

## Chapitre 15

# Phénomènes de diffraction

### 15.1 Conditions d'observation

Lorsqu'une onde électromagnétique rencontre un obstacle, celui-ci en provoque la *diffusion*, dans des directions dépendant a priori de sa géométrie. L'expérience montre en effet que chaque point de l'obstacle touché par l'onde incidente se comporte comme une nouvelle source émettant des ondes de même nature. L'onde qui résulte de cette interception est celle provenant de l'interférence de toutes les ondes secondaires émises par les divers points de l'obstacle et de l'onde incidente.

Envisageons tout d'abord un objet diffusant d'échelle microscopique, et plus précisément, un objet dont la taille caractéristique  $a$  peut être considérée comme petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde excitatrice. Le champ de l'onde peut alors être considéré comme uniforme sur l'extension spatiale de l'objet et l'on peut modéliser le phénomène de diffusion en combinant par exemple le modèle de l'électron lié de Lorentz introduit au paragraphe 12-1 et la théorie du dipôle oscillant exposée au paragraphe 11-6. Ce régime pour lequel  $\lambda \gg a$  est celui de la *diffusion de Rayleigh*. C'est celui considéré au chapitre 12 pour décrire les propriétés électromagnétiques macroscopiques des milieux continus en termes de *susceptibilité* et *d'indice de réfraction*. Ces grandeurs sont les produits finals des interférences des ondes secondaires émises par la multitude de diffuseurs élémentaires constituant ces milieux et caractérisent la réaction collective cohérente de ces diffuseurs à l'excitation d'une onde incidente. Considérant des milieux transparents isotropes "illimités", plus précisément des milieux dont la taille caractéristique  $L$  est très grande devant  $\lambda$ , une onde de cette longueur d'onde s'y propage conformément au *principe de Fermat* (paragraphe 12.5) : on est alors dans le domaine de *l'Optique géométrique*. A l'interface entre deux tels milieux (lui aussi de grande taille devant  $\lambda$ ), on observe les phénomènes bien connus de *réflexion* et de *réfraction* des ondes électromagnétiques, régis par les lois de Snell et Descartes et qui, ici encore, résultent des réactions collectives conjointes des milieux excités par une onde incidente<sup>1</sup>. Lorsqu'une onde rencontre un obstacle absorbant (illimité), elle ne peut le traverser et l'onde est partiellement réfléchie, ou totalement s'il s'agit d'un réflecteur parfait.

Considérons ensuite un obstacle opaque à une onde de longueur d'onde  $\lambda$ , mais *de taille finie*. Si l'onde ne peut traverser directement l'obstacle du fait de son opacité, elle peut néanmoins le *contourner* par le biais de sa diffusion par les points en surface de l'obstacle : c'est le phénomène de *diffraction*.

La diffraction de la lumière fut observée pour la première fois au 17<sup>ème</sup> siècle par F. M. Grimaldi (1618-1653), à qui l'on doit le mot *diffraction* pour désigner le phénomène<sup>2</sup> : cette appellation

---

<sup>1</sup>A noter que l'approximation  $\lambda \ll L$  peut encore s'appliquer à un objet de petite taille à notre échelle macroscopique. Ainsi, il est possible de donner au moyen de l'optique géométrique une interprétation simple de la formation d'un arc-en-ciel provoqué par des petites gouttes d'eau en suspension dans l'atmosphère, que R. Descartes a le premier suggérée. Cependant, le traitement complet de l'arc-en-ciel constitue un difficile problème de diffraction.

<sup>2</sup>"Physico-Mathesis de Lumine, Coloribus et Iride", Bologne, 1665.

veut rendre compte du fait qu'une onde peut parfois contourner des obstacles<sup>3</sup>. La diffraction s'observe aussi bien pour toutes les ondes électromagnétiques : par exemple, les arbres, les maisons constituent des objets diffractants pour les ondes radio. Mais on l'observe également pour d'autres types d'ondes, comme les ondes acoustiques ou les ondes de gravitation à la surface d'un liquide. Rappelons que la découverte de la diffraction des rayons X par les cristaux<sup>4</sup> a permis d'initier l'étude détaillée de ceux-ci (la cristallographie) et que ce sont les expériences de diffraction des électrons par un cristal menées par Clinton Davisson et Lester Germer en 1927<sup>5</sup> qui confirmèrent la dualité onde-corpuscule prédite par L. De Broglie dès 1923<sup>6</sup>.

Il faut noter qu'en règle générale, l'effet diffractif n'est sensible que si les dimensions de la structure diffractante sont comparables à la longueur d'onde de l'onde incidente : lorsque cette longueur d'onde est grande devant les dimensions d'un objet opaque, l'onde l'"enveloppe" sans réellement le "voir". A l'opposé, si la longueur d'onde est petite devant la taille de l'objet, celui-ci peut jouer le rôle de réflecteur. Par exemple, les ondes radio de grandes longueurs d'onde ( $\lambda \simeq 2$  km) sont plus sensibles à des reliefs de collines ou de montagnes plutôt qu'à des objets de taille humaine qu'elles ne "voient" pas, alors que ceux-ci produisent un effet sensible sur les ondes "FM" de plus courtes longueurs d'onde ( $\lambda \simeq 3$  m) qui elles-mêmes sont quasiment arrêtées et/ou réfléchies par des reliefs trop prononcés. La diffraction ne s'observe donc bien que si la longueur d'onde et la taille de l'objet sont comparables.

Dans cette configuration, les phénomènes sont plus compliqués à décrire mathématiquement. On doit néanmoins à Gustav Mie d'avoir trouvé une solution analytique complète des équations de Maxwell pour la diffusion d'ondes électromagnétiques par des particules sphériques de taille quelconque<sup>7</sup>. La diffusion Rayleigh apparaît comme est un cas limite de la diffusion de Mie. Mais cette dernière diffère de la première par plusieurs aspects : alors que la diffusion de Rayleigh favorise fortement les courtes longueurs d'onde (d'où la couleur bleue du ciel) et est quasiment isotrope spatialement, la diffusion de Mie dépend moins de la longueur d'onde et devient fortement anisotrope spatialement, en favorisant la diffusion dans la direction de propagation de l'onde plane incidente (diffusion "vers l'avant"), et ce d'autant plus que la taille de la particule est grande. Ce sont ces particularités de la diffusion de Mie qui permettent notamment d'expliquer la couleur blanche des nuages.

A part ce cas particulier important, il n'existe pas de théorie *exacte* de la diffraction pour des objets de forme et de taille quelconque. Cependant, comme nous le verrons, le *principe de Huygens-Fresnel*, offre la possibilité d'en donner une description approchée qui en retient les aspects essentiels et qui de ce fait est suffisante pour bon nombre de cas.

