utilisant les notations précédentes, il stipule que la stabilité du polynôme est effective si et seulement si l'une des quatre conditions suivantes est réalisée :

- $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots;$
- $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots;$
- $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots;$
- $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots.$

9.2 Notions sur les filtres

9.2.1 Introduction

Au paragraphe 9.1.3, nous avons vu qu'à un signal d'entrée du type $e(t) = e^{pt}$, un SLI répond par un signal de sortie $s(t) = H(p)e(t)$. Si l'on impose à l'entrée du SLI un signal sinusoïdal $e(t) = Ee^{j\omega t}$, on obtiendra donc le signal de sortie $s(t) = H(j\omega)e(t)$. La fonction de transfert d'un SLI en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω est donc donnée par $H(j\omega)$ ($p = j\omega$). Comme il a été expliqué dans la section 8.1, un signal d'entrée quelconque $e(t)$ peut toujours s'exprimer comme une superposition de signaux sinusoïdaux au moyen de la transformation de Fourier¹⁰ :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{où} \quad E(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.20)$$

qui est de nature linéaire et dont on admettra qu'elle commute avec l'opérateur \mathcal{H} du SLI étudié. C'est notamment toujours le cas pour les SLI-ED. En conséquence, le signal de sortie s'écrit

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9.21)$$

Cette dernière relation révèle l'action réelle d'un SLI sur un signal d'entrée : par l'intermédiaire de la fonction de transfert $H(j\omega)$, il agit sur le spectre en fréquences de ce signal. Il peut en modifier profondément la structure, par exemple en atténuant sa partie de basses fréquences tout en privilégiant les hautes fréquences (passe-haut) ou bien en en retenant qu'un intervalle fini (passe-bande). En cela, il constitue un *filtre* (de fréquences). Dans la suite, seul le *filtrage analogique* sera considéré. En Electronique, il est mis en oeuvre en associant des composants physiques tels que résistances, condensateurs, inductances, transistors, etc. Il s'oppose au *filtrage numérique* réalisé à l'aide d'une succession d'opérations mathématiques sur un signal discret, soit par des circuits intégrés dédiés, des processeurs programmables ou par un logiciel.

En Electronique, il existe deux catégories de filtres *analogiques*. Les filtres dits *passifs* sont ceux constitués d'éléments passifs, résistances, condensateurs, inductances, dont le fonctionnement ne nécessite pas d'alimentation externe en énergie. Les filtres dits *actifs* comportent par contre des composants électroniques fonctionnant à l'aide d'alimentations externes. Ils sont nettement plus avantageux que les filtres passifs, car plus performants pour un plus faible encombrement, notamment en permettant d'éliminer les inductances que certains d'entre eux peuvent en outre simuler.

Selon la façon dont ils opèrent sur le spectre en fréquences, les filtres sont classés comme suit.

- Un filtre *passe-bas* privilégie les fréquences en dessous d'une valeur caractéristique qui lui est propre.

9. A. Liénard, M.H. Chipart, " Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique", J. Math. Pures Appl. (6) 10, p. 291-346 (1914).

10. On l'admettra ici.

- Un filtre *passé-haut* privilégie les fréquences supérieures au-dessus d'une valeur caractéristique.
- Un filtre *passé-bande* privilégie les fréquences situées dans un intervalle caractéristique.
- Un filtre *coupe-bande* privilégie les fréquences en dehors d'un intervalle caractéristique.

Seules seront considérées ici les fonctions de transfert de SLI-ED. Elles prennent la forme générale (9.11), avec $p = j\omega$. Comme en réalité il n'existe pas de système physique dont la réponse croîtrait indéfiniment avec la fréquence, le degré du dénominateur de $H(j\omega)$ est supérieur à celui de son numérateur et l'ordre d'un filtre est donc égal au degré dudit dénominateur.

9.2.2 Filtre du premier ordre

La forme générale de la fonction de transfert d'un filtre du premier ordre est

$$H(p) = \frac{B_1 p + B_0}{A_1 p + A_0} \quad (9.22)$$

où les coefficients A_0 , A_1 , B_0 et B_1 peuvent être complexes et $p = j\omega$ en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω . L'éventualité $A_0 = 0$ est à écarter car, d'une part, elle imposerait $B_0 = 0$ afin d'obtenir une fonction de transfert finie en régime continu (où $\omega = 0$) et, d'autre part, elle conduirait à une fonction de transfert constante, laquelle est étrangère au concept de filtre.

① Les filtres *passé-bas* correspondent à des fonctions de transfert pour lesquelles $B_0 \neq 0$ et $B_1 = 0$. Des exemples simples de tels filtres (passifs) en Electrocinétique sont représentés à la figure (9.1)

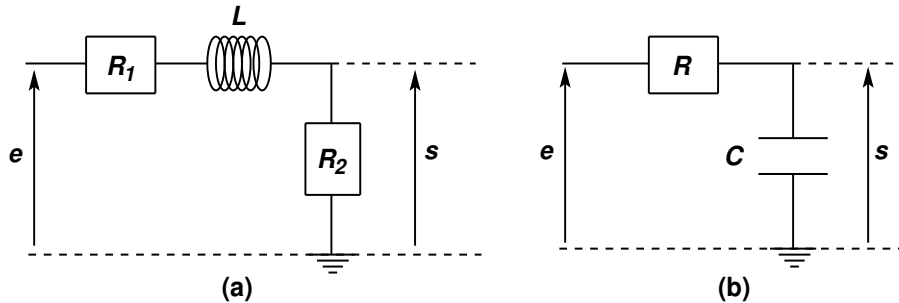


FIGURE 9.1 – Exemples de filtres du premier ordre passé-bas

Exprimant leurs fonctions de transfert en régime sinusoïdal sous la forme générique¹¹ :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \quad (9.23)$$

on a, pour (a), $H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$, et pour (b), $H_0 = 1$, $\tau = RC$.

② Les filtres *passé-haut* correspondent quant à eux au cas où $B_0 = 0$ et $B_1 \neq 0$.

Les exemples de filtres passé-haut (passifs) représentés à la figure (9.2) ont pour fonction de transfert

$$H(j\omega) = H_0 \frac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \quad (9.24)$$

avec, pour (a) : $H_0 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = L/R$, et pour (b) : $H_0 = 1$, $\tau_1 = R_2 C$, $\tau_2 = (R_1 + R_2) C$.

11. Il s'agit ici des fonctions de transfert à circuit extérieur *ouvert*, c'est-à-dire, lorsque les bornes de sortie ne sont reliées à aucun circuit secondaire ou bien lorsque ce circuit secondaire a une impédance d'entrée infinie.

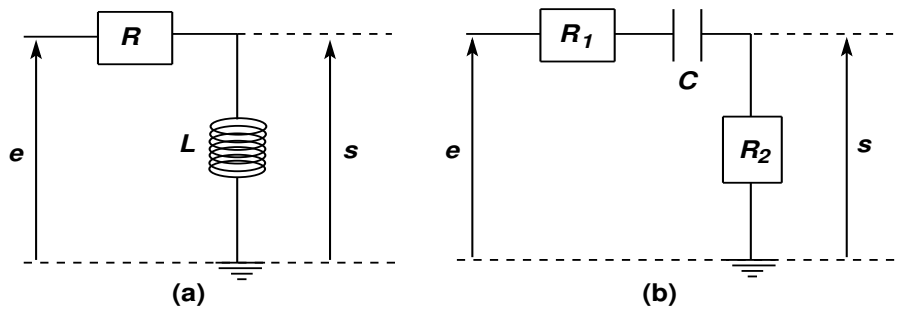


FIGURE 9.2 – Exemples de filtres du premier ordre passe-haut

9.2.3 Filtre du second ordre

La forme générale de la fonction de transfert d'un filtre du second ordre est

$$H(p) = \frac{B_2 p^2 + B_1 p + B_0}{A_2 p^2 + A_1 p + A_0} \quad (9.25)$$

avec $A_2 \neq 0$ et $A_0 \neq 0$. Si $B_0 \neq 0$, $B_2 = 0$ et éventuellement $B_1 = 0$, on a affaire à un filtre passe-bas. Si $B_2 \neq 0$, $B_0 = 0$ et éventuellement $B_1 = 0$, il s'agit d'un filtre passe-haut. Dans le cas où $B_0 = 0$ et $B_2 = 0$, la fonction de transfert défavorise à la fois les petites et les hautes fréquences, en privilégiant un domaine fini de fréquences : on a affaire à un filtre *passé-bande*. Un exemple d'un tel filtre (passif) est représenté à la figure (9.2). L'effet *passé-bande* est dû au fait que, d'une part, le condensateur bloque les signaux de faibles fréquences, tandis que les signaux de hautes fréquences sont bloqués par la bobine. Sa fonction de transfert est ¹²

$$H(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C}{1 - LC\omega^2 + j\omega C(R_1 + R_2)} \quad (9.26)$$

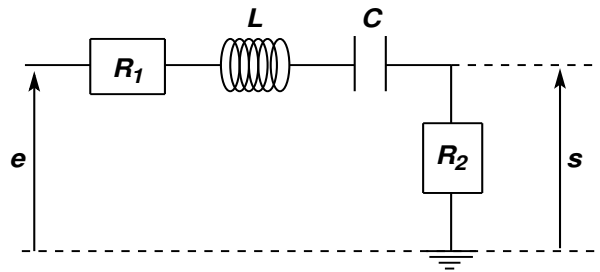


FIGURE 9.3 – Exemple de filtre du second ordre passé-bande

ce qui correspond à $B_0 = 0$, $B_2 = 0$, $B_1 = R_2 C$, $A_0 = 1$, $A_1 = (R_1 + R_2)C$, $A_2 = LC$.

9.3 Représentation de Bode ¹³

La courbe de réponse en fréquence d'un système est la représentation, en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) et par rapport au signal d'entrée, de l'amplitude et de la phase du signal de sortie. Elle présente l'intérêt :

- de montrer l'aptitude d'un système à reproduire les fréquences souhaitées ;

¹². Ici encore, à circuit extérieur ouvert.

¹³. H.W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1945.

- de déterminer la bande passante de ce système (dont la définition est donnée plus loin) ;
- de mettre en évidence la capacité d'un filtre à sélectionner les fréquences désirées et à éliminer celles qui sont gênantes ;
- de montrer les déphasages introduits par le système en fonction de la fréquence.

Ecrivons $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$. Dans le schéma de Bode, on ne représente pas directement les variations de $|H(j\omega)|$ en fonction de ω , mais plutôt celles du *gain en décibel*, défini par

$$G = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (9.27)$$

et non pas en fonction de ω mais plutôt en fonction de $\log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$, où ω_0 est soit une pulsation caractéristique du système étudié, soit une autre pulsation appropriée, prise comme unité. Il s'agit donc d'une représentation doublement logarithmique (log-log). Le déphasage $\varphi(\omega)$ est lui aussi représenté, exprimé en degré ou en radian, en fonction de $\log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$ (échelle semi-log).

Faisons la remarque suivante. La fonction de transfert (9.11) d'un SLI-ED s'exprime aussi sous la forme

$$H(p) = \frac{N_0 \prod_{\ell=1}^{N_m} (p - p_\ell)^{d_\ell}}{D_0 \prod_{k=1}^{N_n} (p - p_k)^{d_k}} \quad (9.28)$$

faisant apparaître, avec leurs degrés de multiplicité, ses zéros (p_ℓ) et ses pôles (p_k). Comme nous l'avons déjà mentionné, l'équation différentielle dont est issue (9.28) est généralement à coefficients réels. En conséquence, si p_r est un zéro ou un pôle complexe, son complexe conjugué p_r^* est aussi un zéro ou un pôle. Regroupons alors les deux facteurs $p - p_r$ et $p - p_r^*$ pour obtenir

$$(p - p_r)(p - p_r^*) = \omega_r^2 \left[1 + 2\xi_r \frac{p}{\omega_r} + \frac{p^2}{\omega_r^2} \right], \quad \text{où } \omega_r = |p_r|, \quad \xi_r = -\frac{\Re(p_r)}{|p_r|} \quad (9.29)$$

Procédant ainsi, la fonction de transfert et le gain s'expriment comme

$$H(p) = \alpha p^q \frac{\prod_{\ell_1=1}^{m_1} \left(1 + \frac{p}{\omega_{\ell_1}} \right)^{d_{\ell_1}} \prod_{\ell_2=1}^{m_2} \left[1 + 2\xi_{\ell_2} \frac{p}{\omega_{\ell_2}} + \frac{p^2}{\omega_{\ell_2}^2} \right]^{d_{\ell_2}}}{\prod_{k_1=1}^{n_1} \left(1 + \frac{p}{\omega_{k_1}} \right)^{d_{k_1}} \prod_{k_2=1}^{n_2} \left[1 + 2\xi_{k_2} \frac{p}{\omega_{k_2}} + \frac{p^2}{\omega_{k_2}^2} \right]^{d_{k_2}}}, \quad \text{et} \quad (9.30)$$

$$G = G_0 + q \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0} + \sum_{\ell_1=1}^{m_1} 20 d_{\ell_1} \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{\ell_1}} \right| + \sum_{\ell_2=1}^{m_2} 20 d_{\ell_2} \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{\ell_2} \frac{\omega}{\omega_{\ell_2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{\ell_2}^2} \right| \\ - \sum_{k_1=1}^{n_1} 20 d_{k_1} \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{k_1}} \right| - \sum_{k_2=1}^{n_2} 20 d_{k_2} \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{k_2} \frac{\omega}{\omega_{k_2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{k_2}^2} \right|$$

où G_0 est une constante, positive ou négative. Les éventuels zéros et pôles complexes sont supposés l'être strictement : $|\xi_{\ell_2}| < 1$, $|\xi_{k_2}| < 1$; de plus, pour un système stable, on a $\omega_{k_1} = -p_{k_1} > 0$ et $\xi_{k_2} > 0$. L'expression ci-dessus tient compte aussi d'un possible zéro ou d'un possible pôle à $p = 0$; dans le premier cas, $q \geq 0$, dans le second, $q \leq 0$.

Au regard de (9.30), on voit tout l'intérêt d'une représentation doublement logarithmique pour l'amplitude : d'une part, elle permet une représentation facile de très grandes variations de ω ; d'autre part, la définition du gain permet de transformer des produits en sommes et des rapports

en différences. On peut ainsi étudier séparément chaque terme élémentaire, soit du premier ordre : $20 d_r \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_r} \right|$, soit du second ordre : $20 d_r \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_r \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \right|$, puis faire simplement la somme et/ou la différence de tous les termes impliqués de ce type, pour obtenir le gain. Si la fonction de transfert ne possède que des zéros et des pôles réels, on pose simplement $d_{\ell_2} = 0$ et $d_{k_2} = 0$. Conjointement, la phase totale de $H(p)$ (son argument) est obtenue comme somme algébrique des phases correspondant à ces facteurs.

Certes, les courbes exactes de gain et de phase peuvent être obtenues au moyen d'un programme informatique approprié. Cependant, il n'est pas indispensable de disposer de ces courbes point par point lorsqu'on veut avoir une vue d'ensemble rapide des performances du système étudié.

Dans cette perspective, il est intéressant de remplacer la courbe réelle par une courbe approchée, formée d'éléments linéaires, que l'on obtient en assimilant la courbe réelle à ses asymptotes. Cette courbe approchée est appelée *courbe de Bode idéalisée* (ou aussi, *asymptotique*).

9.3.1 Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Prenons comme exemple les circuits passe-bas de la figure (9.1) de fonction de transfert (9.23), où $H_0 > 0$. On a ici

$$G = G_0 - 20 \log_{10} \sqrt{1 + u^2}, \quad \varphi = -\tan^{-1} u \quad (9.31)$$

avec $G_0 = 20 \log_{10} H_0, \quad u = \omega\tau$

Commençons par étudier la fonction $g(u) = -20 \log_{10} \sqrt{1 + u^2}$. Lorsque $u \rightarrow 0$, $g(u) \rightarrow 0$: dans le plan $(\log_{10} u, g(u))$, une première asymptote est donc constituée par l'horizontale d'ordonnée nulle. Lorsque $u \gg 1$, $g(u) \simeq -20 \log_{10} u$: dans le même plan, la droite d'équation $y(u) = -20 \log_{10} u$ est la seconde asymptote de la courbe réelle de $g(u)$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(1, 0)$ et sa pente est de -20 dB/décade¹⁴ (ou, de façon équivalente, -6 dB/octave).

