

Chapitre 13

Phénomènes à l'interface de deux milieux

13.1 Equations de passage d'une onde électromagnétique d'un milieu vers un autre

Alors que les équations de Maxwell *locales* du champ électromagnétique en présence de sources ne font intervenir que des densités *volumiques* de charges ou de courants, seules les équations intégrales reliant le champ aux sources permettent de prendre en compte l'éventuelle présence de distributions superficielles à la surface des milieux. Or, ce sont ces distributions superficielles qui sont à l'origine de discontinuités de certaines des composantes du champ à l'interface de deux milieux. C'est ce que nous allons préciser dans la suite.

Nous écarterons des modélisations de charges ou de courants en termes de densités ponctuelles ou linéiques. Il s'ensuit que les seules singularités du champ qui pourront se présenter sont de simples discontinuités.

Nous nous placerons dans le cas d'un régime permanent sinusoïdal de pulsation ω et utiliserons systématiquement la notation complexe.

Les équations intégrales du champ sont les suivantes¹.

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} &= \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss}) \quad ; \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -j\omega \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Faraday}) \\ \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} &= 0 \quad (\text{Flux}) \quad ; \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(I_C + j\omega \int_{S(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{Ampère}) \end{aligned} \quad (13.1)$$

Lorsqu'on se restreint au voisinage immédiat d'un point M situé sur la surface de séparation S de deux milieux (1) et (2), celle-ci peut être localement assimilée à un plan \mathcal{P} . Pour repérer la position d'un point dans ce voisinage, utilisons un repère cartésien d'origine M , dont l'axe $z'z$ est perpendiculaire à S et orienté dans le sens (1) \rightarrow (2), et dont les axes Mx et My sont dans le plan \mathcal{P} tangent en M à S (figures 13.1 et 13.2). L'interface S peut porter des distributions superficielles de charges et de courants. Nous noterons σ et \vec{j} respectivement les densités superficielles correspondantes en M .

1. On admettra que dans ces équations, les charges et les courants de polarisation sont implicitement pris en compte.

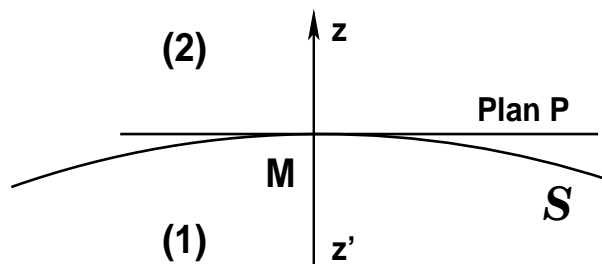


Figure 13.1

Considérons alors un contour fermé rectangulaire \mathcal{C} , entourant le point M et disposé perpendiculairement au plan \mathcal{P} , comme indiqué à la figure 13.2. Ses côtés parallèles à Mz ont pour longueur h , tandis que ceux parallèles à My ont pour longueur ℓ . Ces deux longueurs sont bien entendu infinitésimales par rapport aux dimensions de S , et, puisqu'elles sont choisies indépendamment l'une de l'autre, nous pourrons à loisir faire tendre h vers zéro avant ℓ , procédé qui nous permettra de tester le caractère continu ou discontinu du champ en M .

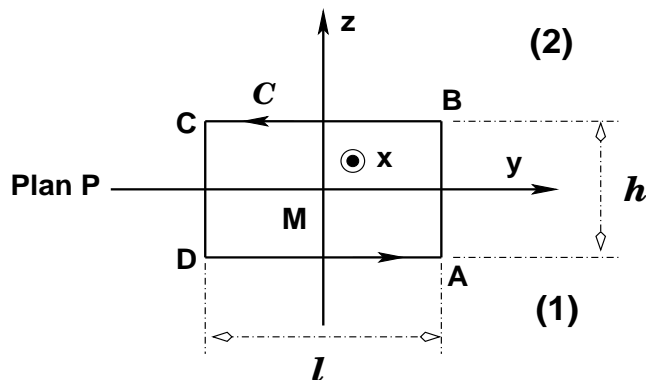


Figure 13.2

La circulation du champ électrique le long de \mathcal{C} comprend les intégrales suivantes

$$\int_A^B = \int_{-h/2}^{h/2} E_z(0, \ell/2, z) dz \quad , \quad \int_B^C = - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_y(0, y, h/2) dy$$

$$\int_C^D = - \int_{-h/2}^{h/2} E_z(0, -\ell/2, z) dz \quad , \quad \int_D^A = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_y(0, y, -h/2) dy$$

Même si la composante E_z était discontinue pour $z = 0$ (sur S), les intégrales le long de AB et le long de CD tendent vers zéro lorsque h tend vers zéro. D'un autre côté, la circulation envisagée est donnée, au facteur $-j\omega$ près, par le flux de \vec{B} à travers la surface du rectangle $ABCD$ dont la normale est Mx :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} B_x(0, y, z) dy dz$$

Ici encore, même si B_z était discontinu pour $z = 0$, cette intégrale tend vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$. A la limite $h = 0$ on obtient ainsi²

2. Plus précisément, z tend vers zéro par valeurs positives ($z \rightarrow 0^+$) dans l'intégrale de B à C , et par valeurs négatives ($z \rightarrow 0^-$) dans l'intégrale de D à A .

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_y(0, y, 0^+) dy = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_y(0, y, 0^-) dy$$

Cette égalité doit être vraie pour tout ℓ infinitésimal. A la limite $\ell = 0$, on obtient

$$E_y(0, 0, 0^+) = E_y(0, 0, 0^-) \tag{13.2}$$

Autrement dit, au passage du milieu (1) au milieu (2), la composante E_y du champ électrique est *continue*.

Faisant tourner le rectangle $ABCD$ de 90° autour de $z'z$ pour le placer dans le plan xMz , et évaluant comme précédemment la circulation le long de ce nouveau contour, on trouverait cette fois que la composante E_x est aussi continue pour $z = 0$. En conclusion,

Dans le passage d'un milieu à un autre en un point quelconque de leur surface de séparation, la composante du champ électrique suivant une tangente quelconque à cette surface est continue

Evaluons ensuite la circulation du champ magnétique le long de \mathcal{C} . D'une part cette circulation vaut

$$- \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [B_y(0, y, h/2) - B_y(0, y, -h/2)] dy + O(h)$$

D'autre part, d'après l'équation de Maxwell-Ampère, elle est donnée par

$$\mu_0 [I + O(h)]$$

puisque le flux du champ électrique à travers le rectangle $ABCD$ tend lui aussi vers zéro lorsque h tend vers zéro. A mesure que l'on approche cette limite, l'intensité de courant due à des courants volumiques tend aussi vers zéro. Il ne subsiste alors que celle due à d'éventuels courants superficiels, qui s'écrit

$$I_s = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} j_x(y, 0) dy$$

Il s'ensuit qu'à la limite $h = 0$ puis $\ell = 0$, on a

$$B_y(0, 0, 0^+) - B_y(0, 0, 0^-) = -\mu_0 j_x(0, 0) \tag{13.3}$$

En prenant un contour analogue dans le plan Mxz et de normale \vec{e}_y , on obtiendrait de même

$$B_x(0, 0, 0^+) - B_x(0, 0, 0^-) = +\mu_0 j_y(0, 0) \tag{13.4}$$

Les composantes tangentielles du champ magnétique peuvent donc subir des discontinuités dans le passage (1) \rightarrow (2). Plus précisément,

La composante de \vec{B} suivant la direction tangentielle à S qui est parallèle à $\vec{j}(M)$ est *continue*, alors que la composante de \vec{B} suivant la direction tangentielle à S qui est perpendiculaire à $\vec{j}(M)$ est *discontinue*

Si l'on oriente My suivant $\vec{j}(M)$, on a³

$$\Delta B_x(M) = B_x^>(M) - B_x^<(M) = \mu_0 j_y(M) \quad , \quad B_y^>(M) = B_y^<(M) \tag{13.5}$$

Enfin, faisons maintenant tourner le rectangle $ABCD$ de 360° autour de $z'z$. Dans cette rotation, les deux côtés AB et DC auront engendré une surface cylindrique L d'axe $z'z$, de rayon $\ell/2$ et de hauteur h , tandis que les côtés BC et AD auront chacun engendré un disque d'axe $z'z$ et de rayon $\ell/2$, les deux disques "BC" et "AD" fermant ladite surface L pour former une surface fermée Σ ayant la forme d'une boîte à bonbons⁴.

Le flux sortant du champ électrique à travers Σ se compose du flux "latéral" à travers L

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} \frac{\ell}{2} d\varphi \left[E_x\left(\frac{\ell}{2}, \varphi, z\right) \cos \varphi + E_y\left(\frac{\ell}{2}, \varphi, z\right) \sin \varphi \right]$$

et des flux à travers les deux disques précités

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell/2} \rho d\rho \left[E_z(\rho, \varphi, \frac{h}{2}) - E_z(\rho, \varphi, -\frac{h}{2}) \right]$$

D'après le Théorème de Gauss, le flux à travers Σ est égal à Q/ϵ_0 , Q étant la charge entourée par cette surface. A mesure que h tend vers zéro, les contributions des charges volumiques tendent vers zéro, et ne subsistent que la charge provenant de distributions superficielles sur S , donnée par

$$Q_s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell/2} \rho d\rho \sigma(\rho, \varphi)$$

Il est facile de montrer que le flux latéral tend inéluctablement vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$. On en déduit

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell/2} \rho d\rho [E_z(\rho, \varphi, 0^+) - E_z(\rho, \varphi, 0^-)] = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell/2} \rho d\rho \sigma(\rho, \varphi)$$

Passant ensuite à la limite $\ell \rightarrow 0$, on est conduit à faire l'identification

$$\Delta E_z(M) = E_z^>(M) - E_z^<(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \tag{13.6}$$

3. On retrouve ici la formule établie au paragraphe 7.8.4 : $\left\{ \vec{B}_>(M) - \vec{B}_<(M) \right\} \cdot \vec{t} = \mu_0 \vec{j}(M) \cdot (\vec{N} \wedge \vec{t})$.

4. Ou, pour les amateurs, d'une boîte à camembert.

Au passage à travers S au point M , la composante du champ électrique suivant la normale subit une discontinuité s'il existe une densité superficielle de charges en M

Enfin, appliquant le même calcul au champ magnétique, celui-ci étant à flux conservatif, on déduit que

$$\Delta B_z(M) = B_z^>(M) - B_z^<(M) = 0 \tag{13.7}$$

c'est-à-dire :

Au passage à travers S , la composante du champ magnétique suivant la normale est toujours continue

L'ensemble des équations ainsi obtenues constitue ce qu'on appelle les *conditions de passage* du champ électromagnétique à la traversée d'un milieu donné vers un autre.

Si les milieux considérés sont des diélectriques linéaires homogènes et isotropes ne comportant aucune charge excédentaire, les seules distributions superficielles de charges à l'interface sont dues à la polarisation $\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ des milieux. Leurs densités sont données par (Voir chapitre 6)

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

L'équation (13.6) s'écrit alors⁵

$$\epsilon_0 \Delta E_z = \epsilon_0 \left[\chi_e^{(1)} E_z^{(1)} - \chi_e^{(2)} E_z^{(2)} \right] \quad \text{ou} \quad \epsilon_0 \Delta [(1 + \chi_e) E_z] = 0$$

soit, en introduisant le vecteur induction électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$:

$$\Delta D_z(M) = 0 \tag{13.8}$$

Pour ces milieux, les conditions de passage sur le champ électrique s'expriment plus simplement en disant qu'à une interface

- ♣ les composantes tangentielles du champ électrique sont continues et
- ♣ la composante normale de l'induction électrique est continue.