La diffraction a été présentée plus haut comme la diffusion d'une onde par un obstacle de dimensions finies. Mais on l'observe aussi bien dans une situation "complémentaire" où un obstacle, un écran, de grandes dimensions présente des trous dans lesquels l'onde peut s'engouffrer et franchir ainsi l'obstacle. Ces ouvertures, de tailles finies, doivent être considérées comme des structures diffractantes au même titre que des objets massifs de mêmes tailles. La figure 15.1 montre un exemple de ce type de diffraction pour des vagues. C'est uniquement cette configuration qui sera étudiée dans ce chapitre. Elle correspond tout à fait à des conditions expérimentales courantes en Optique où l'on impose des limitations spatiales à une onde lumineuse en la faisant traverser

<sup>3</sup>Lequel phénomène, comme nous l'avons dit, n'est cependant qu'un aspect de la diffusion des ondes par des obstacles.

<sup>4</sup>Les rayons X ont été découverts par Wilhelm Conrad Röntgen en 1895. C'est la mise en évidence de leur diffraction par les cristaux dans l'expérience menée par Max Von Laue en 1912 qui établit à la fois leur nature ondulatoire et la périodicité des réseaux cristallins.

<sup>5</sup>"Reflection of electrons by a crystal of nickel", Nature, Vol 119, p.558-560 (1927).

<sup>6</sup>Louis de Broglie : Thèse à l'université de Paris, 1924 ; Ann. Phys. **10**, 3, 22 (1925) ; "Ondes et mouvements", Gauthier-Villars, Paris, 1926.

<sup>7</sup>Gustav Mie : "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen", Ann. Phys. Leipzig 25, 377-445, 1908. Cette solution est aussi appelée *théorie de Lorenz-Mie* ou encore *théorie de Lorenz-Mie-Debye*. Elle fait intervenir des sommes infinies et n'a pu être réellement exploitée pratiquement qu'à partir du moment où l'on a pu en faire des évaluations numériques avec les ordinateurs, tout en utilisant des *séries de Debye* permettant d'en donner une approximation.



FIG. 15.1 – Diffraction de vagues

des dispositifs optiques. La figure 15.2 schématise le phénomène. Une ouverture pratiquée dans un écran opaque éclairé par une source lumineuse a pour effet d'élargir le faisceau de lumière au-delà de l'écran, par rapport à ce que l'on attendrait en appliquant l'optique géométrique, selon laquelle la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène. On constate que cette loi qui voudrait que les bords de l'ouverture limitent simplement le faisceau est d'autant moins respectée que les dimensions de l'ouverture sont petites.

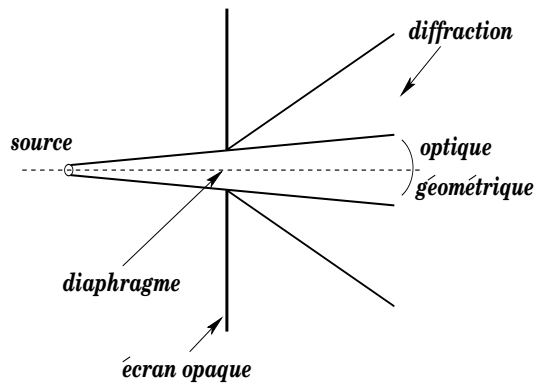


FIG. 15.2 – Diffraction par une ouverture

En Optique, la diffraction définit ainsi la limite de validité de l'Optique géométrique : cette dernière reste applicable tant que la longueur d'onde est petite par rapport aux dimensions des objets rencontrés par l'onde. C'est pourquoi l'on dit en Optique que, d'une façon générale, il se produit une diffraction lorsque les concepts de rayons lumineux ou d'onde illimitée ne suffisent plus pour expliquer les phénomènes observés et qu'il faut alors tenir compte de la limitation spatiale imposée à une onde par un objet tel un diaphragme ou un objet opaque. Etant donnée une structure susceptible de diffracter des ondes dont les longueurs d'onde s'étendent dans un certain intervalle, on peut d'ailleurs s'attendre à ce que l'effet soit plus sensible pour les grandes longueurs d'onde que pour les plus petites et que, concernant notamment le domaine du visible, les radiations rouges soient plus diffractées que les radiations bleues.

## 15.2 Principe de Huygens-Fresnel

Deux siècles environ avant l'avènement de la théorie électromagnétique de la lumière<sup>8</sup>, Huygens, se fondant sur l'exemple des ondes sonores, a interprété la lumière comme un phénomène vibratoire ayant lieu dans un *ether* ambiant, et décrit sa propagation comme s'effectuant de proche en proche, tout point de l'espace atteint par un front d'onde lumineuse<sup>9</sup> devenant à son tour un émetteur d'ondes secondaires *sphériques* (ondelettes). Etant donné un certain front d'onde  $S$  à la date  $t$ , sa position  $S'$  à la date  $t + \Delta t$  est alors la surface enveloppe des ondelettes obtenues à cette date à partir de tous les points de  $S$ <sup>10</sup> (figure 15.3). Une telle hypothèse est suggérée par le dispositif représenté à la figure 15.4 où des ondes circulaires sont générées sur la surface d'un liquide par une pointe vibrante  $S$  (la source).

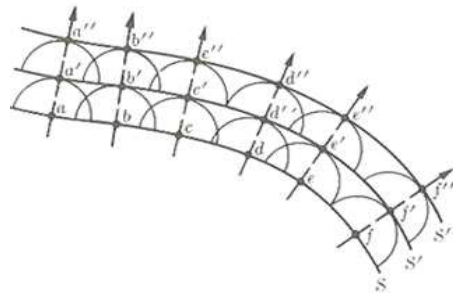


FIG. 15.3 – Progression d'un front d'onde selon Huygens

Ces ondes sont interceptées sur leur trajet par un mur comportant une petite ouverture  $T$ . Au-delà du mur on observe à nouveau des ondes circulaires, mais cette fois centrées sur  $T$ . Tout se passe donc comme si avec cette ouverture on isolait un petit morceau de l'onde circulaire incidente et l'expérience semble montrer que tout petit élément de l'onde se comporte effectivement comme une nouvelle source ponctuelle pouvant rayonner à son tour des ondes circulaires.