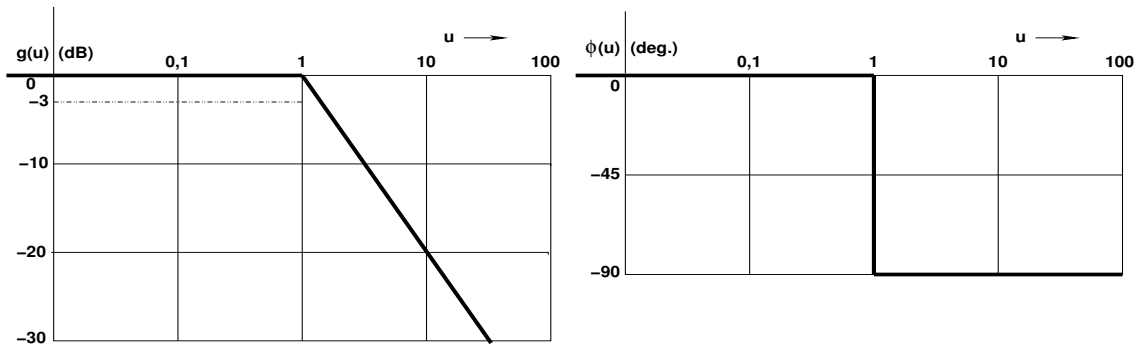


FIGURE 9.4 – Courbes de Bode idéalisées d'un système d'ordre un

Pour ce qui concerne la phase $\varphi(u)$, on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u) \simeq -90^\circ$ pour $u \gg 1$. Dans le plan $(\log_{10} u, \varphi(u))$, la courbe de phase a deux asymptotes : l'horizontale d'ordonnée nulle et l'horizontale d'ordonnée -90° .

On obtient ainsi les courbes de gain et de phase *idéalisées* de la figure (9.4) (en traits pleins). Pour $u = 1$, ces courbes présentent une cassure correspondant à une modification de la pente du gain et pour la phase à un passage rapide de 0° à -90° . Pour cette raison, la pulsation $\omega = 1/\tau$ est appelée *pulsation de cassure* ou *pulsation de coupure*. Or, pour cette valeur de u , on a exactement $g(1) = -3$ dB et $\varphi(1) = -45^\circ$. Disposant de ces points exacts et des asymptotes on peut alors dessiner grossièrement, à main levée, des courbes de gain et de phase plus proches des courbes réelles, comme indiqué à la figure (9.5) (courbes en tirets).

14. C'est-à-dire, y décroît de 20 unités (dB) lorsque u est multiplié par 10.

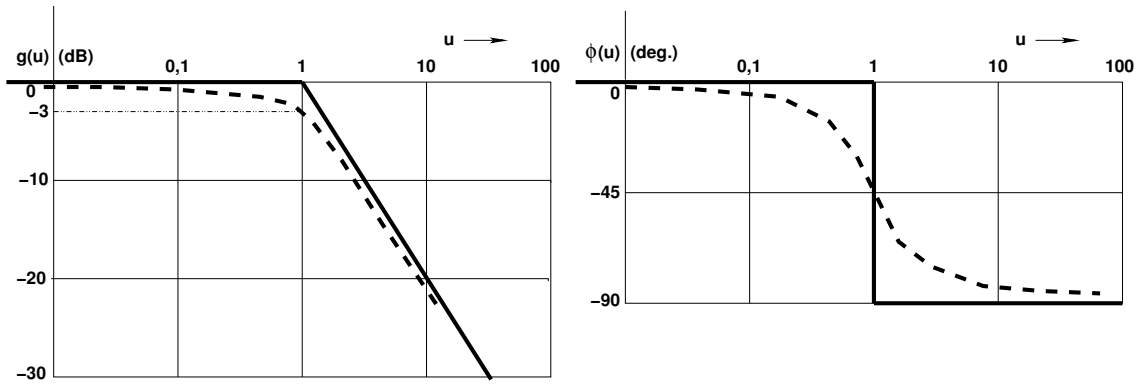


FIGURE 9.5 – Courbes de Bode “à main levée” pour un système d’ordre un

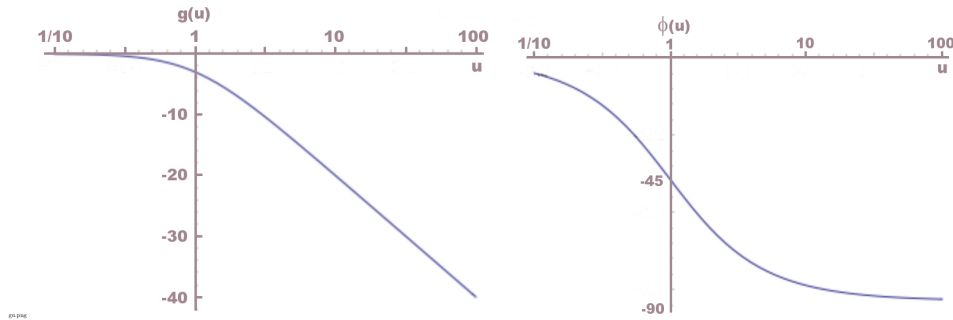


FIGURE 9.6 – Courbes de Bode exactes pour un système d’ordre un

Pour la comparaison, les courbes exactes de gain et de phase sont représentées à la figure (9.6). On notera que la courbe de gain réelle est assez proche de la courbe asymptotique correspondante et ne s’en écarte qu’au voisinage des cassures. Par contre, la courbe de phase réelle s’écarte davantage de la courbe asymptotique correspondante. Envisageons un système formé uniquement d’éléments du premier ordre : $d_{\ell_2} = d_{k_2} = 0$ dans (9.30). Pour obtenir les courbes de Bode idéalisées correspondantes, on représente, pour chacune des fonctions $1 + j\omega/\omega_r$, les courbes du gain et de la phase en se limitant aux asymptotes, puis, comme dit précédemment, on ajoute algébriquement ces différentes courbes. Les courbes idéalisées globales ainsi obtenues présentent des cassures se traduisant par un changement de pente de la courbe du gain et une variation d’argument sur la courbe de phase. On notera que

- à un zéro de multiplicité d_r correspond une cassure *vers le haut* faisant varier la pente du gain de $+20d_r$ dB/dec et la phase de $+(90d_r)^\circ$;
- à un pôle de multiplicité d_r correspond une cassure *vers le bas* faisant varier la pente du gain de $-20d_r$ dB/dec et la phase de $-(90d_r)^\circ$;

Ainsi, la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{\omega_0}{p} \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^2} \quad (9.32)$$

où $\omega_0 = 1$ rd/sec, $\omega_1 = 10^2$ rd/sec, $\omega_2 = 10^3$ rd/sec, a pour courbes de Bode idéalisées celles représentées à la figure (9.7). Cependant, sur les courbes réelles de gain et de phase, les cassures ne se distinguent clairement les unes des autres que si les pulsations ω_r sont très différentes.. C’est ce que montre la figure (9.8). Dans le cas (a), les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont trop proches l’une de l’autre pour que soient visibles les structures prévues par les courbes idéalisées. Remarquons enfin que si la fonction de transfert comporte une constante complexe multiplicative

$H_0 e^{j\varphi_0}$ ($H_0 > 0$), la courbe du gain total et celle du déphasage total devront être traduites parallèlement à l'axe des ordonnées qui leur est propre, respectivement de $G_0 = 20 \log_{10} H_0$ et de φ_0 .

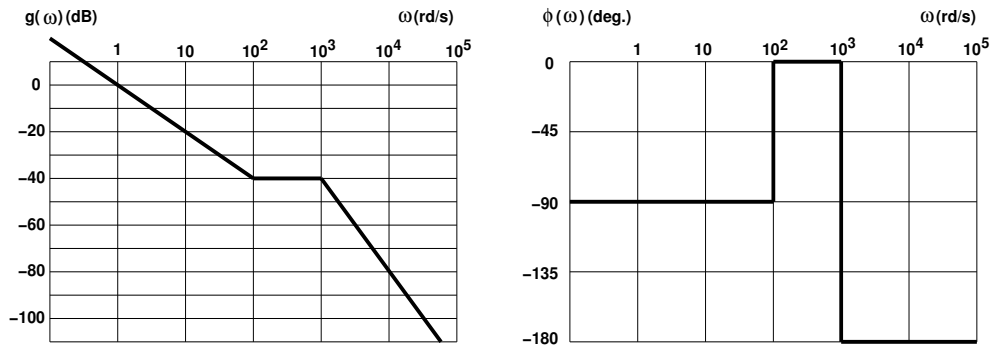


FIGURE 9.7 – Courbes de Bode idéalisées de la fonction de transfert (9.32)

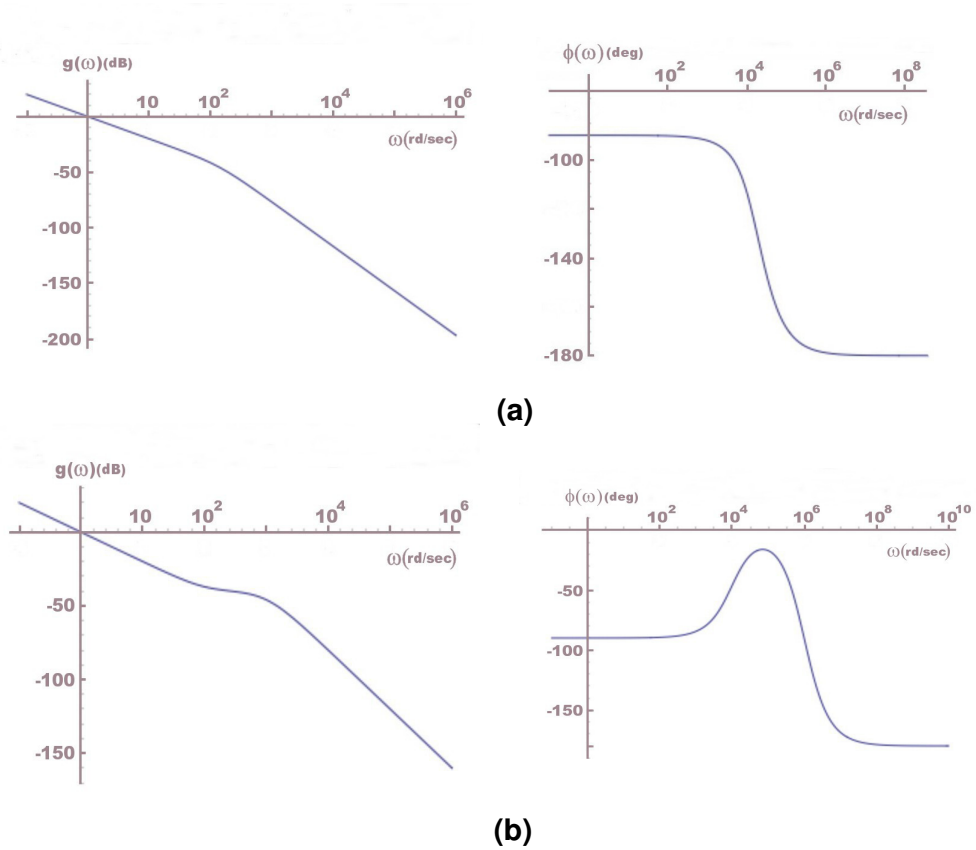


FIGURE 9.8 – Courbes de gain et de phase exactes de la fonction de transfert (9.32) pour (a) $\omega_1 = 100$ rd/sec, $\omega_2 = 1000$ rd/sec ; (b) $\omega_1 = 100$ rd/sec, $\omega_2 = 10000$ rd/sec

9.3.2 Diagramme de Bode d'un système d'ordre deux

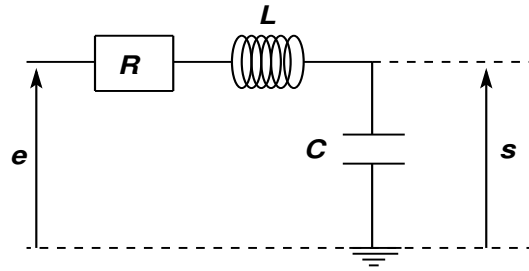


FIGURE 9.9 – Système d'ordre deux

Prenons pour exemple le dispositif de la figure (9.9). Il a pour fonction de transfert (à circuit secondaire ouvert) :

$$H_2 = \frac{1}{pC} \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC + p^2LC} \quad (9.33)$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\check{Q} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ (coefficient de qualité) puis $m = \frac{1}{2\check{Q}}$. En régime harmonique ($p = j\omega$), il vient

$$H_2 = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2mp\omega_0 + \omega_0^2} = \frac{1}{1 - u^2 + 2mju}, \quad \text{avec } u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (9.34)$$

Suivant les valeurs de m , la fonction $H_2(p)$ a deux pôles, distincts ou confondus, réels ou complexes.

- Si $m > 1$, ces pôles sont réels et négatifs : $p_{1,2}/\omega_0 = -m \pm \sqrt{m^2 - 1}$. Ledit système du second ordre se ramène au produit de deux systèmes du premier ordre qu'il est facile de représenter. En fait, ce cas est sans intérêt pratique.
- Pour $m = 1$, les deux pôles, réels et négatifs, sont confondus : $p_1 = p_2 = -\omega_0$. Le gain et la phase ont alors pour expressions

$$g(u) = -20 \log_{10} (1 + u^2), \quad \varphi(u) = -\tan^{-1} \left(\frac{2u}{1 - u^2} \right) \quad (9.35)$$

La courbe de gain présente deux asymptotes : pour $u \ll 1$, il s'agit de l'axe des $\log_{10} u$, et pour $u \gg 1$, c'est la droite de pente -40 dB/dec passant par le point $(\log_{10} u = 0, g = 0)$, puisqu'alors $g(u) \simeq -40 \log_{10} u$. Enfin, la courbe réelle de gain passe par le point tel que $(u = 1, g = -6 \text{ dB})$. Quant à la courbe de phase, elle présente elle aussi deux asymptotes : $\varphi = 0$ pour $u \ll 1$ et $\varphi = -180^\circ$ pour $u \gg 1$, et passe par le point $(u = 1, \varphi = -90^\circ)$. Sa pente $\varphi'(u) = -2/(1 + u^2)$ est toujours négative et vaut -1 pour $u = 1$. En échelle logarithmique où l'abscisse est $\xi = \log_{10} u$, on a $d\varphi/d\xi = -2u \ln(10)/(1 + u^2) = -\ln(10) = -2,3$ pour $u = 1$. Toutes ces données permettent de tracer aisément les courbes réelles, à main levée.

- Pour $m < 1$, les deux pôles sont distincts et complexes conjugués l'un de l'autre, avec une partie réelle négative : $p_{1,2}/\omega_0 = -m \pm j\sqrt{1 - m^2}$. Le gain et la phase sont donnés par

$$g(u) = -10 \log_{10} [(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2], \quad \varphi(u) = -\tan^{-1} \left(\frac{2mu}{1 - u^2} \right) \quad (9.36)$$

Les asymptotes observées dans le cas $m = 1$ sont ici encore présentes : $g = 0$ ($u \ll 1$) et $g = -40 \log_{10} u$ ($u \gg 1$) pour la courbe du gain ; $\varphi = 0$ ($u \ll 1$) et $\varphi = -180^\circ$ ($u \gg 1$) pour la

courbe de phase, celle-ci passant encore par le point ($u = 1, \varphi = -90^\circ$). La pente de la courbe de phase est

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{2mu \ln(10)(1 + u^2)}{(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2} \quad (9.37)$$

Pour $u = 1$ elle vaut $-\frac{\ln(10)}{m}$ et est d'autant plus abrupte que m est petit, comme le montre la figure (9.10).

