

COURS D'ELECTROMAGNÉTISME

Christian Carimalo

Chapitre 1

Notions élémentaires sur les champs

En Physique, on est très souvent conduit à considérer des grandeurs dont les valeurs dépendent de la position du point où on les étudie. De telles grandeurs sont appelées des *champs*. Les exemples sont nombreux.

- ◇ En Thermique : lorsque la température d'une pièce varie de point en point ;
- ◇ En Météorologie : la densité de l'air ainsi que la pression qui varient selon la région et l'altitude ;
- ◇ En Topographie : l'altitude d'un relief ;
- ◇ En Electricité : le potentiel électrique qui varie le long d'un conducteur.

Si la grandeur étudiée est définie par la donnée d'un seul nombre variable avec la position, on a affaire à un *champ scalaire*. C'est clairement le cas de certaines des grandeurs évoquées plus haut : température, densité, pression. D'autres grandeurs, comme les forces, sont définies par la donnée de trois composantes. Une force dont les composantes varient selon la position du point d'application est un *champ de vecteurs*, aussi appelé *champ vectoriel*¹.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude de champs dont la valeur en un point donné est indépendante du temps. Ce sont des *champs statiques*.

1.1 Champs scalaires

Plaçons nous dans un repère cartésien O, x, y, z . Un champ scalaire est donc une fonction à valeurs réelles (ou plus généralement complexes) $U(x, y, z)$ des coordonnées cartésiennes x, y, z du point M considéré. Une façon commode de visualiser un champ scalaire est de représenter graphiquement les ensembles de points où $U(x, y, z)$ garde une valeur constante. Ces ensembles sont des *surfaces*. En effet, l'équation

$$U(x, y, z) = U_0$$

indique que l'une des variables parmi x, y et z est fonction des deux autres. Autrement dit, l'ensemble correspondant à cette valeur U_0 est un sous-espace à deux paramètres indépendants : il s'agit bien d'une surface, appelée *surface de niveau* ou aussi *surface équipotentielle* car la fonction U est aussi appelée *potentiel*. Soit par exemple la fonction U telle que

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

¹On parle alors de *champ de forces*.

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = U_0$ n'a de solution réelle que si $U_0 \geq 0$. Posons alors $U_0 = R^2$, où R peut être supposé positif. L'équation précédente prend alors la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

qui définit une sphère de centre O et de rayon R (figure 1.1).

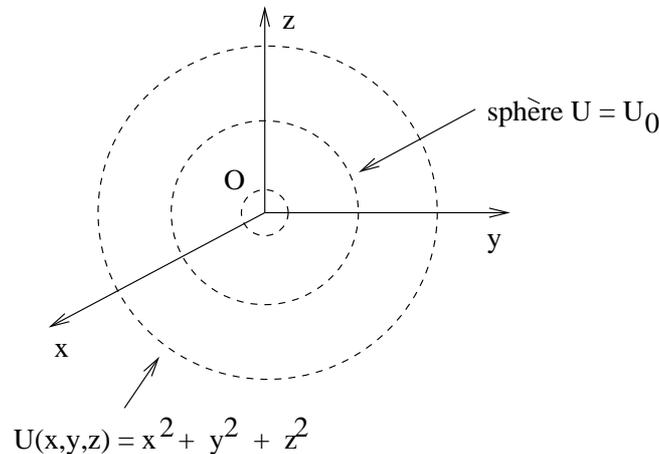


Figure 1.1

Lorsqu'on se restreint à un espace à deux dimensions (c'est le cas dans l'étude de la carte d'un relief), les ensembles d'égale valeur d'une fonction $U(x, y)$ sont des *courbes*, appelées *lignes de niveau*, ou encore *courbes équipotentiels*. Par exemple, pour la fonction telle que $U(x, y) = x^2 + y^2$, les lignes de niveau sont des cercles de centre O .

L'étude des fonctions d'une seule variable nous enseigne que le lien entre une valeur $f(x)$ d'une fonction f et la valeur $f(x + \Delta x)$ infiniment voisine lorsque Δx est suffisamment petit s'effectue au moyen de la dérivée f' de la fonction puisque, par définition de la dérivée, on a

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x f'(x)$$

Pour les champs scalaires fonctions de plusieurs variables, ce lien se fait par l'intermédiaire d'un champ vectoriel que l'on appelle le *gradient*.

