

Chapitre 12

Ondes électromagnétiques dans les milieux

Nous étudierons ici uniquement le cas des milieux diélectriques et les milieux conducteurs, laissant de côté les milieux magnétiques dont l'analyse, plus complexe, dépasse le cadre du cours.

12.1 Les milieux diélectriques

Au chapitre 6, l'étude du phénomène de polarisation¹ des milieux diélectriques a été abordée dans le cas statique. Dans le présent chapitre, l'étude du phénomène en régime variable est abordé via un modèle dynamique classique.

12.1.1 Le modèle de Lorentz

Historiquement, c'est H.A. Lorentz qui le premier a associé les propriétés microscopiques de la matière à la théorie électromagnétique². On sait maintenant que la recherche d'une description aussi exacte que possible des phénomènes à l'échelle microscopique devrait passer par l'utilisation de la Mécanique Quantique, qui en constitue le cadre théorique incontournable. Cependant, dans une première approche, on peut se satisfaire d'une description ne faisant appel qu'à la Mécanique Classique, car il apparaît qu'elle conduit à des résultats très similaires à ceux fournis par une théorie quantique.

Le modèle classique de Lorentz est celui de *l'électron élastiquement lié*, déjà décrit au §11.6.3. Nous en rappelons ici les ingrédients.

Lorsqu'une onde électromagnétique tombe sur la matière, son champ électromagnétique exerce sur chaque porteur de charge q la force de Lorentz

$$\vec{F}_{Lo} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où \vec{v} est la vitesse instantanée du porteur. S'il s'agit d'une onde monochromatique, le porteur va effectuer, sous l'effet de cette force, un mouvement d'oscillations forcées qui va donner lieu à l'équivalent d'un courant électrique variable, ayant un vecteur densité de courant égal à $q \vec{v}$. Celui-ci doit être considéré comme un courant source pouvant produire à son tour des ondes électromagnétiques secondaires. Ces ondes interfèrent entre elles et avec l'onde incidente pour

¹Ne pas confondre ce phénomène avec la polarisation d'une onde électromagnétique !

²H.A. Lorentz, "Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Leiden, E.J. Brill (1895); "The theory of Electrons and its application to the phenomena of Light and radiant Heat", Leipzig, 1909.

donner une onde électromagnétique résultante dont les propriétés caractérisent la réaction du milieu à cette excitation électromagnétique.

On pourra ici négliger les déplacements des noyaux, qui sont bien plus lourds que les électrons. Nous supposons que dans le cortège électronique de chaque atome, *un seul électron* est capable de rayonner des ondes secondaires. Un tel électron est appelé *électron optique*. Nous admettons aussi que le processus même d'émission de chaque électron optique est indépendant de celui des autres (ils ne se "gênent" pas!). Enfin, la vitesse d'un électron optique est toujours très petite devant c , ce qui permet de négliger la contribution du champ magnétique dans la force de Lorentz.

L'électron est maintenu dans l'atome par une force de rappel $-K \vec{r}$, avec $K > 0$, dont l'objectif est de le ramener dans la position qu'il occuperait à l'équilibre. Ici, \vec{r} est le vecteur déplacement de l'électron par rapport à cette position d'équilibre. Le coefficient de couplage K et la masse m de l'électron déterminent la fréquence propre des oscillations libres de l'électron via la relation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Pour simplifier, nous admettons que tous les atomes ont une seule pulsation propre ω_0 , la même pour tous.

Par ailleurs, il existe diverses causes physiques qui font que les oscillations des électrons optiques sont inévitablement amorties. L'amortissement peut être simplement dû au fait que l'électron perd de l'énergie par rayonnement. Une autre cause d'amortissement est l'agitation thermique dans le milieu. Nous admettons que l'on peut rendre compte globalement de ces effets d'amortissement en introduisant une force de freinage du type $-f \vec{v}$, opposée à la vitesse ($f > 0$).

Considérant l'action d'une onde monochromatique de pulsation ω , nous avons vu que l'application de la relation fondamentale de la Dynamique Classique à un tel électron optique conduit, en notation complexe, à la solution

$$\vec{r} = \frac{q \vec{E}}{K - m\omega^2 + j\omega f} \quad (12.1)$$

Il faut prendre garde au fait qu'ici, \vec{E} est le champ électrique *local* agissant sur l'électron optique. A l'échelle atomique, on peut le supposer indépendant des coordonnées de l'électron. Ceci est certainement vrai pour les ondes hertziennes ou optiques, qui ont des longueurs d'ondes supérieures à 4000 Å, alors que la taille d'un atome est de l'ordre de 1 Å. On en déduit le moment dipolaire induit dans l'atome

$$\vec{p} = q \vec{r} = \frac{q^2 \vec{E}}{K - m\omega^2 + j\omega f} \quad (12.2)$$

Soit $N(M)$ le nombre d'atomes par unité de volume en un point M du milieu. Nous admettons qu'à une échelle *mésoscopique*³, le moment dipolaire induit, par unité de volume, en ce point, est donné par

$$\vec{\mathcal{P}}(M, t) = N(M) \vec{p} = \frac{q^2 N(M) \vec{E}(M, t)}{K - m\omega^2 + j\omega f}, \quad \text{avec} \quad \vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(M) e^{j\omega t} \quad (12.3)$$

Il s'ensuit également un vecteur densité volumique de courant égal à

$$\vec{J}(M, t) = Nq \vec{v} = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} = \frac{j\omega q^2 N \vec{E}}{K - m\omega^2 + j\omega f} \quad (12.4)$$

³Qui est aussi celle du champ macroscopique local.

Nous poserons

$$\chi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q^2 N}{K - m\omega^2 + j\omega f} \quad (12.5)$$

Ce paramètre, qui est *sans dimension*⁴, n'est autre que la *susceptibilité diélectrique* du milieu (Voir paragraphe 6.2.3). On obtient ainsi

$$\vec{\mathcal{P}}(M, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(M, t), \quad \vec{J}(M, t) = j\omega \epsilon_0 \chi \vec{E}(M, t) \quad (12.6)$$

12.1.2 Equations de propagation du champ

Etant source de nouvelles ondes, le vecteur densité volumique de courant ainsi calculé doit être introduit dans les équations de Maxwell. Ce seront celles d'un champ se propageant dans le vide, mais en présence de sources. Si l'on considère un milieu diélectrique *homogène*, celui-ci étant globalement neutre déjà à l'échelle mésoscopique, il n'y a pas lieu de tenir compte d'une densité volumique de charges, ce qui revient à poser $\rho = 0$. On obtient alors, pour un régime harmonique,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J} + j\omega \epsilon_0 \vec{E}) = j\omega \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \end{aligned} \quad (12.7)$$

L'effet du milieu sur la propagation d'une onde revient donc au simple remplacement de la permittivité du vide ϵ_0 par

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (12.8)$$

grandeur appelée *permittivité du milieu* (Voir chapitre 6). Bien entendu, ce résultat provient de la relation de proportionnalité (12.3), impliquant la susceptibilité χ qui caractérise la réaction du milieu à l'excitation électromagnétique. C'est ici une grandeur de nature *scalaire*. Si de plus, comme nous l'avons supposé précédemment, elle ne dépend pas de la position du point d'observation (notamment si $N(M) = \text{constante}$), alors le milieu est dit *linéaire, homogène et isotrope* (milieu l.h.i.). Certains milieux, tout en étant linéaires, ne sont pas isotropes. Dans ce cas, la relation entre $\vec{\mathcal{P}}$ et \vec{E} est de nature matricielle : χ devient une matrice 3x3. Ces milieux sont dits *anisotropes*, $\vec{\mathcal{P}}$ et \vec{E} ne sont plus colinéaires. Le nombre N d'oscillateurs par unité de volume intervient dans l'expression de χ . Dans les milieux *inhomogènes*, cette densité varie de point en point. En Optique, cet effet provoque la courbure des rayons lumineux. Enfin, la Thermodynamique peut entrer en jeu dans la mesure où N est généralement fonction de la température T du milieu et de la pression P qui lui est appliquée.

On définit la *permittivité relative* par

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi \quad (12.9)$$

L'équation de propagation du champ électrique s'écrit maintenant

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (12.10)$$

⁴A vérifier.

où l'on a posé

$$n^2 = 1 + \chi = \epsilon_r \quad (12.11)$$

Formellement, si n^2 était réel, cette équation conduirait à la conclusion que, dans le milieu, la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique n'est plus égale à c mais à

$$c_{\text{milieu}} = \frac{c}{n} \quad (12.12)$$

et à interpréter n comme *l'indice de réfraction* du milieu⁵. La relation (12.11) liant l'indice de réfraction à la permittivité du milieu fut un autre succès de la théorie de Maxwell.

Les fréquences propres électroniques sont plutôt dans le domaine de l'ultra-violet. Pour des ondes hertziennes ou même dans le domaine du visible, on a $\omega \ll \omega_0$. Dans ce domaine, l'expression de l'indice est donnée par sa limite "statique"

$$n = \sqrt{1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}} \quad (12.13)$$

qui est réelle, supérieure à 1, et conduit à une vitesse de propagation *inférieure* à c . Ceci fait que, dans un milieu diélectrique, une particule chargée peut se propager plus vite que la lumière *dans ce milieu*, tout en ayant une vitesse inférieure à la limite absolue c , vitesse de propagation de la lumière *dans le vide*. Lorsqu'il se produit, le phénomène se manifeste par une émission de lumière ayant des propriétés bien spécifiques⁶. Il a été observé en 1910 par Marie Curie lors d'un bombardement d'eau par des rayons γ mais fut alors attribué à la fluorescence de solutés dans l'eau. C'est en 1934 que S.I. Vavilov et P. A. Tcherenkov⁷ ont montré expérimentalement qu'il s'agissait d'un tout autre phénomène, qui porte le nom *d'effet Tcherenkov*, dont l'interprétation correcte fut donnée en 1937 par Il'ja Frank et Igor Tamm⁸.

12.1.3 Autres causes possibles de polarisation des milieux

Le phénomène que nous venons de décrire à l'aide d'un modèle simplifié concerne ce qu'on appelle la *polarisation électronique* qui résulte de la déformation des nuages électroniques sous l'action d'un champ électrique. Selon le milieu considéré, il peut exister d'autres causes d'apparition de moments dipolaires sous une excitation électrique (Voir Chapitre 6). A chacun de ces phénomènes est attachée une susceptibilité. La susceptibilité totale du milieu doit prendre en compte les contributions de toutes les causes de polarisation.

12.2 Phénomènes de dispersion et d'absorption

12.2.1 Phénomènes de résonance

Les phénomènes de polarisation sont encore compliqués par le fait que, comme le laisse prévoir le modèle de Lorentz, la susceptibilité électrique dépend de la fréquence de l'onde excitatrice et peut même devenir complexe.

⁵Cette appellation sera expliquée plus tard.

⁶C'est un effet similaire à une onde de choc provoquant un flash lumineux. Il donne la couleur bleue à l'eau entourant le cœur d'un réacteur nucléaire.

⁷P. A. Tcherenkov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 2 (1934) p.451; S. I. Vavilov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 2 (1934) p.457.

⁸Qui partagèrent avec Tcherenkov le prix Nobel de Physique de 1958 pour cette découverte.

Expérimentalement, on observe d'ailleurs que pour certaines fréquences, le milieu réémet de façon intense un rayonnement de même fréquence que celle de l'onde incidente. L'intensité de ce rayonnement décroît rapidement dès que la fréquence s'écarte de ces valeurs. Il s'agit là d'un phénomène de *résonance*, qui peut s'expliquer dans le cadre de la Mécanique Quantique.

En effet, d'une part à une onde de fréquence ν est associé un photon d'énergie $h\nu$, h étant la constante de Planck. D'autre part, les atomes (ou molécules) du milieu ne peuvent se trouver que dans des états d'énergies bien définies E_k (quantification de l'énergie). Si l'énergie du photon devient égale à un écart d'énergie entre deux états possibles

$$h\nu = E_\ell - E_k$$

les atomes initialement dans l'état E_k peuvent, en absorbant ce photon, transiter vers l'état d'énergie supérieure E_ℓ . On observe alors une forte absorption de l'onde par le milieu. Cependant, par des processus d'émission spontanée ou induite, les atomes excités vont réémettre des photons de même énergie $E_\ell - E_k$ en revenant dans leur état initial, le plus souvent l'état fondamental. Ce nouveau rayonnement possède d'ailleurs toutes les caractéristiques d'un rayonnement dipolaire.

La Mécanique Quantique fournit une expression de la susceptibilité χ tout à fait similaire à celle du modèle de Lorentz. L'importante modification est qu'elle prend en compte *toutes* les fréquences de résonance possibles, en les identifiant à

$$\nu_k = \frac{E_k - E_0}{h}$$

E_0 étant l'énergie de l'état fondamental des constituants émetteurs. On obtient ainsi pour χ une expression de la forme

$$\chi = \sum_k \frac{A_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + j\omega\gamma_k}, \quad \text{avec } A_k > 0, \quad \gamma_k > 0 \quad (12.14)$$

A cause des facteurs d'amortissement γ_k , la susceptibilité est généralement complexe

$$\chi = \chi' - j\chi'' \quad , \quad \text{avec } \chi'' = -\text{Im } \chi = \omega \sum_k \frac{A_k \gamma_k}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_k^2} > 0 \quad (12.15)$$

et sa partie imaginaire est *négative*. Il en résulte que si l'on ne peut négliger les termes d'amortissement, l'indice n est lui aussi complexe, avec une partie imaginaire *négative*

$$n = n' - jn'' \quad , \quad \text{avec } n'' > 0 \quad (12.16)$$

Le vecteur d'onde

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad (12.17)$$

est lui aussi complexe

$$k = k' - jk'' \quad , \quad \text{avec } k'' > 0 \quad (12.18)$$

Le facteur de propagation de l'onde prend alors la forme

$$e^{j(\omega t - kz)} = e^{j(\omega t - k'z)} e^{-k''z} \quad (12.19)$$

où l'on voit apparaître un facteur décroissant $e^{-k''z}$ qui traduit que l'amplitude de l'onde diminue à mesure que l'onde pénètre dans le milieu. L'existence d'une partie imaginaire négative du vecteur d'onde rend donc compte de l'absorption de l'onde par le milieu.