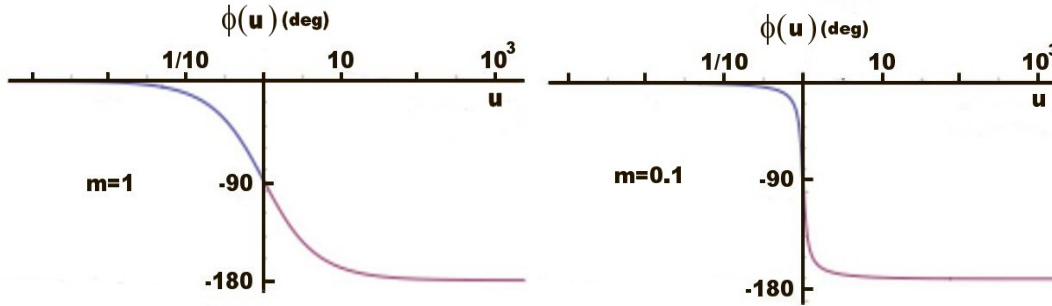


FIGURE 9.10 – Courbes de phase de la fonction (9.34)

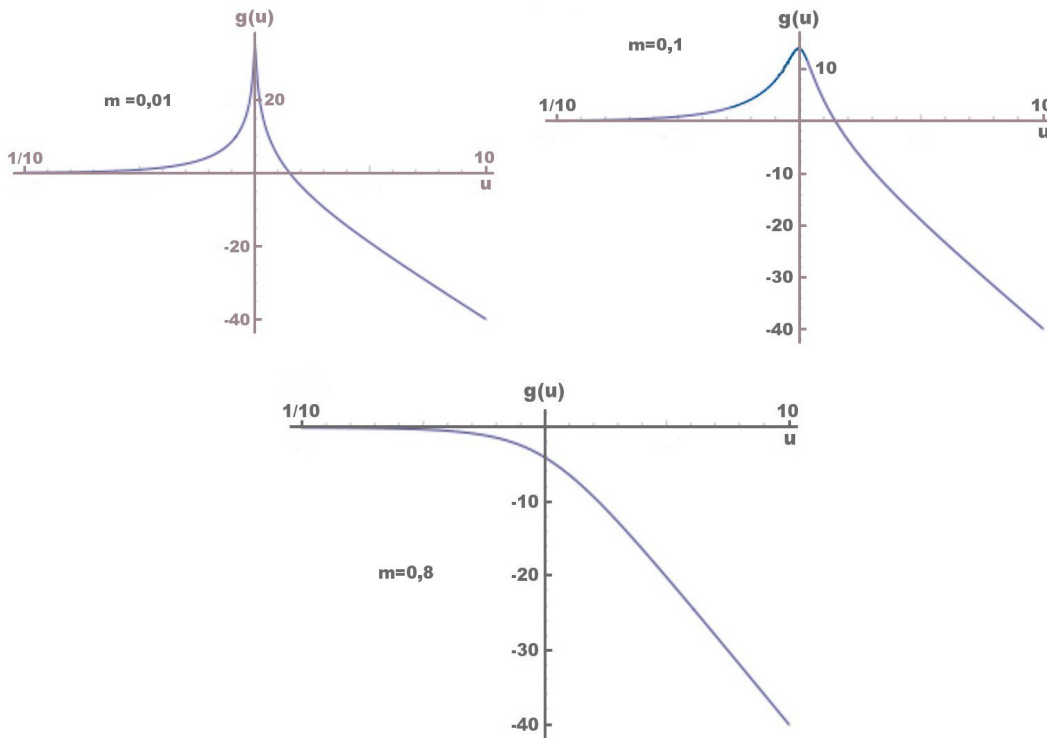


FIGURE 9.11 – Gain de la fonction (9.34) pour diverses valeurs de m .

Suivant la valeur de m , la courbe de gain peut présenter un maximum correspondant à l'annulation de la dérivée de $g(u)$ pour une valeur finie de u , et plus précisément à l'annulation du facteur $u^2 - 1 + 2m^2$, ce qui n'est possible que si $m < 1/\sqrt{2} = 0,7$. Pour ces valeurs de m , le gain tend vers zéro par valeurs positives lorsque $u \ll 1$, passe par un maximum positif, $g_{\max} = -10 \log_{10} [1 - (1 - 2m^2)^2]$, d'autant plus aigu et important que m est petit, et pour une valeur

de u d'autant plus proche de 1, $u_{\max} = \sqrt{1 - 2m^2}$. Cet effet est l'un des aspects du phénomène de *résonance* d'un circuit (R, L, C) série en régime sinusoïdal, déjà rencontré au chapitre 7. Pour $m > 0,7$, il n'y a plus de maximum et le gain reste toujours négatif¹⁵. Ces conclusions sont illustrées par les courbes de la figure (9.11) représentant le gain de la fonction (9.34) pour diverses valeurs de m .

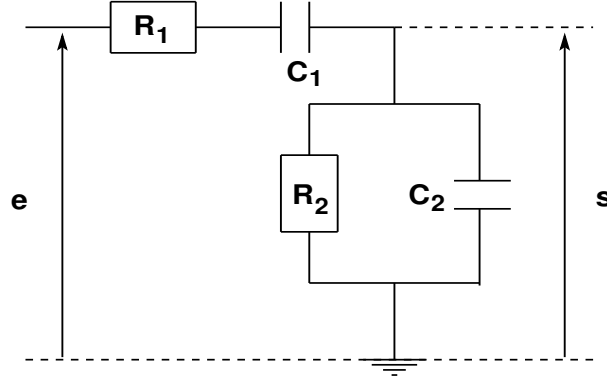


FIGURE 9.12 – Pont de Wien

Considérons ensuite l'exemple du *pont de Wien*¹⁶, représenté à la figure (9.12), dont la fonction de transfert à circuit secondaire ouvert est elle aussi du second ordre :

$$H_w(p) = \frac{1}{1 + Z_1 Z_2^{-1}}, \quad \text{où } Z_1 = R_1 + \frac{1}{pC_1}, \quad Z_2^{-1} = \frac{1}{R_2} + pC_2, \quad \text{soit}$$

$$H_w(p) = \frac{pR_2C_1}{1 + p^2R_1R_2C_1C_2 + pR_2C_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)} \quad (9.38)$$

Posons

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2},$$

$$2m = \omega_0 R_2 C_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) = \frac{1 + x + y}{\sqrt{xy}}, \quad \text{avec } x = \frac{R_1}{R_2}, \quad y = \frac{C_2}{C_1} \quad (9.39)$$

En régime sinusoïdal où $p = j\omega$, on obtient l'expression

$$H_w(j\omega) = H_0 \frac{j\omega}{1 - \omega^2 + 2m j\omega}, \quad \text{où } H_0 = \frac{1}{\sqrt{xy}}, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (9.40)$$

dont le module, l'argument puis le gain sont respectivement

$$|H_w(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + 4m^2}}, \quad \varphi(u) = -\arctan \left[\frac{1}{2m} \left(u - \frac{1}{u}\right) \right]$$

$$g(u) = 10 \log_{10} \left(\frac{u^2}{xy} \right) - 10 \log_{10} [(1 - u^2)^2 + 4m^2 u^2] \quad (9.41)$$

Les caractéristiques des courbes de Bode sont les suivantes.

15. $g(u) = -10 \log_{10} [1 + u^4 + 2u^2(2m^2 - 1)] < 0$ si $m > 1/\sqrt{2}$.

16. Utilisé par Max Wien en 1891 pour constituer un oscillateur.

- La courbe de phase possède une asymptote $\varphi = +90^\circ$ pour $u \ll 1$, une asymptote $\varphi = -90^\circ$ pour $u \gg 1$, et passe par le point ($u = 1, \varphi = 0$).
- La courbe de gain a pour asymptotes la droite $g_+ = +20 \log_{10} \left[\frac{u}{\sqrt{xy}} \right]$ pour $u \ll 1$ et la droite $g_- = -20 \log_{10} [u\sqrt{xy}]$ pour $u \gg 1$. Elle présente un unique maximum $g_{\max} = -20 \log_{10} [1 + x + y] < 0$ pour $u = 1$, peu prononcé. Les deux asymptotes se coupent au point ($u = 1, g = -20 \log_{10} \sqrt{xy} = g_a > g_{\max}$). On note que la droite g_+ coupe l'axe $g = 0$ pour $u = u_+ = \sqrt{xy}$, tandis que la droite g_- coupe cet axe pour $u = u_- = 1/\sqrt{xy}$. Selon que $xy < 1$, $xy > 1$ ou $xy = 1$, on a $u_+ < u_-$, $u_+ > u_-$ ou $u_+ = u_- = 1$, et le point de rencontre des deux asymptotes est au-dessus de l'axe $g = 0$, au dessous de cet axe ou sur cet axe, respectivement. La figure (9.13) rend compte de ces particularités. Les diagrammes de Bode idéalisés y sont également représentés en trait épais.

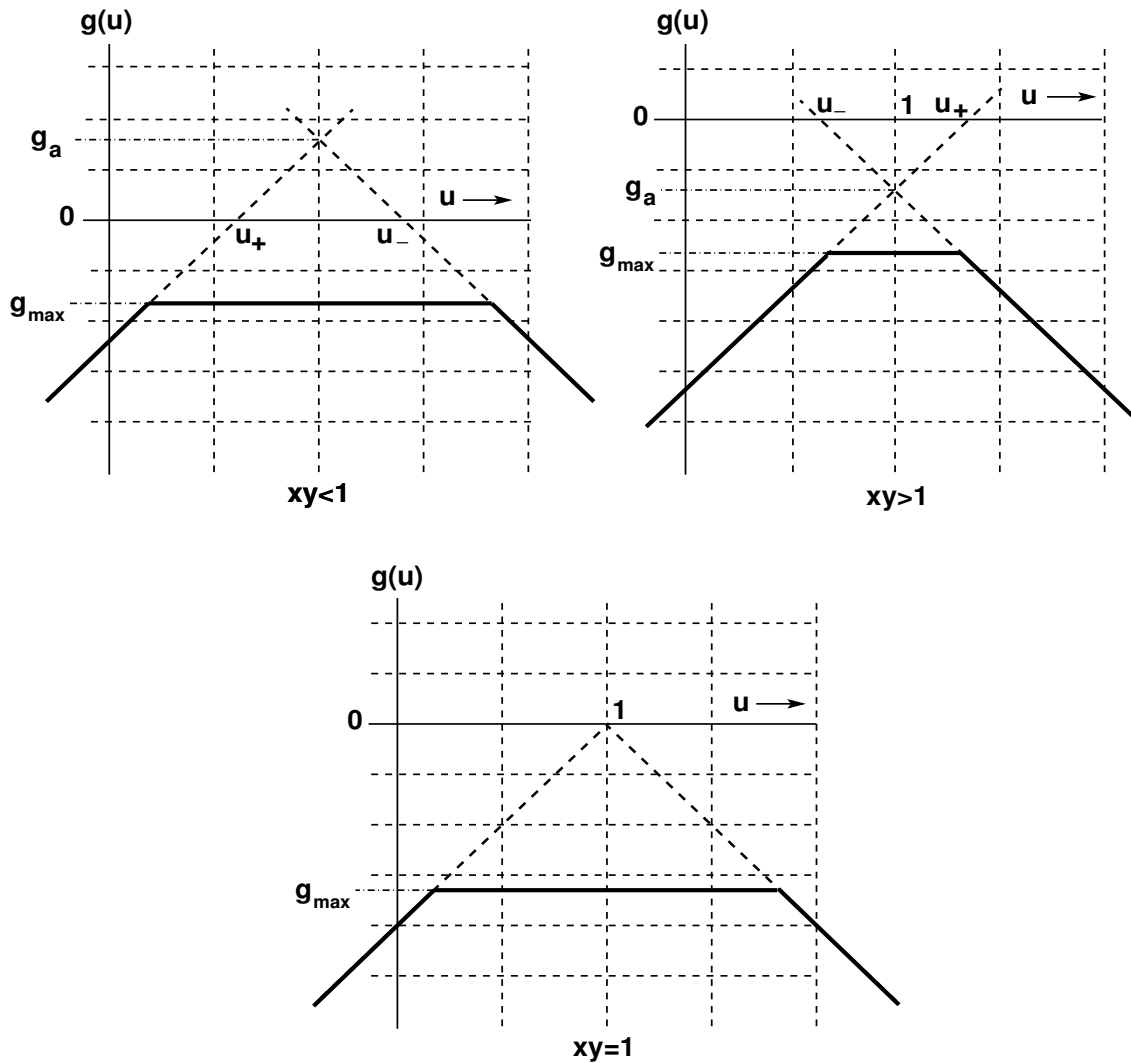


FIGURE 9.13 – Courbes de Bode idéalisées du pont de Wien

9.3.3 Bande passante à -3 dB

La notion de bande passante est importante en physique car elle permet d'apprécier la capacité du système ou du milieu étudié à transmettre sans distorsion des signaux complexes. Examinant la réponse fréquentielle d'un dispositif, la bande passante est l'intervalle en fréquences à l'intérieur

duquel son gain, défini comme précédemment, est supérieur à une certaine valeur, les composantes de Fourier du signal d'entrée ayant des fréquences en dehors de cet intervalle étant considérées a priori comme fortement atténuées par ledit dispositif. Plus spécifiquement, la bande passante à $-x$ dB est la gamme de fréquences où le gain est supérieur au gain maximum moins $-x$ dB ; on prend couramment $x = 3$, ce qui, pour un filtre, correspond à l'intervalle entre les deux valeurs de la pulsation (ou de la fréquence) pour lesquelles le module de la fonction de transfert est égal à sa valeur maximum divisée par $\sqrt{2}$. On peut dire aussi que cette bande passante est le domaine de fréquences à l'intérieur duquel l'énergie disponible à la sortie du filtre (proportionnelle au carré dudit module) dépasse les 50% de sa valeur maximum.

- Pour le circuit (R, L, C) de la figure (9.9) avec $m < 0,7$, on a $|H_2|_{\max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ (pour $u = \sqrt{1-2m^2}$) et les valeurs de u pour lesquelles $|H_2| = |H_2|_{\max}/\sqrt{2}$ sont données par $u_{1,2} = \sqrt{1-2m^2} \mp 2m\sqrt{1-m^2}$, la plus basse valeur n'existant que si $m \leq \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = 0,19$. Dans le cas le plus intéressant où $m \ll 1$, on a

$$|H_2|_{\max} \simeq \frac{1}{2m}, \quad u_{2,1} \simeq 1 \mp m$$

La bande passante en u est alors $\Delta u = u_2 - u_1 \simeq 2m$, et l'on a

$$\Delta u |H_2|_{\max} \simeq 1, \quad \text{ou} \quad \Delta \omega |H_2|_{\max} \simeq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.42)$$

relation qui rend bien compte de l'effet de résonance de ce circuit : plus m est petit, plus la bande passante est étroite et plus la valeur maximum du module du signal de sortie est grande.

Pour $m > 0,19$, la plus basse valeur u_1 de la bande passante doit être prise égale à zéro. On a alors simplement $\Delta u = u_2$.

- Pour le dispositif du pont de Wien, on a $|H_w|_{\max} = \frac{H_0}{2m}$, et $u_{1,2} = \sqrt{1+m^2} \mp m$. On a donc ici $\Delta u = 2m$ et à nouveau

$$\Delta u |H_w| = H_0, \quad \text{ou} \quad \Delta \omega |H_w| = H_0 \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_2} \quad (9.43)$$

- Pour un filtre passe-bas d'ordre un, au vu de la figure (9.4), la bande passante est simplement définie par la pulsation de coupure.

9.4 L'amplificateur opérationnel

9.4.1 Description sommaire

L'amplificateur opérationnel (AO) doit son nom à ses premières applications dans des calculateurs analogiques¹⁷. De nos jours, un AO est un circuit intégré de très petites dimensions sur lequel sont regroupés un certain nombre (quelques dizaines) de composants, tels que diodes, transistors, résistances, condensateurs. Le tout est contenu dans un petit boîtier comportant le plus souvent huit broches, appelées aussi "pattes" ou encore "pins", dont certaines sont raccordées à une alimentation électrique annexe qui fournit à ce système l'énergie nécessaire à son fonctionnement (figure 9.14).

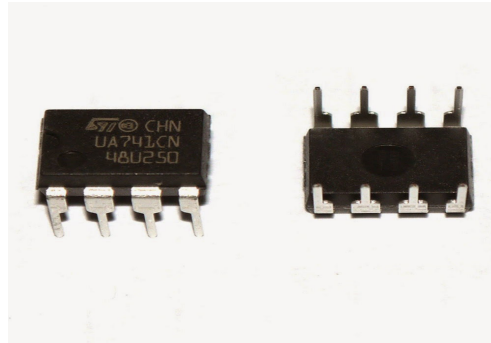


FIGURE 9.14 – Un amplificateur opérationnel

Dans les schémas électriques où il intervient, les liaisons de l'AO avec les sources de tension annexes ne sont jamais représentées. Seules figurent deux bornes d'entrée et une borne de sortie de l'AO (figure 9.15).