1.2 Un champ de vecteurs : le gradient

Soit $U(x, y, z)$ un champ scalaire, prenant la valeur U_0 en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Pour les fonctions usuelles de la Physique, on montre que la valeur $U(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ du champ scalaire en un point $M(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ infiniment voisin du point M_0 s'écrit approximativement

$$U(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) \approx U_0 + \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) dz \quad (1.1)$$

à des termes d'ordres supérieurs près en dx , dy ou dz . Plus précisément, la *partie principale* de l'accroissement $\Delta U = U(M) - U(M_0)$ est

$$dU(M_0, dx, dy, dz) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) dz \quad (1.2)$$

que l'on appelle *différentielle* de la fonction U au point M_0 , et qui dépend aussi des accroissements infinitésimaux dx , dy et dz . Ces dernières quantités sont les composantes cartésiennes du vecteur *déplacement élémentaire*

$$\vec{dM} = \vec{M_0M} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (1.3)$$

U étant une fonction *scalaire*, ses trois dérivées partielles par rapport aux coordonnées définissent les trois composantes d'un champ de vecteurs, appelé le *gradient* de U , et noté $\vec{\text{grad}} U$:

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (1.4)$$

et l'on a

$$dU = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{dM} \quad (1.5)$$

La différentielle d'un champ scalaire s'exprime donc simplement comme le produit scalaire de son gradient par le vecteur déplacement élémentaire.

Les propriétés du gradient généralisent celles de la dérivée d'une fonction d'une variable, et résultent de la relation (1.5).

Supposons que lorsqu'on passe du point M_0 au point M infiniment voisin, $U(M)$ soit supérieur à $U(M_0)$. Alors

$$\Delta U \approx dU = \vec{\text{grad}} U(M_0) \cdot \vec{M_0M} \geq 0 \quad (1.6)$$

On en déduit que, leur produit scalaire étant positif, les deux vecteurs $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ et $\vec{M_0M}$ pointent vers le même demi-espace. En d'autres termes, $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ est orienté vers les régions de *croissance* de U .

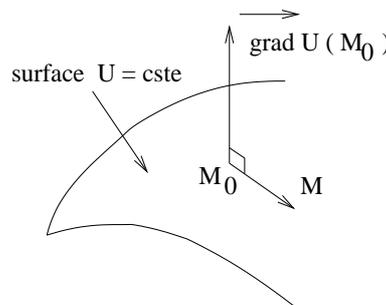


Figure 1.2

Si maintenant $U(M) = U(M_0) = U_0$, les deux points M et M_0 sont sur la même surface équipotentielle correspondant à la valeur U_0 de U . On a alors

$$dU = \vec{\text{grad}} U(M_0) \cdot \vec{M_0M} = 0 \quad (1.7)$$

Comme $\vec{M_0M}$ est infinitésimal, il est dans le plan tangent à la surface équipotentielle en M_0 . La relation précédente indique que, son produit scalaire avec $\vec{M_0M}$ étant nul, $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ lui

est perpendiculaire : ce vecteur est donc perpendiculaire en M_0 au plan tangent à la surface équipotentielle, c'est-à-dire, orienté suivant la normale en M_0 à cette surface (figure 1.2).

Il est utile ici de donner la définition des *lignes de champ* d'un champ de vecteurs. Une ligne de champ d'un champ de vecteurs quelconque \vec{A} est une *courbe* telle qu'en chacun de ses points M , la tangente est définie par le vecteur $\vec{A}(M)$ lui-même (figure 1.3). Localement (c'est-à-dire au voisinage du point M), cette courbe peut être assimilée à une droite, ce qui fait que les deux vecteurs $\vec{A}(M)$ et $\vec{MM}' = \vec{dM}$, où M' est un point de cette courbe infiniment voisin de M , doivent être colinéaires. On a donc

$$\vec{dM} = \lambda \vec{A}(M) \tag{1.8}$$

où λ est une quantité réelle infinitésimale. Projetant cette équation vectorielle sur les trois axes cartésiens, et éliminant λ des équations, on obtient les équations *différentielles* de la ligne de champ, exprimées au moyen des coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \tag{1.9}$$

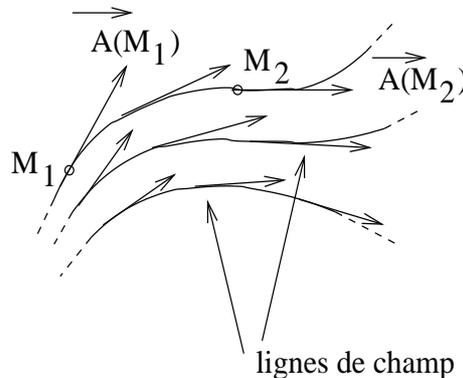


Figure 1.3

En tout point où le champ scalaire U et son gradient sont définis, il passe une surface équipotentielle et une ligne de champ du gradient de U . On en déduit que l'ensemble des surfaces équipotentielles d'une part, et l'ensemble des lignes de champ du gradient d'autre part, sont deux ensembles géométriques orthogonaux. Par exemple, la fonction $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a pour gradient

$$\vec{\text{grad}} U = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 2z \vec{k} = 2 \vec{OM}$$

dont les lignes de champ sont toutes les demi-droites issues du point origine O , qui sont bien toutes perpendiculaires à toutes les sphères de centre O , équipotentielles de U .