Le cas de milieux magnétiques l.h.i. peut se traiter de façon similaire. En supposant qu'aucun courant de conduction n'y circule, les seuls courants superficiels sont dûs à leurs aimantations (Voir chapitre 10) et leurs densités sont données par $\vec{j}_m = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{N}$. Introduisant le vecteur excitation magnétique $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}}$ avec $\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{H}$, l'équation (13.5) conduit immédiatement à

⁵ Ici, il faut prendre garde au fait que l'axe des z constitue la normale *sortante* pour le milieu (1) et la normale *rentrante* pour le milieu (2) et que l'on a $\mathcal{P}_z^{(1)} = +\sigma_{\text{pol}}^{(1)}$, $\mathcal{P}_z^{(2)} = -\sigma_{\text{pol}}^{(2)}$.

$$\Delta H_x(M) = \Delta H_y(M) = 0 \quad (13.9)$$

Les conditions de passage concernant le champ magnétique s'expriment alors en disant qu'à l'interface de deux tels milieux

- ♣ les composantes tangentielles du vecteur \mathbf{H} sont continues et
- ♣ la composante normale du champ magnétique est continue.

13.2 Réflexion et transmission d'une onde plane sous incidence normale

13.2.1 Conditions de passage

Nous nous placerons dorénavant dans le cas où les seules sources, charges ou courant, apparaissant dans les milieux considérés sont dues à l'excitation provoquée par le passage d'une onde électromagnétique. Il s'agira donc exclusivement de sources induites, comme la polarisation induite dans les diélectriques ou les courants induits dans les milieux conducteurs. En outre, nous écarterons la possibilité d'effets d'aimantation et laisserons donc de côté le cas des milieux magnétiques.

Pour les milieux diélectriques ou conducteurs, les densités volumiques de courants correspondantes sont liées au champ électrique local par une relation de la forme

$$\vec{J} = \xi \vec{E} \quad (13.10)$$

où $\xi = j\omega\epsilon_0\chi_e$ (χ_e est la susceptibilité diélectrique) pour les diélectriques et $\xi = \sigma$ (conductivité) pour les conducteurs. Reportant cette relation dans l'équation de Maxwell-Ampère, celle-ci prend la forme

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\xi + j\omega\epsilon_0) \vec{E} = j\frac{\omega}{c^2} n^2 \vec{E} \quad \text{avec } n^2 = 1 + \frac{\xi}{j\omega\epsilon_0}$$

qui permet, comme nous l'avons vu, de traiter les deux cas précités de façon similaire. D'autre part, la relation constitutive (13.10) montre que les courants induits à envisager sont uniquement volumiques et non superficiels. La conséquence immédiate est que, dans la présente étude, toutes les composantes du champ magnétique devront être considérées comme des fonctions continues des coordonnées.

♠ Considérant le cas de milieux purement diélectriques et *homogènes*, ceux-ci ne comporteront dans leurs volumes aucune charge excédentaire ou de polarisation, ni de courants de conduction ou d'aimantation. Par contre, les interfaces entre diélectriques portent inévitablement des charges de polarisation.

♠ Considérant le cas des conducteurs homogènes dont on suppose que les possibles propriétés d'aimantation peuvent être ignorées, ceux-ci ne comporteront aucune répartition volumique de charges. Les seuls courants volumiques sont de conduction. Leurs surfaces peuvent porter des charges excédentaires.

En résumé, pour ces deux types de matériaux envisagés, les règles de continuité suivantes s'appliquent aux interfaces.

- Toutes les composantes du champ magnétique sont continues.

- Les composantes tangentielles du champ électrique sont continues.
- La composante normale de l'induction électrique est continue dans les cas des diélectriques ; sa discontinuité dans le cas des conducteurs est due à la présence de charges excédentaires aux interfaces.

13.2.2 Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques

Considérons deux milieux diélectriques l.h.i. (1) et (2), dont l'interface est représenté par le plan yOz . L'axe $x'x$, normal à ce plan étant orienté du milieu (1) vers le milieu (2) (figure 13.3). Les deux milieux (1) et (2) sont illimités, le premier vers $x \rightarrow -\infty$, le second vers $x \rightarrow +\infty$. Nous noterons n_1 et n_2 leurs indices de réfraction respectifs, que nous supposerons réels.

Envisageons une onde plane se propageant dans la direction $x'x$ et arrivant depuis le milieu (1) vers l'interface yOz . Nous la supposerons monochromatique, de pulsation ω , et polarisée rectilignement avec un champ électrique selon $y'y$

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad (13.11)$$

où E_0 est une constante réelle positive et $k_1 = \frac{\omega n_1}{c}$.

L'expérience montre que deux nouvelles ondes apparaissent alors. L'une, dite *onde réfléchie*, est renvoyée vers le milieu (1). L'autre, dite *onde transmise*, se propage dans le milieu (2), dans le sens $x'x$.

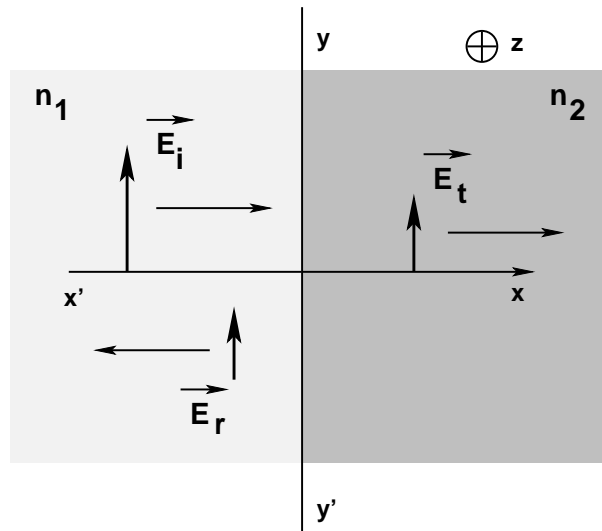


Figure 13.3

Montrons comment les conditions de passage permettent de trouver les caractéristiques de ces deux ondes secondaires. Nous écrivons le vecteur champ électrique de l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r = E_{0r} \vec{e}_y e^{j(\omega_r t - k_r \cdot \vec{r}')} \quad (13.12)$$

et celui de l'onde transmise sous la forme

$$\vec{E}_t = E_{0t} \vec{e}_y e^{j(\omega_t t - k_t \cdot \vec{r}')} \quad (13.13)$$

Ce dernier champ (13.13) est le champ électrique *total* régnant dans le milieu (2). Par contre, le champ électrique total dans le milieu (1) est la somme vectorielle du champ incident (13.11) et du champ réfléchi (13.12) :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad (13.14)$$

Imposons alors la continuité des composantes E_y et E_z pour $x = 0$. On obtient

$$E_{1y}(0, y, z, t) = E_0 e^{j\omega t} + E_{0ry} e^{j(\omega_r t - k_{1y} y - k_{1z} z)} = E_{2y}(0, y, z, t) = E_{0ry} e^{j(\omega_t t - k_{2y} y - k_{2z} z)} \quad (13.15)$$

Cette égalité est très restrictive sur les paramètres entrant en jeu. En effet, elle *doit* être vérifiée pour toutes valeurs de t , y et z . Mais ceci ne peut être réalisé que si et seulement si on a

$$\omega_r = \omega_t = \omega \quad (13.16)$$

$$k_{ry} = k_{ty} = 0 \quad (13.17)$$

$$k_{rz} = k_{tz} = 0 \quad (13.18)$$

La première condition (13.16) indique que ce phénomène de réflexion et de transmission s'effectue *sans changement de fréquence*⁶. Les deux autres conditions permettent de conclure que les ondes réfléchie et transmise se propagent bien parallèlement à la direction x' . Tenant compte de ces conditions dans (13.15), on aboutit aux relations

$$E_{0rz} = E_{0tz} \quad , \quad E_{0ty} = E_0 + E_{0ry} \quad (13.19)$$

L'onde dans le milieu (1) doit satisfaire l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E}_1 \equiv -k_1^2 \vec{E}_i - k_r^2 \vec{E}_r = -\frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} \vec{E}_1 = -k_1^2 \vec{E}_1 \quad (13.20)$$

d'où, *nécessairement*,

$$k_r^2 = k_1^2 \quad (13.21)$$

On ne peut avoir $k_r = k_1$, car sinon l'onde réfléchie se propagerait dans la direction \vec{x}' et ne mériterait plus son nom. Ainsi, la seule solution physique possible pour (13.21) est

$$k_r = -k_1 \quad (13.22)$$

Utilisant l'équation de propagation de l'onde dans le milieu (2) on trouve

$$k_2 = \frac{\omega n_2}{c} \quad (13.23)$$

Pour résumer partiellement, les expressions des champs électriques réfléchi et transmis sont donc

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j(\omega_r t + k_1 x)} \quad , \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega_t t - k_2 x)}$$

Les champs magnétiques associés sont donnés par une relation du type

6. En fait, ceci ne peut être vrai pour tout le spectre électromagnétique car d'autres phénomènes apparaissent à l'échelle microscopique pour les très courtes longueurs d'onde, tels l'effet Compton qui induit un changement de longueur d'onde dans la rediffusion d'ondes électromagnétiques par le milieu. Ce dernier effet peut être complètement négligé, au moins jusqu'au domaine du visible.

$$\vec{B} = -\frac{1}{j\omega} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \text{rot} \left(\vec{E}_0 e^{-j \vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = -\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \text{grad} \left(e^{-j \vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \wedge \vec{E}_0$$

soit, finalement

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{n_1 E_0}{c} \vec{e}_z e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \vec{B}_r &= -\frac{n_1}{c} e^{j(\omega t + k_1 x)} \left[E_{0ry} \vec{e}_z - E_{0rz} \vec{e}_y \right] \\ \vec{B}_t &= \frac{n_2}{c} e^{j(\omega t - k_2 x)} \left[E_{0ty} \vec{e}_z - E_{0tz} \vec{e}_y \right] \end{aligned} \quad (13.24)$$

Imposons alors la continuité du champ magnétique pour $x = 0$. Il vient

$$B_{1y} = \frac{n_1}{c} e^{j\omega t} E_{0rz} = B_{2y} = -\frac{n_2}{c} e^{j\omega t} E_{0tz} \quad \text{soit} \quad n_1 E_{0rz} = -n_2 E_{0tz}$$

Comme $n_1 \neq n_2$, d'après (13.19), on en déduit

$$E_{0rz} = E_{0tz} = 0 \quad (13.25)$$

D'un autre côté, l'application de l'équation $\text{div} \vec{E} = 0$ dans chaque milieu conduit à

$$E_{0rx} = 0 \quad \text{et} \quad E_{0tx} = 0 \quad (13.26)$$

Par conséquent, les ondes secondaires sont aussi polarisées rectilignement : leurs champs électriques n'ont de composante que suivant $y'y$.

Puis, exprimant la continuité de la composante B_z en $x = 0$, on obtient

$$n_1 (E_0 - E_{0ry}) = n_2 E_{0ty} \quad (13.27)$$

Nous poserons dorénavant

$$E_{0r} = E_{0ry} \quad , \quad E_{0t} = E_{0ty} \quad (13.28)$$

et définirons

$$\boxed{r = \frac{E_{0r}}{E_0} \quad , \quad t = \frac{E_{0t}}{E_0}} \quad (13.29)$$

comme étant, respectivement, le *coefficient de réflexion* et le *coefficient de transmission* en amplitude de l'interface⁷, sous incidence normale.

Exprimant alors les relations (13.19) et (13.27) à l'aide de ces coefficients, on trouve

$$t = 1 + r \quad , \quad n_1(1 - r) = n_2 t \quad (13.30)$$

7. Ne pas confondre le coefficient t avec le temps...

d'où l'on tire

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \quad (13.31)$$

Ainsi, les paramètres de l'onde incidente (ω , \vec{E}_0) étant connus, les conditions de passage permettent de fixer entièrement ceux des ondes réfléchie et transmise. La formule (13.31) donnant le coefficient de réflexion montre que

- ♠ r est *positif* si le milieu (1) est *plus réfringent*⁸ que le milieu (2) ($n_1 > n_2$);
- ♠ r est *négatif* si milieu (1) est *moins réfringent* que le milieu (2) ($n_1 < n_2$).
- ♣ Dans le second cas, la réflexion apporte donc un déphasage de π à l'onde réfléchie, par rapport à la phase de l'onde incidente. Cela se produit notamment pour toutes les interfaces air-milieu diélectrique ($n > 1$).