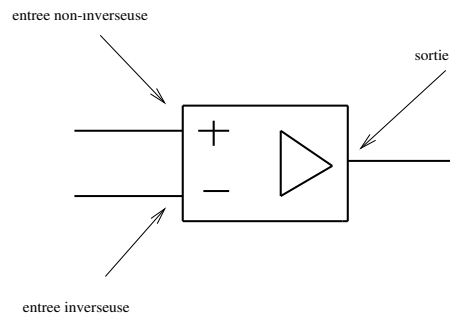


FIGURE 9.15 – Schéma électrique d'un AO

Lorsqu'il n'est pas en régime de saturation, un AO permet d'amplifier la différence des deux tensions que l'on applique chacune à l'une des deux bornes d'entrée : on dit que l'AO est un *amplificateur différentiel*¹⁸. L'une des deux entrées est dite *inverseuse* car la phase de la tension qui lui est appliquée subit une augmentation de π ; c'est pourquoi elle est caractérisée par un signe "–" dans les schémas. L'autre entrée conservant la phase de la tension qui lui est appliquée est dite *non-inverseuse* et pour cette raison se voit attribuer le symbole "+" dans les schémas.

17. Cette appellation a été utilisée la première fois par John R. Ragazzini en 1947 : "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits", Proceedings of the IRE, vol. 35, p. 444, mai 1947. Les premiers AO, familièrement ampli-op, ont été développés durant la seconde guerre mondiale à l'aide de tubes à vide pour réaliser de façon analogique des opérations mathématiques, telles la sommation, la soustraction, la multiplication, etc.

18. Parce qu'il peut prêter à confusion, précisons qu'ici le mot *différentiel* se rapporte bien à une *différence* et non pas à l'opération de *dérivation*.

9.4.2 Caractéristique de l'AO

Notons v_+ et v_- les tensions, mesurées par rapport à la tension d'un point de masse donné, que l'on applique aux entrées non inverseuse et inverseuse, respectivement, et $e = v_+ - v_-$ leur différence. Notons encore v_s la tension au point de sortie, mesurée par rapport au même point masse. La caractéristique statique de l'AO est la courbe représentant les variations de v_s en fonction de e , en régime permanent continu. Si l'on fait abstraction de certains défauts inévitables de l'AO, cette caractéristique peut être schématisée comme indiqué à la figure 9.16.

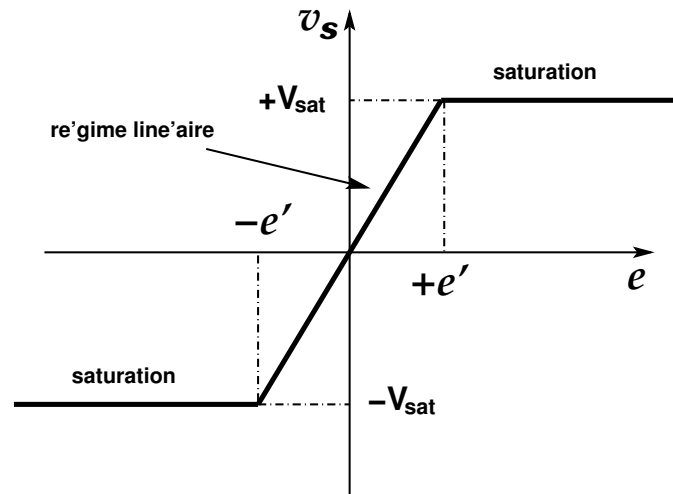


FIGURE 9.16 – Caractéristique schématisée d'un AO

Les valeurs $+e'$ et $-e'$ de e sont celles pour lesquelles l'AO passe d'un fonctionnement actif à un fonctionnement de saturation. Lorsque e est compris entre ces deux valeurs, la caractéristique est un segment de droite. L'AO est alors dans un régime de fonctionnement *linéaire* pour lequel la tension de sortie est proportionnelle à e :

$$v_s = \mu e \quad (9.44)$$

Le coefficient μ est le coefficient d'amplification de l'AO. Ses valeurs sont généralement très grandes, allant de 10^5 à 10^6 selon les modèles. Au-delà de ces valeurs de e , la caractéristique est parallèle à l'axe des e , aux ordonnées $\pm V_{sat}$ constantes. Dans les deux régions $e > e'$ et $e < -e'$, l'AO est alors en régime de saturation, il n'y a plus d'amplification possible et il y a perte de commande de l'amplificateur. Donnons des ordres de grandeur. Pour une tension d'alimentation de 15V, on a par exemple $V_{sat} = 12V$. Si $\mu = 10^5$, alors $e' = 0,125$ mV. On conçoit donc qu'avec d'aussi grands coefficients d'amplification, la moindre tension perturbatrice recueillie aux bornes d'entrées conduit à la saturation de l'AO, ce qui fait perdre à l'AO toute possibilité d'amplifier.

En conséquence, si l'on veut profiter de ses propriétés d'amplification, un AO ne devra jamais être utilisé seul. Pour éviter la saturation, on a recours à un dispositif de *contre-réaction* (on dit aussi *rétroaction négative*). L'idée est de réinjecter à l'une des entrées de l'AO une partie du signal de sortie de façon à atténuer l'amplification. Le choix de la borne d'entrée inverseuse se comprend aisément : cette entrée effectuant une soustraction, le signal qu'on lui réinjecte aura certainement pour vertu d'amener une modération, ce que ne peut réaliser l'entrée non inverseuse pour laquelle on aurait plutôt un renforcement du signal, ce qui conduirait à la saturation. Avec cette contre-réaction, l'AO reste dans son régime linéaire. Avec des composants extérieurs fixés en fonction des besoins, il peut alors être utilisé comme un amplificateur de gain réduit ou comme un élément d'un filtre actif.

En revanche, le régime de saturation de l'AO est mis à profit pour constituer un comparateur ou un multivibrateur.

9.4.3 Fonctionnement idéal de l'AO

En leur adjoignant des circuits annexes appropriés, les AO possèdent des propriétés remarquables et leurs défauts sont généralement légers. Aussi, à condition que l'AO soit en régime de fonctionnement linéaire, on a souvent recours aux approximations décrites ci-après, qui définissent (en fait, en partie) l'AO *idéal*.

- On considère que le gain μ est *infini*. Comme en régime linéaire v_s prend des valeurs finies dans l'intervalle $]-V_{\text{sat}}, +V_{\text{sat}}[$, on est conduit à poser $e = 0$, soit $v_+ = v_-$. La caractéristique complète de l'AO idéal est donc celle de la figure (9.17).

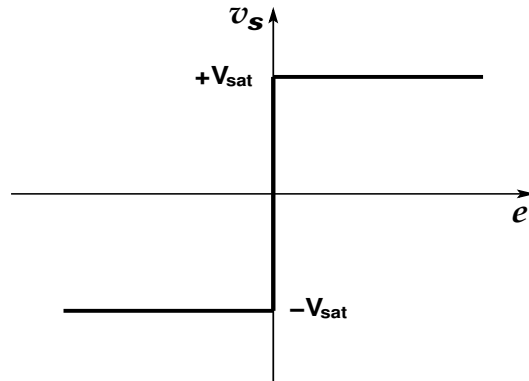


FIGURE 9.17 – Caractéristique de l'AO idéal

- Les résistances d'entrée, très grandes, sont considérées comme infinies, auquel cas on a $i_+ = i_- = 0$.
- La résistance de sortie de l'AO, faible, est considérée comme nulle.

Faisant abstraction des défauts de l'AO réel, on attribue également à l'AO idéal d'autres propriétés : tension de décalage nulle, courant de décalage nul, courant de polarisation nul, T.M.R.C. infini (taux de réjection de mode commun), vitesse maximale de variation de la tension de sortie (*slew-rate*) infinie, bande passante infinie. Sur tous ces sujets que nous n'aborderons pas, le lecteur intéressé pourra consulter des ouvrages plus techniques.

9.4.4 Quelques dispositifs classiques avec AO idéal

Dans tous les montages présentés ci-après, l'AO est supposé non seulement idéal, mais aussi fonctionner en régime linéaire. De ce fait, analysant la réponse fréquentielle de ces montages, il est permis d'utiliser la notation complexe des signaux sinusoïdaux. Par ailleurs, par commodité, le schéma (fig. 9.15) de l'AO a été modifié : on a remplacé le triangle par le symbole " ∞ " pour signifier que l'AO est idéal.

① Amplificateur inverseur

Dans le montage de la figure (9.18), on note la présence de la boucle de rétroaction constituée par l'impédance Z_2 , qui doit en principe assurer la non-saturation de l'AO. L'entrée non-inverseuse y est reliée à la masse dont le potentiel est pris égal à zéro. Comme l'AO est idéal, on a $v_- = v_+ = 0$. Ainsi, bien que l'entrée inverseuse ne soit pas directement reliée à la masse, son potentiel est nul. On dit qu'en ce point on a une *masse virtuelle*. Bien entendu, ce fait résulte du fonctionnement même de l'AO, grâce à une dépense énergétique de ses alimentations. Comme $i_- = 0$ (impédance d'entrée infinie), l'intensité circulant dans Z_2 est égale à celle, i , circulant dans Z_1 . Appliquant alors le théorème de Millman au point N , de potentiel zéro, on obtient $e/Z_1 + s/Z_2 = 0$, d'où

$$\frac{s}{e} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (9.45)$$

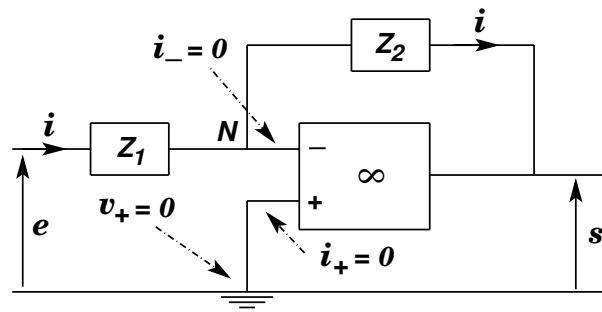


FIGURE 9.18 – Amplificateur inverseur

Si Z_1 et Z_2 sont de pures résistances, R_1 et R_2 respectivement, le rapport $s/e = -R_2/R_1$ est réel et négatif. Le montage opère alors comme un amplificateur avec inversion de phase : c'est un amplificateur inverseur.

② Amplificateur non-inverseur

Dans le montage de la figure (9.19), on a $e = v_+ = v_-$. Ensuite, puisque $i_- = 0$, sa partie basse est du type "diviseur de tension", ce qui amène à écrire

$$\frac{v_-}{s} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{s}{e} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \quad (9.46)$$

Si Z_1 et Z_2 sont des résistances pures, les tensions d'entrée et de sortie sont en phase. Le dispositif constitue alors un amplificateur *non-inverseur*.

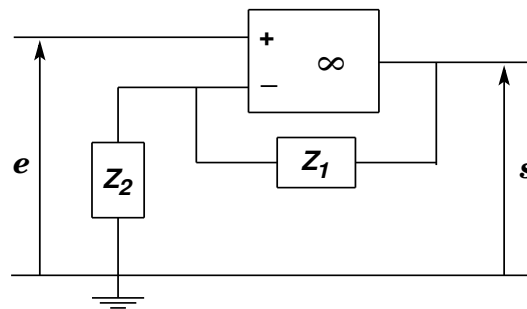


FIGURE 9.19 – Amplificateur non-inverseur

③ Suiveur de tension

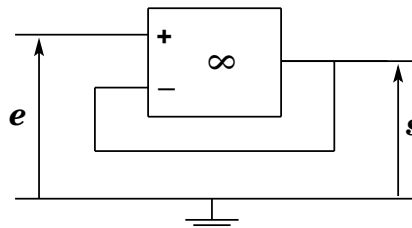


FIGURE 9.20 – Suiveur de tension

Le montage de la figure (9.20) est très simple. On obtient immédiatement

$$e = v_+ = v_- = s \quad (9.47)$$

Les tensions d'entrée et de sortie sont *identiques*, d'où le qualificatif de *suiveur* de ce montage. Son intérêt est de profiter de la très grande impédance d'entrée et de la très petite impédance de sortie de l'AO, qui font qu'on l'utilise comme *étage tampon* ou *adaptateur d'impédance*. Vu depuis la sortie, cet étage se comporte comme un générateur de tension quasiment parfait.

④ Amplificateur différentiel

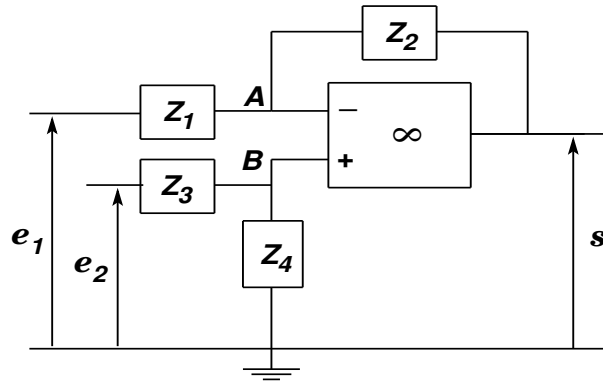


FIGURE 9.21 – Amplificateur différentiel

Appliquons le théorème de Millman au point A (fig 9.21) :

$$A : v_- = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} \left(\frac{e_1}{Z_1} + \frac{s}{Z_2} \right), \quad B : v_+ = \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right)^{-1} \frac{e_2}{Z_3}$$

Comme $v_+ = v_-$, on en déduit

$$s = -\frac{Z_2}{Z_1} e_1 + e_2 \frac{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_3}{Z_4}} \quad (9.48)$$

Supposons que l'on puisse faire en sorte que $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_3} = k$ où k est réel ; il vient alors

$$s = k(e_2 - e_1) \quad (9.49)$$

On a ainsi réalisé un amplificateur différentiel de gain k .

⑤ Convertisseur courant-tension

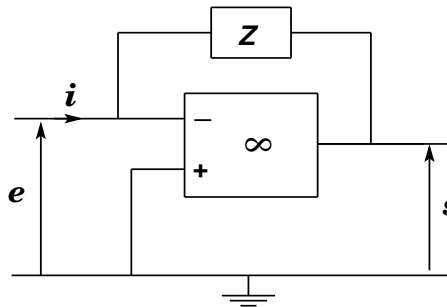


FIGURE 9.22 – Convertisseur courant-tension

L'AO étant idéal, il vient immédiatement

$$s = -Zi \quad (9.50)$$

La tension de sortie est *proportionnelle au courant d'entrée*. Ce montage opère donc une conversion d'un courant en tension.

⑥ Convertisseur tension-courant

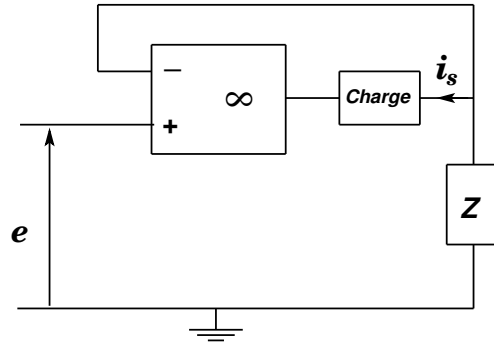


FIGURE 9.23 – Convertisseur tension-courant

On a ici (fig 9.23)

$$i_s = -\frac{e}{Z} \quad (9.51)$$

L'intensité du courant circulant dans l'impédance dite de "charge" est *proportionnelle à la tension d'entrée* : on a réalisé la conversion d'une tension en courant.