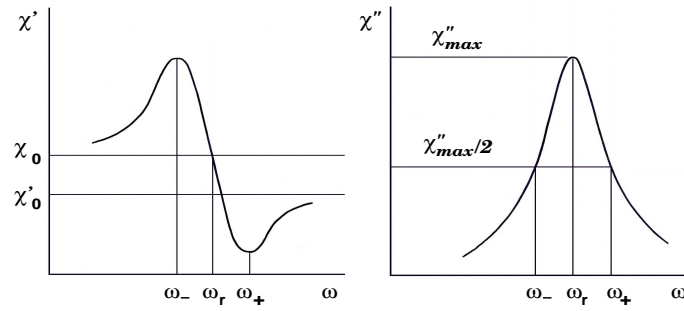


Figure 12.1 : Variations typiques de χ' et χ'' au voisinage d'une résonance

Cette partie imaginaire joue un rôle important au voisinage d'une fréquence de résonance et ne peut alors en aucun cas être négligée. Lorsque ω est proche d'une pulsation de résonance ω_r , seul le terme relatif à celle-ci dans (12.14) varie fortement. En admettant que pour $k \neq r$ on puisse alors négliger γ_k , la susceptibilité (12.14) prend dans ce voisinage la forme approchée

$$\chi = \chi_0 + \frac{A_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\omega_r\gamma_r} \quad , \quad \text{avec} \quad \chi_0 \simeq \sum_{k \neq r} \frac{A_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (12.20)$$

d'où

$$\chi' = \chi_0 + \frac{A_r(\omega_r^2 - \omega^2)}{D_r} \quad , \quad \chi'' = \frac{A_r\gamma_r\omega}{D_r} \quad , \quad \text{avec} \quad D_r = (\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_r^2\gamma_r^2 \quad (12.21)$$

Les variations typiques de χ' et χ'' à proximité de ω_r sont qualitativement représentées à la figure (figure 12.1), où sont indiquées les pulsations $\omega_{\pm} = \omega_r \pm \gamma_r/2$ correspondant, respectivement, aux extrêmes $\chi'_{\pm} = \chi_0 \pm \frac{A_r}{2\omega_r\gamma_r}$ de χ' de part et d'autre de la valeur χ_0 , et définissant la largeur à mi-hauteur de la courbe en cloche donnant χ'' ($\chi''_{\max} \simeq \frac{A_r}{2\omega_r\gamma_r}$).

On obtient des variations similaires pour la partie réelle n' , *indice de réfraction* et la partie imaginaire n'' *coefficient d'extinction* de l'indice n ⁹. La figure 12.2 donne des résultats expérimentaux sur la dispersion de réfraction et d'absorption i) de la vapeur de rubidium (image de gauche) ii) de l'aniline et de la cyanine (image de droite).

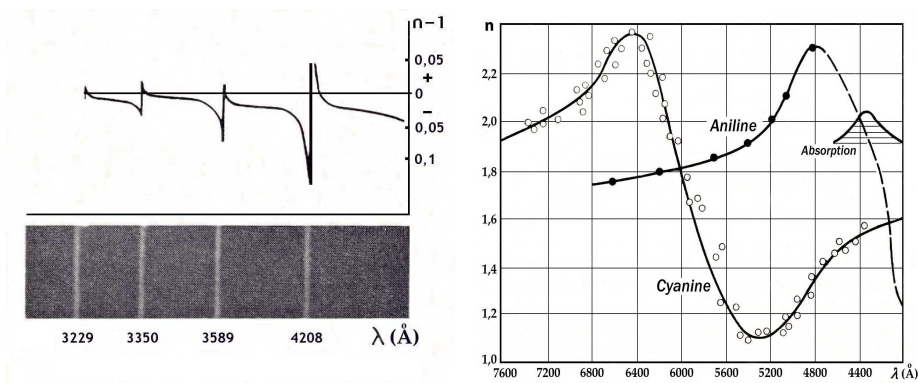


Figure 12.2

⁹Ces grandeurs sont aussi appelées *constantes optiques* du milieu.

En dehors des résonances, la partie imaginaire de χ peut être négligée. L'indice devient alors *réel*

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{A_k}{\omega_k^2 - \omega^2} > 0 \quad (12.22)$$

et l'on dit que l'on se trouve dans une zone de *transparence* du milieu. Un onde s'y propage sans absorption notable. C'est ce phénomène de transparence qui justifie l'appellation de *diélectriques* de certains milieux, qui signifie qu'ils permettent à un champ électrique de les traverser. Dans ce domaine, on a

$$\frac{dn^2}{d(\omega^2)} = \sum_k \frac{A_k}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2} > 0 \quad (12.23)$$

L'indice n croît avec la fréquence, ou, ce qui revient au même, décroît avec la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ qui est celle de l'onde si elle se propageait dans le vide :

$$\frac{dn}{d\lambda_0} < 0 \quad (12.24)$$

On peut dire aussi que dans ce cas, l'indice augmente quand la longueur d'onde diminue. Ceci est caractéristique de ce qu'il est convenu d'appeler la *dispersion normale* du milieu.

L'expression de l'indice est souvent écrite en fonction de λ_0 . On obtient ainsi

$$n^2 = B + \sum_k \frac{C_k}{\lambda_0^2 - \lambda_k^2} \quad (12.25)$$

c'est-à-dire, une formule similaire à celle qui fut établie par Sellmeier, mais sur des bases expérimentales. Supposons que la substance étudiée n'ait de fréquences propres que dans l'ultra-violet (ce qui correspond à des fréquences propres électroniques). Dans le domaine du visible on aura donc $\lambda_0 \gg \lambda_k$ et

$$\frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_k^2} \approx \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\lambda_k^2}{\lambda_0^4}$$

d'où la formule approchée

$$n^2 \simeq A_0 + \frac{A_2}{\lambda_0^2} + \frac{A_4}{\lambda_0^4} \quad (12.26)$$

qui fut proposée pour la première fois par Cauchy pour décrire la dispersion de certains milieux.

Si, pour le milieu étudié, il existe des fréquences propres suffisamment loin dans l'infra-rouge (cas de fréquences ioniques ou moléculaires), alors, dans le domaine optique, $\lambda_0 \ll \lambda_k$ et les termes correspondants dans l'expression de n^2 seront approximés comme

$$\frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_k^2} \approx -\frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_k^4}$$

On aboutit alors à la formule de Briot

$$n^2 \simeq A_0 - A'\lambda_0^2 + \frac{A_2}{\lambda_0^2} + \frac{A_4}{\lambda_0^4} \quad (12.27)$$

Avec des coefficients appropriés, une telle formule donne une très bonne description de l'indice de l'eau ou du sulfure de carbone. Enfin, citons la formule relative à l'Hydrogène (toujours pour le domaine optique)

$$n^2 = 1 + a + \frac{b}{\lambda_0^2}, \quad \text{avec } a = 2,721 \cdot 10^{-4}, \quad b = 2,11 \cdot 10^{-18}, \quad \lambda_0 \text{ en mètre}$$

Comme le montrent les figures 12.2, l'indice de réfraction est une fonction *décroissante* de la fréquence au voisinage d'une fréquence de résonance, ou encore une fonction *croissante* de la longueur d'onde. Ce comportement est caractéristique de ce qu'il est convenu d'appeler la *dispersion anormale*.

12.2.2 Dispersion des ondes, vitesse de phase, vitesse de groupe

Justifions maintenant l'appellation "dispersion" pour désigner la variation de l'indice de réfraction avec la fréquence de l'onde et du fait que la relation .

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) = k(\omega) \tag{12.28}$$

s'appelle *relation de dispersion*. Nous supposons ici que l'indice est réel.

Envisageons un signal quelconque $F(t, z)$ se propageant parallèlement à l'axe z/z , d'abord dans le vide, puis dans un milieu l.h.i. Dans le vide, ce signal se propage à la vitesse c et est de la forme

$$F(t, z) = \varphi\left(t - \frac{z}{c}\right) \tag{12.29}$$

Il peut être représenté par l'intégrale de Fourier

$$F(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} d\omega \tag{12.30}$$

où l'on voit que les composantes sinusoidales du signal se propagent *toutes* à la même vitesse c . Cela signifie qu'au cours de la propagation, ces composantes sinusoidales restent *groupées* et que le signal F se propage *sans déformation*.

Lorsque le signal se propage dans un milieu l.h.i d'indice n , une onde de pulsation ω ne se propagera plus à la vitesse c , mais à la vitesse c/n . Cette vitesse n'est la même pour toutes les composantes sinusoidales du signal que si et seulement si n est indépendant de la fréquence. Si c'est le cas, le signal se propage alors dans le milieu *sans déformation* à la vitesse c/n , et l'on a

$$F_{\text{milieu}}(t, z) = \varphi_m\left(t - \frac{zn}{c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_m(\omega) e^{j\omega\left(t - \frac{zn}{c}\right)} d\omega \tag{12.31}$$

Par contre, si n dépend de ω , les diverses ondes sinusoidales composant le signal au départ ne vont plus se propager à la même vitesse et ne restent donc plus groupées : elles vont se *disperser*. On assiste alors à ce qu'on appelle un *étalement du paquet d'ondes* et le signal va se déformer petit à petit dans le milieu. D'où la dénomination de *dispersion*.

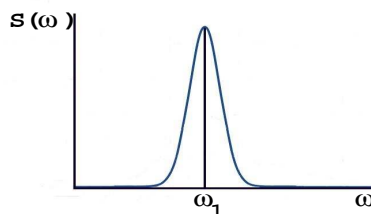


Figure 12.3

On conçoit aisément que cette dispersion sera d'autant moins rapide que les vitesses des diverses composantes sinusoïdales du signal sont toutes très voisines d'une vitesse moyenne, c'est-à-dire, si la répartition des pulsations dans le signal est concentrée au voisinage d'une pulsation moyenne ω_1 . Cette répartition est déterminée par la fonction $S(\omega) = |\mathcal{F}(\omega)|$, appelée aussi *spectre* (ici en pulsations) du signal¹⁰. Supposons que la courbe des variations de ce spectre soit telle que celle de la figure 12.3 qui présente un maximum très prononcé pour $\omega = \omega_1$. Dans l'intégrale de Fourier, seules contribueront de façon notable les ondes dont la pulsation est voisine de ω_1 . Ecrivons leurs amplitudes sous la forme

$$\mathcal{F}_m(\omega) e^{j(\omega t - z k(\omega))} = e^{j(\omega_1 t - z k(\omega_1))} \mathcal{F}_m(\omega) e^{j(t(\omega - \omega_1) - z(k(\omega) - k(\omega_1)))}$$

et effectuons l'approximation

$$k(\omega) \simeq k_1 + (\omega - \omega_1) \frac{dk}{d\omega}(\omega_1) \quad , \quad \text{avec} \quad k_1 = k(\omega_1)$$

Dans cette approximation, l'amplitude du signal complet prendra alors la forme

$$F_m(t, z) \simeq e^{j(\omega_1 t - z k_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_m(\Omega) e^{j\Omega(t - z \frac{dk}{d\omega}(\omega_1))} d\Omega \quad (12.32)$$

qui se présente comme le produit

♠ d'un facteur de phase

$$e^{j(\omega_1 t - z k_1)} \quad (12.33)$$

♠ et d'une amplitude

$$\mathcal{A}(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_m(\Omega) e^{j\Omega(t - z \frac{dk}{d\omega}(\omega_1))} d\Omega = \mathcal{A}(t - z \frac{dk}{d\omega}(\omega_1)) \quad (12.34)$$

Le premier facteur (12.33) se propage à la vitesse

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega_1}{k_1}} \quad (12.35)$$

appelée *vitesse de phase* du signal, tandis que le second facteur se propage quant à lui à la vitesse

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}(\omega_1)} = \frac{d\omega}{dk}(k_1)} \quad (12.36)$$

appelée *vitesse de groupe* du signal. Cette dernière dénomination vient de ce que, d'une façon générale, un signal ne se détecte qu'au travers de l'énergie qu'il transporte, et celle-ci est proportionnelle au *carré du module* de ce signal :

$$E \propto |F_m(t, z)|^2 = |\mathcal{A}(t, z)|^2$$

L'énergie, qui représente le "groupe d'ondes", ne se propage donc pas à la vitesse de phase mais plutôt à la vitesse v_g .

On voit ainsi que si les ondes composant le signal forment un groupe très concentré au voisinage d'une pulsation moyenne ω_1 , ces ondes restent encore bien groupées dans le milieu dispersif en se

¹⁰En général, on entend plutôt par *spectre* d'un signal, la répartition en fréquences dans le signal.

propageant quasiment toutes à la même vitesse v_g qui représente donc la vitesse de propagation du paquet d'ondes et de son énergie.