Enfin, justifions l'appellation de *lignes de plus grandes pentes* donnée aussi aux lignes de champ du gradient. Pour deux points P et P' infiniment voisins, on a

$$U(P') - U(P) = \Delta U \approx dU = \vec{\text{grad}} U(P) \cdot \vec{PP'} = \|\vec{\text{grad}} U(P)\| \|\vec{PP'}\| \cos \alpha \tag{1.10}$$

α étant l'angle entre $\vec{\text{grad}} U(P)$ et $\vec{PP'}$. De cette relation on déduit les deux résultats suivants. D'une part, à partir du point P , et pour une distance PP' donnée, on obtient la *plus grande variation* de U en prenant le vecteur $\vec{PP'}$ selon la même orientation que celle de $\vec{\text{grad}} U(P)$,

c'est-à-dire, pour $\alpha = 0$. D'autre part, pour une variation donnée de U , le *plus court chemin* pour obtenir cette variation doit être effectué selon la direction et le sens du gradient.

Ces résultats peuvent être illustrés simplement en considérant, dans le plan xOy la fonction telle que $U(x, y) = x$. Son gradient est $\vec{\text{grad}} U(M) = \vec{i}$. Les lignes de niveau de cette fonction sont toutes les droites parallèles à l'axe $y'y$ tandis que les lignes de champ de son gradient sont toutes les droites parallèles à l'axe $x'x$. Il est manifeste que le plus court chemin pour passer d'une valeur de U à une autre, c'est-à-dire, en fait, pour passer d'une valeur de x à une autre, est selon l'axe $x'x$.

1.3 Composantes du gradient dans les systèmes de coordonnées usuels

Nous venons de définir le gradient d'une fonction scalaire par ses composantes cartésiennes. Cependant, le repérage des points au moyen des coordonnées cartésiennes n'est pas toujours le plus approprié. Deux autres modes de repérage sont très utiles pour de nombreux problèmes. Il s'agit de celui des coordonnées dites *cylindriques* et de celui des coordonnées dites *sphériques*.

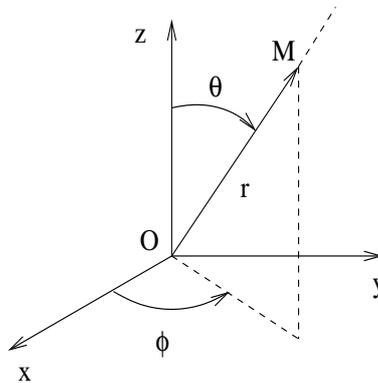


Figure 1.4

Définissons tout d'abord les coordonnées sphériques (figure 1.4). Ce sont finalement les coordonnées les plus naturellement associées à un observateur et qui mériteraient le nom de *variables égocentriques*. En effet, imaginons un observateur O étudiant l'évolution d'un point matériel M . La variable à laquelle O est le plus sensibilisé de prime abord est la distance $r = OM$, car la plus pertinente, de façon évidente, pour répondre à la question cruciale : à quelle distance M se trouve-t-il ? Se pose immédiatement après cette autre question tout aussi cruciale : vers où M se dirige-t-il ? Pour y répondre, O a alors besoin d'un système d'axes annexe $Oxyz$ qu'il va définir par rapport à son proche environnement afin de repérer l'orientation du vecteur \vec{OM} et observer son évolution. Cette orientation sera caractérisée à l'aide de deux angles : θ , angle entre le vecteur \vec{OM} et l'axe $z'z$, et ϕ , angle entre le projeté orthogonal de \vec{OM} dans le plan xOy et l'axe $x'x$.

Pour couvrir tout l'espace au moyen de ces coordonnées, celles-ci doivent varier dans les intervalles respectifs suivants

$$0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (1.11)$$

En fonction de ces coordonnées, les coordonnées cartésiennes ont pour expressions

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.12)$$

On remarquera que les deux angles ne varient pas tous les deux dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. S'il en était ainsi, on pourrait passer d'un point $M(r, \theta, \phi)$ à son symétrique par rapport à l'axe des z soit en faisant varier θ de $2(\pi - \theta)$, r et ϕ étant fixés, soit en faisant varier ϕ de π , r et θ étant fixés. Dans ce cas, en faisant varier les angles θ et ϕ chacun dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, un même point pourrait être obtenu pour des valeurs différentes des angles : il n'y aurait pas correspondance unique entre un point et les valeurs des angles. C'est pour éviter le double comptage des points que l'on restreint l'un des intervalles angulaires. Par convention, l'angle θ est restreint à l'intervalle $[0, \pi]$. On remarquera aussi que ces coordonnées sont dites sphériques parce que, en faisant varier les angles dans leurs intervalles complets tout en gardant r fixe, on engendre une sphère de centre O et de rayon r : cette façon de repérer les points de l'espace correspond à un découpage de l'espace au moyen de sphères concentriques.