⑦ Simulateurs d'inductances

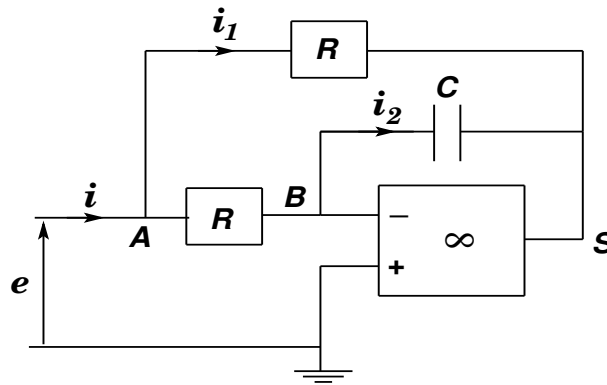


FIGURE 9.24 – Simulation d'inductance 1

Considérant le montage de la figure (9.24) en régime sinusoïdal, on a $v_A - v_B = Ri_2 = e$ car $v_A = e$, $v_B = 0$, $i_- = 0$; puis $v_A - v_S = Ri_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) i_2$. On en déduit $i = i_1 + i_2 = i_2 \left(2 + \frac{1}{jRC\omega}\right)$ et finalement

$$i = e \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{jR^2C\omega} \right) \quad (9.52)$$

Vu depuis son entrée, ce montage est donc équivalent à l'association en parallèle d'une résistance pure $R_0 = \frac{R}{2}$ et d'une inductance pure de coefficient d'auto-induction $L_0 = R^2C$. C'est un premier exemple de simulation d'inductance à l'aide d'un AO.

Le second montage de la figure (9.25) inclut deux AO. Pour celui-ci, on a $v_A = v_B = e = v_D/2$, $i_2 = (v_A - v_D)/R = -e/R$; puis $v_S = -v_D/(jRC\omega) = -2e/(jR^2C\omega)$ (voir 9.45). Comme $v_A - v_S = Ri_1$, il vient $i_1 = e[1 + 2/(jRC\omega)]/R$, puis $i = i_1 + i_2 = [-1 + 1 + 2/(jRC\omega)](e/R)$, soit

$$i = \frac{e}{jR^2C\omega} \quad (9.53)$$

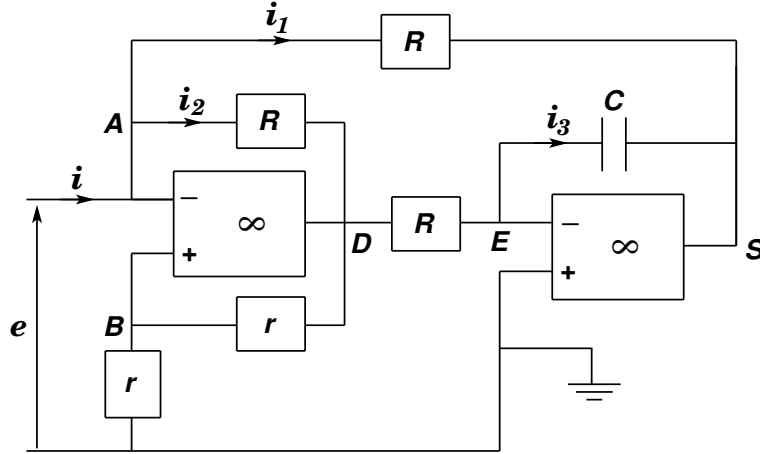


FIGURE 9.25 – Simulation d'inductance 2

Ce second montage simule donc une inductance pure de coefficient d'auto-induction $L_0 = R^2C/2$.

⑧ Simulateur d'impédances

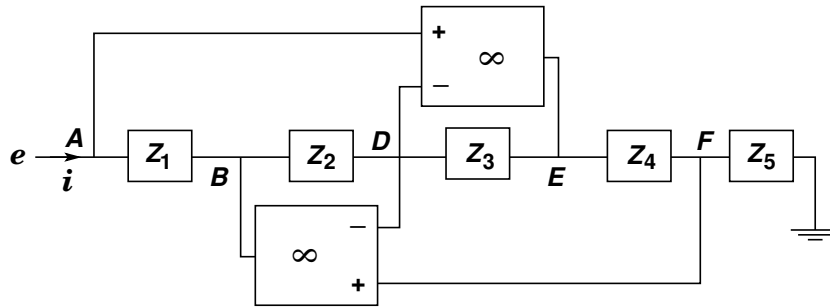


FIGURE 9.26 – Simulateur d'impédance

Déterminons l'impédance $Z = e/i$ du montage de la figure (9.26). On a (AO idéaux) $e = v_A = v_D = v_F$. Appliquant le théorème de Millman en D et F, on obtient (les intensités i_{\pm} étant toutes nulles)

$$v_D \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \frac{v_B}{Z_2} + \frac{v_E}{Z_3}, \quad v_F \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right) = \frac{v_E}{Z_4}, \quad \text{soit } e \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \frac{v_B}{Z_2} + \frac{Z_4}{Z_3} e \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right),$$

d'où $e - v_B = \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} e = Z_1 i$, ce qui conduit à l'impédance équivalente

$$Z = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad (9.54)$$

En prenant pour les impédances Z_1, \dots, Z_5 des combinaisons de résistances et de condensateurs, il est clair que ce montage peut simuler une grande variété d'impédances.

⑨ Dipôle à résistance négative

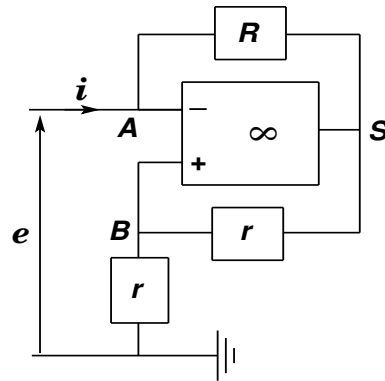


FIGURE 9.27 – Dipôle à résistance négative

Dans le montage de la figure (9.27), on a $v_A = v_B = e$, $v_S = 2v_B = 2e$, et $v_A - v_S = Ri$, d'où

$$\frac{e}{i} = -R \quad (9.55)$$

Ledit montage est donc équivalent à une résistance pure *négative*. Ce résultat qui peut paraître surprenant est dû aux propriétés de l'AO, et ne s'obtient qu'au prix d'une dépense énergétique fournie par les alimentations de l'AO, non représentées mais bien présentes. Il est mis à profit pour réaliser des oscillateurs.

9.4.5 Opérateurs analogiques avec AO idéal

① Sommateur-inverseur

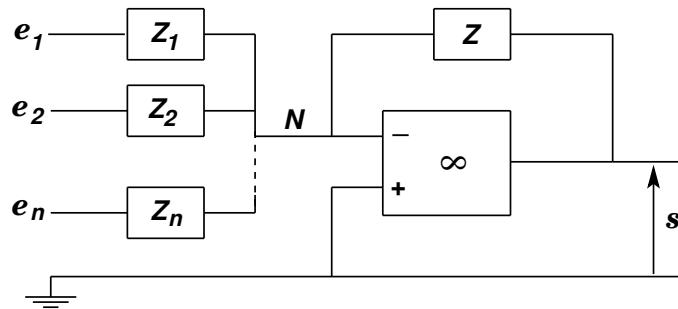


FIGURE 9.28 – Sommateur-inverseur

Le montage de la figure (9.28) est le montage inverseur de la figure (9.18), mais avec plusieurs entrées¹⁹. L'application du théorème de Millman au point N où le potentiel est nul conduit à

$$0 = \frac{s}{Z} + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{Z_k}, \quad \text{d'où} \quad s = -\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{Z}{Z_k} \quad (9.56)$$

On réalise un sommateur-inverseur strict en prenant les impédances toutes égales, par exemple, à une résistance R . Mais on peut aussi effectuer des sommes pondérées en choisissant des résistances inégales.

19. Toutes mesurées par rapport à la masse.

② Sommateur non-inverseur

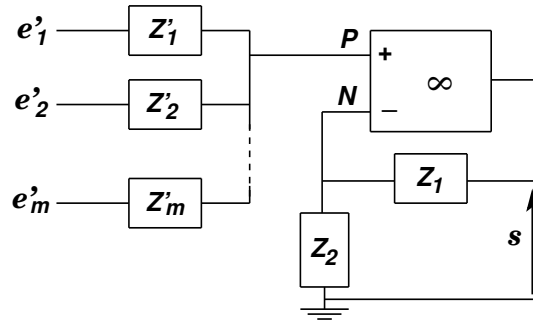


FIGURE 9.29 – Sommateur non inverseur

En appliquant le théorème de Millman à la fois au point N et au point P du montage de la figure (9.29), on obtient²⁰

$$v_P = \frac{\sum_{\ell=1}^m e'_\ell / Z'_\ell}{\sum_{\ell=1}^m 1 / Z'_\ell} = v_N = \frac{s / Z_1}{1 / Z_1 + 1 / Z_2}, \text{ soit}$$

$$s = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \frac{\sum_{\ell=1}^m e'_\ell / Z'_\ell}{\sum_{\ell=1}^m 1 / Z'_\ell} = \sum_{\ell=1}^m \chi_\ell e'_\ell, \text{ où } \chi_\ell = \frac{1}{Z'_\ell} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \frac{1}{\sum_{\ell=1}^m 1 / Z'_\ell} \quad (9.57)$$

En choisissant par exemple $Z'_1 = Z'_2 = \dots = Z'_m = R$ et $Z_1 / Z_2 = m - 1$, il vient $\chi_\ell = 1$, et l'on réalise ainsi un sommateur non inverseur strict.

③ Sommateur-soustracteur

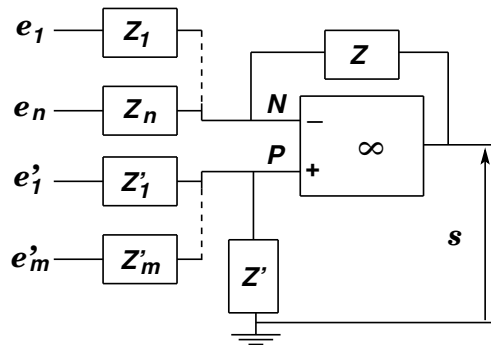


FIGURE 9.30 – Sommateur soustracteur

Le montage de la figure (9.30) est quasiment une combinaison des deux précédents. Appliquons le théorème de Millman aux points N et P . Il vient

$$v_N = \left(\frac{1}{Z} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}\right)^{-1} \left[\frac{s}{Z} + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{Z_k}\right], \quad v_P = \left(\frac{1}{Z'} + \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{Z'_\ell}\right)^{-1} \sum_{\ell=1}^m \frac{e'_\ell}{Z'_\ell}, \text{ ou}$$

20. Rappelons que $i_+ = i_- = 0$.

$$v_N = (1 + \alpha)^{-1} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \quad v_P = (1 + \beta)^{-1} \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell e'_\ell, \quad \text{avec}$$

$$\alpha_k = \frac{Z}{Z_k}, \quad \alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \beta_\ell = \frac{Z'}{Z_\ell}, \quad \beta = \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell$$

On en déduit

$$s = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \left[\sum_{\ell=1}^m \beta_\ell e'_\ell - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right] \quad (9.58)$$

expression qui se réduit à

$$s = K \left[\sum_{\ell=1}^m e'_\ell - \sum_{k=1}^n e_k \right] \quad (9.59)$$

en prenant des résistances telles que $\alpha_k = \beta_\ell = \alpha/n = \beta/m$, et $K = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{n + m\alpha} = 1$ si $\alpha = \left(\sqrt{(m-1)^2 + 4n} + m - 1 \right) / 2$. On aura alors réalisé un sommateur-soustracteur au sens strict.

④ Intégrateur

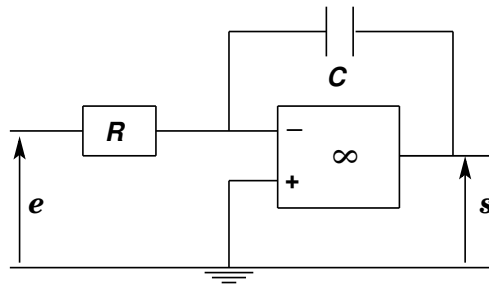


FIGURE 9.31 – Intégrateur

Le montage envisagé est celui de la figure (9.18) où les impédances Z_1 et Z_2 sont, respectivement, une résistance R et un condensateur de capacité C (fig 9.31). En régime sinusoïdal, on a donc $s = -\frac{Z_1}{Z_2} e = -\frac{e}{j\omega RC}$ et pour un régime temporel quelconque²¹,

$$s(t) - s(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e(u) du \quad (9.60)$$

Ce montage agit donc bien comme un intégrateur. Cependant, son inconvénient majeur est que pour les basses fréquences (à la limite, en régime continu), le condensateur agit comme un coupe-circuit et rend inefficace la contre-réaction. C'est pourquoi on place une résistance R_0 en parallèle sur le condensateur, en effectuant ce qu'on appelle une *compensation en continu*. On a alors $Z_2^{-1} = jC\omega + 1/R_0$, et l'on en conclut que ce montage compensé n'effectue une bonne intégration que pour les signaux dont l'essentiel du spectre en fréquences se situe dans le domaine $\omega \gg \frac{1}{R_0 C}$.

⑤ Dérivateur

En régime sinusoïdal, on a ici (fig 9.32) $s = -j\omega RC e$, d'où, pour une variation temporelle quelconque,

$$s(t) = -RC \frac{de}{dt}(t) \quad (9.61)$$

21. Rappelons qu'en régime sinusoïdal, la division par $j\omega$ équivaut à une intégration.

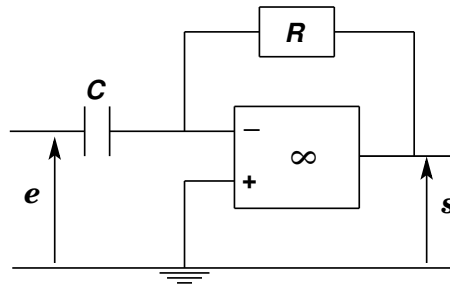


FIGURE 9.32 – Dérivateur

La fonction de transfert du dispositif, $H = -j\omega RC$, tend vers l'infini lorsque ω tend vers l'infini. De ce fait, il privilégie les signaux de haute fréquence, notamment les signaux de bruit. Cette sensibilité au bruit le rend difficilement exploitable en calcul analogique.

⑥ Montage à réponse logarithmique

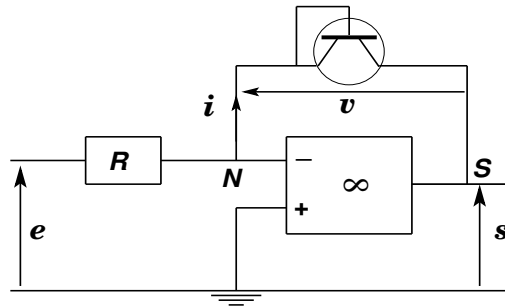


FIGURE 9.33 – Montage à réponse logarithmique

La branche NS du montage de la figure (9.33) contient un transistor pour lequel l'intensité i du courant qui y circule est liée à la tension $v = v_N - v_S$ par la relation

$$i = I_0 \exp\left(\frac{v}{V_0}\right)$$

Comme $v_N = 0$, $v_S = s$, $e = Ri$, on obtient $e = RI_0 \exp(-s/V_0)$, soit

$$s = -V_0 \log\left(\frac{e}{RI_0}\right) \quad (9.62)$$

A une constante additive près, la tension de sortie est proportionnelle au logarithme de la tension d'entrée. L'avantage que l'on peut, au moins en principe, tirer d'un tel montage, tient à la propriété du logarithme de transformer une somme en produit. Plaçant plusieurs étages de ce type en parallèle, on obtient à partir des signaux d'entrée e_k les signaux de sortie $s_k = -V_0 \log\left(\frac{e_k}{RI_0}\right)$.

Il suffirait ensuite d'injecter ces signaux dans un sommateur comme celui de la figure (9.28) pour obtenir le signal de sortie

$$s = V_0 \log \prod_{k=1}^n \left(\frac{e_k}{RI_0}\right)^{\alpha_k} \quad (9.63)$$

proportionnel, à une constante additive près, au logarithme du produit $\pi = e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$. L'exponentiation, fonction inverse du logarithme, est réalisée par le montage de la figure (9.34), obtenu à partir du précédent en permutant le transistor et la résistance. Pour celui-ci, on a en effet $v_E - v_N = v = e$, $v_N - v_S = Ri = -s$, d'où

$$s = -RI_0 \exp\left(\frac{e}{V_0}\right) \quad (9.64)$$

c'est-à-dire, un signal de sortie proportionnel à l'exponentielle de e/V_0 . En principe, cet étage mis à la suite des précédents doit donc permettre d'avoir accès au produit π ²².