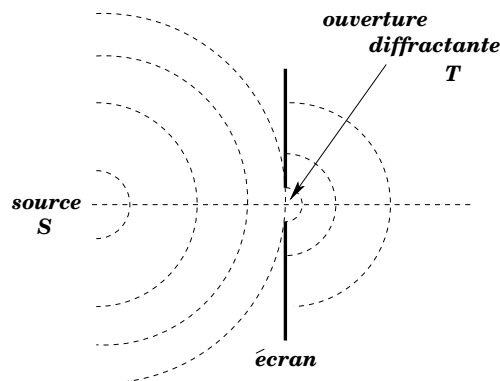


FIG. 15.4 – Diffraction par une ouverture

<sup>8</sup>J. C. Maxwell : "A dynamical theory of the electromagnetic field", Philosophical Transactions of the Royal Society of London **155**, 459-512, 1865 ; voir notamment la partie VI p497.

<sup>9</sup>Un front d'onde est l'ensemble des points atteints au même instant par la vibration, c'est-à-dire, aussi, une surface d'égale phase de l'onde.

<sup>10</sup>C'est à partir de 1678 que Christiaan Huygens a émis ses hypothèses qui n'ont été publiées qu'en 1690 à Leyde dans son ouvrage "Traité de la Lumière", dont une réédition de 1920 est téléchargeable via le site : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5659616j> ; les éditions Dunod ont aussi réédité l'ouvrage en 1992.

Pour corroborer l'hypothèse de Huygens, montrons comment son application aux phénomènes de réflexion-réfraction permet de retrouver simplement les lois de Snell-Descartes<sup>11</sup>. Supposons que le plan  $xOy$  représente l'interface entre deux milieux transparents (1) et (2), le premier illimité dans la région  $z >$ , le second illimité dans la région  $z < 0$  (figure 15.5). Notons  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses de propagation de la lumière dans (1) et (2) respectivement et supposons  $v_1 > v_2$ . Soit une onde plane arrivant sur l'interface sous l'angle d'incidence  $\theta_1$  depuis le milieu (1). Traçons deux rayons incidents arrivant sur l'interface, l'un, (a), en  $A$ , l'autre, (b), en  $B$ , tous deux dans le même plan d'incidence  $xOz$ . A partir de  $A$ , traçons la perpendiculaire  $AH$  au rayon (b). L'onde incidente étant supposée plane,  $AH$  est la trace de son plan d'onde contenant  $A$  : les deux points  $A$  et  $H$  sont atteints par l'onde à la même date  $t$ . Soit  $\Delta t$  le laps de temps nécessaire à l'onde pour aller de  $H$  en  $B$ . On a donc  $HB = v_1 \Delta t$ .

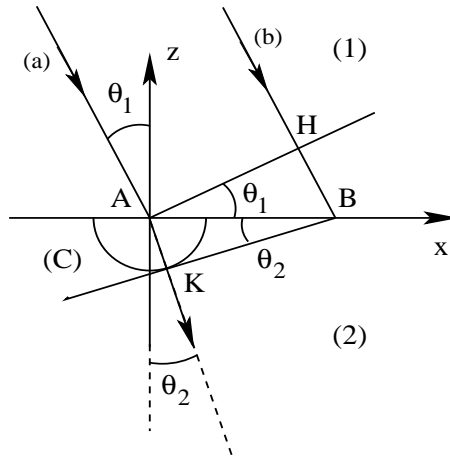


FIG. 15.5 – Réfraction selon Huygens - 1

Selon Huygens, le point  $A$  est une nouvelle source d'ondes sphériques et à la date  $t' = t + \Delta t$ , l'ondelette émise par  $A$  dans le milieu (2) à la date  $t$  sera devenue une demi-sphère dont la trace dans le plan  $zOx$  est le demi-cercle  $C$  de centre  $A$  et de rayon  $v_2 \Delta t$ . A partir de  $B$ , traçons la tangente  $BK$  à ce cercle. la date  $t'$ , le point  $B$  est atteint par le front d'onde passé antérieurement par  $A$ . C'est aussi une nouvelle source d'ondes, mais qui n'aura pas encore émis à cette date. A  $t'$ , un front d'onde dans le milieu (2) doit donc contenir  $B$ . Comme il doit envelopper les ondelettes obtenues à cette date à partir des divers points de l'interface touchés avant  $B$  (figure 15.6), et notamment celle de  $A$ , il doit être tangent à  $C$  en  $K$ . Il s'agit donc d'un plan perpendiculaire au plan d'incidence, dont la trace est  $BK$ . L'onde qui émerge dans le milieu (2) est donc elle aussi plane et  $AK$  en est un rayon. Par construction, l'angle  $\widehat{HAB}$  est égal à  $\theta_1$  et l'on a  $HB = AB \sin \theta_1 = v_1 \Delta t$ . Notons  $\theta_2$  l'angle entre  $AK$  et la normale  $z'z$  à l'interface. On a  $\widehat{ABK} = \theta_2$  et  $AK = AB \sin \theta_2 = v_2 \Delta t$ . On en déduit

$$\frac{AB}{AK} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

où l'on a fait usage des relations  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$ ,  $n_1$  et  $n_2$  étant les indices de réfraction respectifs de (1) et (2) et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Le processus de réflexion se traite de façon similaire (figure 15.7). L'ondelette émise vers le milieu (1) par  $A$  à la date  $t$  est devenue à la date  $t'$  une demi-sphère dont la trace dans le plan d'incidence est le demi-cercle ( $C'$ ) de centre  $A$  et de rayon  $v_1 \Delta t$ . Le front d'onde de l'onde réfléchie passant par  $B$  à la date  $t'$  est le plan perpendiculaire au plan d'incidence et dont la trace dans ce dernier

<sup>11</sup>Voir les chapitres 2 et 3 de l'ouvrage de Huygens.

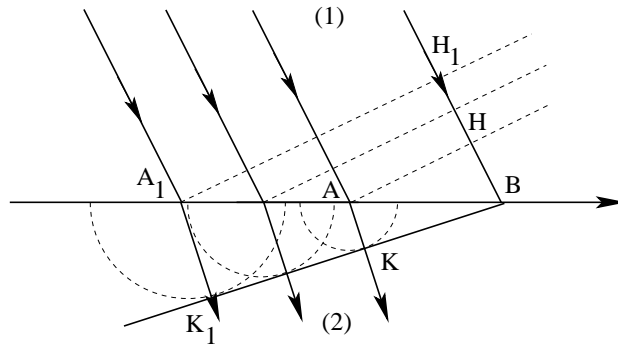


FIG. 15.6 – Réfraction selon Huygens - 2

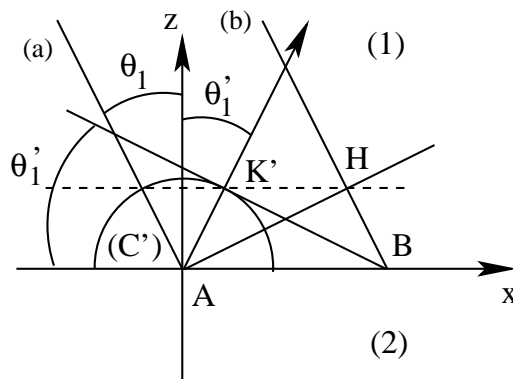


FIG. 15.7 – Réflexion selon Huygens

est la tangente  $BK'$  à  $(C')$ . On a  $AK' = AB \sin \theta'_1 = BH = AB \sin \theta_1$ . On en déduit  $\theta'_1 = \theta_1$  : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