13.2.3 Aspect énergétique

Chacune des ondes en jeu transporte de l'énergie, transport que l'on caractérise au moyen du vecteur de Poynting associé. On sait que pour une onde monochromatique plane de vecteur d'onde \vec{k} , celui-ci a pour expression

$$\vec{P} = \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} \|\vec{E}\|^2 \quad (13.32)$$

où \vec{E} est le champ électrique *réel*. Ici, les champs réels ont pour expressions

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - k_1 x) \quad , \quad \vec{E}_r = r E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t + k_1 x) \\ \vec{E}_t &= t E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - k_2 x) \end{aligned} \quad (13.33)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{n_1}{c} E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - k_1 x) \quad , \quad \vec{B}_r = -\frac{n_1}{c} r E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t + k_1 x) \\ \vec{B}_t &= \frac{n_2}{c} t E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - k_2 x) \end{aligned} \quad (13.34)$$

Utilisant (13.33), on trouve (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \frac{n_1}{c} E_0^2 \vec{e}_x \cos^2(\omega t - k_1 x) \quad , \quad \vec{P}_r = -\frac{n_1}{c} r^2 E_0^2 \vec{e}_x \cos^2(\omega t + k_1 x) \\ \vec{P}_t &= \frac{n_2}{c} t^2 E_0^2 \vec{e}_x \cos^2(\omega t - k_2 x) \end{aligned} \quad (13.35)$$

Or, l'équation bilan

$$\operatorname{div} \vec{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

8. L'appellation de *milieu réfringent* sera explicitée plus loin.

appliquée à une surface fermée de dimensions infinitésimales et à cheval sur l'interface, telle celle utilisée dans la section 13.1, conduit à la *continuité* de la composante *normale* du vecteur de Poynting à l'interface de deux milieux. Dans le cas présent, on obtient pour $x = 0$

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_i + \vec{P}_r = \frac{n_1}{c} (1 - r^2) E_0^2 \vec{e}_x \cos^2 \omega t \quad \text{et} \quad \vec{P}_2 = \frac{n_2}{c} t^2 E_0^2 \vec{e}_x \cos^2 \omega t \quad (13.36)$$

et comme

$$n_1(1 - r^2) = \frac{4n_1^2 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = n_2 t^2$$

on a bien l'égalité $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ à l'interface.

On appelle *facteur de réflexion* à l'interface la grandeur

$$R = \left. \begin{array}{l} |\langle \vec{P}_r \rangle| \\ |\langle \vec{P}_i \rangle| \end{array} \right\}_{x=0} \quad (13.37)$$

rapport de la puissance moyenne réfléchi (par unité de surface, p.u.s.) et de la puissance moyenne (p.u.s.) incidente, et *facteur de transmission* la grandeur

$$T = \left. \begin{array}{l} |\langle \vec{P}_t \rangle| \\ |\langle \vec{P}_i \rangle| \end{array} \right\}_{x=0} \quad (13.38)$$

rapport de la puissance moyenne (p.u.s.) transmise et de la puissance moyenne (p.u.s.) incidente. Comme $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, on trouve ici

$$R = r^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (13.39)$$

et il est facile de vérifier que l'on a

$$R + T = 1 \quad (13.40)$$

relation qui traduit simplement la conservation de l'énergie électromagnétique.

13.2.4 Autre méthode de résolution

Admettons d'emblée que le champ électrique total, dans le milieu (1) comme dans le milieu (2), n'ait qu'une composante E_y ne dépendant que de t et de x . Comme

$$\vec{B} = \frac{j}{\omega} \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega} \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{e}_z \quad (13.41)$$

le champ magnétique est complètement déterminé par $\frac{\partial E_y}{\partial x}$. La continuité de E_y et \vec{B} équivaut donc à celle de E_y et à celle de sa dérivée partielle $\frac{\partial E_y}{\partial x}$. Laissons de côté le facteur temporel commun $e^{j\omega t}$. L'équation de propagation dans le milieu (1) s'écrit

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = -\frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} E_y = -k_1^2 E_y$$

et a pour solution générale

$$E_y = A_1 e^{-jk_1 x} + A'_1 e^{jk_1 x} \quad (13.42)$$

Dans cette expression, on interprète aisément le premier terme (en facteur de A_1) comme provenant d'une onde incidente et le second (facteur de A'_1) comme décrivant l'onde réfléchie. De façon similaire, le champ électrique dans le milieu (2) a pour expression

$$E_y = A_2 e^{-jk_2 x} + A'_2 e^{jk_2 x} \quad (13.43)$$

Un facteur tel que $e^{jk_2 x}$ représente une onde rétrograde. Une telle onde n'a pas lieu d'exister pour la situation physique envisagée ici, où le milieu (2) est supposé illimité vers la région $x \rightarrow +\infty$: il n'existe aucune autre interface dans le milieu (2) qui serait à l'origine d'une onde réfléchie. Cette onde doit donc être écartée et nous poserons $A'_2 = 0$. On obtient ainsi

$$\frac{dE_y^{(1)}}{dx} = jk_1 (-A_1 e^{-jk_1 x} + A'_1 e^{jk_1 x}) \quad , \quad \frac{dE_y^{(2)}}{dx} = -jk_2 e^{-jk_2 x} \quad (13.44)$$

La continuité de E_y et de sa dérivée $\frac{dE_y}{dx}$ pour $x = 0$ impose alors les relations

$$A_1 + A'_1 = A_2 \quad , \quad k_1(A_1 - A'_1) = k_2 A_2 \quad (13.45)$$

Posant ensuite

$$r = \frac{A'_1}{A_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{A_2}{A_1}$$

il vient

$$1 + r = t \quad , \quad k_2 t = k_1 (1 - r)$$

d'où

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad , \quad r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

13.2.5 Onde totale dans le milieu (1)

Le champ électrique total dans le milieu (1) s'écrit donc (mis à part le facteur temporel)

$$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_y [e^{-jk_1 x} + r e^{jk_1 x}] \quad (13.46)$$

expression qui peut être réécrite sous la forme

$$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_y [(1 + r) e^{-jk_1 x} + 2jr \sin k_1 x] \quad (13.47)$$

Le premier terme dans les crochets représente une onde plane progressive d'amplitude $E_0(1+r)$ se propageant selon \vec{x} . Quant au second terme, qui résulte de la superposition d'une onde progressive e^{-jk_1x} et d'une onde rétrograde $-e^{jk_1x}$, il ne décrit pas une propagation. Il s'agit d'une *onde stationnaire*, dont l'amplitude en fonction de x est décrite par la fonction $\sin k_1x$.

Les points où cette fonction s'annule sont appelés des *noeuds* et correspondent aux valeurs suivantes de x (qui ici doivent être négatives)

$$x_N = -p \frac{\pi}{k_1} = -p \frac{\lambda_0}{2n_1} \quad \text{avec } p \text{ entier } \geq 0 \quad (13.48)$$

Les points où la valeur absolue de la fonction prend sa valeur maximum 1 sont appelés *ventres* et correspondent aux valeurs de x égales à

$$x_V = -(p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{2n_1} \quad \text{avec } p \text{ entier } \geq 0 \quad (13.49)$$

♣ Un *réflecteur parfait* aurait pour coefficient de réflexion $r = -1$ ($t = 0$). Dans ce cas, seule subsisterait l'onde stationnaire, et il n'y aurait plus d'onde transmise dans le milieu (2).

13.2.6 Réflexion métallique

Envisageons la réflexion d'une onde plane par une surface métallique placée dans l'air. Le coefficient de réflexion de cette surface est ($n_{\text{air}} \simeq 1$)

$$r = \frac{1-n}{1+n} \quad (13.50)$$

où l'indice n est implicitement donné par (voir chapitre 12)

$$n^2 = 1 - j \frac{\sigma_0}{\omega \epsilon_0 (1 + j\omega\tau)} \quad \text{avec } \sigma_0 = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (13.51)$$

soit

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} - j \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^3 \tau^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \quad (13.52)$$

Pour un métal, $\sigma_0/\epsilon_0 \simeq 10^{19} \text{ Hz}$ et $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$. On trouve alors que pour les ondes optiques pour lesquelles $\omega \simeq 2\pi \cdot 6 \cdot 10^{14} \text{ rd/s}$, on a

$$\frac{1}{\omega\tau} \simeq 2,6 \cdot 10^{-2} \quad , \quad \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} \simeq 80 \quad , \quad \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^3 \tau^2} \simeq 2 \quad (13.53)$$

Ces évaluations justifient l'approximation

$$n^2 \simeq - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} \simeq \quad \text{soit} \quad n \simeq -j \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}} \quad (13.54)$$

L'indice n est donc quasiment imaginaire pur : $n = -jn_0$, avec $6,5 \leq n_0 \leq 12$ pour ordre de grandeur. On en conclut que pour les ondes lumineuses, le coefficient de réflexion r d'une surface métallique est complexe, de module unité, et proche de la valeur -1 caractérisant un réflecteur parfait (car $|n|$ est alors grand devant 1).

13.3 Couche anti-reflet

Faisons tout d'abord une évaluation numérique pour le cas d'une interface air-verre. Prenant $n_1 \simeq 1$ et $n_2 \simeq 1,5$, on obtient

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = -0,2 \quad , \quad t = \frac{2}{1 + n_2} = 0,8 \quad (13.55)$$

Les facteurs de réflexion et de transmission correspondant sont

$$R = 0,04 \quad , \quad T = 0,96 \quad (13.56)$$

d'où l'on conclut que peu d'énergie est réfléchiée par cette surface. Cependant, lorsqu'un système optique doit comporter un grand nombre de surfaces réfléchissantes, les facteurs de réflexion de celles-ci, bien que faibles, commencent, de par leur nombre, à affecter la transmission d'énergie lumineuse à travers le système optique. Pour pallier cet inconvénient, on utilise couramment un traitement *anti-reflet*, appelé aussi *clarification optique* des surfaces. Ce procédé consiste à déposer sur les verres une ou plusieurs couches de diélectriques renvoyant des ondes réfléchies qui vont interférer de façon *destructive*, cela afin d'amoinrir l'amplitude de l'onde qui est globalement réfléchiée par le système optique et d'améliorer ainsi le facteur de transmission.

Expliquons-en le principe en considérant l'exemple suivant.

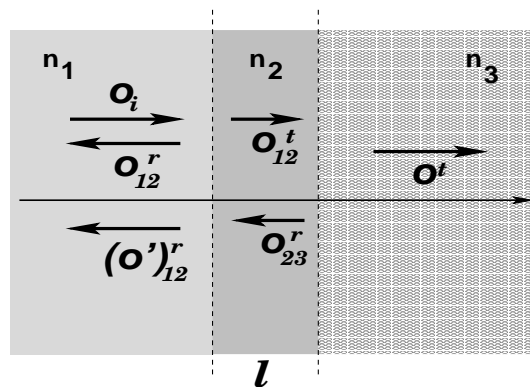


Figure 13.4

Envisageons un "empilement" de trois milieux transparents (1), (2) et (3), d'indices respectifs n_1 , n_2 et n_3 . Le milieu (1) occupe la région $-\infty < x < 0$, le milieu (2) la région $0 < x < \ell$ et le milieu (3) la région $\ell < x < +\infty$ (figure 13.4).

Une onde incidente \mathcal{O}_i arrivant sur l'interface (1)-(2) depuis le milieu (1) donne une première onde réfléchiée \mathcal{O}_{12}^r et une onde transmise \mathcal{O}_{12}^t . Sur l'interface (2)-(3), cette dernière donne à son tour une onde réfléchiée \mathcal{O}_{23}^r et une onde transmise \mathcal{O}_{23}^t . L'onde \mathcal{O}_{23}^r traverse le milieu (2) en sens inverse. En arrivant sur l'interface (2)-(1) depuis le milieu (2), elle donne elle-même une onde transmise dans le premier milieu (1), soit $\mathcal{O}'_{12}{}^r$ qui va interférer avec la première onde réfléchiée \mathcal{O}_{12}^r . Du fait de la première propagation de \mathcal{O}_{12}^t et de la seconde propagation de \mathcal{O}_{23}^r en sens inverse, les deux ondes \mathcal{O}_{12}^r et $\mathcal{O}'_{12}{}^r$ présentent entre elles un premier déphasage dû à la durée des dites propagation et donné par

$$\varphi = \omega \Delta t = \omega \frac{2\ell}{v_2} = \omega \frac{2n_2\ell}{c} = \frac{4\pi n_2\ell}{\lambda_0} \quad (13.57)$$

Par ailleurs, si l'on a $n_1 < n_2 < n_3$ par exemple, les coefficients de réflexion

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \quad (13.58)$$

de l'interface (12) et de l'interface (23) respectivement, sont tous les deux *negatifs*⁹. Ceci fait que les deux réflexions sur (12) et sur (23) induisent le même déphasage π . Les deux ondes \mathcal{O}'_{12} et \mathcal{O}''_{12} seront donc en *opposition de phase* si φ vaut π , c'est-à-dire si

$$\boxed{\ell = \frac{\lambda_0}{4n_2}} \quad (13.59)$$

Comme $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$ est la longueur d'onde de l'onde dans le milieu (2), ceci fait dire que, pour amoindrir le facteur de réflexion du système milieu(1)-milieu(3), il suffit de déposer entre les deux une lame *quart d'onde* d'un diélectrique d'indice intermédiaire entre n_1 et n_3 .