Les possibilités de calcul analogique avec ces deux montages est purement théorique. En effet, du point de vue pratique, leur fiabilité pour effectuer de façon précise, tels quels, les opérations escomptées, est plus que douteuse, notamment parce que la forte sensibilité à la température de leurs paramètres (en particulier, ceux représentés ici par I_0 et V_0) provoque des dérives importantes. Pour les rendre performants, il est nécessaire de leur adjoindre des systèmes de compensation thermique, ce qui conduit à la réalisation pratique de circuits intégrés complexes et coûteux. De fait, comme pour tous les calculateurs analogiques décrits précédemment, on leur préfère maintenant des calculateurs numériques²³.

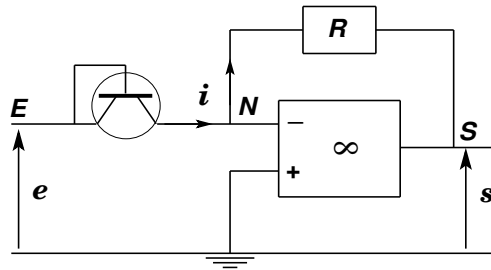


FIGURE 9.34 – Montage à réponse exponentielle

9.5 Filtrage actifs avec AO idéal

Les filtres actifs font appel à des étages amplificateurs, impliquant notamment des AO, et ne comportent comme éléments passifs que des résistances et des capacités. Ceci présente des avantages certains. Alors que les filtres passifs provoquent le plus souvent l'atténuation de tous les signaux (hormis d'éventuels effets de résonance), la fonction d'amplification ouvre la possibilité d'amplifier ou d'atténuer des signaux selon leurs fréquences. En outre, comme l'utilisation d'amplificateurs permet d'atteindre des impédances d'entrée élevées et des impédance de sortie faibles, il est possible de mettre plusieurs filtres actifs en cascade, sans que l'un soit notablement chargé par le suivant. Ensuite, certains montages avec amplificateur pouvant simuler des inductances, voir plus haut, éviter d'utiliser des inductances réelles est un avantage considérable au regard de l'encombrement et du poids des dispositifs envisagés. Enfin, avec des amplificateurs, on conserve l'aptitude à amplifier des signaux faibles. Ces avantages l'emportent sur certains inconvénients, liés à la nature des amplificateurs : sensibilité à la température de leurs éléments constitutifs ; possibles effets de saturation dus à l'introduction d'étages amplificateurs, principalement lorsqu'on a affaire à des signaux forts.

Il est important de noter qu'un AO agit comme un passe-bas du premier ordre et que son *facteur de mérite*, produit de son amplification par sa bande passante, est une constante : sa bande passante sera donc d'autant plus faible que son amplification est élevée. En toute rigueur, la réponse fréquentielle théorique d'un filtre impliquant un AO doit être pondérée par ces effets.

Nous présentons ci-après quelques structures classiques de filtres actifs analogiques impliquant un ou plusieurs AO idéaux.

²². En intercalant au besoin des étages appropriés pour compenser les constantes multiplicatives

²³. A noter que l'on trouve aussi des montages logarithmiques et exponentiels utilisant une diode. On préfère cependant utiliser une jonction base-emetteur de transistor, linéaire dans un plus grand intervalle d'intensité de courant.

9.5.1 Exemples de filtres actifs du premier ordre et leurs associations

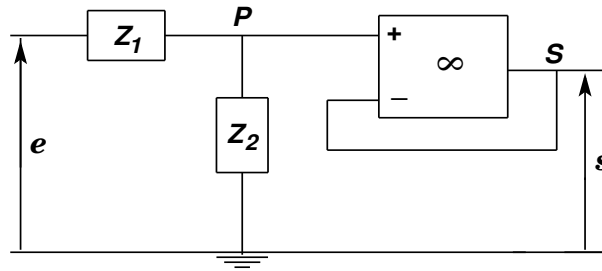


FIGURE 9.35 – Filtre avec suiveur de tension (1)

Pour commencer, considérons le dispositif de la figure (9.35), impliquant un AO (supposé idéal) monté en suiveur de tension. On a ici $v_P = v_S = s$. Appliquons alors le théorème de Millman au point P, en introduisant les *admittances* $Y_k = 1/Z_k$. Il vient

$$s(Y_1 + Y_2) = eY_1, \text{ soit } H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \quad (9.65)$$

Avec ce montage, on constitue un filtre du premier ordre en choisissant respectivement pour Z_1 et Z_2 soit une résistance R et un condensateur de capacité C , (fig 9.36 (a)), avec pour fonction de transfert $H_a = \frac{1}{1 + j\omega RC}$, celle d'un filtre passe-bas, ou l'inverse (fig 9.36 (b)), avec pour fonction de transfert $H_b = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$, celle d'un filtre passe-haut.

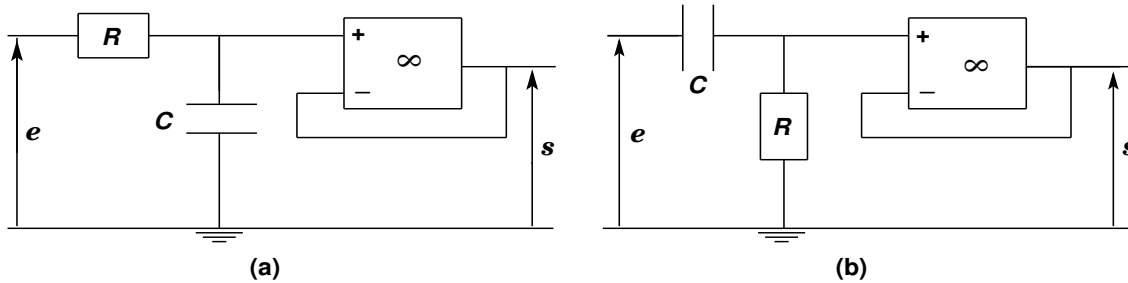


FIGURE 9.36 – Filtres avec suiveur de tension (2)

En apparence, ces fonctions de transfert ne diffèrent pas de celles des filtres passifs RC ou CR (en structure de pont diviseur de tension), situés à gauche des montages (a) et (b). La différence est cependant énorme, car les fonctions de transfert des filtres passifs ne sont valables qu'en sortie *ouverte*, alors qu'avec un AO en suiveur de tension, la fonction de transfert d'un filtre actif n'est, au moins dans le cas idéal, pas affectée par un circuit de charge. Comme nous l'avons déjà mentionné, cela permet notamment de monter plusieurs filtres actifs en cascade, soit pour améliorer l'efficacité du dispositif à remplir la fonction recherchée, soit pour réaliser une autre fonction. Si, par exemple, deux filtres identiques à (9.36 (a)) sont mis en cascade, leurs fonctions de transfert, égales à H_a , se multiplient simplement pour donner une fonction de transfert de l'ensemble égale à H_a^2 , dont le module est $1/(1 + \omega^2/\omega_0^2)$, où $\omega_0 = RC$. Avec une pente de gain égale à -40 dB/dec. pour $\omega \gg \omega_0$, le filtre passe-bas du second ordre ainsi obtenu coupe de manière plus efficace les hautes fréquences que ne le fait un filtre passe-bas du premier ordre avec une pente de -20 dB/dec dans le même domaine.

Comme on peut s'y attendre, la mise en cascade de (9.36 (a)) et (9.36 (b)) donne un filtre passe-bande du second ordre, de fonction de transfert

$$H_{ab} = H_{ba} = H_a H_b = \frac{j\omega}{1 - \omega^2 RC^2 + 2j\omega RC} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{j}{2} \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right)}, \quad \text{avec } u = RC\omega \quad (9.66)$$

$$\text{de module } |H_{ab}| = \frac{1}{u + \frac{1}{u}}$$

Notons que cette fonction de transfert peut être obtenue plus simplement à l'aide du montage de la figure (9.37), utilisant un seul AO²⁴.

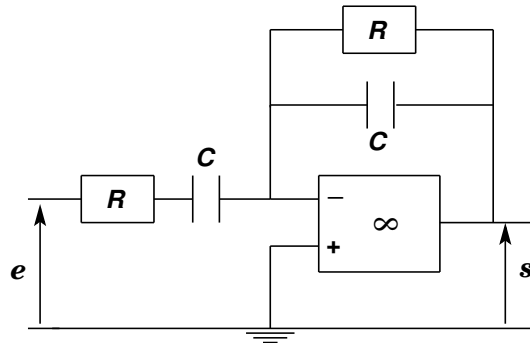


FIGURE 9.37 – Filtre actif du second ordre (1)

Considérons enfin le montage de la figure (9.38)

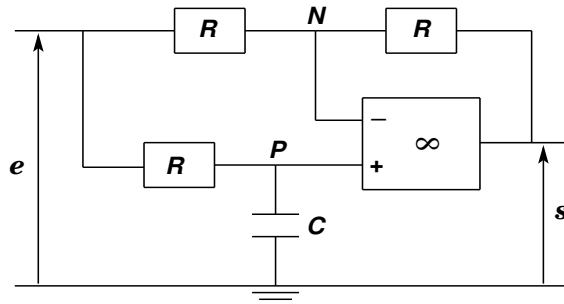


FIGURE 9.38 – Filtre actif du second ordre (2)

Appliquant le théorème de Millman aux points N et P , on obtient

$$v_N = \frac{1}{2}(e + s), \quad v_P = \frac{e}{1 + j\omega RC}, \quad \text{où } u = RC\omega,$$

ce qui donne la fonction de transfert

$$H = s/e = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (9.67)$$

dont le module vaut 1 pour tout ω . Pour cette raison, il est appelé *pas-se-tout*. Il provoque uniquement un déphasage $\varphi = -2 \tan^{-1} u$ de la tension d'entrée, et pour cette autre raison est aussi appelé *circuit déphaseur*.

24. A vérifier.

9.5.2 Structure de Rauch

Cette structure générale multi-boucles représentée à la figure (9.39) couvre toute une famille comprenant des filtres du second ordre passe-bas, passe-haut, passe-bande mais pas de filtre coupe-bande.

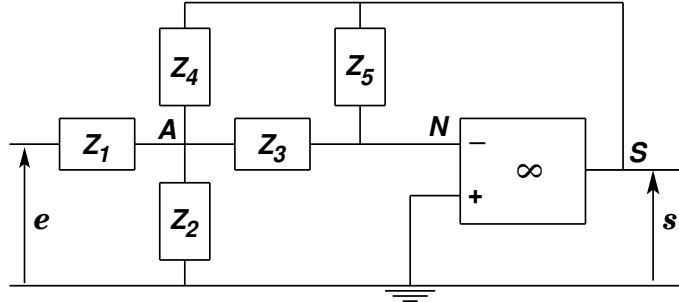


FIGURE 9.39 – Structure de Rauch

La formule générale donnant la fonction de transfert correspondante s'obtient en appliquant le théorème de Millman au point A et au point N où $v_N = 0$:

$$v_N = 0 = (Y_3 + Y_5)^{-1} (Y_5 s + Y_3 v_A), \quad \text{d'où } s = -\frac{Y_3}{Y_5} v_A, \quad \text{puis}$$

$$v_A = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)^{-1} (Y_1 e + Y_4 s)$$

où $Y_k = 1/Z_k$. On en déduit aisément

$$H_R(j\omega) = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \quad (9.68)$$

En s'imposant de ne prendre pour impédances que des résistances ou des condensateurs, et en plaçant judicieusement celles-ci selon ce schéma, on peut obtenir des filtres du second ordre passe-bas, passe-haut ou passe-bande, comme le montre la suite.

① Filtre de Rauch passe-bas

Cherchons une fonction de transfert de la forme

$$H = \frac{K}{1 + 2j\mu u - u^2}, \quad \text{où} \quad (9.69)$$

où K est une constante, $u = \omega/\omega_c$, ω_c étant une pulsation caractéristique du filtre. Cette fonction décrit bien un passe-bas du second ordre. La constante K , indépendante de ω , est supposée réelle. Ceci incite à considérer dans (9.68) que Z_1 et Z_3 sont des résistances pures, soit R_1 et R_3 , respectivement. Au dénominateur $D = Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$ de (9.68), on doit construire les termes en $j\omega$ et en $(j\omega)^2$. Par commodité de langage, disons qu'une admittance est réelle si elle est associée à une résistance, et imaginaire si elle est associée à un condensateur. Supposons Y_5 réel. Avec le choix précédent, $Y_5(Y_1 + Y_3)$ est réel, et le terme $Y_3 Y_4 + Y_5(Y_2 + Y_4)$ ne peut alors reproduire lesdits termes en $j\omega$ et en $(j\omega)^2$. Il faut donc que Y_5 soit imaginaire. Supposons ensuite Y_4 imaginaire. Dans ce cas, $Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_3)$ est proportionnel à $j\omega$, et $Y_4 Y_5$ proportionnel à $(j\omega)^2$. Mais alors $Y_5 Y_2$ ne peut fournir le terme constant qui doit apparaître dans D . On se voit ainsi contraint de choisir Y_4 réel. En conclusion, on doit poser

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = 1/j\omega C_2, \quad Z_3 = R_3, \quad Z_4 = R_4, \quad Z_5 = 1/jC_1\omega \quad (9.70)$$

ce qui donne le filtre de la figure (9.40), ayant pour fonction de transfert

$$H_R = -\frac{1}{R_1 R_3} \frac{1}{\frac{1}{R_3 R_4} + jC_1 \omega \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + jC_2 \omega \right)}$$

D'où

$$K = -\frac{R_4}{R_1}, \quad \omega_c^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}, \quad 2m\omega_c = R_3 R_4 C_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (9.71)$$

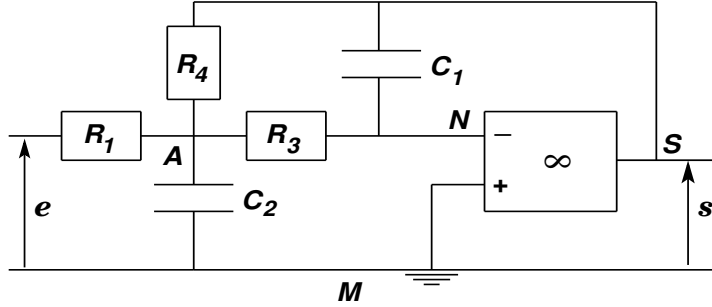


FIGURE 9.40 – Filtre de Rauch passe-bas

Vérifions directement les propriétés de passe-bas de ce filtre, connaissant l'action des condensateurs selon la fréquence. Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, les deux condensateurs se comportent comme des court-circuits ; s devient alors égal à v_N qui est nul et v_A tend aussi vers $v_M = 0$. Lorsque $\omega \rightarrow 0$, les deux condensateurs se comportent comme des coupe-circuits. Le courant qui circulerait dans R_3 deviendrait égal à i_- qui est nul. Le potentiel en A devient alors égal à v_N qui est nul. Seule la branche $R_1 \rightarrow R_4$ reste effective et dans ce cas on obtient bien $s = -eR_4/R_1$.

② Filtre de Rauch passe-haut

On cherche maintenant une fonction de transfert de la forme

$$H = K \frac{(j\omega)^2}{1 + 2jmu - u^2}, \quad \text{où } u = \omega/\omega_c \quad (9.72)$$

Manifestement, on doit choisir $Y_1 = j\omega C_1$, $Y_3 = j\omega C_2$. Il est alors évident que Y_5 ne peut être imaginaire car sinon le dénominateur D de (9.68) n'aurait pas de terme constant. Pour y obtenir le terme en $(j\omega)^2$, le seul choix possible est que Y_4 soit imaginaire. Le terme constant doit alors être fourni par $Y_5 Y_2$, ce qui impose que Y_2 soit réel. Pour constituer ce filtre on doit donc prendre

$$Z_1 = 1/(jC_1\omega), \quad Z_2 = R_1, \quad Z_3 = 1/(jC_2\omega), \quad Z_4 = 1/(jC_3\omega), \quad Z_5 = R_2 \quad (9.73)$$

ce qui donne le filtre de la figure (9.41) ayant pour fonction de transfert

$$H_R = -\frac{C_1 C_2 \omega^2}{\frac{1}{R_1 R_2} - C_2 C_3 \omega^2 + \frac{j\omega}{R_2} (C_1 + C_2 + C_3)} \quad (9.74)$$

Par comparaison avec (9.72), on trouve

$$K = -C_1/C_3, \quad \omega_c = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}, \quad 2m = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{\sqrt{C_2 C_3}} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad (9.75)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier directement les propriétés de passe-haut dudit filtre, au simple regard de sa représentation à la figure (9.41).