A partir de 1815, A. Fresnel, s'opposant courageusement à la théorie corpusculaire de la lumière de Newton, qui était couramment admise à l'époque<sup>12</sup>, a commencé à apporter la preuve de la supériorité d'une théorie ondulatoire pour décrire les phénomènes lumineux jusqu'alors observés, soit 137 ans après la première apparition du principe de Huygens (1678), principe sur lequel il s'est appuyé pour bâtir sa théorie en lui apportant le contenu mathématique qui lui manquait et par là-même un réel pouvoir prédictif. Le succès de la théorie de Fresnel a permis dès lors le développement rapide de l'Optique ondulatoire tant expérimentale que théorique.

L'apport fondamental de Fresnel a été d'associer au principe de Huygens l'hypothèse de l'interférence des vibrations des ondelettes. Voici un extrait de son mémoire sur la diffraction de la lumière de 1819, couronné par l'Académie des Sciences de l'époque<sup>13</sup>

*Les vibrations d'une onde lumineuse en chacun de ses points peuvent être regardées comme la somme des mouvements élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans une quelconque de ses positions antérieures.*

*Il résulte du principe de la coexistence des petits mouvements, que les vibrations produites en un point quelconque d'un fluide élastique par plusieurs ébranlements sont égales à la résultante de toutes les agitations envoyées au même instant dans ce point par ces différents centres d'ondulations, quels que soient leur nombre, leurs positions respectives, la nature et l'époque des*

<sup>12</sup>Laplace, Biot, Poisson en étaient des ardens défenseurs.

<sup>13</sup>Voir les "Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel" publiées par Henri de Senarmont, Emile Verdet et Léonor Fresnel, Imprimerie impériale, Paris 1866, vol. 1, p293 ; cet ouvrage est consultable via Google books.

*ébranlements divers. Ce principe, étant général, doit s'appliquer à tous les cas particuliers.*

En outre, Fresnel apporte un contenu mathématique en modélisant l'amplitude des vibrations par des fonctions sinusoidales. Ci-après, nous donnons la forme actuelle de ce qu'on appelle le *principe de Huygens-Fresnel*, pour le cas de la diffraction par un diaphragme d'une onde lumineuse plane

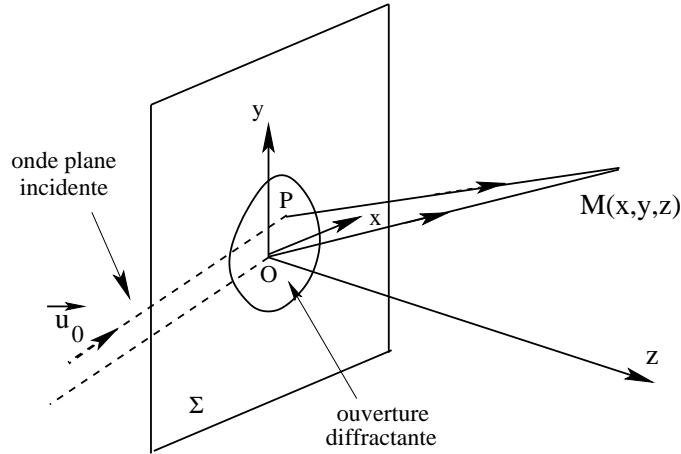


FIG. 15.8 – Dispositif de diffraction étudié

Considérons une ouverture  $\Sigma$  pratiquée dans un écran opaque plan et recevant sous une incidence quelconque une onde lumineuse plane, monochromatique de pulsation  $\omega$ , provenant d'une source ponctuelle placée dans le plan focal d'une lentille  $\mathcal{L}_1$  (figure 15.8). Le milieu ambiant est de l'air. Soit  $\vec{u}_0$  le vecteur unitaire définissant la direction de propagation de l'onde incidente et  $P$  un point de  $\Sigma$ . Un élément de surface  $d\Sigma(P)$  construit sur  $\Sigma$  autour de  $P$  se comporte comme une source ponctuelle d'une onde sphérique :

- ♣ dont la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi c/\omega$  est celle de l'onde incidente ;
- ♣ présentant une phase  $\varphi_i(P)$  en  $P$  égale à celle de l'onde incidente en ce point ;
- ♣ d'amplitude proportionnelle à  $d\Sigma(P)$  et à un éventuel facteur de transmission  $T(P)$  tenant compte d'une possible atténuation et/ou d'un déphasage supplémentaire de l'onde lors de son passage par l'ouverture ;

En un point  $M$  au-delà de l'écran, l'amplitude de cette onde a pour expression

$$dE(P, M) = d\Sigma(P)T(P)\frac{e^{-jkr}}{r}e^{-j\varphi_i(P)} \quad (15.1)$$

où l'on a posé  $r = PM$  et  $k = \omega/c$ . Ici encore, on a omis d'écrire le facteur temporel  $e^{j\omega t}$ . On reconnaît dans (15.1) le facteur  $\frac{e^{-jkr}}{r}$  qui décrit une onde sphérique progressive de vecteur d'onde  $k$ , ayant pour source le point  $P$ . En prenant le point central  $O$  comme référence des phases de l'onde incidente, on a

$$\varphi_i(P) = k \vec{u}_0 \cdot \vec{OP} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15.2)$$

D'après le principe de superposition (ou d'interférences), l'amplitude *totale*  $E(M)$  de la vibration en  $M$  doit s'obtenir comme l'intégrale de (15.1) étendue à toute la surface de l'ouverture. Toutefois, afin de tenir compte du fait que l'onde est progressive, c'est-à-dire, que les ondelettes doivent progresser vers le demi-espace orienté dans la direction de propagation de l'onde

globale et non pas vers celui orienté dans la direction opposée, on doit incorporer un facteur supplémentaire d'*obliquité*  $K(P, M)$ , dépendant de l'orientation de  $\vec{PM}$  et censé supprimer la propagation rétrograde, mais dont la forme ne peut être précisée par la théorie de Fresnel seule. L'expression de l'amplitude de l'onde diffractée s'exprime alors comme

$$E(M) = \int \int_{\Sigma} d\Sigma(P) T(P) K(P, M) \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-j\varphi_i(P)} \quad (15.3)$$

La formule (15.3) traduit le principe de Huygens-Fresnel pour le cas étudié. Comme nous le montrons dans le complément, elle peut être justifiée partiellement au moyen de la formule de Kirchhoff, qui donne en prime l'expression de  $K(P, M)$ . Mais bien qu'elle recouvre l'essentiel de l'interprétation des phénomènes de diffraction observés couramment, elle n'en donne qu'une description approchée. On peut en effet lui faire des objections d'ordre physique et d'ordre mathématique à la fois.