13.3.1 Première méthode de calcul

Nous admettrons ici encore que le champ électrique est partout orienté suivant \vec{e}_y et noterons simplement E sa composante.

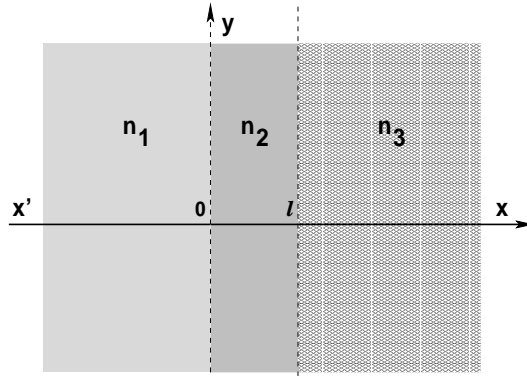


Figure 13.5

Résolvant pour chaque milieu l'équation

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -k^2 E$$

qui résulte de l'équation de propagation, on obtient (en laissant encore de côté le facteur temporel)

$$E = E_1 = A_1 e^{-jk_1 x} + B_1 e^{jk_1 x} \quad \text{pour } x \leq 0 \quad (13.60)$$

$$E = E_2 = A_2 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \ell \quad (13.61)$$

$$E = E_3 = A_3 e^{-jk_3 x} \quad \text{pour } \ell \leq x \quad (13.62)$$

Dans (13.60), le terme $e^{-jk_1 x}$ représente l'onde incidente, tandis que le terme $e^{jk_1 x}$ doit représenter l'onde globalement réfléchiée par le dispositif. L'analyse de (13.61) est plus complexe. En effet, le terme $e^{-jk_2 x}$ rend compte d'une onde progressive dans le milieu (2), mais celle-ci provient non seulement d'une transmission de l'onde incidente mais aussi de réflexions à l'interface (21) d'une onde issue elle-même d'une réflexion à l'interface (23), décrite par le terme $e^{jk_2 x}$. On notera enfin

9. Les coefficients de transmission sont quant à eux toujours positifs.

que dans (13.62), nous n'avons pas pris en compte le terme e^{jk_3x} qui ne pourrait provenir que de réflexions dues à une limitation du milieu (3). Or celui-ci est encore supposé illimité vers la région $x \rightarrow +\infty$. La continuité de E et celle de sa dérivée première imposent les conditions (figure 13.5)

- pour $x = 0$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad \text{et} \quad n_1(A_1 - B_1) = n_2(A_2 - B_2) \quad (13.63)$$

- pour $x = \ell$

$$A_2 e^{-jk_2\ell} + B_2 e^{jk_2\ell} = A_3 e^{-jk_3\ell} \quad \text{et} \quad n_2(A_2 e^{-jk_2\ell} - B_2 e^{jk_2\ell}) = n_3 A_3 e^{-jk_3\ell} \quad (13.64)$$

où les indices ont été introduits via les relations $k_i = \omega n_i/c$, $i = 1, 2, 3$. De (13.63) on déduit

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) A_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) B_1 \\ B_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) A_1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) B_1 \end{aligned} \quad (13.65)$$

Introduisons alors les coefficients de réflexion et de transmission de l'interface (21) :

$$r_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_{12} \quad , \quad t_{21} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} \quad (13.66)$$

ce qui permet de récrire (13.65) sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{pmatrix} 1 & r_{21} \\ r_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (13.67)$$

Posons $A'_2 = A_2 e^{-jk_2x}$, $B'_2 = B_2 e^{jk_2x}$, $A'_3 = A_3 e^{-jk_3x}$. D'après (13.64), on a similairement

$$\begin{pmatrix} A'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{32}} \begin{pmatrix} 1 & r_{32} \\ r_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{pmatrix} \quad (13.68)$$

où

$$r_{32} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \quad , \quad t_{32} = \frac{2n_3}{n_3 + n_2} \quad (13.69)$$

sont les coefficients de réflexion et de transmission, respectivement, de l'interface (32).

Comme

$$\begin{pmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-jk_2x} & 0 \\ 0 & e^{jk_2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (13.70)$$

on aboutit finalement à la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} A'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (13.71)$$

où M est la matrice 2×2

$$M = \frac{1}{t_{21}t_{32}} \begin{pmatrix} 1 & r_{32} \\ r_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-jk_2x} & 0 \\ 0 & e^{jk_2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_{21} \\ r_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (13.72)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (13.73)$$

et qui a pour inverse¹⁰

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (13.74)$$

Comme

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} A'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \delta A'_3 \\ -\gamma A'_3 \end{pmatrix} \quad (13.75)$$

on en déduit immédiatement les expressions formelles des coefficients de réflexion et de transmission du dispositif

$$r = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{\gamma}{\delta}, \quad t = \frac{A_3}{A_1} = e^{jk_3\ell} \frac{\det M}{\delta} \quad (13.76)$$

Comme

$$\det M = \frac{(1 - r_{21}^2)(1 - r_{32}^2)}{t_{32}^2 t_{21}^2} = \frac{t_{12} t_{23}}{t_{21} t_{32}} \quad (13.77)$$

et que

$$M = \frac{1}{t_{21}t_{32}} \begin{pmatrix} e^{-jk_2\ell} + r_{32}r_{21}e^{jk_2\ell} & r_{21}e^{-jk_2\ell}r_{32}e^{jk_2\ell} \\ r_{21}e^{jk_2\ell} + r_{32}e^{-jk_2\ell} & e^{jk_2\ell} + r_{32}r_{21}e^{-jk_2\ell} \end{pmatrix} \quad (13.78)$$

montrant que

$$\gamma = \frac{r_{21}e^{jk_2\ell} + r_{32}e^{-jk_2\ell}}{t_{21}t_{32}}, \quad \delta = \frac{e^{jk_2\ell} + r_{32}r_{21}e^{-jk_2\ell}}{t_{21}t_{32}} \quad (13.79)$$

on obtient, en tenant compte de $r_{21} = -r_{12}$, $r_{32} = -r_{23}$,

$$\boxed{r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-j\varphi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-j\varphi}}, \quad t = e^{jk_3\ell} e^{-j\varphi/2} \frac{t_{12}t_{23}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-j\varphi}}} \quad (13.80)$$

où l'on a posé comme précédemment

$$\varphi = 2k_2\ell = 4\pi \frac{\ell}{\lambda_2}$$

On notera bien que cette fois les coefficients r et t sont *complexes*. Le champ électrique (complet) de l'onde réfléchi dans le milieu (1) est donné par

$$E_r = r E_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad (13.81)$$

10. S'agissant d'un problème physique bien posé, il ne fait nul doute au physicien que cette matrice inverse existe. Cette remarque est faite pour rassurer un lecteur trop focalisé sur des rigueurs mathématiques ici déplacées.

Ecrivons r sous la forme cartésienne $r = a + jb$. Le champ *réel* de cette onde s'écrit (E_0 est supposé réel positif)

$$E_r = E_0 (a \cos(\omega t + k_1 x) - b \sin(\omega t + k_1 x)) \quad (13.82)$$

Le vecteur de Poynting correspondant a pour expression

$$\vec{P}_r = - \vec{e}_x n_1 c \epsilon_0 E_r^2$$

dont la valeur moyenne temporelle est

$$\langle \vec{P}_r \rangle = - \vec{e}_x n_1 c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} (a^2 + b^2) \quad (13.83)$$

Il s'ensuit que le facteur de réflexion du dispositif, défini ici encore par (13.37), a pour expression

$$R = |r|^2 \quad (13.84)$$

soit, explicitement,

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \varphi}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \varphi} \quad (13.85)$$

Le facteur de transmission a une définition légèrement différente de (13.38) :

$$T = \frac{\left. \left| \langle \vec{P}_t \rangle \right| \right\}_{x=\ell}}{\left. \left| \langle \vec{P}_i \rangle \right| \right\}_{x=0}} \quad (13.86)$$

On trouve

$$T = \frac{n_3}{n_1} \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \varphi} \quad (13.87)$$

On vérifie aisément que (13.85) et (13.87) satisfont la relation $R + T = 1$, qui traduit la conservation de l'énergie, en l'absence d'absorption.

Supposons que l'on ait $r_{12}r_{23} > 0$. Il est alors manifeste que T est *maximum* et donc que R est *minimum* pour $\cos \varphi = -1$, soit pour

$$\ell = (2p + 1) \frac{\lambda_2}{4} \quad (13.88)$$

La valeur correspondante de R est

$$R_{\min} = \frac{(r_{12} - r_{23})^2}{(1 - r_{12}r_{23})^2} \quad (13.89)$$

En théorie, cette valeur pourrait s'annuler si $r_{12} = r_{23}$, condition qui exprime simplement que pour annuler la réflexion globale du dispositif, les amplitudes des ondes réfléchies respectivement à l'interface (12) et à l'interface (23), doivent non seulement être en opposition de phase, mais avoir aussi les mêmes amplitudes. En termes d'indices, cela donne

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \tag{13.90}$$

Bien que théorique, cette condition sert néanmoins de guide dans les applications pratiques pour le choix du matériau de la couche anti-reflet. Considérons l'exemple suivant. Le premier milieu est de l'air ($n_1 \simeq 1$). Le second est du fluorure de magnésium ($n_2 = 1,36$), et le troisième est du verre organique ($n_3 \simeq 1,6$). On trouve $R_{\min} = 5 \cdot 10^{-3}$, alors que le facteur de réflexion de l'interface (13) seul est $r_{13}^2 = 5 \cdot 10^{-2}$: théoriquement, un traitement anti-reflet permettrait donc d'amoindrir la réflexion d'un facteur 10, au maximum. A noter toutefois que le problème de la clarification optique se complique par le fait que les indices peuvent dépendre de la longueur d'onde. Ceci fait que la condition (13.90) peut n'être approximativement vérifiée que dans un certain intervalle de longueurs d'onde. La figure 13.6 présente les résultats expérimentaux concernant la clarification optique d'un système optique comprenant 44 surfaces réfringentes. On y voit trois courbes donnant la variation, en fonction de la longueur d'onde λ_0 , de facteurs de transmission T (en incidence normale). La courbe (1) donne le facteur T du système sans traitement. Comme le montre la courbe (2), l'utilisation de deux couches de diélectriques disposées alternativement sur le verre permet d'améliorer la transmission de la lumière dans la région centrale du spectre optique. La courbe (3) correspond à l'utilisation de trois couches anti-reflet et montre une amélioration sensible dans une région plus grande du spectre. On constate aussi que le facteur T après traitement est le plus faible dans les régions extrêmes du spectre visible, où la réflexion est donc plus grande. C'est pourquoi les systèmes optiques clarifiés présentent à la réflexion une couleur pourpre, mélange de rouge et de violet.