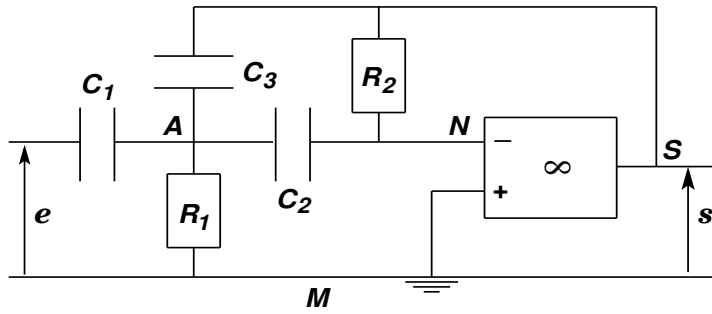


FIGURE 9.41 – Filtre de Rauch passe-haut

③ Filtres de Rauch passe-bande

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre s'écrit

$$H = A \frac{j\omega}{1 + j\omega\alpha - \omega^2\beta}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux constantes positives, ou, de façon équivalente,}$$

$$H = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right)}, \quad \text{en posant } K = A/\alpha, \quad \omega_c = 1/\sqrt{\beta}, \quad Q = \sqrt{\beta}/\alpha \quad (9.76)$$

Cette dernière forme est aussi celle donnant, en notation complexe, l'expression de l'intensité du courant circulant dans un circuit (R, L, C) alimenté par une tension sinusoïdale. A cet égard, rappelons que la valeur du coefficient Q (noté \check{Q} au chapitre 7), appelé coefficient de qualité, détermine l'acuité de la résonance et la largeur de la bande passante par la formule $\Delta\omega/\omega_c = 1/Q$, ω_c étant la pulsation de résonance (voir eq. 7.70).

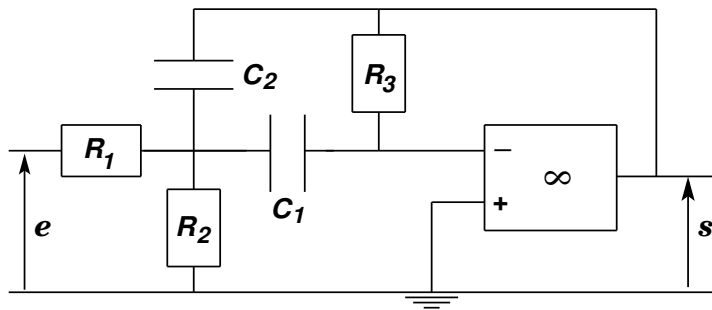


FIGURE 9.42 – Filtre de Rauch passe-bande; cas a

On a ici deux possibilités : i) Y_1 réel, Y_3 imaginaire ii) Y_1 imaginaire, Y_3 réel. Le lecteur vérifiera ce qui suit.

i) Faisons le choix Y_1 réel et Y_3 imaginaire. On doit alors avoir Y_5 réel, Y_4 imaginaire et Y_2 peut être soit réel (cas a), soit imaginaire (cas b), d'où

$$\text{Cas a : } Z_1 = R_1, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_3 = 1/(j\omega C_1), \quad Z_4 = 1/(j\omega C_2), \quad Z_5 = R_3,$$

$$H_R = -\frac{1}{R_1} \frac{j\omega C_1}{-\omega^2 C_1 C_2 + \frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega(C_1 + C_2) \right)}, \quad \text{et} \quad (9.77)$$

$$K = -\frac{C_1 R_3}{R_1(C_1 + C_2)}, \quad \omega_c^2 = \frac{R_1 + R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2 R_3}, \quad Q = \sqrt{\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}}$$

correspondant au dispositif de la figure (9.42).

Cas b : $Z_1 = R_1$, $Z_2 = 1/(j\omega C_3)$, $Z_3 = 1/(j\omega C_1)$, $Z_4 = 1/(j\omega C_2)$, $Z_5 = R_2$,

$$H_R = -\frac{1}{R_1} \frac{j\omega C_1}{-\omega^2 C_1 C_2 + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} + j\omega(C_1 + C_2 + C_3) \right)}, \text{ et} \quad (9.78)$$

$$K = -\frac{R_2}{R_1} \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad \omega_c^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}, \quad Q = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2 + C_3},$$

correspondant à la figure (9.43).

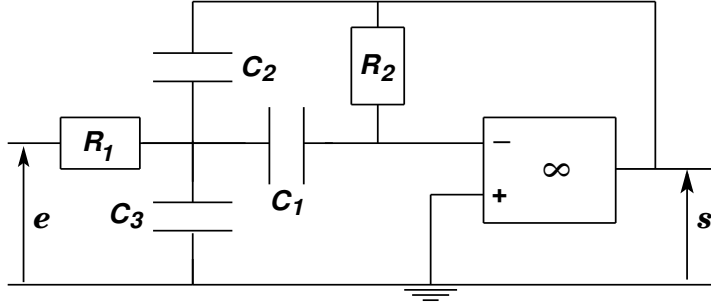


FIGURE 9.43 – Filtre de Rauch passe-bande; cas b

ii) Prenons ensuite Y_1 imaginaire et Y_3 réel. Alors, Y_5 est imaginaire, Y_4 est réel et ici encore, Y_2 peut être soit réel (cas c), soit imaginaire (cas d). D'où

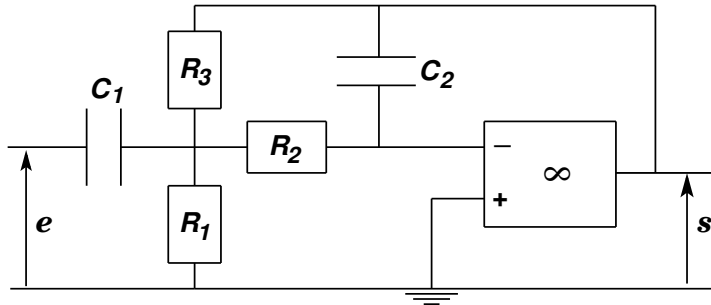


FIGURE 9.44 – Filtre de Rauch passe-bande; cas c

Cas c : $Z_1 = 1/(j\omega C_1)$, $Z_2 = R_1$, $Z_3 = R_2$, $Z_4 = R_3$, $Z_5 = 1/(j\omega C_2)$,

$$H_R(j\omega) = -\frac{1}{R_2} \frac{j\omega C_1}{\frac{1}{R_2 R_3} + j\omega C_2 \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}, \text{ et} \quad (9.79)$$

$$K = -\frac{C_1}{R_1 C_2 \eta}, \quad \omega_c^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}, \quad Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{1}{\eta \sqrt{R_1 R_3}}, \quad \text{avec } \eta = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

correspondant à la figure (9.79).

Cas d : $Z_1 = 1/(j\omega C_1)$, $Z_2 = 1/(j\omega C_2)$, $Z_3 = R_1$, $Z_4 = R_2$, $Z_5 = 1/(j\omega C_3)$, et

$$H_R(j\omega) = -\frac{1}{R_1} \frac{j\omega C_1}{\frac{1}{R_1 R_2} + j\omega C_3 \left(j\omega(C_1 + C_2) + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \text{ et} \quad (9.80)$$

$$K = -\frac{C_1 R_2}{C_3 R_1 + R_2}, \quad \omega_c^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_3 (C_1 + C_2)}, \quad Q = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_3} \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2}},$$

correspondant à la figure (9.45).

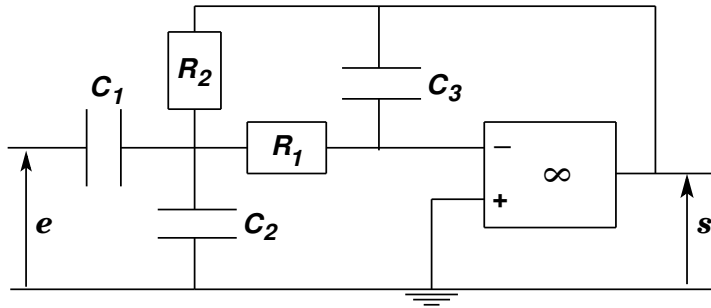


FIGURE 9.45 – Filtre de Rauch passe-bande; cas d

9.5.3 Structure de Sallen et Key²⁵

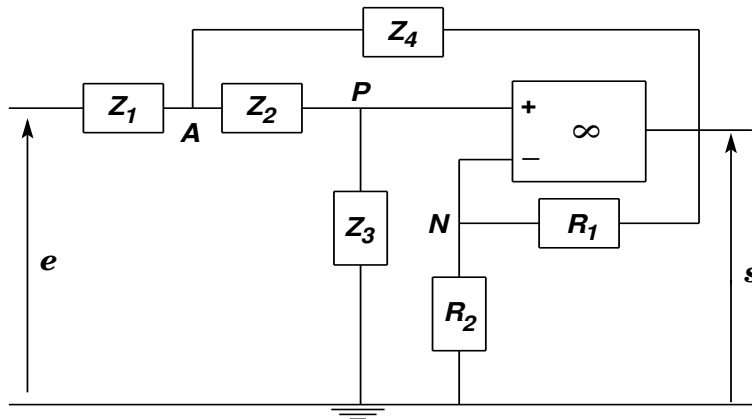


FIGURE 9.46 – Structure de Sallen-Key

La figure (9.46) montre la structure générale des filtres de Sallen-Key, utilisant un AO en amplificateur non-inverseur. Posant $k = \frac{R_1}{R_2}$, on a $v_N = v_P = \frac{s}{1+k}$. L'application du théorème de Millman en P et en A donne

$$v_P(Y_2 + Y_3) = v_A Y_2, \quad v_A(Y_1 + Y_4 + 1/(1/Y_2 + 1/Y_3)) = eY_1 + sY_4, \quad \text{soit}$$

$$\begin{aligned} eY_1 + sY_4 &= \frac{s}{1+k} Y_3 \left(\frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} \right) \times v_A(Y_1 + Y_4 + 1/(1/Y_2 + 1/Y_3)) \\ &= \frac{s}{1+k} \left[(Y_1 + Y_4) \left(1 + \frac{Y_3}{Y_2} \right) + Y_3 \right], \end{aligned}$$

d'où la fonction de transfert

$$H_{SK} = \frac{(1+k)Y_1}{Y_3 - Y_4(1+k) + (Y_1 + Y_4) \left(1 + \frac{Y_3}{Y_2} \right)} \quad (9.81)$$

25. R.P. Sallen, E.L. Key, A practical method of designing RC active filters, (J. Audio Eng. Soc p.74-85, 1955).

Cette structure permet aussi de constituer des filtres de toute nature, sauf des coupe-bande. Par exemple, le montage de la figure (9.47) où l'AO est monté en suiveur de tension ($k = 0$) est un passe-haut du second ordre, de fonction de transfert

$$H = \frac{2(ju)^2}{1 + 2ju + 2(ju)^2} \quad \text{où } u = RC\omega \quad (9.82)$$

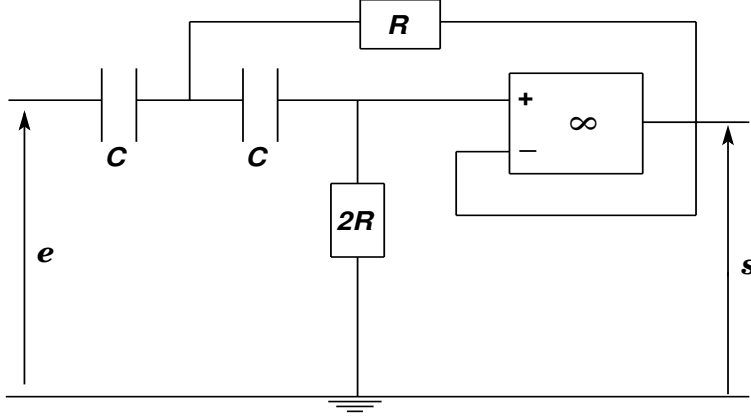


FIGURE 9.47 – Passe-haut du second ordre de Sallen-Key

Avec des raisonnements similaires à ceux utilisés pour la structure de Rauch, le lecteur pourra de lui-même trouver, selon la nature du filtre de Sallen-Key souhaitée, quels éléments passifs utiliser et quelles doivent être leurs places respectives dans cette structure.

9.5.4 Exemple de filtre coupe-bande

La figure (9.48) montre un exemple de filtre coupe-bande réalisé avec deux AO idéaux. Nous appliquerons le théorème de Millman successivement aux points P , N et A , en notant que $v_P = 0$, $v_N = 0$, $v_B = s_1$. On obtient

$$(P) : e + s_1 + s = 0, \quad (N) : j\omega C v_A + \frac{s_1}{2R} = 0, \quad \text{d'où } v_A = -\frac{s_1}{2ju}, \quad \text{avec } u = RC\omega,$$

$$v_A \left(\frac{1 + \alpha}{R} + \frac{1}{Z} \right) = \frac{e}{R} + \frac{s_1}{Z}, \quad \text{où } \frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{2R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{2ju}{R} \frac{1 + ju}{1 + 2ju},$$

et par suite

$$s_1 (1 + \alpha + 2ju(1 + ju)) = -2jue, \quad \text{avec } s_1 = -s - e$$

d'où l'on tire

$$H = s/e = -\frac{1 + \alpha + 2(ju)^2}{1 + \alpha + 2ju(1 + ju)} \quad (9.83)$$

Après quelques manipulations, cette dernière expression peut être réécrite sous la forme

$$H = -\frac{1}{1 + \frac{1}{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}, \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{Q}{RC}, \quad Q = \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \quad (9.84)$$

On en déduit aisément la propriété de coupe-bande de ce filtre, que l'on peut du reste prévoir par le simple examen de la figure (9.48).

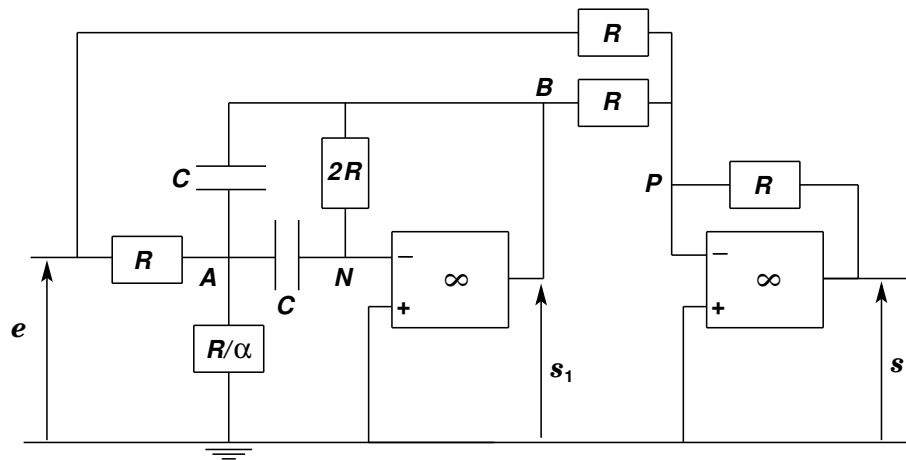


FIGURE 9.48 – Exemple de filtre coupe-bande

9.6 Fonctions de transfert normalisées

Le besoin d'une normalisation des fonctions de transfert émerge de la constatation que des dispositifs de filtrage très variés peuvent finalement produire les mêmes effets, caractérisables au moyen d'un petit nombre de paramètres. Les formules (9.30) en apportent une justification théorique : elles montrent qu'une fonction de transfert d'un SLI quelconque est factorisable en un certain nombre de fonctions de transfert, soit d'ordre 1, soit d'ordre 2. L'application pratique qui en découle immédiatement est que, pourvu qu'on leur confère une forme universelle en normalisant certaines de leurs données, il suffit de donner des tables ou des représentations graphiques de ces fonctions de transfert de base, à l'aide desquelles l'utilisateur pourra étudier des systèmes plus complexes. C'est notamment l'objectif de la représentation de Bode. En outre, comme indiqué ci-après, les fonctions de transfert associées aux différents types de filtres peuvent être converties les unes en les autres au moyen de substitution appropriées. Il suffira alors de n'établir des tables ou des graphiques que pour un seul type de filtre, choisi comme référence.