♣ Dans l'établissement de la formule à partir de celle de Kirchhoff, on ne fait jouer aux obstacles qu'un rôle passif consistant simplement à limiter la partie libre de l'onde à laquelle on étend les intégrales. On admet notamment que l'onde incidente n'est pas perturbée dans l'ouverture par la présence de l'écran et que son amplitude est nulle partout sur la face postérieure de l'écran, ce qui induit des discontinuités, sources d'inconsistences mathématiques.

♣ Une théorie exacte devrait tenir compte des propriétés optiques de la matière constituant l'écran, et de la finesse des bords de l'ouverture, paramètres qui rentrent effectivement en jeu dans certaines circonstances.

♣ Enfin, la formule ignore le caractère *vectoriel* de l'onde électromagnétique : son application ne se limite en principe qu'aux ondes *scalaires*. Elle ne peut donc rendre compte des effets de polarisation qui accompagnent la diffraction.

De nombreux auteurs ont tenté dans le passé de donner une base mathématique rigoureuse à la théorie de la diffraction dans le cadre de la théorie électromagnétique de Maxwell<sup>14</sup>. Le sujet, difficile, est encore d'actualité<sup>15</sup> et il n'existe toujours pas de théorie définitive de la diffraction.

Il apparaît en outre que la formule (15.3) ne donne pas de bons résultats si l'on fait l'observation de la lumière diffractée trop près de l'ouverture et lorsque la longueur d'onde est comparable à la dimension de celle-ci. Cependant, elle retient l'essentiel du phénomène diffractif pour des conditions usuelles d'observation. Aussi, nous nous bornerons ici à en étudier les prévisions dans un cas simple, en supposant satisfaites toutes les conditions de son application.

Pour terminer, on notera que la formule (15.3) ignore également l'aspect dimensionnel de l'amplitude étudiée (en l'occurrence, un champ électrique s'exprimant en V/m dans le système S.I.) : celle-ci n'est donc définie par ladite formule qu'à un facteur multiplicatif près.

### 15.3 De la diffraction de Fresnel à la diffraction de Fraunhofer<sup>16</sup>

De façon évidente, la formule (15.3) ne peut s'appliquer telle quelle pour  $r \rightarrow 0$ , c'est-à-dire si le point  $M$  se trouve sur la surface de l'ouverture. Son utilisation n'est donc justifiée que pour des points d'observation suffisamment distants de l'ouverture, à des distances que nous supposerons en tous cas très grandes devant la longueur d'onde  $\lambda$ . Observons le phénomène

<sup>14</sup>On peut citer notamment : H. Poincaré, A. Sommerfeld, A.E.H. Love, J. Larmor, F. Kottler ; voir l'ouvrage de A. Sommerfeld : "Optics", Academic Press, New-York, 1954, chap. 5.

<sup>15</sup>Voir, par exemple, S-W Sandström, Journal of Modern Optics, 42, 965, 1995 ; K. D. Mielenz, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 103, 497 (1998) et 114, 83 (2009).

<sup>16</sup>Cette partie n'est pas au programme. Elle a été incorporée ici pour une meilleure compréhension de la théorie de la diffraction.



sur un écran plan à la distance  $D$  du plan de l'ouverture<sup>17</sup>. Nous supposons pour le moment que l'ouverture est éclairée sous incidence normale, c'est-à-dire que  $\vec{u}_0 \equiv \vec{e}_z$ . Notons  $u$  et  $v$  les coordonnées cartésiennes de  $P$  dans le plan de l'ouverture,  $x$  et  $y$  celle de  $M$  dans cet écran. On a donc

$$PM = \sqrt{D^2 + (u - x)^2 + (v - y)^2}$$

Supposons que  $D$ , tout en restant fini, soit grand devant toutes ces coordonnées. Cela signifie notamment que l'observation s'effectue au voisinage de l'axe  $Oz$ , sur des distances comparables aux dimensions de l'ouverture. Ce domaine est celui de la *diffraction de Fresnel*, encore appelée *diffraction en champ proche*<sup>18</sup>. Cette condition conduit à faire les approximations suivantes sur l'intégrand de (15.3).

♣ On remplace le facteur  $1/PM$  par  $1/D$ .

♣ Le facteur de phase  $e^{-jkPM} = e^{-j2\pi PM/\lambda}$ , étant hautement variable sur une distance égale à la longueur d'onde, doit être traité avec précaution. Dans ce terme, nous ferons l'approximation

$$PM \simeq D + \frac{(u - x)^2 + (v - y)^2}{2D} \quad (15.4)$$

Comme l'observation se fait non loin de l'axe  $Oz$  et donc de la direction de l'onde incidente, on admet que le facteur d'obliquité ne varie pratiquement pas dans ce domaine et reste quasiment égal à une constante  $K$ . Avec  $\varphi_i(P) = 0$  (incidence normale),  $T(P) = 1$  (pas de modulation d'amplitude au passage par l'ouverture), (15.3) devient

$$E(M) = K \frac{e^{-jkD}}{D} \iint_{\Sigma} dudv e^{-j\psi} \quad , \quad \text{avec} \quad \psi = \pi \frac{(u - x)^2 + (v - y)^2}{\lambda D} \quad (15.5)$$

Pour simplifier le propos, envisageons une ouverture  $\Sigma$  en forme de rectangle centré sur  $O$  et dont les côtés parallèles à  $Ox$  et ceux parallèles à  $Oy$  ont pour longueur  $2a$  et  $2b$  respectivement. Effectuons le changement de variables

$$U = \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (u - x) \quad , \quad V = \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (v - y)$$

La formule (15.5) devient

$$\begin{aligned} E(M) &= K \frac{e^{-jkD}}{D} \int_{-a}^a du e^{-j\pi U^2/2} \int_{-b}^b dv e^{-j\pi V^2/2} \\ &= K e^{-jkD} \frac{\lambda}{2} \int_{U_1}^{U_2} dU e^{-j\pi U^2/2} \int_{V_1}^{V_2} dV e^{-j\pi V^2/2} \end{aligned} \quad (15.6)$$

où

$$\begin{aligned} U_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (a - x) \quad , \quad U_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (a + x) \\ V_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (b - y) \quad , \quad V_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} (b + y) \end{aligned} \quad (15.7)$$

et l'amplitude (15.6) s'écrit donc sous la forme

<sup>17</sup>L'axe  $Oz$  est la normale commune au plan de l'ouverture et au plan d'observation.