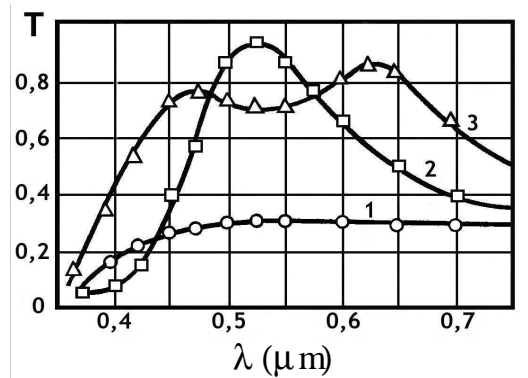


Figure 13.6 : Clarification optique

♣ On notera que si $r_{12}r_{23}$ est négatif, R est minimum pour $\cos \varphi = 1$, soit pour

$$\ell = p \frac{\lambda_2}{2} \quad p \text{ entier } \geq 1 \tag{13.91}$$

Cette valeur minimum de R est alors

$$R_{\min} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2} \tag{13.92}$$

et qui est nulle si $r_{12} = -r_{23}$, condition qui n'est finalement réalisée que si $n_1 = n_3$, indépendamment du milieu (2). Cette circonstance peut donc apparaître lorsqu'on étudie la transmission

d'onde au travers d'une lame diélectrique à faces parallèles, les deux milieux de part et d'autre étant identiques (par exemple, l'air). Elle explique notamment pourquoi les fenêtres d'un édifice apparaissent si sombres lorsqu'on les regarde sous incidence normale.

Remarquons qu'on a récemment découvert¹¹ qu'une surface quelconque recouverte de nanoparticules de silicium ne réfléchit pratiquement plus la lumière. Les nanoparticules, en forme de baguettes, sont implantées sur la surface selon un angle de 45° . La lumière incidente est alors très peu déviée et très peu réfléchi. L'intérêt de ce nouveau revêtement anti-reflet est qu'il fonctionne sur un large spectre, allant de presque tout le domaine visible jusqu'à l'infrarouge, et pour tous les angles d'incidence. Cette extraordinaire innovation a un immense potentiel d'applications : capteurs solaires, LED plus lumineuses, miroirs à fort pouvoir réflecteur (obtenus en inversant le procédé). Cependant, ce revêtement semble encore très fragile et sa fabrication reste pour le moment très coûteuse.

13.3.2 Seconde méthode de calcul

La méthode présentée ci-dessous, plus physique que la précédente, offre l'avantage de mettre en évidence les réflexions multiples aux deux interfaces qui conduisent à un phénomène d'interférence d'une multitude d'ondes.

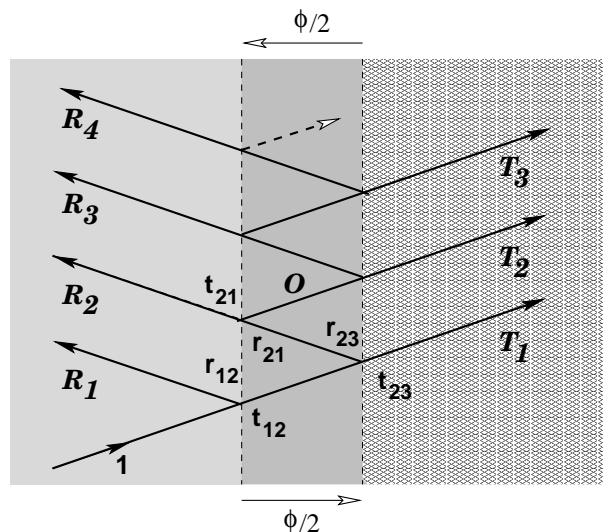


Figure 13.7

Le processus de réflexion et de transmission multiples est schématisé dans la figure 13.7, où les ondes sont représentées par des rayons, dessinés obliquement pour la clarté des figures bien que l'on ne considère ici que le cas d'une incidence normale.

Donnons la valeur 1 à l'amplitude de l'onde incidente. A l'interface (12), cette onde donne naissance à une première onde réfléchi \mathcal{R}_1 d'amplitude r_{12} dans le milieu (1) et à une première onde transmise d'amplitude t_{12} dans le milieu (2). A l'interface (23), cette onde transmise présente un déphasage égal à $\omega\ell/v_2 = \omega\ell n_2/c = \varphi/2$, du fait de la propagation à la vitesse $v_2 = c/n_2$ dans le milieu (2), et son amplitude est alors $t_{12}e^{-j\varphi/2}$. A cet interface, elle donne naissance à une onde réfléchi d'amplitude $r_{23}t_{12}e^{-j\varphi/2}$ et à une première onde transmise dans le milieu (3), \mathcal{T}_1 , d'amplitude $t_{23}t_{12}e^{-j\varphi/2}$. La première onde réfléchi à l'interface (23) se propage dans le milieu (2) en revenant vers l'interface (21). Son déphasage a augmenté en conséquence d'une

11. Voir par exemple : Sameer Chhajed, David J. Poxson, Xing Yan, Jaehye Cho, E. Fred Schubert, Roger E. Welsler, Ashok K. Sood, and Jong Kyu Kim, "Nanostructured Multilayer Tailored-Refractive-Index Antireflection Coating for Glass with Broadband and Omnidirectional Characteristics", Applied Physics Express 4 (2011) 052503.

quantité $\varphi/2$ et son amplitude est alors $r_{23}t_{12}e^{-j\varphi}$. A l'interface (21), elle donne naissance à une onde transmise dans le milieu (1), que nous noterons \mathcal{R}_2 , dont l'amplitude est $t_{21}r_{23}t_{12}e^{-j\varphi}$, et à une onde réfléchie d'amplitude $r_{21}r_{23}t_{12}e^{-j\varphi}$. Appelons \mathcal{O} cette dernière. \mathcal{O} se propage dans le milieu (2) vers l'interface (23) en prenant un nouveau déphasage $\varphi/2$. A l'interface elle donne naissance à une onde transmise vers le milieu (3), \mathcal{T}_2 , d'amplitude $t_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-3j\varphi/2}$, et à une onde réfléchie \mathcal{O}' d'amplitude $r_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-3j\varphi/2}$. \mathcal{O}' se propage dans le milieu (2) vers l'interface (21) où elle présente un nouveau déphasage $\varphi/2$. Elle y donne naissance à une onde transmise vers le milieu (1), \mathcal{R}_3 , dont l'amplitude est $t_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-2j\varphi}$ et à une onde réfléchie d'amplitude $r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-2j\varphi}$. Il devient clair que dans ce processus de réflexion multiple dans le milieu (2), le passage d'une onde renvoyée vers le milieu (1) à la suivante induit, à partir de \mathcal{R}_2 , le facteur multiplicatif

$$\rho = \mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2 = \frac{t_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-2j\varphi}}{t_{21}r_{23}t_{12}e^{-j\varphi}} = r_{23}r_{21}e^{-j\varphi} \quad (13.93)$$

De même, le passage d'une onde transmise dans le milieu (3) à la suivante induit le facteur

$$\tau = \mathcal{T}_2/\mathcal{T}_1 = \frac{t_{23}r_{21}r_{23}t_{12}e^{-3j\varphi/2}}{t_{23}t_{12}e^{-j\varphi/2}} = r_{21}r_{23}e^{-j\varphi} = \rho \quad (13.94)$$

Toutes les ondes ainsi obtenues, étant *cohérentes* entre elles, vont interférer, pour donner, respectivement, l'onde totale réfléchie \mathcal{R} pour celles renvoyées dans le milieu (1) et l'onde transmise totale \mathcal{T} pour celles transmises dans le milieu (3).

L'amplitude de \mathcal{R} , qui n'est autre que le coefficient de réflexion global r est donc

$$r = r_{12} + r_{23}t_{12}t_{21}e^{-j\varphi} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = r_{12} + \frac{r_{23}t_{12}t_{21}e^{-j\varphi}}{1 - \rho} \quad (13.95)$$

Soit, en tenant compte de la relation $r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1$,

$$r = r_{12} + \frac{r_{23}t_{12}t_{21}e^{-j\varphi}}{1 - r_{21}r_{23}e^{-j\varphi}} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-j\varphi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-j\varphi}} \quad (13.96)$$

On retrouve ainsi la formule donnée en (13.80).

On calcule de façon similaire le coefficient de transmission global t comme l'amplitude de l'onde transmise \mathcal{T} . On obtient

$$t = t_{12}t_{23}e^{-j\varphi/2} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{t_{12}t_{23}e^{-j\varphi/2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-j\varphi}} \quad (13.97)$$

Ici encore, on retrouve la formule de t donnée en (13.80), au facteur de phase $e^{jk_3\ell}$ près, dont nous n'avons pas tenu compte ici, et qui représente en fait une *avance* de phase de l'onde du milieu (3) sur celle du milieu (1), lorsqu'on compare l'amplitude de l'onde transmise telle qu'elle se présente à une date donnée à l'interface (23), à celle de l'onde incidente telle qu'elle se présente à la même date à l'interface (12).

13.3.3 Augmentation du facteur de réflexion

Si $r_{12}r_{23} < 0$, une couche quart-d'onde déposée sur une surface en augmente le facteur de réflexion. Cette constatation est à la base des procédés pratiques de confection de surfaces optiques à grand facteur de réflexion. Le principe est le suivant. On dépose sur du verre, et alternativement, des couches de même *épaisseur optique* $n_i\ell_i = \lambda_0/4$, mais d'indices différents, et ce, en alternant une couche d'un matériau de grand indice, comme le sulfure de zinc pour lequel $n_1 \simeq 2,3$, et une couche d'un matériau d'indice plus petit, comme le fluorure de lithium pour lequel $n_2 \simeq 1,3$.

Toutes les ondes réfléchies sont de même phase et se renforcent mutuellement. Suivant le nombre de couches déposées, on peut ainsi obtenir de grands facteurs de réflexion, pouvant aller jusque pratiquement 1, valeur recherchée par les techniques laser. Cependant, ces types de miroirs ne réfléchissent que dans une bande de longueurs d'onde généralement étroite.

13.4 Incidence oblique : relation de Snell-Descartes

Considérons maintenant une onde plane monochromatique arrivant depuis un milieu (1) vers une interface plane entre ce milieu et un milieu (2), et dont le vecteur d'onde \vec{k}_i n'est pas perpendiculaire à cette interface. On parle alors d'*incidence oblique* de l'onde. Nous noterons encore $x'x$ la normale à l'interface, dans le sens (1) \rightarrow (2). Pour former un repère cartésien, nous choisirons l'axe $y'y$, perpendiculaire à $x'x$, comme étant dans le plan contenant $x'x$ et \vec{k}_i , appelé *plan d'incidence*. L'axe $z'z$ est perpendiculaire à ce plan et l'on a donc $k_{iz} = 0$ (figure 13.8).

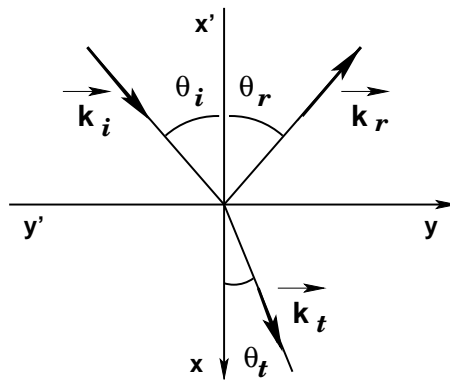


Figure 13.8

Les expressions des champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise contiennent les facteurs

$$e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad , \quad e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad , \quad e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \tag{13.98}$$

respectivement, \vec{k}_r et \vec{k}_t étant les vecteurs d'onde respectifs des ondes réfléchie et transmise. En écrivant comme précédemment les conditions de continuité pour $x = 0$, on est conduit à faire les identifications

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_t = \omega \\ k_{rz} &= k_{tz} = k_{iz} = 0 \\ k_{ry} &= k_{ty} = k_{iy} \end{aligned} \tag{13.99}$$

La première de ces relations indique, comme précédemment, qu'il ne se produit pas de changement de fréquence à l'interface. La seconde indique que

Les vecteurs d'onde des ondes réfléchie et transmise se trouvent dans le plan d'incidence

Les ondes incidente et réfléchie se propageant dans le même milieu, leurs vecteurs d'onde \vec{k}_i et \vec{k}_r ont même module. Utilisant la troisième relation, on obtient alors

$$\overrightarrow{k_r}^2 = k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = \overrightarrow{k_i}^2 = k_{ix}^2 + k_{iy}^2 \quad \text{soit} \quad k_{rx}^2 = k_{ix}^2 \quad (13.100)$$

et la seule solution physiquement acceptable est

$$k_{rx} = -k_{ix} \quad (13.101)$$

Notons alors θ_i l'angle que fait $\overrightarrow{k_i}$ avec $x'x$: c'est l'angle d'incidence. De même, notons θ_r l'angle que fait $\overrightarrow{k_r}$ avec la normale opposée xx' : c'est l'angle de réflexion. On en déduit de (13.101) que ces deux angles sont égaux :

$$\theta_r = \theta_i \quad (13.102)$$

Traduites en termes de rayons lumineux, les deux propriétés ainsi trouvées constituent les deux premières lois de Snell-Descartes qui fixent la direction des rayons réfléchi et réfracté (onde transmise)¹² :

♠ première loi

Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence

♠ deuxième loi

Les angles d'incidence et de réflexion (définis comme ci-dessus) sont égaux

Notons ensuite θ_t l'angle entre le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_t}$ et la normale $x'x$: c'est l'angle de réfraction. La troisième relation dans (13.99) conduit alors à la célèbre relation de Snell-Descartes :

♠ troisième loi

Pour chaque lumière monochromatique, il existe un rapport positif constant entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction :

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \quad (13.103)$$

La conséquence immédiate que l'on peut tirer de cette relation est que $\theta_t \neq \theta_i$, et que le rayon observé dans le milieu (2) ne se trouve pas dans le prolongement du rayon incident : à l'interface, il se produit une "brisure" de la ligne de propagation. C'est pourquoi ce phénomène est appelé *réfraction*.