Si, pour un milieu donné, les pulsations de résonances ω_i sont dans la partie basse du spectre électromagnétique, pour les ondes de pulsations $\omega \gg \omega_i$, on a

$$n^2 \simeq 1 - \frac{K}{\omega^2} \quad , \quad \text{avec} \quad K = \sum_i A_i \quad (12.37)$$

L'indice, alors réel, devient légèrement inférieur à 1. Pour ces hautes fréquences, la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{c}{n} > c \quad (12.38)$$

est donc *supérieure* à c ! Cependant, cette vitesse ne représente pas la vitesse de propagation d'un signal réel, associée à un transport d'énergie. Calculons la vitesse de groupe. En dérivant (12.37), on a

$$2n \frac{dn}{d\omega} = 2 \frac{K}{\omega^3} \quad , \quad \text{soit} \quad n \omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{K}{\omega^2}$$

puis $v_g^{-1} = \frac{dk}{d\omega}$ donne, avec $k = \omega n/c$,

$$c \frac{dk}{d\omega} = n + \omega \frac{dn}{d\omega} \quad , \quad \text{soit} \quad n c \frac{dk}{d\omega} = n c v_g^{-1} = n^2 + n \omega \frac{dn}{d\omega} = n^2 + \frac{K}{\omega^2} = 1$$

et par suite

$$v_g = n c < 1 \quad (12.39)$$

La vitesse de propagation réelle d'un signal à ces pulsations est donc bien inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans un contexte différent, le type de variation de l'indice donné par (12.37) se rencontre lorsqu'on étudie la propagation d'ondes radioélectriques dans l'ionosphère. L'ionosphère, qu'on appelle aussi *plasma*, est un gaz totalement ionisé par les rayonnements solaire et cosmique, au sein duquel les électrons sont quasiment libres. On trouve alors la relation

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (12.40)$$

où $-e$ et m_e sont, respectivement, la charge et la masse de l'électron et N le nombre d'électrons par unité de volume. En prenant $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, on trouve $\omega_p = 5,7 \cdot 10^7 \text{ rd/s}$ ($\nu_p = \omega_p/(2\pi) \simeq 10^7 \text{ Hz}$). Aux basses fréquences, $\nu < \nu_p$, l'indice devient imaginaire : l'ionosphère est opaque pour des ondes de basses fréquences. L'ionosphère est transparent pour les ondes de fréquences $\nu > \nu_p$, c'est-à-dire pour les ondes courtes et ultra-courtes. La limite ν_p entre ces deux régimes est appelée *fréquence de plasma*. Elle définit, d'un côté, la limite supérieure du domaine d'utilisation des ondes en radio-communication terrestre, mais aussi, de l'autre côté, la limite inférieure du domaine d'utilisation des ondes en communication et radio-détection extra-terrestre.

On peut établir comme suit une relation générale entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase. On a

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega n}{c} \right) = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{v_\varphi} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)$$

et comme

$$\frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} = -\frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0}$$

il vient

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 - \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0}} \quad (12.41)$$

Cette formule, due à Rayleigh, montre que, dans les zones de dispersion normale ($\frac{dn}{d\lambda_0} < 0$), la vitesse de groupe est toujours inférieure à la vitesse de phase. Lorsque $\frac{dn}{d\lambda_0} > 0$ la même formule donnerait une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de phase. Cependant, cette situation correspond à une dispersion anormale, au voisinage d'une fréquence où l'absorption vient compliquer l'analyse. La vitesse réelle du signal diffère alors de la vitesse de groupe donnée par la formule (12.41).

12.3 Les milieux conducteurs

Nous ne considérerons ici que des milieux conducteurs dits *ohmiques*, vérifiant strictement la loi d'Ohm locale

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (12.42)$$

reliant le vecteur densité volumique de courant \vec{J} au champ électrique \vec{E} provoquant le déplacement des charges, par une relation linéaire faisant intervenir la *conductivité électrique* σ du milieu, grandeur que nous supposons ici indépendante des coordonnées. L'expérience montre que, pour les métaux, la loi d'Ohm avec une conductivité constante reste valable telle quelle dans tout le domaine des fréquences moyennes électrotechniques et radioélectriques.

12.3.1 Densité de charges dans un milieu conducteur

Combinant l'équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et la loi d'Ohm (12.42), on obtient l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad (12.43)$$

dont l'intégration conduit à l'expression

$$\rho(M, t) = \rho_0(M) e^{-\frac{t}{\tau_0}}, \text{ avec } \tau_0 = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad (12.44)$$

En considérant le cas du cuivre pour lequel $\sigma \simeq 10^8$ S/m, on obtient $\tau_0 \simeq 10^{-19}$ s!! Pour les conducteurs usuels, la constante de temps τ_0 est donc extrêmement faible. On en déduit que s'il existe initialement une répartition volumique de charges à l'intérieur d'un conducteur, celle-ci ne peut se maintenir et disparaît très rapidement : il ne peut y avoir de charges non compensées dans le volume d'un échantillon conducteur. S'il en existe, des charges en surplus ne peuvent donc se trouver qu'en surface. C'est pourquoi, en régime permanent établi, nous poserons

$$\rho(M, t) = 0 \quad (12.45)$$

12.3.2 Propagation d'ondes dans un milieu conducteur

Le champ électromagnétique d'une onde sinusoïdale de pulsation ω dans un milieu conducteur doit vérifier les équations

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \vec{B}, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0(\sigma \vec{E} + j\omega\epsilon_0 \vec{E}) = j\omega\epsilon_0\mu_0\epsilon_r \vec{E} \end{aligned} \quad (12.46)$$

où, par analogie avec ce qui a été fait pour les milieux diélectriques, nous avons posé et poserons

$$\epsilon_r = n^2 = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \quad (12.47)$$

On a $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = 2 \cdot 10^{10} \frac{\sigma}{\nu}$ S.I. Comme pour les métaux $\sigma \simeq 10^8$ S/m, on obtient finalement

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{18}}{\nu_{\text{Hertz}}} \quad (12.48)$$

On en conclut que même si l'on appliquait le modèle pour des ondes infra-rouges de fréquence $\simeq 10^{13}$ Hz, le rapport (12.48) serait encore de l'ordre de 10^5 , c'est-à-dire très grand devant 1. Pour les fréquences radioélectriques, il est donc justifié de faire l'approximation qui consiste finalement à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, soit à prendre

$$n^2 \simeq -j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (12.49)$$

En choisissant le signe adéquat vis-à-vis de l'absorption, on obtient ainsi l'expression suivante d'un équivalent de l'indice

$$n \simeq (1 - j) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} \quad (12.50)$$

Dans un tel milieu, le vecteur d'onde prend la forme

$$k = \frac{\omega n}{c} = \frac{1 - j}{\delta} \quad (12.51)$$

où l'on a posé

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0}} \quad (12.52)$$

En considérant une propagation parallèlement à $z'z$ et que le plan xOy ($z = 0$) représente la surface du conducteur, l'amplitude de l'onde étant proportionnelle au facteur exponentiel

$$e^{j(\omega t - kz)} = e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})} e^{-\frac{z}{\delta}}$$

L'amplitude subit donc une décroissance exponentielle à mesure qu'elle pénètre dans le milieu, décroissance caractérisée par le paramètre δ . A $z = 3\delta$, l'amplitude a diminué du facteur $e^{-3} = 5 \cdot 10^{-2}$. Pour $\sigma \simeq 10^8$ S/m, on a

$$\delta(\text{mètre}) = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\nu_{\text{Hertz}}}}$$

On obtient ainsi

- ◇ $\delta = 7$ mm pour $\nu = 50$ Hz ;
- ◇ $\delta = 5 \mu$ pour $\nu = 10^8$ Hz (FM) ;
- ◇ $\delta = 160 \text{ \AA}$ pour $\nu = 10^{13}$ Hz (IR) ;

Le paramètre δ est d'autant plus faible que σ est grand et que ν est grand. L'onde ne pénètre pas au-delà d'une distance de l'ordre de δ . C'est ce qu'on appelle *l'effet de peau* et δ est appelé *épaisseur de peau*. A haute fréquence, (mais pas au-delà de l'infra-rouge) les courants se concentrent à la surface des conducteurs. C'est pourquoi, pour des raisons économiques, on utilise plutôt des conducteurs creux pour transporter des courants de haute fréquence.

Cette situation est à comparer à celle des diélectriques. Pour ces derniers, dans leurs régions de transparence, une onde peut se propager sans absorption notable s'il ne sont pas trop épais, alors que pour des conducteurs ohmiques, l'onde est fatalement absorbée. C'est ce qui justifie leur dénomination de diélectriques¹¹

♠ La limite $\sigma \rightarrow \infty$ définit le modèle du conducteur parfait, pour lequel le champ électromagnétique est nul dans la masse du matériau. Les courants qui y circulent sont alors uniquement *surfiques*.

12.3.3 Comparaison avec un modèle microscopique

Posant $n = n' - jn''$, où n' représente un *indice de réfraction* et n'' un *coefficient d'extinction*, la relation (12.47) donne

$$n'^2 - n''^2 = 1 \quad , \quad 2n'n'' = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad \text{soit}$$

$$n'^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{1+u} + 1] \quad , \quad n''^2 = \frac{1}{2} [\sqrt{1+u} - 1] \quad \text{avec} \quad u = \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^2$$

Si l'on prend pour σ la conductivité *statique*, c'est-à-dire, celle mesurée à l'aide de champs constants ou lentement variables dans le temps, ces relations ne sont plus bien vérifiées dans le domaine optique. On peut néanmoins mieux s'accorder avec les résultats expérimentaux si l'on tient compte de la structure microscopique des milieux.

Nous reprendrons ici le schéma élémentaire du paragraphe 4.2 pour décrire le mouvement d'un électron "moyen". Posons $\tau = m/f$. Ce paramètre est homogène à un temps et joue le rôle d'un *temps de relaxation*, ou *temps de réponse* et que l'on peut estimer être de l'ordre de grandeur de la durée moyenne séparant deux collisions successives subies par un même électron dans le réseau. L'équation du mouvement de l'électron sera donc écrite comme¹²

¹¹ "dié" = à travers.

¹²P. Drude, 1900.

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{v} \quad (12.53)$$

En régime sinusoïdal établi, cette équation donne

$$(j\omega + \frac{1}{\tau}) \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

d'où l'on déduit le courant macroscopique

$$\vec{J} = Nq \vec{v} = \frac{Nq^2\tau}{m} \frac{1}{1 + j\omega\tau} \vec{E} \quad (12.54)$$

N étant le nombre de porteurs de charges (électrons en l'occurrence), par unité de volume. Cette relation conduit à représenter la conductivité électrique *en régime variable* par la formule

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (12.55)$$

où

$$\sigma_0 = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (12.56)$$

correspondrait à la conductivité *en régime statique* ($\omega = 0$). C'est d'ailleurs cette relation (12.56) qui permet de donner une estimation pour τ . En prenant (métaux) : $\sigma_0 \simeq 10^8$ S/m, $N = 10^{30}$ m⁻³, $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, on trouve $\tau \simeq 4 \cdot 10^{-15}$ s, correspondant à une fréquence de collisions de l'ordre de 10^{14} /s.

L'expression (12.55) obtenue pour σ rend bien compte de la dépendance de ce paramètre vis-à-vis de la fréquence. Elle montre en particulier que la conductivité garde une valeur très voisine de la valeur statique tant que $\omega\tau \ll 1$, condition que l'on interprète en disant que l'on peut ignorer les variations du champ appliqué tant que celles-ci n'interviennent que sur des laps de temps grand par rapport à τ , ou encore, si la fréquence de variation du champ reste faible devant la fréquence des collisions. D'après l'estimation ci-dessus, la limite sera donnée par $\nu_c \simeq 10^{14}$ Hz, fréquence typique de l'infrarouge. Dans le domaine optique, cette formule est en meilleur accord avec les résultats expérimentaux. On notera que le facteur d'extinction est donné par

$$k'' = \frac{2\pi n''}{\lambda} = \frac{1}{\delta} \quad (12.57)$$

δ étant l'épaisseur de peau. Aussi, si n'' reste constant dans le domaine étudié, l'épaisseur de peau est la plus faible pour les radiations de plus courtes longueurs d'onde. Ainsi, pour l'or, n'' varie peu dans le domaine optique. L'absorption est alors plus forte pour le violet et le bleu que pour le vert. C'est pourquoi, compte-tenu de la sensibilité de l'oeil, une mince feuille d'or éclairée en lumière blanche et observée par transparence paraît verte. Une mince feuille d'argent également observée par transparence présente une teinte violette caractéristique, du fait que les radiations rouge et verte sont plus fortement absorbées (figure 12.4)

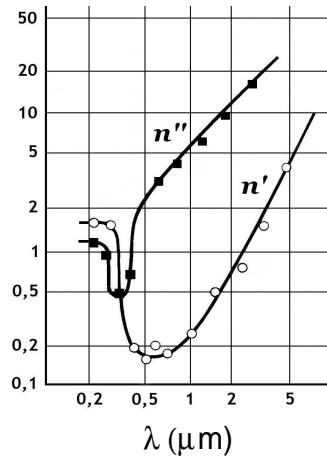


Figure 12.4 : Variations en fonction de la longueur d'onde de l'indice de réfraction et du coefficient d'extinction de l'argent (courbes expérimentales)

Pour $\omega\tau \gg 1$, on a

$$n'^2 \simeq 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\tau\omega^2} \quad , \quad n'' \simeq \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\tau^2\omega^3} \quad (12.58)$$

Ces formules montrent qu'aux hautes fréquences, l'absorption devient de plus en plus faible et que le milieu conducteur devient transparent ($\epsilon_r \rightarrow 1$). Pour divers métaux, on observe effectivement une chute brusque de l'absorption dans l'ultraviolet. Cependant, pour les très hautes fréquences, le milieu redevient opaque du fait de l'existence d'autres processus d'absorption à l'échelle microscopiques, non prévus par la théorie classique, tel l'effet photo-électrique. A noter que, d'une manière générale, la réalité est plus complexe que ne l'indique les formules précédentes établies sur la base d'un modèle très simplifié.

12.4 Champ électromagnétique dans un milieu dispersif

12.4.1 Equation de propagation

L'étude des phénomènes de dispersion et d'absorption montre que les propriétés électromagnétiques des milieux sont en fait fonctions de la fréquence. Ceci peut s'interpréter aisément en considérant le fait que, à l'échelle microscopique, lesdits phénomènes résultent d'échanges énergétiques entre les constituants élémentaires du milieu et les photons partenaires de l'onde électromagnétique, dont chacun transporte une énergie E liée à une fréquence ν par la relation $E = h\nu$, h étant la constante de Planck (Voir paragraphe 11.6.3). Il s'ensuit que les équations de Maxwell ne prennent réellement de sens que lorsqu'on les applique à chaque régime harmonique particulier. L'apparition de courants induits, qu'ils soient de polarisation ou de conduction, a pour résultat de modifier la propagation de l'onde par le biais d'un indice $n(\omega)$, grandeur généralement complexe qui caractérise la réponse d'un milieu à l'excitation électromagnétique. Nous avons vu que pour les milieux considérés ici (diélectriques, conducteurs, en tout cas non magnétiques), cela revient, au moins formellement, à changer la permittivité ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, avec $\epsilon_r = n^2(\omega)$. Pour un régime harmonique donné, les équations (macroscopiques) de Maxwell valables dans un milieu l.h.i.¹³ prennent ainsi la forme

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} n^2(\omega) \vec{E} \quad (12.59)$$

¹³Pour lequel n est donc indépendant des coordonnées spatiales.