9.6.1 Expressions

Rappelons tout d'abord que les fonctions de transfert considérées ici sont définies comme le rapport de deux tensions et de ce fait sont des grandeurs *sans dimension*. De l'étude des filtres passifs et des filtres actifs impliquant des AO idéaux il ressort qu'on peut les exprimer en termes de *rapports* d'impédances et que finalement il est donc possible de les exprimer uniquement en fonction de variables sans dimension. Une première conséquence est si l'on multiplie toutes les impédances constituant ces filtres par un même nombre quelconque, la fonction de transfert reste *inchangée*.

Dans ce qui suit, le paramètre ω_0 est une pulsation caractéristique du filtre étudié, utilisée comme référence des pulsations. On définit alors la variable réduite $u = \omega/\omega_0$, sans dimension. La variable de Laplace p , égale à $j\omega$ en régime harmonique, sera également normalisée à ω_0 , et nous noterons encore p la variable de Laplace ainsi adimensionnée, égale à ju en régime harmonique.

① Fonction de transfert d'un passe-bas du 1er ordre

La fonction de transfert normalisée d'un passe-bas du premier ordre est définie comme étant

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + p} \quad (9.85)$$

où $H_0 = H(0)$.

② Fonction de transfert d'un passe-haut du 1er ordre

$$H(p) = \frac{H_0 p}{1 + p} \quad (9.86)$$

où H_0 est la valeur de $H(p)$ lorsque $|p| \rightarrow \infty$, ou encore, $\lim_{p \rightarrow 0} [H(p)/p]$.

③ Fonction de transfert d'un passe-bas du 2nd ordre

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2m p + p^2} \quad (9.87)$$

où m est le coefficient d'amortissement²⁶ (noté σ dans certains ouvrages), lié à un coefficient de qualité Q par la formule $m = 1/(2Q)$, et $H_0 = H(0)$.

④ Fonction de transfert d'un passe-haut du 2nd ordre

$$H(p) = \frac{H_0 p^2}{1 + 2m p + p^2} \quad (9.88)$$

où H_0 est la valeur de $H(p)$ lorsque $|p| \rightarrow \infty$, ou encore, $\lim_{p \rightarrow 0} [H(p)/p^2]$.

⑤ Fonction de transfert d'un passe-bande du 2nd ordre

$$H(p) = \frac{H_0 2m p}{1 + 2m p + p^2} \quad (9.89)$$

avec $H_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [H(p)/(2m p)]$.

⑥ Fonction de transfert d'un coupe-bande du 2nd ordre

$$H(p) = \frac{H_0 (p^2 + 1)}{1 + 2m p + p^2} \quad (9.90)$$

où $H_0 = H(0)$.

9.6.2 Transpositions

① Transposition passe-bas \longleftrightarrow passe-haut

Remplaçant la variable de Laplace normalisée p par son inverse $1/p$, on convertit la fonction de transfert d'un passe-bas en celle d'un passe-haut, et réciproquement :

$$p \longleftrightarrow \frac{1}{p} : \frac{1}{1+p} \longleftrightarrow \frac{p}{1+p} \quad (\text{ordre 1}), \quad \frac{1}{1+2m p+p^2} \longleftrightarrow \frac{p^2}{1+2m p+p^2} \quad (\text{ordre 2}) \quad (9.91)$$

Dans cette opération, l'ordre de la fonction de transfert est préservé.

② Transposition passe-bas (1) \longleftrightarrow passe-bande (2)

La substitution $p \longleftrightarrow \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{p} \right)$ permet d'échanger la fonction de transfert d'un passe-bas du premier ordre et celle d'un passe-bande, du second ordre :

$$p \longleftrightarrow \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{p} \right) : \frac{1}{1+p} \longleftrightarrow \frac{2m p}{1+2m p+p^2} \quad (9.92)$$

²⁶. Se rappeler que la fonction de transfert est la traduction d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et réels. S'agissant d'une équation d'ordre 2, le terme proportionnel à m induit dans la réponse temporelle indicelle un amortissement exponentiel $\exp(-mt)$.

Dans cette opération, l'ordre est doublé en passant du passe-bas du premier ordre au passe-bande du second ordre.

③ **Transposition passe-bas (1) \longleftrightarrow coupe-bande (2)**

Il s'agit cette fois de la substitution

$$p \longleftrightarrow \frac{2m}{\left(p + \frac{1}{p}\right)} : \frac{1}{1+p} \longleftrightarrow \frac{(p^2+1)}{1+2mp+p^2} \quad (9.93)$$

Ici aussi, l'ordre du filtre est multiplié, ou divisé, par 2.

④ **Transposition passe-bande (2) \longleftrightarrow coupe-bande (2)**

Comme on pouvait le prévoir, cette opération se définit comme :

$$\frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{p}\right) \longleftrightarrow \frac{2m}{\left(p + \frac{1}{p}\right)} : \frac{2mp}{1+2mp+p^2} \longleftrightarrow \frac{(p^2+1)}{1+2mp+p^2} \quad (9.94)$$

Les différents types de filtres ayant des réponses fréquentielles généralement très différentes, les opérations décrites ci-dessus ne doivent pas être considérées comme de véritables transformations mathématiques, mais plutôt comme des conversions utiles²⁷.

9.6.3 Transformations des impédances, transformation RC-CR

Il est clair que les transformations du paramètre p décrites au paragraphe précédent change la nature même des composants passifs constituant le filtre initial. Ainsi, dans la transformation $p \rightarrow 1/p$, une résistance reste une résistance, mais l'impédance $Z_C = 1/(pC\omega_0)$ d'un condensateur devient $\tilde{Z}_C = p/(C\omega_0)$, que l'on peut interpréter comme celle d'une inductance de coefficient $L = 1/(C\omega_0^2)$, puisque $\tilde{Z}_C = j\omega/(C\omega_0^2)$. On notera au passage que le paramètre p étant sans dimension, le transformer en un autre paramètre sans dimension ne change pas la dimension des impédances. De même, l'impédance $Z_L = pL\omega_0$ d'une inductance de coefficient L se voit changer en celle d'un condensateur de capacité $C = 1/(L\omega_0^2)$. La transformation $p \rightarrow 2m(p + 1/p)$ ne change pas une résistance, mais change l'impédance d'un condensateur en celle d'une association en parallèle d'un condensateur et d'une inductance :

$$Z_C = \frac{1}{pC\omega_0} \rightarrow \frac{1}{2mC\omega_0} \frac{1}{p + \frac{1}{p}} = \frac{1}{j\omega C' + \frac{1}{j\omega L'}}, \quad \text{avec } C' = 2mC, \quad L' = \frac{1}{2mC\omega_0^2} \quad (9.95)$$

Cependant, on voit par exemple qu'à partir du filtre passe-bas (b) de la figure (9.1), on peut obtenir un filtre passe-haut en permutant simplement la résistance et le condensateur; et qu'en permutant dans un premier temps la résistance et le condensateur puis en remplaçant dans un deuxième temps le condensateur par une association en série d'un condensateur et d'une inductance, on peut également obtenir un filtre passe-bande comme celui de la figure (9.3) où $R_1 = 0$. Montrons qu'il est possible d'associer ces mêmes filtres dans le cadre de transformations du paramètre p .

27. A ce propos, faisons la remarque suivante. En régime harmonique, la transposition passe-bas \longleftrightarrow coupe-bande revient à poser, dans la fonction de transfert du passe-bas du premier ordre, $u = \frac{1}{2m} \left(u' - \frac{1}{u'}\right)$. Si l'on voulait comparer les réponses fréquentielles des deux filtres se poserait alors la question des domaines de variation de u et u' . En effet, comme en principe u est positif, u' serait contraint de varier dans le domaine $u' \geq 1$. Fort heureusement, puisque les deux membres de cette égalité interviennent par leurs carrés dans les gains qui leur sont respectivement associés, leurs signes sont en fait sans importance et l'on peut faire varier u' dans tout le domaine $[0, +\infty[$. Par contre, la comparaison des phases des deux fonctions de transfert requiert plus de prudence à la traversée du point $u' = 1$.

Envisageons un filtre passif ou actif (avec AO idéal), dont les éléments passifs sont uniquement des résistances et des condensateurs. Nous avons vu que dans la transformation $p \rightarrow 1/p$, une résistance R reste une résistance R , mais qu'un condensateur de capacité C devient une inductance de coefficient $L = 1/(C\omega_0^2)$. A ce stade, le filtre initial est changé en un filtre dont les éléments passifs semblent devoir être uniquement des résistances et des inductances. A partir de ce dernier, on peut néanmoins constituer un nouveau filtre possédant *la même fonction de transfert*, mais ne comportant comme éléments passifs que des résistances et des condensateurs. A cet effet, on exploite le fait que la fonction de transfert ne dépend des impédances que par leurs rapports, et qu'elle ne change donc pas si l'on multiplie toutes les impédances par un même facteur quelconque λ . Prenons alors $\lambda = K/(j\omega)$ où K est une constante positive. Dans cette opération, une résistance R est changée en condensateur de capacité $C' = 1/(KR)$, et une inductance est changée en une résistance $R' = KL$. Il suffit d'ajuster la constante K pour éventuellement préserver la dimension des impédances. L'ensemble des deux transformations $p \rightarrow 1/p$ et multiplication par $K/(j\omega)$ constitue la "transformation $RC - CR$ "²⁸. Elle permet de transformer par exemple un filtre RC passe-bas en un filtre CR passe-haut. Une résistance R_k est transformée en condensateur de capacité $C'_k = 1/(KR_k)$ et un condensateur de capacité C_ℓ en une résistance $R'_\ell = K/(C_\ell\omega_0^2)$, avec la relation

$$R'_\ell C'_k C_\ell R_k \omega_0^2 = 1 \quad (9.96)$$

Dans le cas du filtre de la figure (9.1) ne comprenant qu'une seule résistance et un seul condensateur, on prend $\omega_0 = 1/(RC)$, et l'on peut faire en sorte que $R' = R$, $C' = C$, ce qui revient, dans le filtre initial, à permuter la résistance et le condensateur.

Cette possibilité de changer la nature des impédances sans changer la nature du filtre permet aussi de contourner le résultat (9.95) de la transformation $p \rightarrow 2m(p + 1/p)$, en multipliant ensuite les impédances par le facteur $K(p + 1/p)$. Un condensateur se voit ainsi transformé en résistance $R' = K/(2mC\omega_0)$, tandis qu'une résistance R devient l'association en série d'une impédance de coefficient $L' = RK\omega_0$ et d'un condensateur de capacité $C' = \omega_0/(RK)$. Ce procédé réalise donc le passage du filtre passe-bas au filtre passe-bande recherché plus haut.

28. Voir S.K. Mitra : "Transfer function realization using RC one-ports and two grounded voltage amplifiers", Proc. First Annual Princeton Conf. on Information Sciences and Systems, Princeton University, March 1967, pp. 18-23; "Analysis and Synthesis of Linear Active Networks", John Wiley & Sons, Inc. (1969).

9.7 Complément : simulation d'équations différentielles

Montrons comment on peut, au moins en principe, simuler des équations différentielles linéaires avec des opérateurs analogiques impliquant des AO.

Soit à résoudre une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -a \frac{df}{dx} - bf + g(x) \quad (9.97)$$

où $g(x)$ est une fonction connue et x la variable, supposée sans dimension. Cette variable sera bien entendu reliée au temps t par la relation $t = kx$, la constante k étant homogène à un temps. Examinons alors le schéma de la figure (9.49).

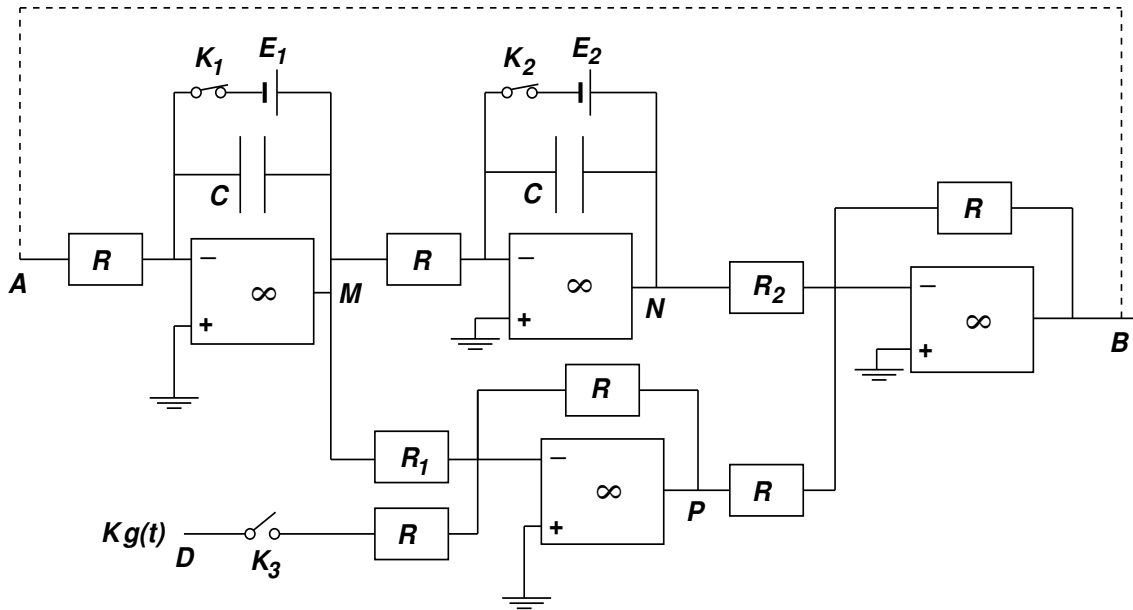


FIGURE 9.49 – Dispositif de simulation de l'équation (9.97)

Supposons le problème résolu et qu'au point A on puisse injecter le signal $v_A = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2 f}{dx^2}$. Alors, grâce au premier étage intégrateur, on récupère au point M le signal $v_M = -\frac{1}{RC} \frac{df}{dt}$. Un second étage intégrateur produit à sa sortie N le signal $v_N = \frac{1}{R^2 C^2} f$. Supposons aussi que le point D puisse recevoir le signal excitateur $v_D = Kg(t/k)$, K étant une constante. A la sortie P d'une cellule sommatrice, on obtient le signal $v_P = -Kg(t/k) - \frac{R}{R_1} v_M$. Les deux signaux v_N et v_P sont ensuite récupérés par un dernier étage sommateur donnant à sa sortie B le signal

$$v_B = -v_P - \frac{R}{R_2} v_N = Kg(t/k) - \frac{R}{R_1} \left(\frac{1}{RC} \frac{df}{dt} \right) - \frac{R}{R_2} \left(\frac{1}{R^2 C^2} f \right) \quad (9.98)$$

Supposons enfin que les constantes soient ajustées de telle sorte que

$$k = RC, \quad K = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{R}{R_1} = a, \quad \frac{R}{R_2} = b \quad (9.99)$$

On voit qu'ainsi le signal obtenu en B est, d'après l'équation, égal à $\frac{d^2 f}{dt^2}$, c'est-à-dire, le signal souhaité pour le point A . Il suffit alors de relier les deux points A et B pour que ladite équation soit satisfaite.

Ceci étant, on ne doit pas oublier que la solution de l'équation comporte deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales sur la fonction f et sur sa dérivée f' . Ayant relié les entrées non-inverseuses des AO à la masse, on a une masse virtuelle à leurs entrées inverseuses. Ceci fait que les tensions aux bornes des condensateurs des deux premiers étages sont respectivement $-\frac{1}{RC} \frac{df}{dt}$ et $\frac{1}{R^2 C^2} f$. Des conditions initiales peuvent donc être réalisées en chargeant initialement les condensateurs à l'aide des batteries E_1 et E_2 ²⁹. Puis, grâce à des relais fonctionnant simultanément, à la date $t = 0$ on ouvre les deux interrupteurs K_1 et K_2 tout en fermant l'interrupteur K . A l'aide d'un oscilloscope et tout autre appareil enregistreur, on peut alors visualiser la fonction $f(t)$ et analyser le comportement simulé du système à l'étude.

²⁹. On notera ici que si l'on veut une condition initiale sur la dérivée elle-même et non sur son opposée, des étages inverseurs, comme celui de la figure (9.18) avec $Z_1 = Z_2 = R$, doivent être insérés dans le dispositif. Nous n'avons pas jugé utile de surcharger le schéma de principe (9.49) et laissons le lecteur y placer lui-même les cellules inverseuses nécessaires.