12. Le terme de *réfraction* vient du latin *refringere* qui signifie *briser*.

Il est utile de rappeler ici que l'origine de ce phénomène, comme celui de la réflexion, est à attribuer à la réaction du milieu matériel (2) (et aussi du milieu (1) s'il est matériel) à l'excitation électromagnétique apportée par une onde incidente. Cette excitation provoque une émission d'ondes secondaires cohérentes par tous les constituants émetteurs du milieu. Il apparaît que, interférant entre elles et avec l'onde incidente, ces ondes le font de façon constructives justement dans la direction du rayon dit réfracté dans le milieu (2) et dans la direction du rayon dit réfléchi dans le milieu (1).

13.4.1 Réflexion totale

Les relations (13.99) montrent que pour un angle d'incidence donné il existera toujours un et un seul vecteur d'onde "réfléchi". Par contre, au vu de la relation de Snell-Descartes (13.103), une onde réfractée ne peut exister que si l'on a

$$\sin \theta_t \leq 1 \quad , \quad \text{soit} \quad \sin \theta_i \leq \frac{n_2}{n_1} \tag{13.104}$$

Cette condition est toujours vérifiée dès lors que $n_2 \geq n_1$, c'est-à-dire lors d'un passage d'un milieu vers un autre *plus réfringent*. Dans le cas d'un passage d'un milieu vers un autre *moins réfringent*, $n_1 \geq n_2$, il n'existe d'onde réfractée que pour des angles d'incidence *inférieurs* à l'angle limite maximum θ_ℓ tel que

$$\sin \theta_\ell = \frac{n_2}{n_1} < 1 \tag{13.105}$$

Pour $\theta_i > \theta_\ell$, il ne subsistera qu'une onde réfléchie, avec l'onde incidente, dans le milieu (1). On dit qu'il y a alors *réflexion totale*.

Ce phénomène a d'ailleurs été mis à profit pour réaliser des dispositifs expérimentaux de mesure d'indice, dont un schéma est donné à la figure 13.9. Le milieu de référence est une demi-boule d'un verre très réfringent. Les rayons qui se réfléchissent sur le matériau à étudier le sont partiellement pour une incidence inférieure à l'angle limite, et totalement pour une incidence supérieure. En étudiant la lumière réfléchie en fonction de l'angle d'incidence, on observe une variation brusque de l'éclairement au voisinage de l'angle limite.

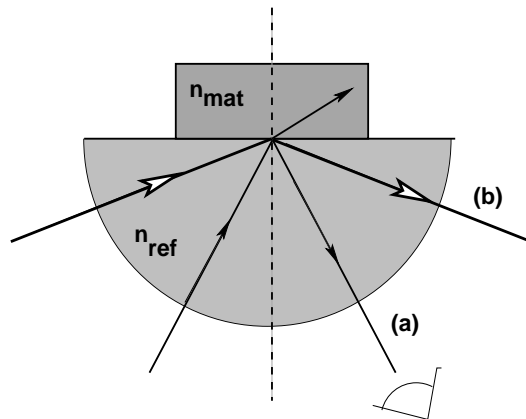


Figure 13.9 : (a) réflexion partielle (b) réflexion totale

13.4.2 Fibres optiques

L'application de la réflexion totale la plus spectaculaire et la plus célèbre actuellement concerne les *fibres optiques*, qui sont des guides d'ondes lumineuses, largement utilisés dans les systèmes de communication optiques.

Actuellement, on utilise une fibre dite à *saut d'indice*. De forme cylindrique, elle est constituée d'un coeur d'indice n_1 , entouré d'une gaine d'indice n_2 , le tout enveloppé d'un revêtement plastique. Pour que le signal injecté dans le coeur de la fibre soit guidé sans se perdre dans la gaine, on s'assure que les rayons lumineux subissent une réflexion totale à l'interface coeur-gaine. C'est pourquoi, au cours de sa fabrication, on ajoute un dopant au matériau de la gaine pour en diminuer l'indice. La lumière chemine ainsi dans la fibre, par une successions de réflexions totales.

Depuis les années 1970, avec la mise au point de verres de très haute qualité, on a pu commencer à confectionner des fibres pour lesquelles les pertes de flux lumineux devenaient acceptables pour pouvoir envisager une transmission optique à grande distance. La silice (SiO_2), présente dans de nombreux minéraux tels le quartz, la calcédoine ou l'opale, est apparu comme un bon matériau pour les longueurs d'onde du proche infra-rouge (850 nm, 1300 nm, 1500 nm). La fabrication en série de lasers à semi-conducteurs émettant dans ces longueurs d'onde a d'ailleurs conforté le choix de la silice.

La fabrication d'une fibre commence par la réalisation d'un barreau cylindrique de Silice très pure. Placé dans un four à 2000°C , celui-ci est ensuite étiré pour former le coeur de la fibre. Une préforme d'une longueur de 1 m et de 10 cm de diamètre permet d'obtenir par étirement une fibre de 150 km ! Le coeur est ensuite entouré d'une silice de moindre qualité pour former la gaine.

Au cours de la fabrication de la fibre, on réalise l'écart d'indice entre le coeur et la gaine en dopant le coeur de germanium ou de phosphore pour augmenter son indice, et en dopant la gaine par du bore ou du fluor pour diminuer son indice.

On réalise aussi des fibres à bas coût et de moindres performances pour les utilisations en milieu perturbé, pour réaliser par exemple des circuits contrôle-commande (avion, métro).

Les applications des fibres optiques sont nombreuses. Elles concernent notamment :

- les télécommunications, pour la réalisation de réseaux haut-débit ;
- l'audiovisuel, pour la réalisation de réseaux cablés, en association avec le câble coaxial pour le raccordement des abonnés ;
- la médecine, où elles sont notamment utilisées en chirurgie, associées à un faisceau laser permettant de pulvériser des calculs rénaux, de découper une tumeur, réparer une rétine, etc ; et en endoscopie, pour éclairer l'intérieur du corps et transmettre des images au médecin ;
- les systèmes d'éclairage, et la signalisation routière ; des systèmes d'éclairage ont notamment été réalisés par un tissage de fibres inox et de fibres optiques.

Les télécommunications utilisent plutôt des fibres dites à *gradient d'indice*. Dans celles-ci, le coeur n'est plus homogène, l'indice de réfraction décroît depuis l'axe de la fibre jusqu'à l'interface avec la gaine.

13.4.3 Méthodes de construction des angles de réflexion et de transmission

♣ Méthode de la surface des indices

Le plan d'incidence est pris comme plan de figure (figure 13.10). A partir d'un point d'entrée M à l'interface, on trace deux cercles C_1 et C_2 de rayons n_1 et n_2 respectivement. Le prolongement d'un rayon incident IM coupe C_1 en un point A , dans le milieu (2). Traçant à partir de ce point

une droite Δ parallèle à $x'x$, celle-ci coupe C_1 en un point R dans le milieu (1), coupe l'interface en un point H , et coupe C_2 en un point T dans le milieu (2). Les vecteurs \vec{MA} , \vec{MR} et \vec{MT} ont même projection MH sur l'interface. Comme $MH = n_1 \sin \theta_1$, l'angle entre \vec{MT} et $x'x$ doit être égal à l'angle de réfraction cherché. La direction du rayon réfracté est donc celle de \vec{MT} . La direction du rayon réfléchi est de façon évidente donnée par \vec{MR} .

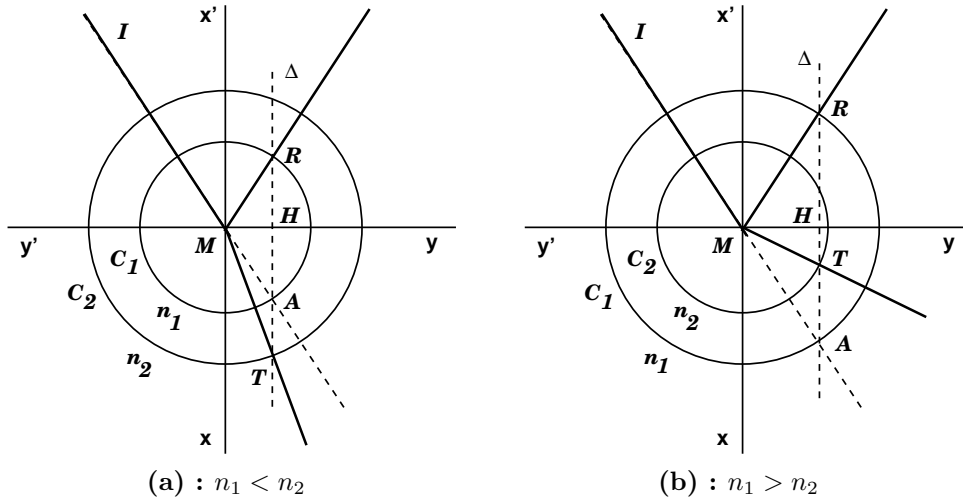


Figure 13.10

On voit que cette construction est toujours possible si $n_2 > n_1$ car, dans ce cas, la droite Δ a toujours un point d'intersection avec C_2 (figure 13.10 (a)).

Si $n_2 < n_1$, le rayon IM extrême qui peut pénétrer dans le milieu (2) est tel que Δ soit tangent en H au cercle C_2 (T et H confondus). Au-delà, le point T n'existe plus, il ne peut y avoir de rayon réfracté (figure 13.10 (b)).

♣ Méthode de Huygens

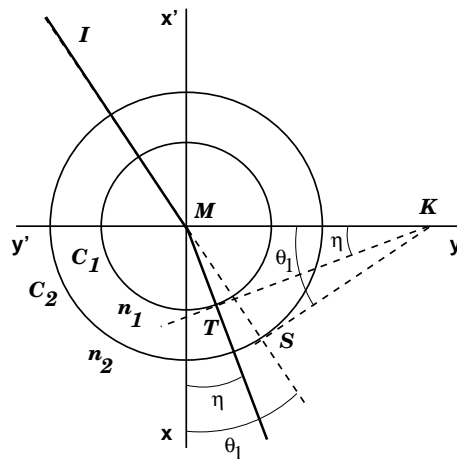


Figure 13.11 : Construction de Huygens (cas $n_1 < n_2$)

Le prolongement du rayon incident IM coupe C_2 en un point S . A partir de S , on trace la tangente à C_2 , qui coupe l'interface en K . Puis à partir de K , on trace la tangente à C_1 . Notons

T le point de tangence obtenu et η l'angle \widehat{MKT} . L'angle entre \overrightarrow{MT} et $x'x$ est aussi égal à η . On a

$$MS = MK \sin \theta_1 = n_2 \quad , \quad MT = MK \sin \eta = n_1 \quad (13.106)$$

d'où, en faisant le rapport,

$$\frac{\sin \eta}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (13.107)$$

ce qui implique que η doit être égal à l'angle de réfraction θ_r . La direction du rayon réfracté est donc celle de \overrightarrow{MT} .