On notera que la première équation découle de la quatrième puisque

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot} B} = 0 = \operatorname{div} j \frac{\omega}{c^2} n^2(\omega) \overrightarrow{E} = j \frac{\omega}{c^2} n^2(\omega) \operatorname{div} \overrightarrow{E}$$

compte-tenu de l'uniformité de l'indice. De (12.59) on déduit l'équation de propagation du champ électrique

$$\Delta \overrightarrow{E} = -k^2 \overrightarrow{E} \quad , \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega n}{c} \quad (12.60)$$

12.4.2 Cas d'une onde plane

Considérons une onde plane progressive se propageant parallèlement à l'axe $z'z$. La solution de (12.60) est de la forme

$$\overrightarrow{E}(t, z) = \overrightarrow{\mathcal{E}} e^{j(\omega t - kz)} \quad (12.61)$$

$\overrightarrow{\mathcal{E}}$ étant un vecteur constant n'ayant de composantes (complexes) que suivant les axes $x'x$ et $y'y$ perpendiculaires à la direction de propagation (Voir paragraphe 11.4.1) :

$$\mathcal{E}_x = E_{0x} e^{j\varphi_x} \quad , \quad \mathcal{E}_y = E_{0y} e^{j\varphi_y} \quad (12.62)$$

D'après (12.59), on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \frac{j}{\omega} \overrightarrow{\operatorname{rot} E} = -\frac{j}{\omega} \overrightarrow{\mathcal{E}} \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}} e^{j(\omega t - kz)} = -\frac{k}{\omega} \overrightarrow{\mathcal{E}} \wedge \overrightarrow{e_z} e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{soit} \\ \overrightarrow{B} &= \frac{n}{c} \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}} e^{j(\omega t - kz)} \end{aligned} \quad (12.63)$$

Comme précédemment, posons $n = n' - jn''$ et $k = k' - jk''$. Les champs *réels* sont les parties réelles des champs complexes (12.61) et (12.63). Pour éviter une surcharge de notations, nous les noterons encore \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} . On trouve successivement

$$\overrightarrow{E} = e^{-k''z} \left[\overrightarrow{e_x} E_{0x} \cos(\omega t - k'z + \varphi_x) + \overrightarrow{e_y} E_{0y} \cos(\omega t - k'z + \varphi_y) \right] \quad (12.64)$$

Puis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \frac{1}{c} e^{-k''z} \left\{ -\overrightarrow{e_x} E_{0y} [n' \cos(\omega t - k'z + \varphi_y) + n'' \sin(\omega t - k'z + \varphi_y)] \right. \\ &\quad \left. + \overrightarrow{e_y} E_{0x} [n' \cos(\omega t - k'z + \varphi_x) + n'' \sin(\omega t - k'z + \varphi_x)] \right\} \end{aligned} \quad (12.65)$$

Le vecteur de Poynting correspondant doit être évalué avec les champs *réels*. Il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= \frac{1}{\mu_0} (E_x B_y - E_y B_x) \quad \overrightarrow{e_z} = c \epsilon_0 \overrightarrow{e_z} e^{-2k''z} \{ \\ &E_{0x}^2 \cos(\omega t - k'z + \varphi_x) [n' \cos(\omega t - k'z + \varphi_x) + n'' \sin(\omega t - k'z + \varphi_x)] + \\ &E_{0y}^2 \cos(\omega t - k'z + \varphi_y) [n' \cos(\omega t - k'z + \varphi_y) + n'' \sin(\omega t - k'z + \varphi_y)] \} \end{aligned} \quad (12.66)$$

Sa valeur moyenne temporelle est

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{cn'}{2} \vec{e}_z e^{-2k''z} [E_{0x}^2 + E_{0y}^2] = cn' \vec{e}_z e^{-2k''z} \epsilon_0 \frac{|\vec{\mathcal{E}}|^2}{2} \quad (12.67)$$

Dans le cas d'un milieu absorbant ($k'' \neq 0$), la puissance transmise par unité de surface dans la direction de propagation décroît à mesure que l'onde pénètre dans le milieu. Son atténuation est de 95% sur une distance $L \simeq \frac{3}{2k''} = \frac{3\lambda_0}{4\pi n''}$ où $\lambda_0 = c/\nu$.

12.5 Propagation d'ondes dans un milieu transparent inhomogène

Envisageons la propagation, dans un milieu diélectrique, d'une onde monochromatique dont la fréquence est en dehors des zones d'absorption du milieu. Celui-ci est donc transparent pour l'onde : son indice est réel. Par contre, le milieu peut être inhomogène : son indice est alors fonction des coordonnées. Pour un tel milieu, les équations de Maxwell s'écrivent ¹⁴

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = 0 ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} ; \text{rot } \vec{B} = j\frac{\omega}{c^2} n^2 \vec{E}} \quad (12.68)$$

Le vecteur *induction électrique* \vec{D} est ici donné par (Voir paragraphe 6.2.4)

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$$

et dans (12.68), la première équation découle de la quatrième. On sait que si l'indice était constant, des solutions élémentaires de ces équations seraient fournies par des ondes planes dont les champs électriques sont de la forme (Voir paragraphe 11.4.1)

$$\vec{E}(M, t) = \vec{\mathcal{E}} e^{j(\omega t - \varphi(M))} \quad (12.69)$$

où $\vec{\mathcal{E}}$ est un vecteur complexe *constant*, M le point d'observation, et où la *phase* $\varphi(M)$ s'écrit

$$\varphi(M) = \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (12.70)$$

Dans cette expression, $\vec{r} = \vec{OM}$ est le vecteur position, et

$$\vec{k} = \frac{\omega n}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u} \quad (12.71)$$

est le vecteur d'onde, orienté suivant la direction de propagation définie par le vecteur unitaire \vec{u} ; $\lambda_0 = 2\pi c/\omega = c/\nu$ est la longueur d'onde dans le vide de l'onde. La phase (12.70) peut être réécrite sous la forme

$$\varphi(M) = \frac{\omega}{c} S_0(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} S_0(M) \quad , \quad \text{avec } S_0(M) = n \vec{u} \cdot \vec{r} \quad (12.72)$$

et avec ces notations le champ (12.69) devient

¹⁴L'inhomogénéité du milieu implique l'existence de charges de polarisation (voir chapitre 6). Dans ce cas, \vec{E} n'est plus de divergence nulle. Cependant, en l'absence de charges "libres", ce que l'on suppose s'agissant d'un diélectrique, c'est le vecteur induction électrique $\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$ qui a une divergence nulle.

$$\vec{E}(M, t) = \vec{\mathcal{E}} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} (ct - S_0(M))} \quad (12.73)$$

On peut s'attendre que la structure d'une solution telle que (12.73) ne soit que légèrement modifiée si l'indice du milieu est une fonction lentement variable des coordonnées. Ceci incite à rechercher dans ce cas une solution des équations sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{\mathcal{E}}(M) e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} (ct - S(M))} \quad (12.74)$$

Nous supposons dorénavant avoir affaire à des ondes du domaine du visible : $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda_0 \leq 0,8 \mu\text{m}$. L'expérience montre que l'amplitude $\vec{\mathcal{E}}(M)$ peut être considérée comme une fonction lentement variable des coordonnées, et souvent même constante dans le domaine spatial des appareils d'observation. Ce terme "lentement" se réfère à la comparaison entre la longueur d'onde λ_0 et la distance d caractérisant la vitesse d'évolution de cette amplitude avec les coordonnées : on sous-entend ici que $d \gg \lambda_0$. On peut noter que le calcul du paragraphe 11.6.1 montre qu'à grande distance d'une source, les amplitudes des champs varient avec cette distance selon une loi en $1/r$. C'est ce que confirme la loi expérimentale que Bouguer a énoncée en 1729, selon laquelle l'éclairement reçu d'une source lumineuse à la distance r varie comme $1/r^2$. Une telle variation est en général indécélable dans les détecteurs usuels. En revanche, le facteur de phase

$$e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} \quad (12.75)$$

peut varier très rapidement, même sur des distances très petites devant d . C'est ce facteur qui détermine en fait la variation spatiale du champ. Ceci nous conduit à faire l'approximation $\lambda_0 \rightarrow 0$ (en fait $\lambda_0 \ll d$) dans les équations : c'est l'approximation de l'Optique géométrique, ou *approximation eikonale*, la fonction $S(M)$ étant appelée *eikonale*¹⁵. Dans cette approximation, il est supposé que les variations spatiales de l'indice et de l'eikonale se font sur des distances grandes par rapport à la longueur d'onde.

Dorénavant, nous ferons abstraction du facteur temporel $e^{j\omega t}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}} + \vec{\text{grad}} \left(e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} \right) \wedge \vec{\mathcal{E}} = -j\omega \vec{B} \quad \text{soit} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} \left\{ \frac{\lambda_0}{2\pi} \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}} + \vec{\text{grad}} S \wedge \vec{\mathcal{E}} \right\} \end{aligned}$$

En gros, le premier terme de cette expression est d'ordre $\lambda_0/d \ll 1$ par rapport au second et, dans le cadre de l'approximation, peut être négligé par rapport à ce dernier¹⁶. On obtient ainsi

$$\vec{B} \simeq \frac{1}{c} \vec{\text{grad}} S \wedge \vec{E} \quad (12.76)$$

Ecrivons ensuite

$$\begin{aligned} c \vec{\text{rot}} \vec{B} &= j \frac{2\pi}{\lambda_0} n^2 \vec{E} \simeq \vec{\text{rot}} \left[\vec{\text{grad}} S \wedge \vec{E} \right] = \vec{\text{grad}} S \text{ div } \vec{E} - \vec{E} \Delta S + \\ &\quad \left(\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{\text{grad}} S - \left(\vec{\text{grad}} S \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{E} \end{aligned} \quad (12.77)$$

D'après l'équation $\text{div}(n^2 \vec{E}) = 0$, on a

¹⁵Eikonale est un mot d'origine grecque signifiant "image".

¹⁶Le vecteur $\vec{\text{grad}} S$ garde une valeur finie.

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{2}{n} \vec{E} \cdot \vec{\operatorname{grad}} S \quad (12.78)$$

relation qui montre que $\operatorname{div} \vec{E}$ reste fini lorsque $\lambda_0 \rightarrow 0$. Il est alors facile de vérifier que seul le dernier terme de (12.77) amène une contribution en $1/\lambda_0$ et représente donc le terme dominant de cette expression. On a en effet, par exemple pour la composante E_x ,

$$\left(\vec{\operatorname{grad}} S \cdot \vec{\operatorname{grad}} \right) E_x \simeq \mathcal{E}_x \left(\vec{\operatorname{grad}} S \cdot \vec{\operatorname{grad}} \right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} = -j \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{\operatorname{grad}} S)^2 E_x$$

Toutes simplifications faites dans (12.77), on aboutit à l'équation

$$\boxed{(\vec{\operatorname{grad}} S)^2 = n^2} \quad (12.79)$$

appelée *équation de l'eikonale*.

Effectuant les dérivations dans l'équation (12.78), on obtient

$$\operatorname{div} \vec{E} = e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} S(M)} \left\{ \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} - j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\operatorname{grad}} S \right\} = -\frac{2}{n} \vec{E} \cdot \vec{\operatorname{grad}} S$$

La logique de l'approximation nous force alors à écrire que

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\operatorname{grad}} S \simeq 0 \quad \text{ou} \quad \vec{E} \cdot \vec{\operatorname{grad}} S \simeq 0 \quad (12.80)$$

Finalement, compte-tenu de (12.79), on aboutit aux relations

$$\boxed{\vec{B} \simeq \frac{1}{c} \vec{\operatorname{grad}} S \wedge \vec{E} \quad , \quad \vec{E} \simeq \frac{c}{n^2} \vec{B} \wedge \vec{\operatorname{grad}} S} \quad (12.81)$$

Toujours dans l'approximation eikonale, le champ garde localement la même valeur en tous les points de même phase $\varphi(M)$. Une équation du type $\varphi(M) = \text{constante}$ définit une surface, appelée ici *surface d'onde*. Lorsque, à partir d'une surface d'onde donnée, on suit l'onde dans sa propagation, sa phase complète $\psi = \omega t - \varphi(M)$ reste constante. Si l'onde passe en M à la date t et en M' à la date t' , on doit avoir

$$\omega(t' - t) = \varphi(M') - \varphi(M) = 2\pi\lambda_0 (S(M') - S(M)) \quad (12.82)$$

La quantité

$$\boxed{L = S(M') - S(M) = \int_{M \rightarrow M'} \vec{\operatorname{grad}} S \cdot d\vec{M}} \quad (12.83)$$

est appelée *chemin optique* de M à M' .

Si M et M' sont infiniment voisins, ceci donne

$$\omega(t' - t) \simeq \vec{\operatorname{grad}} \varphi(M) \cdot \vec{MM'} \quad (12.84)$$

On sait que, à partir de M , pour passer de la surface d'onde définie par $\varphi = \varphi(M) = \varphi_1$ à celle définie par $\varphi = \varphi(M') = \varphi_2$, le plus court chemin est celui de la ligne de champ de $\vec{\operatorname{grad}} \varphi$ passant

par M . Adoptons alors pour principe que la propagation de l'onde s'effectue réellement selon ces lignes de champ, lesquelles, comme on sait, sont *orthogonales* aux surfaces d'onde¹⁷. Le point M' réellement atteint par l'onde est alors défini de façon univoque : c'est le point qui se trouve à l'intersection de la ligne de champ dont l'orientation est définie par $\vec{\text{grad}} \varphi(M)$ au point M , et de la surface d'onde définie par $\varphi = \varphi_2$. En supposant définie la vitesse de propagation de l'onde en M , cela signifie aussi que, les points M et M' étant donnés, le laps de temps mis par l'onde pour aller de M à M' doit être *le plus court possible*. Ces considérations sont à la base du *principe de Fermat* (1660) en Optique. Soit deux points M et M' dans un milieu homogène ou non.

Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de M en M' est celui qui rend *extrémal* le chemin optique (12.83)

Notons tout de suite que la solution peut ne pas être unique¹⁸.

Nous montrerons dans la suite du cours que ce principe permet de retrouver les lois de Descartes. En Optique, les rayons lumineux sont donc les trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde, lignes de champ de $\vec{\text{grad}} S$. Pour une onde monochromatique, son vecteur d'onde en un point M est donc

$$\vec{k}(M) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{\text{grad}} S = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \quad (12.85)$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire tel que, d'après (12.79),

$$\vec{\text{grad}} S = n \vec{u} \quad (12.86)$$

Le chemin optique (12.83) prend alors la forme

$$L = \int_M^{M'} n(P) d\ell(P) \quad (12.87)$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne de champ de $\vec{\text{grad}} S$ passant par M et M' .

Compte-tenu des relations (12.81) et (12.85), la conclusion est que, localement, l'onde électromagnétique dans l'approximation eikonale a la structure d'une onde plane, dont la direction de propagation (locale) est celle donnée par $\vec{\text{grad}} S$ et dont la vitesse de propagation (locale) est

$$\vec{v} = \frac{c}{n(M)} \vec{u}(M) \quad (12.88)$$

Lorsque l'indice est constant, les "rayons lumineux" sont des droites. C'est l'inhomogénéité du milieu qui provoque la courbure de ces rayons.

¹⁷Ceci est plausible si l'on prend en compte le fait que le vecteur de Poynting, qui quantifie le transport de l'énergie électromagnétique, prend l'expression $\vec{P} \approx \vec{\text{grad}} S \frac{\|\vec{E}\|^2}{c}$, c'est-à-dire, suit la ligne de champ du gradient de S .

¹⁸Ce cas se présente lorsqu'on a affaire à des foyers, points de convergence de rayons lumineux.

On peut donner une forme vectorielle à l'équation des rayons lumineux. Considérons une ligne de champ de $\vec{\text{grad}} S$ sur laquelle la position d'un point est définie par son abscisse curviligne s . On sait que, $d\vec{r}$ étant le vecteur déplacement infinitésimal sur la courbe à partir d'un point M , le vecteur tangent en M à cette courbe est donné par

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

d'où, d'après (12.86),

$$\vec{\text{grad}} S = n \frac{d\vec{r}}{ds}$$

En différentiant cette relation le long de la courbe, on obtient

$$\begin{aligned} d\vec{\text{grad}} S &= \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{\text{grad}} S = ds \left(\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{\text{grad}} S = \frac{ds}{n} \left(\vec{\text{grad}} S \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{\text{grad}} S = \\ &= \frac{ds}{n} \sum_i \sum_j \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_j = \frac{ds}{n} \sum_i \sum_j \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_i} \vec{e}_j = \frac{ds}{2n} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 \vec{e}_j = \\ &= \frac{ds}{2n} \vec{\text{grad}} (\vec{\text{grad}} S)^2 = \frac{ds}{2n} \vec{\text{grad}} n^2 = ds \vec{\text{grad}} n \end{aligned}$$

D'où l'équation¹⁹ :

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n} \quad (12.89)$$

Si, finalement, n est constant, elle se réduit à

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \quad (12.90)$$

dont la solution est

$$\vec{r} = \vec{a} s + \vec{b} \quad (12.91)$$

où \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs indépendants de s . Si le vecteur \vec{b} est non nul, (12.91) représente l'équation d'une droite ne passant pas par l'origine et dont le vecteur unitaire est \vec{a} . On retrouve ici le cas des ondes planes. Cependant, (12.91) fournit un autre cas intéressant : celui pour lequel \vec{b} est toujours nul. Toutes les courbes obtenues sont alors des droites passant par l'origine. L'eikonale correspondante est

$$S(M) = S(r) = \pm n r + \text{constante} \quad (12.92)$$

et l'on a

$$\vec{u} \equiv \pm \vec{e}_r = \pm \left\{ \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \left(\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \right) \right\} \quad (12.93)$$

¹⁹Qui représente en fait l'équation des *géodésiques* pour la lumière.

qui est bien indépendant de l'abscisse curviligne s , ici égale à la distance r .

Ce cas est celui d'ondes sphériques issues de O . Ce point représente alors soit une source lumineuse ponctuelle réelle si l'on a le signe positif dans (12.92) (ondes progressives), soit un point de convergence de rayons lumineux, c'est-à-dire un foyer, si les deux signes sont possibles (ondes progressives et ondes rétrogrades).

La variation spatiale de l'indice est cause de courbure des rayons lumineux. Il est d'ailleurs facile de donner l'expression locale du rayon de courbure. En effet, le notant \mathcal{R} , celui-ci intervient dans la dérivée du vecteur unitaire tangent \vec{u} :

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}}$$

où \vec{N} est le vecteur unitaire nommé *normale principale*, perpendiculaire à la courbe au point considéré, donc perpendiculaire à \vec{u} . Utilisant (12.89), il vient

$$\vec{N} \cdot \vec{\text{grad}} n = \vec{N} \cdot \left[n \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u} \frac{dn}{ds} \right], \text{ soit}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \vec{N} \cdot \vec{\text{grad}} n \tag{12.94}$$

Le gradient de l'indice est toujours orienté vers les régions de plus grand indice. La relation ci-dessus montre alors que les rayons lumineux s'incurvent vers ces régions où l'indice est le plus élevé. C'est ce qui provoque l'apparition de mirages lorsque des variations spatiales de température et de pression dans l'atmosphère induisent des inhomogénéités de l'indice²⁰.

²⁰Voir : http://thebrain.mcgill.ca/flash/capsules/pdf_articles/les_mirages.pdf.

12.6 Complément I : spectres de signaux

12.6.1 Signal rectangulaire

Un tel signal $F(t)$, représenté à la figure 12.5, est défini par

$$F(t) = A \quad \text{si} \quad -\frac{T}{2} < t < +\frac{T}{2} \quad \text{et} \quad F(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| > \frac{T}{2} \quad (12.95)$$

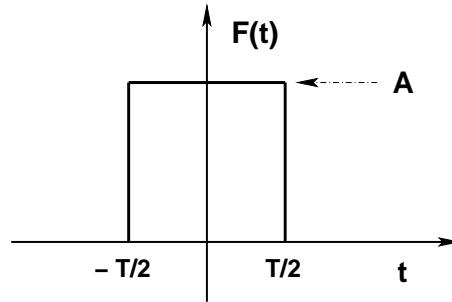


Figure 12.5

Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{A}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{j\omega t} = \frac{A}{2j\pi\omega} \left(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2} \right) = \frac{AT \sin(\omega T/2)}{2\pi (\omega T/2)} = \frac{AT}{2\pi} \text{sinc}(x) \quad (12.96)$$

où

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{avec} \quad x = \omega T/2 \quad (12.97)$$

est la fonction *sinus cardinal* de la variable x . La figure 12.6 en donne une représentation.

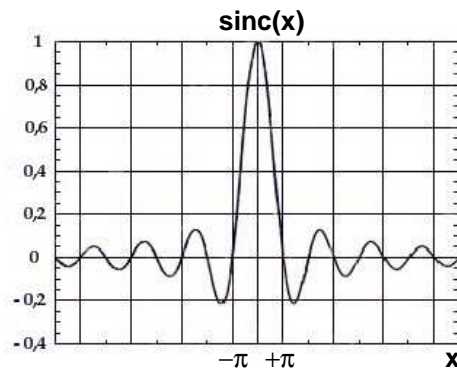


Figure 12.6

La fonction $\text{sinc}(x)$ est une fonction paire de x . Elle prend la valeur 1 pour $x = 0$, puis décroît en valeur absolue en effectuant des oscillations autour de la valeur zéro, à mesure que x augmente. En calculant sa dérivée, on constate qu'elle présente des extrêmes lorsque x vérifie l'équation $\tan x = x$, dont les solutions x_p ont pour valeurs *exactes*

$$0,955 \frac{3\pi}{2}, \quad 0,985 \frac{5\pi}{2}, \quad 0,991 \frac{7\pi}{2}, \quad 0,994 \frac{9\pi}{2}, \quad \dots$$

Ces valeurs x_p sont finalement bien représentées par l'expression $(p + \frac{1}{2})\pi$, avec $p \neq 0$, et les valeurs correspondantes de la fonction sont approximativement

$$\text{sinc}(x_p) \approx \frac{(-1)^p}{\pi(p + \frac{1}{2})} \quad \text{soit} \quad |\text{sinc}(x_p)| \approx \frac{1}{\pi(p + \frac{1}{2})} \quad (12.98)$$

Numériquement, on obtient

$$\text{sinc}(x_1) = -0,212 \quad , \quad \text{sinc}(x_2) = 0,127 \quad , \quad \text{sinc}(x_3) = -0,091 \quad , \quad \text{sinc}(x_4) = 0,071 \quad , \quad \dots$$

Les zéros de $\text{sinc}(x)$ sont atteints pour $x = p\pi$, avec $p \neq 0$.

Cette étude montre que le spectre $|\mathcal{F}(\omega)|$ du signal est plutôt concentré dans le domaine des pulsations proches de $\omega = 0$. On peut définir un *étalement* $\Delta\omega$ de ce spectre en disant que celui-ci ne prend finalement de valeurs importantes que dans le domaine défini par $|x| < \pi$. On trouve ainsi, en ne considérant que les pulsations positives,

$$\Delta x = \pi = \Delta\omega \frac{T}{2} \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad (12.99)$$

soit encore, en introduisant la fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{1}{T}} \quad (12.100)$$

Or, T est précisément la *durée d'existence* Δt du signal $F(t)$. Cet exemple illustre le lien étroit qui existe pour tout signal entre cette durée et l'étalement en fréquences de son spectre. D'une manière générale, on constate une relation de la forme

$$\boxed{\Delta\nu \Delta t = \text{constante}} \quad (12.101)$$

qui est *inhérente* à la transformation de Fourier temporelle. Plus brève est la durée d'existence d'un signal, plus grande est la largeur de son spectre. On voit que, corrélativement, un signal purement monochromatique ne peut qu'être une idéalisation, car un tel signal se devrait d'être *éternel*...

12.6.2 Signal gaussien

Considérons ensuite un signal dont la variation temporelle est donnée par une *gaussienne* :

$$F(t) = A e^{-t^2/T^2} \quad (12.102)$$

où A et T sont deux constantes, la dernière étant homogène à une durée. Dans l'expression de sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} e^{j\omega t} dt = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} [\cos \omega t + j \sin \omega t] dt$$

seul le terme en cosinus intervient puisque $F(t)$ est une fonction paire de t . Posons

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} \cos \omega t dt$$

On a

$$\frac{dG}{d\omega} = - \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/T^2} \sin \omega t dt = \frac{T^2}{2} e^{-t^2/T^2} \sin \omega t \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \omega \frac{T^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} \cos \omega t dt \quad \text{soit}$$

$$\frac{dG}{d\omega} = -\omega \frac{T^2}{2} G$$

Cette dernière relation est une équation différentielle que doit satisfaire G . Elle a pour solution

$$G(\omega) = B e^{-\frac{\omega^2 T^2}{4}}$$

où B est une constante que l'on peut déterminer en cherchant la valeur de G pour $\omega = 0$. On obtient

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} dt = T \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = T \sqrt{\pi}$$

L'expression du spectre de (12.102) est finalement

$$\boxed{\mathcal{F}(\omega) = \frac{AT}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2 T^2}{4}}} \quad (12.103)$$

et l'on conclut que la transformée de Fourier d'une gaussienne est aussi une gaussienne, ici centrée sur la valeur $\omega = 0$.

On peut définir une durée d'existence Δt de (12.102) en recherchant les valeurs de t pour lesquelles l'amplitude de ce signal n'est plus que 5% de la valeur maximum à $t = 0$. On trouve $t/T \simeq \pm\sqrt{3}$, d'où

$$\boxed{\Delta t \simeq 2\sqrt{3}T} \quad (12.104)$$

L'étalement du spectre (12.103) peut être défini de façon similaire. En ne considérant que les pulsations positives, on obtient ainsi

$$\boxed{\Delta \omega \simeq \frac{2\sqrt{3}}{T}} \quad (12.105)$$

D'où la relation

$$\boxed{\Delta \nu \Delta t = \frac{6}{\pi} \simeq 2} \quad (12.106)$$

conforme à (12.101).

12.7 Complément II : Phénomènes magnéto-optiques

12.7.1 L'effet Faraday

L'application d'un champ magnétique statique à un corps transparent isotrope provoque la rotation du plan de polarisation d'une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, se propageant dans ce milieu parallèlement au champ (figure 12.7). Cet effet de *biréfringence induite* a été découvert en 1845 par Faraday²¹ et porte le nom de son découvreur. Avant même les travaux de Maxwell, cette découverte établissait déjà un lien incontestable entre l'Electromagnétisme et l'Optique.