<sup>18</sup>C'est précisément dans cette région que Fresnel a effectué ses toutes premières observations et mesures expérimentales sur la diffraction, qui l'ont mené à élaborer sa théorie ondulatoire de la lumière.

$$E(M) = K e^{-jkD} \frac{\lambda}{2} \mathcal{J}(U_2, U_1) \mathcal{J}(V_2, V_1)$$

avec

$$\mathcal{J}(Z_2, Z_1) = \mathcal{F}(Z_2) - \mathcal{F}(Z_1)$$

où

$$\mathcal{F}(X) = \int_0^X dt e^{-j\pi t^2/2} = C(X) - jS(X)$$

est l'intégrale de Fresnel, que l'on a décomposée en partie réelle et partie imaginaire, avec

$$C(X) = \int_0^X dt \cos \pi t^2/2 \quad , \quad S(X) = \int_0^X dt \sin \pi t^2/2$$

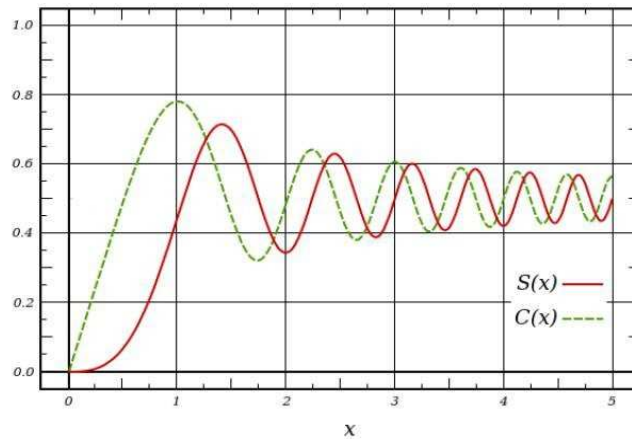


FIG. 15.9 – Variations de  $C(X)$  et de  $S(X)$  pour  $X \geq 0$

Les deux fonctions  $C(X)$  et  $S(X)$  sont impaires. Leurs variations pour  $X \geq 0$  sont représentées à la figure 15.9. On notera que pour  $X \rightarrow +\infty$ , elles ont toutes deux la même limite  $1/2$ .

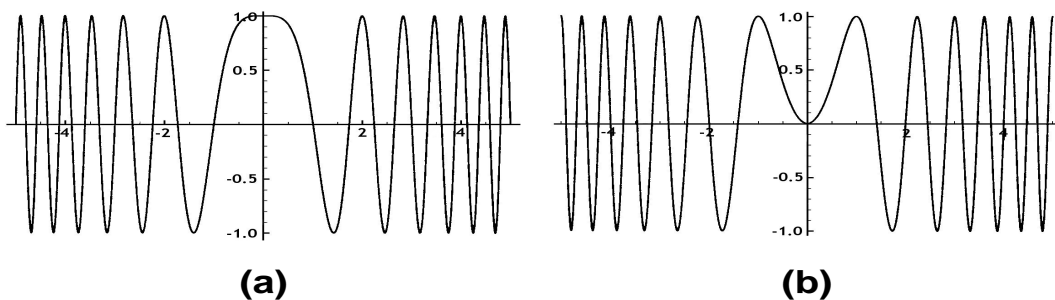


FIG. 15.10 – Variations en fonction de  $t$  de : (a)  $\cos \pi t^2/2$ ; (b)  $\sin \pi t^2/2$

Supposons que l'ouverture  $\Sigma$  soit en fait illimitée dans la direction  $Oy$ , c'est-à-dire que  $b \rightarrow +\infty$ . Selon (15.3), on aurait alors  $V_2 \rightarrow +\infty$ ,  $V_1 \rightarrow -\infty$  et l'on peut alors remettre en question le

développement (15.4) qui n'est en principe justifié que si  $D \gg b$ . Cependant, en examinant les variations des fonctions  $\cos \pi t^2/2$  et  $\sin \pi t^2/2$  représentées à la figure 15.10, on constate que c'est *en gros* dans l'intervalle  $-1,5 \leq t \leq +1,5$  que ces fonctions apportent leurs principales contributions à l'intégrale de Fresnel : au-delà de cet intervalle, leurs oscillations de plus en plus serrées entre  $-1$  et  $+1$  empêchent toute contribution notable. De ce fait, et à la condition que

$$b \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \gg 1 \quad (15.8)$$

on peut étendre sans dommage l'intervalle d'intégration sur  $V$  à  $]-\infty, +\infty[$ . On obtient ainsi

$$\mathcal{J}(V_2, V_1) \simeq \mathcal{F}(+\infty) - \mathcal{F}(-\infty) = 2\mathcal{F}(+\infty) = 1 - j \quad (15.9)$$

La répartition de l'intensité lumineuse, celle-ci étant proportionnelle à  $|E|^2$ , est alors déterminée par

$$I = |\mathcal{F}(U_2) - \mathcal{F}(U_1)|^2$$

Cette dernière formule s'applique notamment à l'étude de deux phénomènes de diffraction : la diffraction par le bord d'un écran et la diffraction par une fente très allongée, mais de largeur finie.

### 15.3.1 Diffraction en champ proche par le bord d'un écran

Intéressons-nous à la région de l'ouverture à proximité de son bord situé à l'abscisse  $x = -a$  et posons  $x' = x + a$ . On a alors  $U_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda D}}(2a - x')$  et  $U_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'$ . En ayant en vue que  $|x'| \ll a$  puisqu'on cherche à se placer très près de ce bord, on est tenté de faire l'approximation  $a \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas, à condition que

$$U_2 \simeq 2a \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \gg 1 \quad (15.10)$$

on peut utiliser le même argument qui a conduit à (15.9) pour écrire

$$I \simeq |\mathcal{F}(+\infty) - \mathcal{F}(U_1)|^2 = \left(\frac{1}{2} + C(X)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(X)\right)^2 \quad \text{avec} \quad X = \sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x' \quad (15.11)$$

La répartition de l'intensité lumineuse ainsi obtenue est représentée en fonction de l'abscisse normalisée  $X$  à la figure 15.11 où l'intensité est normalisée à l'intensité en l'absence d'écran (qui est obtenue loin du bord).