13.4.4 Onde évanescente

Il serait faux de croire que dans les conditions de réflexion totale il n'existe en aucun cas d'onde transmise. Il en existe une, en effet, appelée *onde évanescente*. Elle se propage le long de l'interface et son amplitude décroît à mesure que l'on pénètre dans le milieu (2). Pour le montrer, récrivons

$$k_{tx}^2 = k_2^2 - k_{ty}^2 = k_2^2 - k_{iy}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1) \quad (13.108)$$

Lorsque $n_1 \sin \theta_1 > n_2$, k_{ix}^2 est *négligatif* et k_{tx} est donc imaginaire pur :

$$k_{tx} = -j \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} = -\frac{j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}} \quad (13.109)$$

L'amplitude de l'onde transmise est ainsi proportionnelle à

$$e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} = e^{j(\omega t - k_{tx}x - k_{ty}y)} = e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - k_{ty}y)} \quad (13.110)$$

L'onde se propage le long de l'interface avec la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_{ty}} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_1} < \frac{c}{n_2} \quad (13.111)$$

Cette onde non homogène n'existe dans le milieu (2) que dans une couche superficielle dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_0 . Elle peut notamment être décelée expérimentalement dans la gamme des ondes ultra-courtes. Mais on conçoit aisément que l'expérience soit certainement plus difficile à réaliser dans la gamme optique.

13.5 Complément I : La relation de Snell-Descartes comme conséquence du principe de Fermat

On se place dans le cadre de l'optique géométrique où l'on parle de rayons lumineux. Un dioptré plan, schématisé par le plan zOx , sépare deux milieux l.h.i. d'indices n_1 et n_2 , respectivement. Le premier milieu (1) correspond à la région $y > 0$ et la vitesse de propagation de la lumière y est égale à $v_1 = c/n_1$. Dans le second milieu (2), correspondant à la région $y < 0$, cette vitesse est égale à $v_2 = c/n_2$.

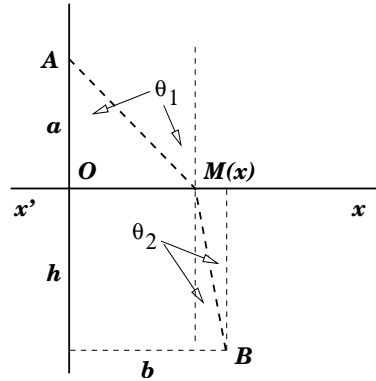


Figure 13.12

Un rayon lumineux, passant par le point $A(0, a > 0, 0)$ du milieu (1) et par le point $B(b, -h < 0, 0)$ du milieu (2), traverse le dioptré en un certain point $M(x, 0, 0)$. D'après le principe de Fermat, le chemin optique $L = n_1 AM + n_2 MB$ doit être extrêmu. Comme

$$\frac{L}{c} = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \quad (13.112)$$

où Δt_1 et Δt_2 sont les durées respectives des trajets AM et MB , cela signifie aussi que le temps de passage de la lumière de A en B via le point M doit en fait être *minimum*. Si ce point est unique, il s'agit en effet d'un minimum puisque $L > 0$. La position effective de M sera donc définie par

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (13.113)$$

Exprimons AM et MB en fonction de x :

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2} \quad , \quad MB = \sqrt{(b-x)^2 + h^2}$$

Il vient

$$\frac{\partial L}{\partial x} = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + n_2 \frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2 + h^2}} = 0 \quad (13.114)$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que si $0 < x < b$, et l'on a

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + h^2}} \quad (13.115)$$

Comme la suite le montre, la solution, si elle existe, est unique. Posons $\theta_1 = \widehat{MAO}$ et $\theta_2 = \widehat{MBH}$. On a

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad , \quad \sin \theta_2 = \frac{b - x}{\sqrt{(b - x)^2 + h^2}}$$

L'équation précédente prend alors la forme

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{13.116}$$

c'est-à-dire celle de la relation de Snell-Descartes, laquelle apparaît ainsi comme une conséquence du principe de Fermat¹³. Nous avons montré précédemment que la solution existe toujours si $n_1 < n_2$ et n'existe que pour un angle d'incidence θ_1 inférieur à un angle limite.

13. Montrer que la solution trouvée correspond à un minimum du chemin optique (13.112).

13.6 Complément II : L'effet Compton

Dans un processus de collision entre un photon et un électron initialement au repos, le photon cède une partie de son énergie à l'électron. Il en résulte une modification de la fréquence, ou, de façon équivalente de la longueur d'onde de l'onde accompagnant le photon : c'est l'effet découvert par Compton¹⁴.

Dans la dualité "onde-corpuscule", le photon est la particule qui accompagne une onde électromagnétique¹⁵. Dans le cas d'une onde plane monochromatique de fréquence ν se propageant dans une direction de vecteur unitaire \vec{u} , l'énergie et la quantité de mouvement du photon sont bien définies et données respectivement par

$$E = h\nu \quad , \quad \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} = \frac{E}{c} \vec{u} \quad (13.117)$$

h étant la constante de Planck.

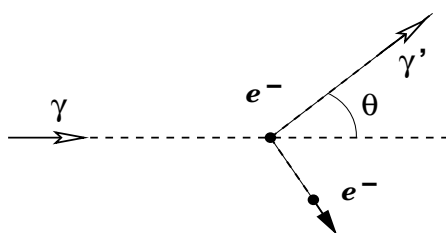


Figure 13.13

Le processus Compton est assimilé à une collision élastique, selon le protocole suivant. Le référentiel d'étude est galiléen. Dans ce référentiel, l'électron est supposé initialement au repos à l'origine O . La trajectoire du photon initial d'énergie $E (= h\nu)$ est l'axe $z'z$. La collision change cette trajectoire qui devient une droite passant par O et dont le vecteur unitaire est noté \vec{u}_γ . On note $E' (= h\nu')$ l'énergie du photon après collision. En absorbant une partie de l'énergie du photon incident, l'électron acquiert une vitesse \vec{v} dont la direction est définie par un vecteur unitaire noté \vec{u}_e . Les deux vecteurs \vec{u}_γ et \vec{u}_e forment un plan que l'on peut définir comme le plan xOz (figure 13.13). On note θ l'angle entre \vec{u}_γ et \vec{e}_z , de sorte que

$$\vec{u}_\gamma = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

La collision laisse inchangées l'énergie totale et la quantité de mouvement totale du système électron-photon. Utilisant la cinématique classique, c'est-à-dire non-relativiste, ces lois de conservation nous permettent d'écrire

$$E = E' + \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad \frac{E}{c} \vec{e}_z = m \vec{v} + \frac{E'}{c} \vec{u}_\gamma \quad (13.118)$$

m étant la masse de l'électron. La seconde relation conduit à

$$m^2v^2 = \frac{1}{c^2} (E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta) = \frac{1}{c^2} ((E - E')^2 + 2EE'(1 - \cos \theta)) \quad (13.119)$$

Supposons que le transfert d'énergie du photon vers l'électron soit faible. Plus précisément, admettons que l'on ait $v^2 \ll c^2$ de sorte que $E - E' \ll mc^2$. Or,

14. A.H. Compton, Phys. Rev. **21**, 715 (1923).

15. Einstein, 1905.

$$mv^2 = 2(E - E') = \frac{1}{mc^2} ((E - E')^2 + 2EE'(1 - \cos \theta)) \simeq \frac{2}{mc^2} EE'(1 - \cos \theta) \quad (13.120)$$

soit

$$E - E' \simeq \frac{1}{mc^2} EE'(1 - \cos \theta) \quad (13.121)$$

Il apparaît que cette dernière formule, trouvée ici de façon approchée, devient en fait une formule *exacte* si l'on utilise la cinématique relativiste. Traduite en termes de fréquences, elle donne

$$\nu - \nu' = \frac{h}{mc^2} \nu \nu' (1 - \cos \theta) \quad (13.122)$$

Cette relation indique que la collision provoque bien un changement de fréquence de l'onde accompagnant le photon, et que celui-ci dépend de *l'angle de diffusion* θ du photon. La formule est le plus souvent présentée en terme de longueurs d'ondes. Ecrivant $\lambda = c/\nu$, $\lambda' = \nu'/c$, il vient

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (13.123)$$

Ces formules ont été vérifiées expérimentalement maintes et maintes fois, confirmant à la fois l'hypothèse du photon et la cinématique relativiste¹⁶. La grandeur

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (13.124)$$

homogène à une longueur, est appelée *longueur d'onde Compton*. Elle a pour valeur numérique

$$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \cdot 10^{-2} \text{ \AA} \quad (13.125)$$

On voit que dans le domaine optique $\Delta\lambda/\lambda \simeq 4 \cdot 10^{-6}$ et l'effet est alors complètement négligeable.

16. On mesure les paramètres de l'électron final dit *de recul*.

13.7 Complément III : Formules de Fresnel

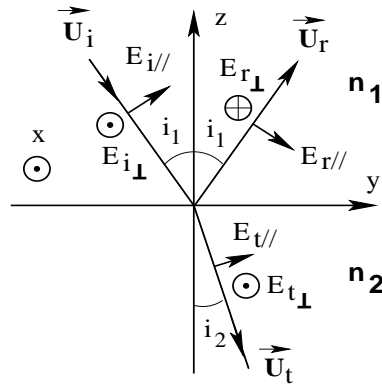


Figure 13.14

Les formules de Fresnel généralisent les formules (13.31) au cas de l'incidence oblique (figure 13.14). Les vecteurs unitaires définissant les directions de propagation des ondes planes incidente, réfléchie et transmise sont

$$\vec{U}_i = (0, \sin i_1, -\cos i_1), \quad \vec{U}_r = (0, \sin i_1, \cos i_1), \quad \vec{U}_t = (0, \sin i_2, -\cos i_2) \quad (13.126)$$

respectivement. Pour $z = 0$, les composantes des champs électriques correspondants seront écrites comme suit

$$\begin{aligned} E_{ix} &= E_{i\perp}, & E_{iy} &= E_{i//} \cos i_1, & E_{iz} &= E_{i//} \sin i_1 \\ E_{rx} &= E_{r\perp}, & E_{ry} &= E_{r//} \cos i_1, & E_{rz} &= -E_{r//} \sin i_1 \\ E_{tx} &= E_{t\perp}, & E_{ty} &= E_{t//} \cos i_2, & E_{tz} &= E_{t//} \sin i_2 \end{aligned} \quad (13.127)$$

avec des notations évidentes (voir figure 13.14). On en déduit les composantes des champs magnétiques associés¹⁷ :

$$\begin{aligned} B_{ix} &= \frac{n_1}{c} E_{i//}, & B_{iy} &= -\frac{n_1}{c} E_{i\perp} \cos i_1, & B_{iz} &= -\frac{n_1}{c} E_{i\perp} \sin i_1 \\ B_{rx} &= -\frac{n_1}{c} E_{r//}, & B_{ry} &= \frac{n_1}{c} E_{r\perp} \cos i_1, & B_{rz} &= -\frac{n_1}{c} E_{r\perp} \sin i_1 \\ B_{tx} &= \frac{n_2}{c} E_{t//}, & B_{ty} &= -\frac{n_2}{c} E_{t\perp} \cos i_2, & B_{tz} &= -\frac{n_2}{c} E_{t\perp} \sin i_2 \end{aligned} \quad (13.128)$$

La continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique donne une première série de relations :

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}, \quad B_{ix} + B_{rx} = B_{tx}$$

conduisant à

$$\cos i_1 (E_{i//} + E_{r//}) = E_{t//} \cos i_2, \quad n_1 (E_{i//} - E_{r//}) = n_2 E_{t//}$$

Introduisant alors un coefficient de réflexion $r_{//} = E_{r//}/E_{i//}$ et de transmission $t_{//} = E_{t//}/E_{i//}$ pour les ondes dont les champs électriques sont dans le plan d'incidence, on obtient

17. En utilisant la relation $\vec{B} = \frac{n}{c} \vec{U} \wedge \vec{E}$, valable pour les ondes planes.

$$\cos i_1 (1 + r_{//}) = t_{//} \cos i_2 \quad , \quad n_1 (1 - r_{//}) = n_2 t_{//}$$

d'où

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \quad , \quad t_{//} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \quad (13.129)$$

lesquelles expressions redonnent bien (13.31) dans le cas $i_1 = 0$, ce qui est normal, puisqu'alors $E_{//}$ est une composante tangentielle pour l'interface. Ici, on notera bien que l'orientation de $E_{r_{//}}$ a été choisie de telle sorte qu'elle coïncide avec celle de $E_{i_{//}}$ dans le cas de l'incidence normale, sans tenir compte du signe de $r_{//}$.