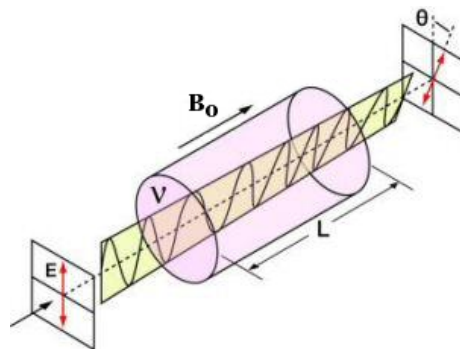


Figure 12.7

Pour décrire le phénomène simplement, nous utiliserons encore le modèle classique de Lorentz décrivant les propriétés électromagnétiques du milieu par des électrons actifs qui lui sont élastiquement liés (sections 11.7 et 12.1)²². Cependant, il n'est plus légitime ici de négliger la "partie magnétique" de la force de Lorentz qui leur est appliquée. Pour s'en convaincre, considérons quelques ordres de grandeurs. Connaissant le flux énergétique P (en W/m^2) d'une source émettant une onde plane, on peut en déduire les intensités respectives E_0 et B_0 du champ électrique et du champ magnétique de l'onde au moyen de la formule

$$E_0 = cB_0 = \sqrt{2c\mu_0 P} \quad (12.107)$$

Ainsi, pour la lumière solaire dont le flux lumineux est environ $10^3 \text{ W}/\text{m}^2$, on obtient $E_0 \simeq 870 \text{ V}/\text{m}$ et $B_0 \simeq 3 \cdot 10^{-6} \text{ T}$. Un pointeur laser peut générer une puissance lumineuse de 5 mW en un faisceau de $1,5 \text{ mm}$ de diamètre. On a dans ce cas²³ $P \simeq 2800 \text{ W}/\text{m}^2$ et $E_0 \simeq 1460 \text{ V}/\text{m}$, $B_0 \simeq 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$. Ces valeurs sont plus faibles que celle du champ magnétique terrestre à Paris : $B_0 \simeq 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Or, les valeurs du champ magnétique statique envisagées ici sont plutôt de l'ordre du Tesla, soit environ de 10^5 à 10^6 fois plus grandes, et sont donc plus à même de compenser la petitesse du facteur de vitesse dans la partie magnétique de la force de Lorentz.

Le milieu l.h.i. considéré est supposé emplir tout l'espace. Il est globalement neutre et la densité volumique de charges y est nulle déjà à l'échelle *mésoscopique*. Pour simplifier, on ignore ici tout phénomène dissipatif. Une onde plane, monochromatique, de pulsation ω , se propage dans ce milieu parallèlement à l'axe $z'z$ et dans le sens positif de cet axe. Au point origine O , le champ électrique de l'onde a pour expression complexe

²¹M. Faraday : "Sur la magnétisation de la lumière et l'illumination des lignes de force magnétique", Annales de Chimie et de Physique, 3ème série, tome XVII (1846) p359; Phil. Trans. Roy. Soc. 136 (1846) p.1.

²²W. Voigt, "Magneto- und Electrooptik", Leipzig, 1908.

²³En admettant que l'onde correspondante soit plane.

$$\vec{E}(O, t) = E_0 \vec{e}_x e^{j\omega t} \quad (12.108)$$

où E_0 est une grandeur positive, et \vec{e}_x le vecteur unitaire de l'axe x' . On note :

- \vec{u} le vecteur déplacement de l'électron, $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ le vecteur vitesse associé ;
- $\vec{f}_r = -m\omega_0^2 \vec{u}$ la force de rappel que le milieu exerce sur l'électron lorsqu'il est déplacé de sa position d'équilibre ; m est la masse de l'électron, ω_0 est une pulsation propre ;
- N le nombre, par unité de volume, des électrons du milieu qui participent de façon effective au phénomène (*électrons optiques*) ; on admet que ce nombre est indépendant des coordonnées.

La longueur d'onde de l'onde est supposée très grande devant les distances inter-atomiques, de sorte que le champ appliqué peut être considéré comme indépendant de \vec{u} .

Un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ est appliqué au milieu. En régime sinusoïdal permanent établi, l'application de la relation fondamentale de la Dynamique classique à un électron effectif conduit à²⁴

$$-m\omega^2 \vec{u} = -m\omega_0^2 \vec{u} - e \vec{E} - j\omega e B_0 (u_y \vec{e}_x - u_x \vec{e}_y) \quad (12.109)$$

où l'on a fait usage de la notation complexe. Par projection sur les trois axes cartésiens, on obtient $u_z = 0$, et donc $v_z = 0$, ce qui résulte de l'orientation choisie pour le champ magnétique, et les deux équations couplées

$$m(\omega_0^2 - \omega^2)u_x + j\omega e B_0 u_y = -eE_x \quad , \quad m(\omega_0^2 - \omega^2)u_y - j\omega e B_0 u_x = -eE_y \quad (12.110)$$

En posant $u_{\pm} = u_x \pm ju_y$, $E_{\pm} = E_x \pm jE_y$, on en tire

$$u_{\pm} = -e \frac{E_{\pm}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \pm e\omega B_0} \quad (12.111)$$

Le vecteur densité volumique du courant induit par la présence de l'onde a donc pour composantes

$$J_z = 0 \quad , \quad J_{\pm} = J_x \pm jJ_y = -Nej\omega u_{\pm} = j\omega \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \pm e\omega B_0} E_{\pm} \quad (12.112)$$

En reportant ces expressions dans les équations de Maxwell, ainsi qu'il a été fait au paragraphe 12.1.2, on trouve que les composantes (transversales, puisque $E_z = 0$) du champ électrique doivent satisfaire l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_{\pm}^2 E_{\pm} = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 [m(\omega_0^2 - \omega^2) \pm e\omega B_0]} \quad (12.113)$$

Comparant cette équation à (12.10) en association avec (12.12), on est amené à la conclusion que, soumis au champ magnétique \vec{B}_0 , le milieu réagit différemment aux composantes “+” et “-” du champ de l'onde. A chacune de ces composantes correspond en effet un indice de réfraction distinct, n_+ pour la composante “+”, n_- pour la composante “-”. Il s'ensuit que les deux types de composantes ne se propagent pas à la même vitesse dans ce milieu (leurs vitesses de groupe sont différentes).

²⁴La charge de l'électron est ici notée $-e$, avec $e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Notons $k_+ = k_0 n_+$ et $k_- = k_0 n_-$ les vecteurs d'onde associés, avec $k_0 = \omega/c$. En ne considérant qu'une propagation progressive de l'onde dans le milieu, lesdites composantes en un point de cote z seront données par

$$E_{\pm}(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - k_{\pm} z)} \quad (12.114)$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale $E_{\pm}(0, t) = E_x(0, t) = E_0 e^{j\omega t}$. On en tire

$$E_x = E_0 e^{j\omega t} \frac{e^{-jk_+ z} + e^{-jk_- z}}{2}, \quad E_y = E_0 e^{j\omega t} \frac{e^{-jk_+ z} - e^{-jk_- z}}{2j} \quad (12.115)$$

soit

$$E_x = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \cos k_2 z, \quad E_y = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \sin k_2 z \quad (12.116)$$

où l'on a posé $k_1 = \frac{k_+ + k_-}{2}$ et $k_2 = \frac{k_- - k_+}{2}$. Le champ électrique réel à la cote z a donc finalement pour expression

$$\vec{\mathcal{E}} = E_0 \cos(\omega t - k_1 z) (\cos k_2 z \vec{e}_x + \sin k_2 z \vec{e}_y) \quad (12.117)$$

Pour z donné, ce champ garde une orientation constante au cours du temps, mais qui est différente de celle, de l'axe x' , du champ à l'origine : le plan de polarisation de l'onde a tourné d'un angle $\theta = k_2 z$. C'est l'effet Faraday et l'on dit que sous l'effet du champ magnétique \vec{B}_0 le milieu a acquis un *pouvoir rotatoire*.

La grandeur $\omega_c = eB_0/m$ est la *pulsation cyclotron* de l'électron, égale au double de sa *pulsation de Larmor* (équation 10.41). La longueur d'onde associée $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$ vaut λ_c (centimètre) $\simeq 1/B_0$ (Tesla). Pour des valeurs de B_0 voisines du Tesla, on a dans le domaine optique $\lambda \ll \lambda_c$. Plus précisément, supposons que²⁵ $\omega_c \ll |\omega_0^2 - \omega^2|/\omega$ et $\omega_c \ll \omega$. Considérons alors ω_c comme infinitésimal devant ω . D'après (12.113), on peut écrire

$$n_{\pm} \simeq \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0[\omega_0^2 - (\omega \mp \omega_c/2)^2]}} = n(\omega \mp \omega_c/2) \quad (12.118)$$

avec

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0[\omega_0^2 - \omega^2]}} \quad (12.119)$$

Pour une pulsation ω donnée, $n(\omega)$ représente l'indice du milieu en l'absence du champ B_0 . On peut alors écrire

$$k_2 = \frac{\omega}{2c} (n_- - n_+) = \frac{\omega}{2c} [n(\omega + \omega_c/2) - n(\omega - \omega_c/2)] \simeq \frac{\omega_c}{2c} \omega \frac{dn}{d\omega}(\omega) \quad (12.120)$$

soit

$$k_2 \simeq \frac{e}{2mc} B_0 \omega \frac{dn}{d\omega}(\omega) \quad (12.121)$$

Dans les conditions où l'approximation plus haut est justifiée, l'angle de rotation θ est donc *proportionnel* à l'amplitude B_0 du champ statique : c'est la loi que E. Verdet a définitivement établie expérimentalement à partir de 1854²⁶ et que l'on traduit par la relation

²⁵La condition qui suit signifie que l'on se trouve bien à l'écart d'une résonance.

²⁶Emile Verdet : "Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme", Annales de Chimie et de Physique, 3ème série, tome XLI (1854) p.370.

$$\theta = K_v B_0 L \quad (12.122)$$

où K_v est la *constante de Verdet*²⁷ et L la longueur de l'échantillon parcourue par l'onde. Le modèle précédent donne de la constante de Verdet l'expression^{28,29}

$$K_v = \frac{e}{2mc} \omega \frac{dn}{d\omega} = -\frac{e}{2mc} \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (12.123)$$

Explicitement, le modèle simplifié utilisé plus haut conduit à

$$K_v = \frac{Ne^3}{2m^2c \epsilon_0} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (12.124)$$

Indépendamment des modèles et approximations utilisées pour le décrire, l'effet Faraday présente les caractéristiques générales suivantes.

♠ Le sens de la rotation du plan de polarisation change si l'on inverse le champ \vec{B}_0 . En effet, si $B_0 \rightarrow -B_0$, les indices n_+ et n_- s'échangent l'un en l'autre, k_2 change de signe ainsi que l'angle θ .

♠ La rotation ne dépend pas du sens de propagation de l'onde. En effet, si $k_2 \rightarrow -k_2$, on doit aussi faire le changement $z \rightarrow -z$ (z est alors négatif) et θ reste inchangé. On peut aussi se convaincre qu'il en est bien ainsi en considérant les choses de la manière suivante. Prenons l'axe de propagation de l'onde comme axe de référence. Pour une onde rétrograde, ce sera donc l'axe (orienté) zz' et non $z'z$. Pour constituer un trièdre direct, adjoignons-lui l'axe Ox et l'axe $-Oy$. Si le champ appliqué était dans le sens zz' , nous aurions, comme précédemment, un effet de rotation dans le sens trigonométrique autour de zz' , soit, de l'axe Ox vers l'axe $-Oy$. Mais, supposant le champ orienté dans le sens $z'z$, la rotation se fait dans le sens inverse, c'est-à-dire, à nouveau, dans le sens trigonométrique autour de $z'z$. La conclusion est que, dans tous les cas, le sens de la rotation est déterminé par celui du champ appliqué : c'est le sens de rotation obtenu via la règle du tire-bouchon, autour du vecteur \vec{B}_0 . Il s'ensuit que l'effet ne peut être annulé par réflexion de l'onde. Cette particularité distingue l'effet Faraday du pouvoir rotatoire naturel de certains milieux. On peut d'ailleurs l'exploiter, comme l'a fait Faraday, pour accroître l'angle de rotation par des réflexions multiples de l'onde.

♠ Pour les substances diamagnétiques, l'effet suit instantanément le champ appliqué et le sens de rotation est celui du courant magnétisant, ce qui n'est pas le cas pour des substances paramagnétiques à basse température ou des substances ferromagnétiques.

♠ Pour des valeurs du champ appliqué pas trop élevées, l'angle de rotation est donné par la loi de Verdet (12.122). Faraday avait déjà pressenti la proportionnalité de l'angle de rotation avec l'amplitude du champ magnétique et la longueur de l'échantillon. La constante de Verdet K_v dépend du matériau via son indice de réfraction et dépend ainsi, a priori, de la température du matériau³⁰ et de la longueur d'onde³¹. On notera que de façon évidente, la constante de Verdet doit être proportionnelle à $n - 1$, puisque la rotation n'existe pas dans le cas du vide, c'est-à-dire, pour $n = 1$.

La comparaison de la formule (12.123) avec les mesures expérimentales, de l'effet Faraday d'une part et de la dispersion d'autre part, a permis de déterminer le rapport e/m qui, pour la plupart des substances étudiées s'est révélé être sensiblement le même que celui obtenu dans l'étude

²⁷Laquelle s'exprime en rd Tesla⁻¹ m⁻¹.

²⁸H. Becquerel, C.R. Ac. Sc., t. CXXV, (1897) p.679.

²⁹Cette expression de K_v a le mérite de pouvoir être utilisée dans le cas où les électrons peuvent être considérés comme libres, c'est-à-dire pour $\omega_0 = 0$.

³⁰H. Ollivier, Comptes Rendus Ac. Sc. 191 (1930) p.130; C. R. 195 (1932) p.376; C. R. 204 (1937) p.1326; C. R. 207 (1937) p.983.

³¹E. Verdet, Ann. de Chim. et de Phys, s.3, t. LXIX (1863), p.415.

des rayons cathodiques³². De plus, le sens positif de la rotation généralement observé devait correspondre à une charge négative des porteurs³³.

La découverte de Faraday a suscité par la suite de nombreuses expériences qui ont conduit, dans la seconde moitié du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle, à la découverte d'autres phénomènes électro- et magnéto-optiques confirmant à la fois le bien-fondé de la théorie électronique de la dispersion et l'intrication de l'Optique et de l'Electromagnétisme, forçant les physiciens de l'époque à admettre définitivement la théorie électromagnétique de la lumière. Ces phénomènes sont les suivants.