Les trois *courbes coordonnées* sont les courbes suivant lesquelles le point d'étude peut se déplacer lorsque deux de ses coordonnées sont fixées. La plus simple ici est celle pour laquelle les deux angles θ et ϕ sont fixés. A partir d'une position M , le point d'étude est alors astreint à se déplacer suivant la demi-droite OM : c'est la courbe coordonnée suivant laquelle on doit déplacer ce point pour faire varier sa coordonnée r , les variables angulaires étant fixées. A cette courbe correspond le vecteur unitaire

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad (1.13)$$

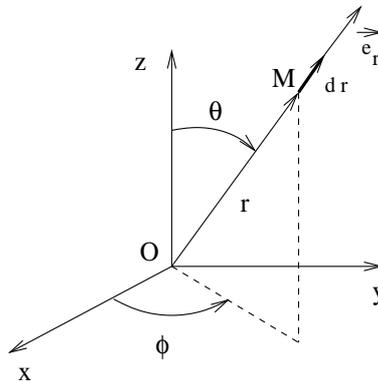


Figure 1.5

Le déplacement élémentaire obtenu dans cette direction en faisant varier r de dr a pour expression vectorielle

$$d\vec{M}_{\theta, \phi} = dr \vec{e}_r \quad (1.14)$$

Lorsqu'on fixe r et l'angle ϕ , le point d'étude doit se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon r situé dans le plan perpendiculaire au plan xOy faisant l'angle ϕ avec le plan xOz . C'est une seconde courbe coordonnée. Lorsqu'on fait varier l'angle θ de $d\theta$, le point d'étude se déplace sur ce cercle d'un élément d'arc égal à $r d\theta$. Le déplacement élémentaire vectoriel est porté par la tangente à ce cercle au point de départ M , dont le vecteur unitaire est donné par

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_r (\theta + \pi/2, \phi) = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad (1.15)$$

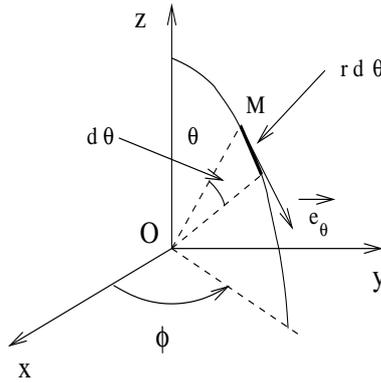


Figure 1.6

et l'on a

$$\overrightarrow{dM}_{r,\phi} = r d\theta \overrightarrow{e_\theta} \quad (1.16)$$

Enfin, si l'on fixe r et θ , la cote $z = r \cos \theta$ du point d'étude ainsi que sa distance à l'axe des z , soit $HM = r \sin \theta$ sont fixés. La courbe coordonnée obtenue est le cercle situé dans le plan de cote z parallèle au plan xOy , centré au projeté orthogonal H du point M sur l'axe des z , et dont le rayon est $r \sin \theta$. Lorsqu'on fait varier ϕ de $d\phi$, le point d'étude se déplace sur ce cercle d'un élément d'arc égal à $r \sin \theta d\phi$, selon la tangente en M à ce cercle dont le vecteur unitaire a pour expression

$$\overrightarrow{e_\phi} = -\sin \phi \overrightarrow{i} + \cos \phi \overrightarrow{j} \quad (1.17)$$

et le vecteur déplacement élémentaire correspondant est

$$\overrightarrow{dM}_{r,\theta} = r \sin \theta d\phi \overrightarrow{e_\phi} \quad (1.18)$$

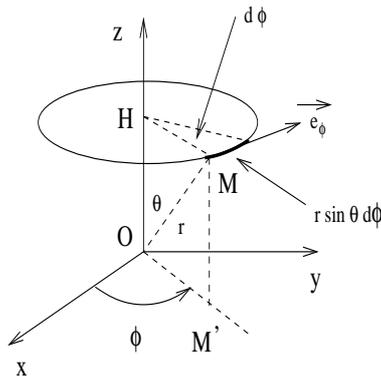


Figure 1.7

Le vecteur déplacement élémentaire le plus général est la somme vectorielle des trois vecteurs déplacements élémentaires ainsi considérés

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dM}_{\theta,\phi} + \overrightarrow{dM}_{r,\phi} + \overrightarrow{dM}_{r,\theta} = dr \overrightarrow{e_r} + r d\theta \overrightarrow{e_\theta} + r \sin \theta d\phi \overrightarrow{e_\phi} \quad (1.19)$$

Il est à noter que cette expression est rigoureusement équivalente à celle obtenue pour le vecteur déplacement élémentaire exprimé en coordonnées cartésiennes, soit

$$\overrightarrow{dM} = dx \overrightarrow{i} + dy \overrightarrow{j} + dz \overrightarrow{k}$$

Pour le montrer à partir de cette dernière expression, on calcule les différentielles de x , y et z considérés comme des fonctions de r , θ et ϕ :

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.20)$$

Puis on les reporte dans l'expression de \overrightarrow{dM} en cartésiennes et l'on rassemble les termes respectivement associés à dr , $d\theta$ et $d\phi$.