La même condition de continuité donne une seconde série de relations

$$E_{ix} + E_{rx} = E_{tx} \quad , \quad B_{iy} + B_{ry} = B_{ty}$$

Exprimées avec le coefficient de réflexion $r_{\perp} = E_{r_{\perp}}/E_{i_{\perp}}$ et de transmission $t_{\perp} = E_{t_{\perp}}/E_{i_{\perp}}$ pour les ondes dont les champs électriques sont perpendiculaires au plan d'incidence, elles conduisent à

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad , \quad n_1 \cos i_1 (1 - r_{\perp}) = n_2 \cos i_2 t_{\perp}$$

d'où

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad , \quad t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad (13.130)$$

expressions qui redonnent également (13.31) dans le cas $i_1 = 0$. Si l'on introduit la relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, dans le cas où les indices sont réels, tous ces coefficients peuvent s'exprimer uniquement en fonction des angles d'incidence et de réfraction :

$$\begin{aligned} r_{//} &= -\frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \quad , \quad t_{//} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \\ r_{\perp} &= -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \quad , \quad t_{\perp} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)} \end{aligned} \quad (13.131)$$

Les formules (13.129), (13.130) et (13.131) constituent les *formules de Fresnel*. Le lecteur vérifiera que B_z est bien continu et que

$$\Delta E_z = E_{tz} - (E_{iz} + E_{rz}) = -E_{i_{//}} (n_2^2 - n_1^2) \frac{2 \cos i_1 \sin i_1}{n_2 (n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)}$$

Pour n_1 et n_2 réels avec $n_1 < n_2$, la figure 13.15 donne une représentation qualitative des variations de $r_{//}$ (fig. 13.15 (a)) et r_{\perp} (fig. 13.15 (b)) en fonction de l'angle d'incidence i_1 . On y voit que r_{\perp} est toujours négatif et se rapproche de -1 pour les incidences rasantes (c'est-à-dire, pour i_1 voisin de $\pi/2$). Par contre, le coefficient $r_{//}$ s'annule lorsque i_1 est égal à l'*angle de Brewster* i_B correspondant à la configuration où onde incidente et onde réfractée ont des directions de propagation perpendiculaires ($i_1 + i_2 = \pi/2$), soit pour $i_1 = i_B$ avec

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.132)$$

et l'on a $r_{//} < 0$ pour $i_1 < i_B$, $r_{//} > 0$ pour $i_1 > i_B$. Pour $i_1 = i_B$, une onde dont le champ électrique est parallèle au plan d'incidence n'est pas réfléchi. Ce phénomène peut notamment

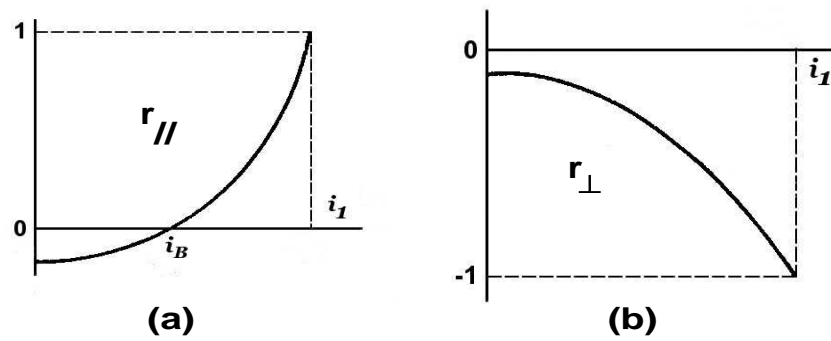


Figure 13.15

être mis à profit pour éliminer les pertes par réflexion ou pour produire de la lumière polarisée rectilignement.

Il est important ici de bien préciser les orientations des champs “incident” et “réfléchi”. Comme l’indique la figure 13.16, on constate qu’en fait il n’y a retournement du champ et donc apparition d’un déphasage de π à la réflexion que pour des angles d’incidence *supérieurs* à l’angle de Brewster (de façon évidente, les sens des vecteurs doivent être inversés si $E_{i//} < 0$).

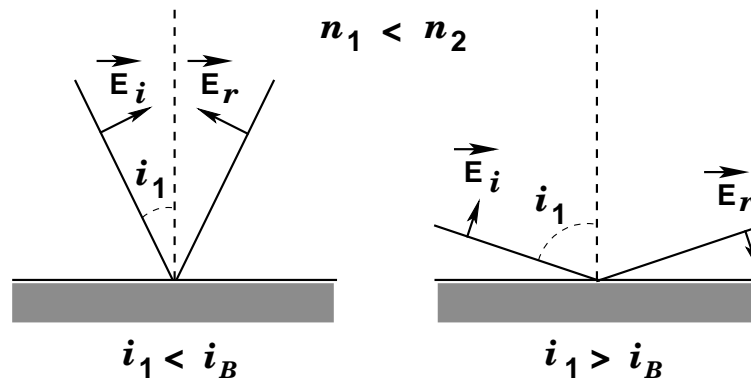


Figure 13.16

La figure 13.17 complète cette étude en indiquant les sens des composantes du champ réfléchi relativement aux sens choisis pour les composantes du champ incident, dans le cas $n_1 > n_2$, c’est-à-dire, lors d’un passage d’un milieu réfringent vers un second milieu *moins* réfringent. On a alors $\tan i_B = n_2/n_1 < 1$ et $r_{\perp} > 0$.

On notera aussi que les deux coefficients de transmission dans (13.129) et (13.130) sont toujours *positifs* et que les champs “transmis” sont donc toujours dans la configuration de la figure 13.14.

Concernant encore une interface entre deux diélectriques tels que $n_1 < n_2$, envisageons une onde incidente plane, polarisée rectilignement, dont le champ électrique fait un angle θ avec la normale $x'x$ au plan d’incidence. Les projections du champ parallèlement et perpendiculairement au plan d’incidence s’écrivent donc sous la forme (sur l’interface et facteurs inessentiels supprimés)

$$E_{i//} = E_0 \sin \theta \quad , \quad E_{i\perp} = E_{ix} = E_0 \cos \theta$$

Les projections correspondantes du champ électrique de l’onde réfléchi sont alors

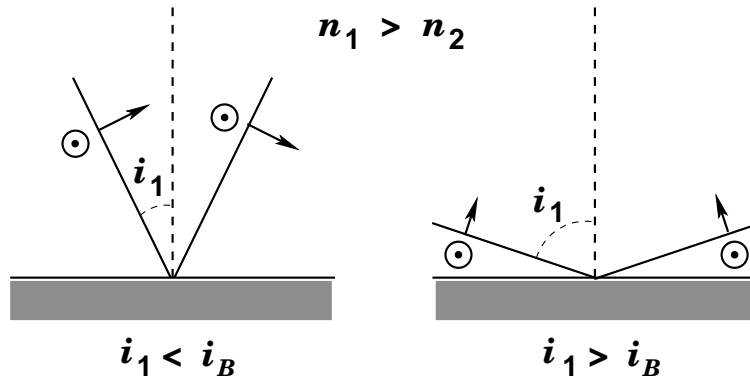


Figure 13.17

$$E_{r//} = r_{//} E_{i//} = E_0 r_{//} \sin \theta \quad , \quad E_{r\perp} = r_{\perp} E_{i\perp} = E_0 r_{\perp} \cos \theta$$

Comme $r_{//}$ et r_{\perp} sont ici réels, le seul déphasage non nul que peut amener la réflexion est π (donnant des composantes de signes opposés). Il en résulte que l'onde réfléchie est encore polarisée rectilignement et son champ électrique fait avec la normale $x'x$ un angle θ' tel que

$$\tan \theta' = \frac{E_{r//}}{E_{r\perp}} = \frac{r_{//}}{r_{\perp}} \tan \theta = \frac{\cos(i_1 + i_2)}{\cos(i_1 - i_2)} \tan \theta$$

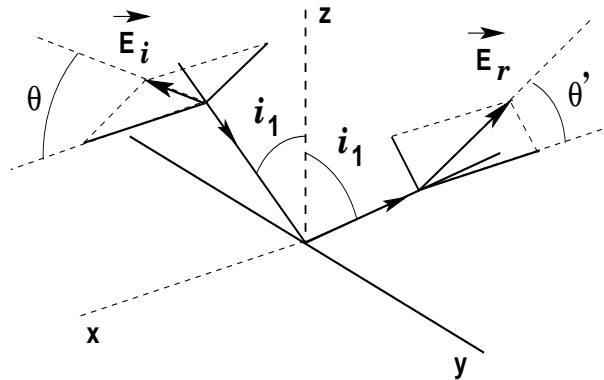


Figure 13.18

Ainsi, la réflexion fait tourner le plan de polarisation de ladite onde de l'angle $\eta = \theta' - \theta$ (figure 13.18).

Lorsque le milieu (2) est un réflecteur parfait, les équations de continuité se simplifient notablement puisque, dans ce cas, le champ électromagnétique dans ce milieu doit y être considéré comme nul. A l'interface, on a alors

$$E_{ix} + E_{rx} = 0 \quad , \quad E_{iy} + E_{ry} = 0 \quad , \quad B_{iz} + B_{rz} = 0 \quad (13.133)$$

où la troisième équation résulte en fait de la première. Le coefficient de réflexion pour la composante du champ électrique *perpendiculaire* au plan d'incidence, noté précédemment r_{\perp} , vaut donc -1 :

$$\frac{E_{rx}}{E_{ix}} = -1 \quad (13.134)$$

On peut dire aussi que si le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence, la réflexion provoque sur lui un simple déphasage égal à π (figure 13.19 (a)).

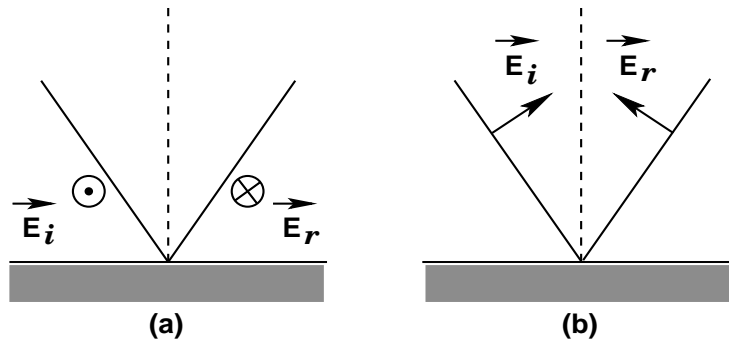


Figure 13.19

La conclusion est différente si le champ électrique se trouve dans le plan d'incidence. On a d'une part $E_{ry} = -E_{iy}$, et, tenant compte de la transversalité des ondes :

$$\vec{U}_i \cdot \vec{E}_i = \sin i_1 E_{iy} - \cos i_1 E_{iz} = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad E_{iz} = \tan i_1 E_{iy}$$

On a de même

$$\vec{U}_r \cdot \vec{E}_r = \sin i_1 E_{ry} + \cos i_1 E_{rz} = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad E_{rz} = -\tan i_1 E_{ry} = \tan i_1 E_{iy}$$

Il en résulte que, d'autre part,

$$E_{rz} = E_{iz} \tag{13.135}$$

La composante du champ parallèle à l'interface subit donc un déphasage de π à la réflexion, mais sa composante perpendiculaire à l'interface reste la même. La réflexion ne modifie donc pas l'amplitude totale du champ. Si l'on suit le champ dans sa direction de propagation, on peut dire que la réflexion n'induit dans ce cas aucun déphasage. C'est ce qu'illustre la figure 13.19 (b).

Ces conclusions se retrouvent aussi à partir des formules de Fresnel dans le cas où $n_2 \gg n_1$, pour lequel, d'après (13.132), l'angle de Brewster devient voisin de $\pi/2$. Ne subsiste alors que la configuration où $i_1 < i_B \approx \pi/2$, représentée par la partie gauche de la figure 13.16 et semblable à celle de la figure 13.19 (b).