- La *biréfringence électrique de Kerr* a été découverte par J. Kerr en 1875³⁴. Il s'agit d'une biréfringence provoquée dans un matériau (solide ou liquide) lorsqu'on lui applique un champ électrique statique ou lentement variable. Sous cette contrainte, le matériau réagit en produisant deux indices de réfraction différents. La valeur absolue Δn de leur différence suit la loi

$$\Delta n = \lambda K E_0^2 \quad (12.125)$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière traversant le matériau, E_0 l'amplitude du champ appliqué ; K est la constante de Kerr (s'exprimant en m/V^2), caractéristique de la substance, qui dépend de la longueur d'onde et de la température mais est indépendante de E_0 . La biréfringence (c'est-à-dire, l'écart entre les deux indices) peut être positive ou négative mais ne change pas de signe quand le champ appliqué change de sens. C'est un effet *non-linéaire*, en l'occurrence quadratique, qui existe de manière plus ou moins prononcée pour tous les matériaux, quelles que soient leurs symétrie, mais qui ne devient l'effet principal que pour des substances dites *centro-symétriques*, c'est-à-dire, celles possédant un centre de symétrie cristalline.

- L'*effet Kerr magnéto-optique*³⁵ (ou "MOKE" en anglais, pour Magneto Optic Kerr Effect), qui n'est pas un phénomène de biréfringence, se manifeste lors de la réflexion d'une onde électromagnétique polarisée linéairement sur la surface d'un matériau soumis à un champ magnétique ou aimanté. Il peut être *polaire* si le champ (ou l'aimantation) est perpendiculaire à l'échantillon et dans le plan d'incidence, *longitudinal* si le champ (ou l'aimantation) est dans le plan de l'échantillon et dans le plan incidence, *transverse* si le champ (ou l'aimantation) est dans le plan de l'échantillon et perpendiculaire au plan d'incidence. Le phénomène se manifeste par une modification de l'état de polarisation de l'onde réfléchi. Il est du *premier ordre* car, comme l'effet Faraday, il est proportionnel à l'amplitude du champ appliqué. S'agissant d'un matériau aimanté, des mesures de l'état de polarisation de l'onde réfléchi ainsi que des coefficients de réflexion permet d'obtenir des informations sur l'aimantation du matériau.

Cet effet est aussi à la base de lecteurs optiques de mémoires magnétiques.

- La *biréfringence électrique de Pockels*, étudiée par Pockels dans les années 1890³⁶ est aussi une biréfringence provoquée par un champ électrique, mais laquelle, contrairement à celle de l'effet Kerr, est *proportionnelle* à l'amplitude de ce champ. Cet effet électro-optique de premier ordre n'apparaît que pour des cristaux sans symétrie par rapport à un axe et, quand il est présent, domine l'effet Kerr. Il occupe une place importante en opto-électronique où il est à la base d'un grand nombre de dispositifs tels que commutateurs, défecteurs, modulateurs où, dans des *cellules Pockels*, il permet de réaliser simplement une modulation de la lumière qui la traverse. Il est aussi utilisé en microscopie électro-optique jusqu'à l'échelle nanométrique³⁷.

³²Ces mesures de e/m furent menées par L. H. Siertsema.

³³En fait, le sens de la rotation dépend beaucoup des propriétés magnétiques du matériau considéré et de leur évolution avec la température. Certains matériaux donnent effectivement une rotation négative. Voir J. Becquerel, W. J. de Haas, Journal de Physique et le Radium, 9, 11 (1928) p.346.

³⁴J. Kerr, Phil. Mag. 1875, IV 50 (1875) p.337 ; p.446.

³⁵J. Kerr, Rept. Brit. Assoc. Adv. Sci. 5 (1876) p.85 ; Phil. Mag. 3 (1877) p.321 ; Phil. Mag. 5 (1878) p.161 ; C.H. Wind, Arch. Neerl, I (1898) p.119 ; P. Zeeman, Arch. Neerl. 1 (1898) p.221.

³⁶F. Pockels, Ann. der Physik Chem. 37 (1889), p.269 ; Neues Jahrb. Min., Beil. Bd., 7 (1891), p.201 ; Abh. Göttingen Ges. der Wiss., Math. Phys. Kl., 39 (1894) p.1.

³⁷Voir : B. Hajj, "Imagerie électro-optique Pockels aux échelles micro et nanométriques en Physique et Biophysique", Thèse de doctorat, ENS Cachan et Institut d'Alembert, 2010.

♣ Une propriété remarquable des effets électro-optiques de Kerr et de Pockels dans certains matériaux est que leurs durées d'établissement ou de disparition (temps de réponse) sont extrêmement courtes, pouvant même descendre dans le domaine sub-picoseconde (1 picoseconde = 10^{-12} s), de sorte que l'intensité de la lumière qui émerge du matériau suit fidèlement les modulations du champ électrique appliqué, même si celles-ci sont très rapides. De ce fait, les deux effets sont largement exploités dans les transmissions à haut débit ou pour la détection de signaux TeraHertz.

- La *biréfringence magnétique de Cotton et Mouton* a été découverte en 1901 par J. Kerr³⁸, étudiée en 1902 par Q. Majorana³⁹ puis par A. Cotton et H. Mouton en 1904⁴⁰. C'est l'analogie magnétique de l'effet Kerr, mais il est beaucoup plus faible, du fait de la petitesse des moments magnétiques mis en jeu. On peut augmenter son amplitude en utilisant des suspensions colloïdales avec greffage de petites particules métalliques.

La biréfringence induite par champ électrique (effet Kerr) ou par champ magnétique (effet Cotton-Mouton) d'un matériau a pour origine l'anisotropie optique de ses molécules. P. Langevin en a développé le premier une théorie classique⁴¹ que M. Born a étendue au cas de molécules polaires⁴². La théorie quantique de ces effets fut par la suite développée par divers auteurs⁴³.

- Grâce aux lasers impulsionnels produisant des champs électriques très importants (1000 V/m), il est possible d'accéder à l'Optique *non-linéaire* produisant des phénomènes d'importance pratique comme la bistabilité optique, l'autofocalisation des faisceaux intenses, les "portes" optiques rapides, etc. C'est le domaine de *l'effet Kerr optique*.

Exploité seul ou en association avec l'un des effets électro-optique ou magnéto-optique cités plus haut, l'effet Faraday trouve de nos jours de multiples applications pratiques; en voici des exemples.

Connaissant les caractéristiques du matériau utilisé, la mesure de l'angle de rotation (12.122) permet celle du champ magnétique appliqué et ses variations spatiales, quelles qu'en soient les causes. Si le champ est produit par un courant, sa mesure permet indirectement celle de l'intensité de ce courant. L'effet constitue ainsi le principe de base de nombreux capteurs. Citons : les capteurs polarimétriques de courants réalisés avec des fibres optiques; les lecteurs de bandes magnétiques et de disques magnétiques; l'imagerie magnéto-optique (notamment, contrôle de structures en aéronautique); la magnétométrie en général : notons à cet égard que la mesure de l'effet Faraday sur des signaux pulsars permet, en association avec d'autres mesures, d'obtenir des informations sur le champ magnétique interstellaire; en recherche dans le domaine de la Physique du solide, il permet la visualisation de domaines magnétiques dont il a été question au paragraphe 10.4.3.

L'effet est également exploité avec des grenats ferrimagnétiques dans des écrans de visualisation ou pour réaliser des modulateurs de lumière⁴⁴.

Dans les systèmes optiques, il est utilisé dans des composants. Par exemple, les lasers et particulièrement les diodes lasers sont très sensibles aux réflexions parasites qui pourraient provenir du système optique dont ils font partie et venir perturber en amplitude et en fréquence l'onde émise, voire endommager le laser lui-même dans le cas d'un laser de puissance. On tire alors partie de la propriété de *non-réciprocité* de l'effet Faraday, décrite plus haut, selon laquelle la rotation n'est pas compensée par réflexion, pour réaliser des *isolateurs optiques*. Ceux-ci autorisent la transmission d'un faisceau de lumière dans un sens mais atténuent quasiment totalement toute

³⁸J. Kerr, Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. (1901) p.568.

³⁹Q. Majorana, Rend. Accad. Lincei 11-1 (1902) p.374, 463; C. R. Ac. Sc. 135 (1902) p.159, 235.

⁴⁰A. Cotton, H. Mouton, C. R. Ac. Sc. 141 (1905) p.317; C. R. Ac. Sc. 142 (1906) p.203; Ann. de Chim. et de Phys. 11 (1907) p.145, 289; C. R. Ac. Sc. 145 (1907) p.229.

⁴¹P. Langevin, Le Radium 7 (1910) p. 249; C. R. Ac. Sc. 151 (1910) p.475.

⁴²M. Born, Ann des Physik 55 (1918) p.177.

⁴³L. Kronig, M. Born, J.H. Van Vleck, R. Serber, Th. Neugebauer.

⁴⁴Voir par exemple P. Cœuvre, D. Challeton, J. Daval, J. P. Jadot, J. C. Peuzin, Revue de Physique Appliquée, Tome 10 (1975) p.379.

lumière réfléchiée venant dans l'autre sens, agissant ainsi comme des filtres unidirectionnels⁴⁵. L'isolateur optique préserve ainsi la source laser d'un signal de retour venant d'une réflexion sur une interface. C'est un élément essentiel pour élaborer des circuits optiques comportant un nombre croissant de fonctions. Des isolateurs ont été réalisés en optique non guidée (isolateurs massifs) et en optique intégrée, sous forme de guides optiques. Avec l'effet Faraday, on réalise également des réflectomètres optiques, des modulateurs optiques, des interrupteurs optiques, des commutateurs optiques⁴⁶ et des gyroscopes lasers utilisant des miroirs magnéto-optiques.

- Pour être complet, mentionnons aussi le phénomène de biréfringence de solides par compression ou étirement (photo-élasticité). Ce phénomène a été mis en évidence par Brewster en 1816⁴⁷. L'effet est étudié par interférométrie (*photoélasticimétrie*), notamment pour prévoir à l'aide de maquettes transparentes les déformations que pourraient subir certaines structures soumises à des efforts. Ce type de biréfringence peut également apparaître lors du refroidissement rapide et non uniforme d'un corps qui se solidifie, tel un verre optique. On fait disparaître ce défaut par le *recuit* qui est un chauffage suivi d'un refroidissement très lent. Les liquides en écoulement et soumis à des contraintes peuvent aussi devenir biréfringents. On parle alors de biréfringence dynamique, ou d'écoulement.

12.7.2 Effet Faraday près d'une résonance

Supposons maintenant que la pulsation ω de l'onde incidente allant traverser le diélectrique soit voisine de la pulsation ω_0 . En l'absence du champ magnétique B_0 et en supposant que l'on puisse faire varier ω , on observe alors un phénomène associant une résonance et une absorption de l'onde, comme décrits au paragraphe 12.2. Si l'onde incidente est un paquet d'ondes dont le spectre en pulsation s'étale dans le voisinage de ω_0 , et si la longueur de diélectrique traversé est suffisamment grande, les ondes de pulsation les plus voisines de ω_0 contenues dans le paquet seront complètement absorbées. En analysant le spectre de l'onde émergente (à l'aide d'un spectrographe), on doit observer une raie noire à l'emplacement de la pulsation ω_0 , l'onde composante correspondant à cette pulsation ayant été absorbée par le diélectrique.

L'établissement du champ B_0 fait apparaître deux indices de réfraction $n_{\pm} = n'_{\pm} - jn''_{\pm}$, avec (voir la formule 12.21)

$$(n'_{\pm})^2 = n_0^2 + A \frac{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\omega_c)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{12.126}$$

où l'absorption a été prise en compte par l'introduction du coefficient γ . Il existe maintenant deux pulsations de résonance, sensiblement égales à $\omega_+ = \omega_0 + \omega_c/2$ pour n_+ et $\omega_- = \omega_0 - \omega_c/2$ pour n_- . L'analyse du spectre de l'onde émergente montre alors que la raie noire à la pulsation ω_0 a disparu et a été remplacée par deux raies noires, situées de part et d'autre et à égale distance $\omega_c/2$ de l'emplacement qu'elle occupait. L'effet du champ magnétique résulte donc en un "éclatement" du spectre d'absorption, qui dans le présent modèle simplifié ne comportait qu'une seule raie, en deux raies. Cet effet est parfois appelé *effet Zeeman inverse*, car il est apparenté à l'effet Zeeman *direct* dont il est question dans le paragraphe suivant.

La rotation Faraday d'une onde se propageant parallèlement au champ magnétique est déterminée par la différence $\Delta n = n'_- - n'_+$. La figure 12.8 donne une représentation qualitative des deux indices et de leur différence en fonction de la pulsation au voisinage de ω_0 . On note que si ω_c et γ sont bien plus faibles que ω_0 , la courbe de n'_+ se déduit quasiment de celle de n'_- par une simple translation égale à ω_c . On voit d'après la courbe (b) que la rotation change de sens dans

⁴⁵Voir par exemple, L. Magdenko, "Conception et réalisation de composants non-réciproques planaires à base de matériaux magnéto-optiques", Thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, 2010.

⁴⁶Voir S. Martinez, "Conception de commutateurs micro-usinés sur Silicium pour les réseaux tout-optiques", Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, 2002.

⁴⁷D. Brewster, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 106 (1816), p.156.

l'intervalle $\omega_0 - \omega_c/2$, $\omega_0 + \omega_c/2$ et que sa valeur absolue peut d'ailleurs y être plus importante qu'en dehors de cet intervalle.