Le calcul des composantes sphériques du gradient repose sur l'identité (1.5). Considérons en effet un déplacement élémentaire suivant $\overrightarrow{e_r}$. On aura

$$dU_{\theta,\phi} = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dM}_{\theta,\phi} = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e_r} dr$$

Le rapport $\left(\frac{dU}{dr}\right)_{\theta,\phi}$ représente le taux de variation de U lorsque r varie, θ et ϕ étant fixés.

Il s'agit tout simplement de la dérivée partielle de la fonction U par rapport à r . Or, le produit scalaire

$$G_r = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e_r}$$

est la composante de $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\text{grad}} U$ selon la direction définie par $\overrightarrow{e_r}$. On obtient ainsi

$$\boxed{G_r = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e_r} = \frac{\partial U}{\partial r}} \quad (1.21)$$

Considérant ensuite un déplacement suivant $\overrightarrow{e_\theta}$, il vient

$$\boxed{G_\theta = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e_\theta} = \left(\frac{dU}{rd\theta}\right)_{r,\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}} \quad (1.22)$$

La dernière composante s'obtient par le même procédé :

$$\boxed{G_\phi = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e_\phi} = \left(\frac{dU}{r \sin \theta d\phi}\right)_{r,\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}} \quad (1.23)$$

Définissons ensuite les *coordonnées cylindriques* d'un point M . Ce sont, par rapport à un repère $Oxyz$ (figure 1.8), la distance $\rho = HM$ séparant le point M de l'axe des z (H est le projeté orthogonal de M sur cet axe), la cote z de M , et l'angle ϕ introduit précédemment. Ces coordonnées sont qualifiées de cylindriques car lorsqu'on fait varier z entre $-\infty$ et $+\infty$ et ϕ entre 0 et 2π tout en gardant ρ fixé, on engendre une surface cylindrique d'axe $z'z$ et de rayon ρ . Il s'agit donc ici d'un mode de repérage des points de l'espace au moyen de cylindres. Il est facile de voir que dans ce système de coordonnées on a

$$\overrightarrow{dM}_{z,\phi} = d\rho \overrightarrow{e_\rho} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{e_\rho} = \cos \phi \overrightarrow{i} + \sin \phi \overrightarrow{j} \quad (1.24)$$

Puis

$$\overrightarrow{dM}_{\rho,z} = \rho d\phi \overrightarrow{e}_\phi \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{e}_\phi = -\sin\phi \overrightarrow{i} + \cos\phi \overrightarrow{j} \quad (1.25)$$

et

$$\overrightarrow{dM}_{\rho,\phi} = dz \overrightarrow{k} \quad (1.26)$$

d'où

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dM}_{z,\phi} + \overrightarrow{dM}_{\rho,z} + \overrightarrow{dM}_{\rho,\phi} = d\rho \overrightarrow{e}_\rho + \rho d\phi \overrightarrow{e}_\phi + dz \overrightarrow{k} \quad (1.27)$$

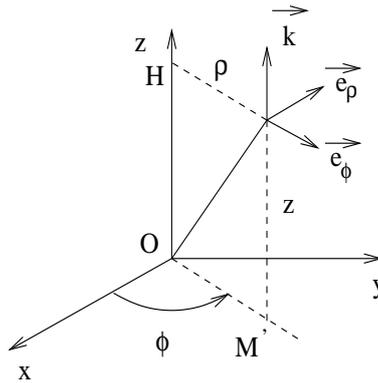


Figure 1.8

Suivant le même procédé que celui utilisé pour les coordonnées sphériques, on en déduit les composantes cylindriques du gradient d'une fonction $U(\rho, \phi, z)$:

$$\begin{aligned} G_\rho &= \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e}_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ G_\phi &= \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ G_z &= \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{k} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.4 Flux d'un champ de vecteurs, théorème de Green-Ostrogradsky

Soit un champ de vecteur \overrightarrow{A} et une surface Σ . Pour simplifier le propos, nous supposons que le champ \overrightarrow{A} est partout défini et dérivable. La surface Σ est supposée orientée et nous noterons $\overrightarrow{N}(M)$ la normale à Σ en chacun de ses points M . Construisons autour de M un élément de surface d'aire infinitésimale $d\Sigma(M)$. Nous noterons

$$\overrightarrow{d\Sigma}(M) = \overrightarrow{N}(M) d\Sigma(M) \quad (1.29)$$

le *vecteur surface infinitésimal* en M . Remarquons que si \overrightarrow{du} et \overrightarrow{dv} sont deux déplacements infinitésimaux construits sur Σ à partir de M , ce vecteur peut être obtenu au moyen du produit