Les variations de l'intensité de la lumière diffractée se présentent donc comme une succession d'oscillations autour de l'intensité de référence, décrivant une alternance de franges lumineuses (figure 15.12). La grandeur  $\ell = \sqrt{\frac{2}{\lambda D}}$ , homogène à une longueur, est l'échelle de ces variations. Si l'on prend  $D = 1\text{m}$ ,  $\lambda = 500\text{nm}$ , on trouve  $\ell = 0,5\text{mm}$ . D'après la figure 15.11, on constate alors que l'intensité aura subi une dizaine d'oscillations sur une distance de 3mm seulement à partir du bord, ce qui est le plus souvent imperceptible à l'oeil nu.

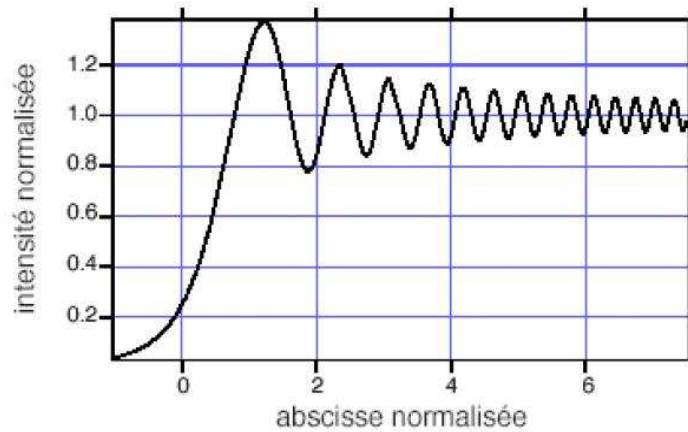


FIG. 15.11 – Intensité de la lumière diffractée par le bord d'un écran

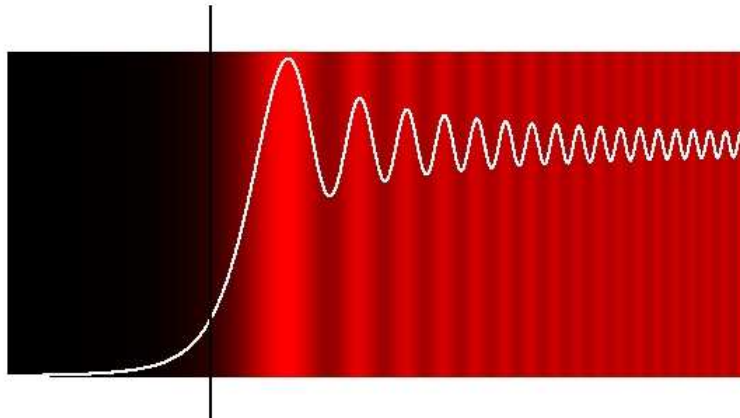


FIG. 15.12 – Lumière diffractée par le bord d'un écran

### 15.3.2 De la diffraction de Fresnel à la diffraction de Fraunhofer - nombre de Fresnel

On peut s'attendre à ce que la figure de diffraction obtenue par une fente allongée mais de largeur finie soit peu ou prou une juxtaposition des figures données par chacun des bords. Cependant, l'allure de la figure de diffraction observée dépend beaucoup de la valeur d'un paramètre appelé *nombre de Fresnel*. Si  $\ell$  est une dimension caractéristique de l'ouverture diffractante, ce paramètre est défini comme

$$N_F = \frac{\ell^2}{\lambda D} \quad (15.12)$$

$D$  étant la distance entre l'ouverture et le plan d'observation. La figure 15.13 illustre, dans le cas d'un obstacle, l'évolution de la distribution de l'intensité diffractée en fonction de ce nombre. Lorsque  $N_F \gg 1$ , on se trouve dans le cas de la *diffraction de Fresnel*, dont on a étudié un aspect dans le paragraphe précédent. A mesure que  $N_F$  diminue, cette distribution se déforme, et atteint une forme "stationnaire" pour  $N_F \ll 1$ . Dans la pratique, ce cas correspond à une distance  $D$  grande : c'est le domaine de la *diffraction à l'infini*, ou *diffraction en champ lointain*, ou encore *diffraction de Fraunhofer*.

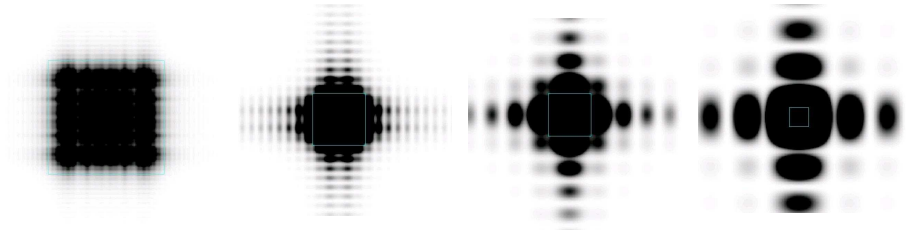


FIG. 15.13 – De gauche à droite on passe de la diffraction de Fresnel à celle de Fraunhofer

Considérons alors une ouverture plane  $\Sigma$  pratiquée dans un écran et recevant sous une incidence quelconque une onde lumineuse plane, monochromatique, provenant d'une source ponctuelle  $S_0$  placée dans le plan focal d'une lentille parfaite  $L_1$  en amont de l'écran (figure 15.14 où  $L_1$  n'a pas été représentée). Soit  $\vec{u}_0$  le vecteur unitaire définissant la direction de propagation de cette onde et  $P$  un point de  $\Sigma$ . Nous prendrons un point  $O$  central de l'ouverture comme point de référence de l'onde incidente et de l'onde diffractée. La phase de l'onde incidente en  $P$  est donc

$$\varphi_i(P) = k \vec{u}_0 \cdot \vec{OP} \quad , \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

$n$  étant l'indice du milieu ambiant (l'air, le plus souvent). Chaque point  $P$  de  $\Sigma$  émet des ondes dans toutes les directions au-delà de l'écran. Pour appliquer le principe de Huygens-Fresnel, on se limite aux rayons diffractés de directions voisines de  $\vec{u}_0$  afin de pouvoir traiter le champ électromagnétique comme une grandeur scalaire. Les ondes émises par l'ensemble des points  $P$  de  $\Sigma$  dans une direction donnée  $\vec{u}$  quelconque (mais voisine de  $\vec{u}_0$ ) forment un faisceau parallèle que l'on fait converger en un point  $M$  du plan focal d'une lentille  $L_2$ . Ce dispositif permet d'observer la diffraction à l'infini. En supposant que la lentille  $L_2$  soit parfaite, les chemins optiques ( $PP_1M$ ) et ( $HO_1M$ ) sont égaux. L'onde émise par  $P$  dans la direction de  $\vec{u}$  présente donc par rapport à celle émise par  $O$  dans la même direction une *avance de phase* égale à