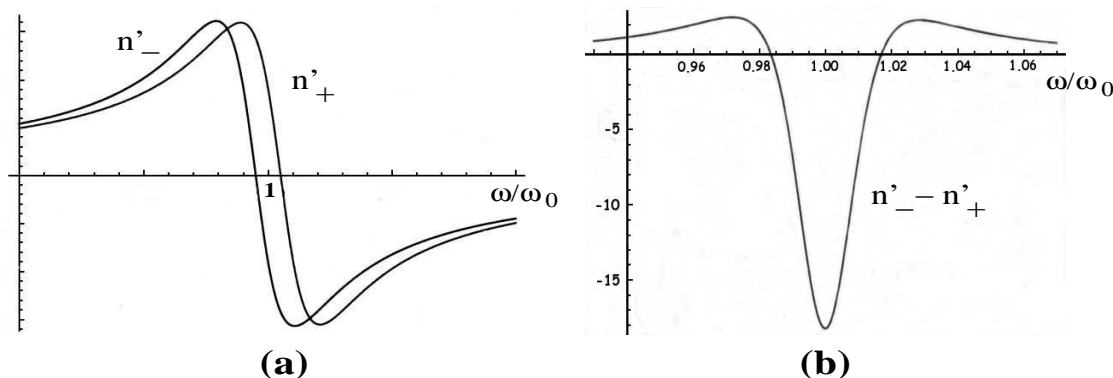


Figure 12.8

12.7.3 Effet Zeeman direct et normal

Classiquement, le mouvement d'un électron lié s'accompagne de l'émission d'une onde électromagnétique dont les champs électrique et magnétique à grande distance s'expriment au moyen de la formule 11.80, le moment dipolaire étant donné ici par $\vec{p} = -e \vec{u}$, où \vec{u} est le vecteur déplacement de l'électron. Lorsque celui-ci se trouve placé dans un champ magnétique statique extérieur, son mouvement se voit perturbé par l'apparition d'une force de Lorentz et son émission d'onde s'en trouve modifiée : c'est *l'effet Zeeman direct*. Nous décrirons ici encore ce phénomène de façon classique et ignorerons, pour simplifier, tout effet d'amortissement. Nous prendrons comme axe z/z la direction du champ magnétique appliqué, de sorte que $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

En l'absence du champ \vec{B}_0 , l'équation du mouvement de l'électron est

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{u} \quad (12.127)$$

et a pour solution générale

$$\vec{u} = \vec{a} \cos \omega_0 t + \vec{b} \sin \omega_0 t \quad (12.128)$$

où \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs constants. L'électron décrit alors une ellipse (qui peut se réduire à un cercle) dans le plan perpendiculaire à son moment cinétique $\vec{L} = m\omega_0 \vec{a} \wedge \vec{b}$ et contenant le centre de force exerçant la force de rappel.

L'équation vectorielle du mouvement de l'électron en présence du champ magnétique s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{u} - e \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{B}_0 \quad (12.129)$$

et conduit aux trois équations

$$\ddot{u}_x + \omega_c \dot{u}_y + \omega_0^2 u_x = 0, \quad \ddot{u}_y - \omega_c \dot{u}_x + \omega_0^2 u_y = 0, \quad \ddot{u}_z + \omega_0^2 u_z = 0 \quad (12.130)$$

où l'on a encore posé $\omega_c = eB_0/m$. La dernière équation est la même que celle sans champ B_0 : le mouvement de l'électron dans la direction du champ magnétique reste donc inchangé, c'est toujours un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 , et l'on a

$$u_z = a_z \cos \omega_0 t + b_z \sin \omega_0 t = A_z \cos(\omega_0 t + \varphi_z) \quad (12.131)$$

$a_z, b_z, A_z > 0$ et φ_z étant des constantes. Posons ensuite $u_{\pm} = u_x \pm ju_y$; on a bien sûr $u_- = u_+^*$. Ces combinaisons satisfont les équations

$$\ddot{u}_{\pm} \mp j\omega_c \dot{u}_{\pm} + \omega_0^2 u_{\pm} = 0 \quad (12.132)$$

On en déduit la forme générale pour u_+ :

$$u_+ = a_+ e^{j\omega_+ t} + a_-^* e^{-j\omega_- t} \quad (12.133)$$

où a_+ et a_- sont deux constantes a priori complexes et ($\omega_c \ll \omega_0$)

$$\omega_+ = \frac{1}{2}(\sqrt{4\omega_0^2 + \omega_c^2} + \omega_c) \approx \omega_0 + \omega_c/2, \quad \omega_- = \frac{1}{2}(\sqrt{4\omega_0^2 + \omega_c^2} - \omega_c) \approx \omega_0 - \omega_c/2 \quad (12.134)$$

Les mouvements de l'électron dans les directions perpendiculaires au champ magnétiques ont donc bien été perturbées par le champ magnétique. Ce sont maintenant des combinaisons de deux vibrations sinusoïdales, l'une de pulsation ω_+ , l'autre de pulsation ω_- . Posant $a_+ = A_+ e^{j\varphi_+}$ et $a_- = A_- e^{j\varphi_-}$ avec $A_+ = |a_+|$ et $A_- = |a_-|$, on a

$$u_x = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-), \quad u_y = A_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \sin(\omega_- t + \varphi_-) \quad (12.135)$$

A l'aide des vecteurs de polarisations circulaires $\vec{e}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm j \vec{e}_y)$, le vecteur déplacement peut être récrit comme

$$\vec{u} = \frac{u_+}{\sqrt{2}} \vec{e}^{(+)} + \frac{u_-}{\sqrt{2}} \vec{e}^{(-)} + u_z \vec{e}_z \quad (12.136)$$

Posons $a_z = A_z e^{j\varphi_z}$. D'après (12.131) et (12.133), il est facile de voir que (12.136) s'obtient comme la partie réelle du vecteur

$$\vec{U} = \vec{e}^{(+)} a_+ \sqrt{2} e^{j\omega_+ t} + \vec{e}^{(-)} a_- \sqrt{2} e^{j\omega_- t} + a_z e^{j\omega_0 t} \vec{e}_z \quad (12.137)$$

Chacune des vibrations impliquées est à l'origine de l'émission d'une onde électromagnétique sinusoïdale de même pulsation. En l'absence de champ magnétique, les vibrations de l'électron induisent l'émission d'une onde de pulsation unique ω_0 . L'instauration d'un champ magnétique a donc pour effet de faire apparaître deux ondes supplémentaires de pulsations ω_+ et ω_- , respectivement. C'est l'effet observé par Zeeman en 1896⁴⁸ et que l'on appelle *l'effet Zeeman normal*. Aussitôt après, Lorentz en a donné une théorie classique, celle ici présentée⁴⁹.

Précisons maintenant la structure de l'onde émise. On vérifie sans peine que pour une orientation quelconque du moment dipolaire électrique, la formule (11.80) se généralise comme suit

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{p} (t - r/c)) \quad (12.138)$$

⁴⁸P. Zeeman : "The Effect of Magnetisation on the Nature of Light Emitted by a Substance", Nature 55 (1424) (1897) p.347.

⁴⁹"En reconnaissance des extraordinaires services qu'ils ont rendus par leurs recherches sur l'influence du magnétisme sur les phénomènes radiatifs", Lorentz et Zeeman ont reçu le prix Nobel de Physique en 1902, second de la série.

où, conformément à (12.137), le moment dipolaire \vec{p} sera écrit sous la forme complexe

$$\vec{p} = -e \vec{U} = -e \left(\vec{e}^{(+)} a_+ \sqrt{2} e^{j\omega_+ t} + \vec{e}^{(-)} a_- \sqrt{2} e^{j\omega_- t} + a_z e^{j\omega_0 t} \vec{e}_z \right) \quad (12.139)$$

Nous considérerons les deux conditions d'observation suivantes.

♣ Effet Zeeman longitudinal.

Ici, l'observation se fait dans la direction du champ magnétique, c'est-à-dire, la direction $\vec{z}'z$. On a alors $\vec{e}_r \equiv \vec{e}_z$ et

$$\vec{E} = \frac{-e\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \left(\omega_+^2 a_+ \vec{e}^{(+)} e^{j\omega_+(t-z/c)} + \omega_-^2 a_- \vec{e}^{(-)} e^{j\omega_-(t-z/c)} \right) \quad (12.140)$$

L'onde observée est la superposition de deux ondes de pulsations différentes et polarisées *circulairement*. L'une, de pulsation ω_+ est d'hélicité droite (*dextrorsum*), l'autre, de pulsation ω_- , est d'hélicité gauche (*sinistrorsum*). Elles sont dénommées *ondes σ* . L'onde de pulsation ω_0 *n'est pas présente* (figure 12.9 (a)).

♣ Effet Zeeman transversal.

Si l'observation se fait dans la direction \vec{e}_y , donc dans une direction perpendiculaire au champ magnétique, on a cette fois, avec $\vec{e}_r \equiv \vec{e}_y$:

$$\vec{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \left(\omega_0^2 a_z \vec{e}_z e^{j\omega_0(t-y/c)} + \vec{e}_x \left[\omega_+^2 a_+ e^{j\omega_+(t-y/c)} + \omega_-^2 a_- e^{j\omega_-(t-y/c)} \right] \right) \quad (12.141)$$

Dans cette configuration, l'onde de pulsation ω_0 est *présente* et l'on observe trois ondes polarisées *rectilignement* : l'onde de pulsation ω_0 , dénommée *onde π* , a son champ électrique suivant \vec{e}_z tandis que les deux ondes σ de pulsations ω_+ et ω_- ont leurs champs électriques suivant \vec{e}_x (figure 12.9 (b)).

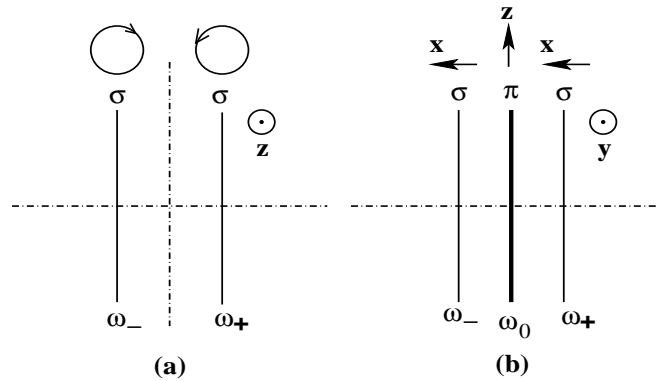


Figure 12.9

Nous admettons ici que ce qui vient d'être décrit pour le cas d'un seul électron oscillant est transposable au cas de sources usuelles de lumière comportant un très grand nombre de tels oscillateurs.

La source de lumière utilisée par P. Zeeman lors de sa première observation du phénomène était une lampe à sodium et l'effet put alors être détecté grâce aux performances de résolution

d'un réseau mis au point par Rowland. Cependant, en renouvelant l'expérience avec d'autres substances, il apparut bien vite que le phénomène pouvait présenter des structures beaucoup plus riches que le triplet de Lorentz, où les "éclatements" d'une radiation initiale pouvaient se faire, selon la source, en 4 nouvelles radiations (quadruplets de Cornu), voire en 5, 6 ou 9, les séparations entre radiations étant de plus différentes. On parla alors *d'effet Zeeman anormal*⁵⁰. Finalement, l'ensemble des effets Zeeman ne peuvent être correctement décrits que dans le cadre de la Mécanique Quantique, avec notamment l'introduction de la notion de *spin* de l'électron, qui n'a pas d'équivalent classique. Mais l'on peut dire que les multiples tentatives pour les expliquer avant l'avènement de la théorie quantique ont fortement contribué à établir celle-ci.

À la fin du 19^{ème} siècle, la découverte de l'effet Zeeman consolidait la théorie électromagnétique de la lumière, initiée par Faraday. De plus, avant la découverte de l'électron par J. J. Thomson en 1897, elle a conforté la théorie de Lorentz selon laquelle la matière comporte des constituants élémentaires chargés, les électrons, qui expliquent largement ses propriétés électromagnétiques. La mesure de l'écart entre les raies observées a pu d'ailleurs fournir une valeur du rapport e/m dont l'ordre de grandeur fut confirmé plus tard. En outre, le signe négatif de la charge de l'électron était révélé par l'observation du sens des polarisations circulaires des ondes σ dans l'effet longitudinal : en effet, une charge positive leur aurait attribué des sens inverses, *sinistrorsum* pour l'onde de pulsation ω_+ , *dextrorsum* pour l'onde de pulsation ω_- .

L'effet Zeeman est couramment utilisé en spectrométrie d'absorption et d'émission atomiques, en Résonance Magnétique Nucléaire, en résonance de spin électronique, en spectroscopie Mössbauer⁵¹. On l'utilise aussi à des fins d'investigations médicales non-invasives en magnéto-cardiographie et magnéto-encéphalographie. Mais on l'utilise beaucoup en spectroscopie astronomique pour la détection de champs magnétiques dans l'espace puisque, par son action sur le spectre d'émission d'atomes, d'ions ou de molécules, un champ magnétique signale sa présence. C'est d'ailleurs dans ce domaine que l'effet Zeeman trouva l'une de ses toutes premières applications en 1908 : par cet effet, George Ellery Hale a pu, pour la première fois, mettre en évidence l'existence de champs magnétiques intenses associés aux taches solaires⁵². Grâce à cet effet, il est devenu possible de détecter des champs magnétiques à très grandes distances, par l'analyse du rayonnement reçu. On est même parvenu à détecter des variations du champ magnétique d'étoiles en rotation, ce qui fournit des indications sur sa géométrie globale. En association avec des mesures de *spectro-polarimétrie* il est également possible de déduire des cartes de champ détaillées.

• Exercice

Caractériser le mouvement de l'électron pour chacun des modes propres de pulsations ω_0 , ω_+ et ω_- , respectivement. Pour chacun d'eux, montrer que le moment cinétique \vec{L} de l'électron est conservé et que, pour $\omega_c \ll \omega_0$, son énergie mécanique prend la forme $E = E_0 - \mu_z B_0$ où $\mu_z = -\frac{e}{2m} L_z$ est la projection sur \vec{B}_0 du moment magnétique orbital de l'électron et E_0 une constante. Interpréter le résultat.

⁵⁰On utilise aussi le qualificatif "anormal".

⁵¹R.L. Mössbauer, Z. Physik 151 (1958) p.124; A. Abragam "L'effet Mössbauer et applications à l'étude des champs internes", Gordon & Breach, London 1964; C. Janot, Pure and Appl. Chem. 48 (1976) p.53.

⁵²G. E. Hale, "On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots", The Astrophysical Journal 28 (1908) p.315.