vectorel $\vec{du} \wedge \vec{dv}$. On appelle *flux élémentaire* de \vec{A} à travers l'élément de surface $d\Sigma$ le produit scalaire

$$\phi = \vec{A}(M) \cdot \vec{d\Sigma}(M) \quad (1.30)$$

Le flux *total* de \vec{A} à travers Σ s'obtient par une double intégration du flux élémentaire sur toutes les valeurs possibles des deux coordonnées curvilignes u et v choisies pour définir la position du point M sur Σ :

$$\Phi_{\Sigma} = \int \int \vec{A}(M) \cdot \vec{d\Sigma}(M) \quad (1.31)$$

Considérons maintenant un *volume* \mathcal{V} . La surface *fermée* Σ qui le délimite sera orientée de telle sorte qu'en chacun de ses points sa normale pointe vers l'extérieur du volume. Pour cette raison, le flux de \vec{A} à travers cette surface est qualifié de *flux sortant*.

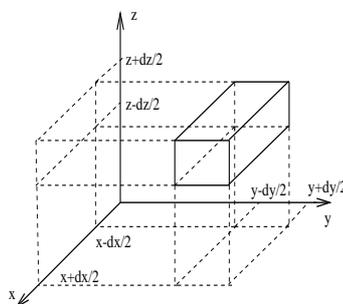


Figure 1.9

Il est évident que le volume \mathcal{V} peut être décomposé en une infinité de parallélépipèdes infinitésimaux tel celui représenté à la figure 1.9. Evaluons alors le flux sortant de \vec{A} à travers la surface (infinitésimale) de ce parallélépipède. Le flux à travers la face située à la cote $z + dz/2$ est

$$dxdy \vec{k} \cdot \vec{A}(x, y, z + dz/2) = A_z(x, y, z + dz/2) dxdy$$

tandis que celui à travers la face située à la cote $z - dz/2$ est

$$-dxdy \vec{k} \cdot \vec{A}(x, y, z - dz/2) = -A_z(x, y, z - dz/2) dxdy$$

L'addition de ces deux flux donne

$$dxdy [A_z(x, y, z + dz/2) - A_z(x, y, z - dz/2)]$$

Or, à des termes d'ordre supérieur près en dz , on a

$$A_z(x, y, z + dz/2) - A_z(x, y, z - dz/2) = dz \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z)$$

On aboutit ainsi à une première contribution au flux total égale à

$$dxdydz \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z)$$

Un calcul analogue relatif aux autres faces du cube donne

$$dxdydz \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z)$$

pour les faces parallèles au plan yOz , et

$$dxdydz \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z)$$

pour les faces parallèles au plan xOz . On trouve ainsi que le flux sortant à travers la surface du parallélépipède est

$$\phi = dxdydz \operatorname{div} \vec{A} \quad (1.32)$$

où $\operatorname{div} \vec{A}$ est le *scalaire*, appelé *divergence du vecteur* \vec{A} et qui, en coordonnées cartésiennes, a pour expression

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.33)$$

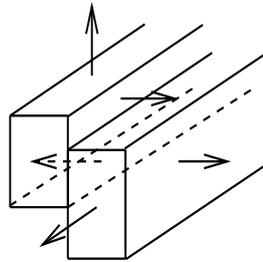


Figure 1.10

Il est facile de voir (figure 1.10) que si l'on additionne tous les flux sortants à travers les parallélépipèdes élémentaires du volume \mathcal{V} , ceux-ci se compensent (à cause des orientations inverses des normales d'un parallélépipède à un autre adjacent), à l'exception des flux sortants à travers la surface limite Σ . On aboutit ainsi au *théorème de Green-Ostrogradsky* :

le flux sortant à travers une surface fermée Σ du champ de vecteurs \vec{A} est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume \mathcal{V} délimité par Σ

soit

$$\int \int \vec{A}(M) \cdot \vec{d\Sigma}(M) = \int \int \int \operatorname{div} \vec{A} d\mathcal{V} \quad (1.34)$$

On notera bien que le flux calculé ici est un flux *sortant* à travers une *surface fermée*.

Ci-dessous nous donnons sans démonstration les expressions de la divergence dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

– coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.35)$$

– coordonnées sphériques

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (1.36)$$

1.5 Circulation d'un champ de vecteurs, théorème de Stokes

Rappelons tout d'abord que la *circulation* élémentaire d'un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ à partir d'un point M le long d'un arc de courbe γ de longueur infinitésimale $d\ell(M)$ et dont la tangente en M est $\vec{\tau}(M)$ est donnée par le produit scalaire

$$c_\gamma = \vec{A}(M) \cdot \vec{\tau}(M) d\ell(M)$$

La circulation de ce même champ de vecteurs le long d'un arc de courbe fini $\Gamma(P, Q)$ d'origine P et d'extrémité Q est *l'intégrale curviligne*

$$C(\Gamma, P, Q) = \int_\Gamma \vec{A}(M) \cdot \vec{\tau}(M) d\ell(M)$$

somme des circulations élémentaires du champ le long de la courbe considérée. Pour un champ de vecteurs quelconque donné et pour des points extrêmes P et Q donnés, sa valeur peut dépendre cruciallement de la forme de la courbe joignant P à Q .

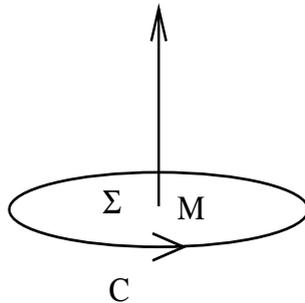


Figure 1.11

Considérons maintenant une surface Σ *non fermée*, s'appuyant sur un certain contour *fermé* C (figure 1.11). Il est clair que cette surface peut être obtenue par la juxtaposition d'un nombre infini de parallélogrammes d'aires infinitésimales, tel le rectangle représenté à la figure 1.12 se trouvant dans le plan tangent à Σ , au voisinage de l'un de ses points M et dont la normale sera supposée définir un axe \vec{Mz} . Evaluons alors la circulation de \vec{A} le long du contour fermé infinitésimal délimitant ce rectangle, dans le sens donné par la *règle du tire-bouchon*, conformément au sens de \vec{Mz} , c'est-à-dire dans le sens trigonométrique autour de \vec{Mz} . L'ensemble des deux circulations le long des côtés de longueur dx parallèles à l'axe des x donne

$$dx [A_x(x, y - dy/2, z) - A_x(x, y + dy/2, z)] \approx -dx dy \frac{\partial A_x}{\partial y}(M)$$

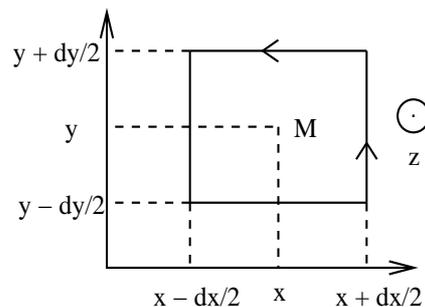


Figure 1.12

tandis que la circulation le long des deux côtés parallèles à l'axe des y donne

$$dy [A_y(x + dx/2, y, z) - A_y(x - dx/2, y, z)] \approx dx dy \frac{\partial A_y}{\partial x}(M)$$

soit, au total,

$$c = dx dy \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right]$$

Ce résultat, qui fait apparaître l'élément d'aire $dx dy$, montre que la circulation cherchée peut être réexprimée comme un flux, celui d'un champ de vecteurs dont la composante selon l'axe des z local vaut

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Ce champ de vecteurs est appelé *rotationnel* de \vec{A} et est noté $\vec{\text{rot}} \vec{A}$. Dans un système de coordonnées cartésiennes x, y, z , les trois composantes cartésiennes du rotationnel sont

$$\begin{aligned} [\vec{\text{rot}} \vec{A}]_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ [\vec{\text{rot}} \vec{A}]_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ [\vec{\text{rot}} \vec{A}]_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.37)$$

On peut donc écrire

$$c = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M) \cdot d\vec{\Sigma}(M) \quad (1.38)$$

En faisant le bilan de toutes les circulations le long des contours fermés infinitésimaux délimitant les surfaces infinitésimales dont la juxtaposition permet de constituer la surface Σ , on voit facilement qu'il se produit des compensations d'un contour à un contour adjacent (du fait des sens de parcours inverses sur la partie commune à ces deux contours), sauf sur le contour frontière \mathcal{C} . On en déduit le *théorème de Stokes* :

la circulation du champ de vecteurs \vec{A} le long d'un contour fermé \mathcal{C} est égal au flux de son rotationnel à travers une surface Σ quelconque s'appuyant sur le contour \mathcal{C}

soit

$$\int \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}(M) = \int \int \text{rot } \vec{A}(M) \cdot d\vec{\Sigma}(M) \quad (1.39)$$

où $d\vec{\ell}(M)$ est le vecteur déplacement élémentaire le long de \mathcal{C} . On notera bien la corrélation entre le sens de parcours de \mathcal{C} et l'orientation de la normale à Σ : le sens de parcours de \mathcal{C} étant choisi, l'orientation de cette normale doit être conforme à la règle du tire-bouchon.

Le flux du rotationnel à travers Σ est en fait indépendant de cette surface, pourvu que celle-ci s'appuie sur le même contour \mathcal{C} . On peut s'en convaincre de la façon suivante. Soit Σ' une autre surface s'appuyant sur \mathcal{C} , et orientée elle aussi selon la règle du tire-bouchon. Associons les deux surfaces Σ et Σ' et inversons l'orientation de Σ' . On obtient alors une surface fermée Σ'' délimitant un volume \mathcal{V} et dont la normale en tout point est sortante (figure 1.13). D'après le théorème de Green-Ostrograsky, le flux de $\text{rot } \vec{A}$ à travers Σ'' est

$$\int \int_{\Sigma''} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma}(M) = \int \int \int_{\mathcal{V}} \text{div } \text{rot } \vec{A} \, d\mathcal{V}$$

Mais il est facile de montrer que

$$\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0 \quad (1.40)$$

Par suite,

$$\int \int_{\Sigma''} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma}(M) = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{\Sigma'} = 0$$

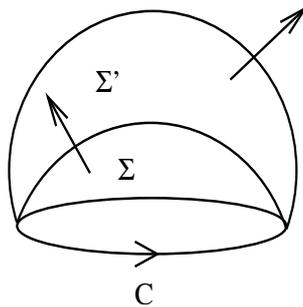


Figure 1.13

où Φ_{Σ} et $\Phi_{\Sigma'}$ sont les flux de $\text{rot } \vec{A}$ à travers Σ et Σ' respectivement, ces surfaces étant ici orientées toutes deux conformément à la règle du tire bouchon par rapport au sens de parcours de \mathcal{C} . D'où le résultat annoncé, qui revient à dire que le rotationnel d'un champ de vecteurs est

à flux conservatif. On admettra le résultat réciproque : si un champ de vecteurs \vec{B} est à flux conservatif, alors il existe au moins un champ de vecteurs \vec{A} tel que²

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (1.41)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \text{rot } \vec{A}} \quad (1.42)$$

Le théorème de Stokes permet aussi de retrouver le résultat suivant. Si un champ de vecteurs \vec{A} est tel que sa circulation le long de tout contour fermé est nulle, alors son rotationnel est nul. On sait aussi que dans une telle circonstance il existe au moins un champ scalaire $F(M)$ tel que

$$\vec{A} = \text{grad } F \quad (1.43)$$

On admettra alors que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs dérive d'un champ scalaire est que son rotationnel soit nul

$$\boxed{\text{rot } \vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \text{grad } F} \quad (1.44)$$

Ci-après nous donnons sans démonstration les composantes de $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques :

♠ coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ B_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (1.45)$$

♠ coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial \sin \theta A_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ B_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \\ B_\phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.46)$$

1.6 Quelques formules utiles

Soit \vec{U} un champ de vecteurs et F un champ scalaire. Exprimons tout d'abord

$$\text{rot} \left(F \vec{U} \right)$$

²Bien sûr, on admet ici que toutes les conditions de dérivabilité sont satisfaites.

en fonction des dérivées des champs impliqués dans cette opération. Puisque toutes les composantes jouent des rôles similaires, il suffit d'en considérer une particulière : le résultat sera tout aussi valable pour les autres. On a ainsi

$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \left(F \overrightarrow{U} \right) \right]_x = \frac{\partial F U_z}{\partial y} - \frac{\partial F U_y}{\partial z} = F \left[\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right] + U_z \frac{\partial F}{\partial y} - U_y \frac{\partial F}{\partial z}$$

c'est-à-dire

$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \left(F \overrightarrow{U} \right) \right]_x = F \left[\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U} \right]_x + \left[\overrightarrow{\text{grad}} F \wedge \overrightarrow{U} \right]_x$$

On obtient ainsi l'identité vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(F \overrightarrow{U} \right) = F \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U} + \overrightarrow{\text{grad}} F \wedge \overrightarrow{U} \quad (1.47)$$

Une autre formule utile est la suivante

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{U} - \Delta \overrightarrow{U} \quad (1.48)$$

où le symbole Δ représente un opérateur différentiel appelé *Laplacien*. Appliqué à un champ scalaire F , le Laplacien donne, en coordonnées cartésiennes

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (1.49)$$

Le symbole $\Delta \overrightarrow{U}$ doit donc être compris comme

$$\Delta \overrightarrow{U} = \overrightarrow{e}_x \Delta U_x + \overrightarrow{e}_y \Delta U_y + \overrightarrow{e}_z \Delta U_z$$

On vérifiera que pour tout champ scalaire on a

$$\Delta F = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} F$$

Exprimons la première composante de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U}$:

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U} \right]_x &= \frac{\partial [\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U}]_z}{\partial y} - \frac{\partial [\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{U}]_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right] \\ &= \left[\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{U} \right]_x - \Delta U_x \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation indiquée plus haut.

Ci-dessous sont données les expressions du Laplacien d'un champ scalaire en coordonnées cylindriques et sphériques.

♣ coordonnées cylindriques :

$$\Delta F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (1.50)$$

♣ coordonnées sphériques :

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad (1.51)$$

Voici enfin une autre formule que nous utiliserons en Magnétostatique :

$$\operatorname{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \operatorname{rot} \vec{U} \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \operatorname{rot} \vec{V} \quad (1.52)$$