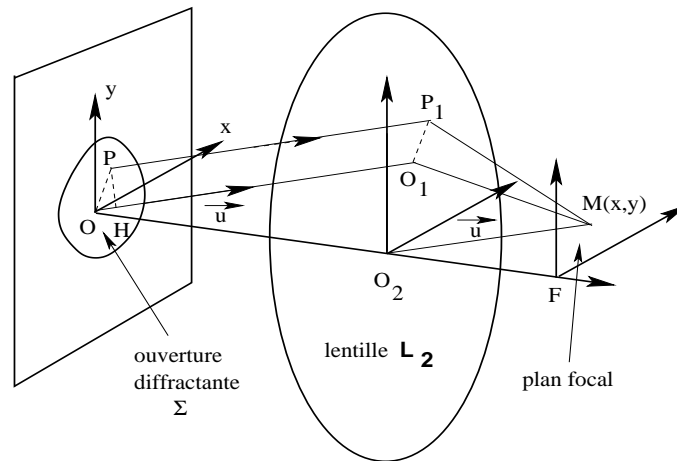


FIG. 15.14 – Diffraction de Fraunhofer

$$\varphi_d = k \vec{u} \cdot \vec{OP}$$

Finalement, le déphasage en  $M$  entre l'onde émise par  $P$  et celle émise par  $O$  est

$$\varphi = \varphi(P, M) = k \vec{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (15.13)$$

et l'amplitude de l'onde émise par un élément de surface  $d\Sigma(P)$  au voisinage de  $P$  sera écrite sous la forme

$$dE(P, M) = T(P) e^{j\varphi} d\Sigma(P) \quad (15.14)$$

où  $T(P)$  est un facteur de transmission, pouvant dépendre de la position de  $P$ , qui représente éventuellement une atténuation et/ou un déphasage supplémentaire de l'onde lors de son passage par l'ouverture ou encore une altération de l'onde due à de possibles défauts de la lentille  $L_2$ . L'expression (15.14) est bien conforme au principe de Huygens-Fresnel exprimé par la formule (15.1). En effet, notant qu'à grande distance  $r = PM$  on a

$$r \simeq R - \vec{u} \cdot \vec{OP} \quad , \quad \text{avec } R = OM$$

(15.1) s'écrit alors

$$dE(P, M) \simeq T(P) \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma(P) e^{jk\vec{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0)}$$

c'est-à-dire, comme (15.14), au facteur  $\frac{e^{-jkR}}{R}$  près qui est en fait inessentiel dans la description du phénomène diffractif. Ainsi, dans les conditions de la diffraction de Fraunhofer, l'amplitude de l'onde totale reçue en  $M$  sera écrite comme

$$E(M) = \int \int_{\Sigma} d\Sigma(P) T(P) e^{j\varphi(P, M)} \quad (15.15)$$

à des facteurs inessentiels près.

## 15.4 Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire

L'ouverture  $\Sigma$  est encore un rectangle centré sur  $O$ , dont les côtés parallèles à  $Ox$  et ceux parallèles à  $Oy$  ont pour longueur  $2a$  et  $2b$  respectivement. Soit  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  les composantes respectives de  $\vec{u}_0$  et de  $\vec{u}$  dans le repère  $Oxyz$ . Le déphasage (15.13) s'exprime alors comme

$$\varphi = k (u(\alpha - \alpha_0) + v(\beta - \beta_0))$$

$u$  et  $v$  étant les coordonnées cartésiennes de  $P$ . On suppose ici encore que  $T(P) = 1$ . L'intégration de (15.15) sur  $u$  et  $v$  donne alors

$$E(M) = 4ab \left( \frac{\sin ka(\alpha - \alpha_0)}{ka(\alpha - \alpha_0)} \right) \left( \frac{\sin kb(\beta - \beta_0)}{kb(\beta - \beta_0)} \right) \quad (15.16)$$

Soit  $f$  la distance focale de la lentille  $L_2$  de foyer  $F$ . Dans son plan focal, on repère la position de  $M$  par ses coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  relativement au repère  $Fxy$ . Au sens de l'Optique géométrique, l'image de  $S_0$  dans le plan focal de  $L_2$  est le point  $S$  à l'intersection, avec ce plan, de la droite de direction  $\vec{u}_0$  passant par le centre optique  $O_2$  de  $L_2$ . Ce point a pour coordonnées

$$x_0 = \vec{e}_x \cdot \vec{O_2S} = \alpha_0 O_2S \quad , \quad y_0 = \vec{e}_y \cdot \vec{O_2S} = \beta_0 O_2S$$

Si  $\vec{u}_0$  reste voisin de la direction  $\vec{e}_z$  de l'axe optique  $OO_2F$ , on a approximativement  $O_2S \approx f$ , soit  $x_0 \approx \alpha_0 f$ ,  $y_0 \approx \beta_0 f$ , et si  $\vec{u}$  reste aussi voisin de  $\vec{e}_z$ , on a aussi bien  $x \approx \alpha f$ ,  $y \approx \beta f$ . D'où, en posant

$$I = \frac{\lambda f}{2na} \quad , \quad J = \frac{\lambda f}{2nb} \quad (15.17)$$

on obtient l'amplitude<sup>19</sup>

$$E(M) = E(x - x_0, y - y_0) = 4ab \operatorname{sinc}(X) \operatorname{sinc}(Y)$$

$$\text{avec } X = \pi \frac{x - x_0}{I}, \quad Y = \pi \frac{y - y_0}{J} \quad (15.18)$$

et l'intensité

$$\mathcal{I}(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2(X) \operatorname{sinc}^2(Y) \quad (15.19)$$

Dans le plan focal de  $L_2$ , la figure obtenue est centrée sur  $S$  et c'est en ce point que l'intensité lumineuse est à son maximum. En effet, lorsque  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ , alors  $X \rightarrow 0, Y \rightarrow 0$  et  $\operatorname{sinc}(X)$  ainsi que  $\operatorname{sinc}(Y)$  prennent dans ce cas la valeur 1. Pour  $y$  fixé, la variation de l'intensité vis-à-vis de  $x$  est décrite par la fonction  $\operatorname{sinc}^2(X)$  représentée à la figure 15.15. Les zéros de cette fonction sont situés aux abscisses  $x = x_0 \pm mI$  où  $m$  est un entier  $\geq 1$ . Les premiers minima nuls se trouvent de part et d'autre de  $x = x_0$  aux abscisses  $x = x_0 \pm I$  et sont donc séparés de  $\Delta x = 2I$ . A  $x$  fixé, on a une variation analogue vis-à-vis de  $y$  : les positions des premiers minima nuls sont de part et d'autre de  $y = y_0$  aux ordonnées  $y = y_0 \pm J$  et sont séparés de  $\Delta y = 2J$ .

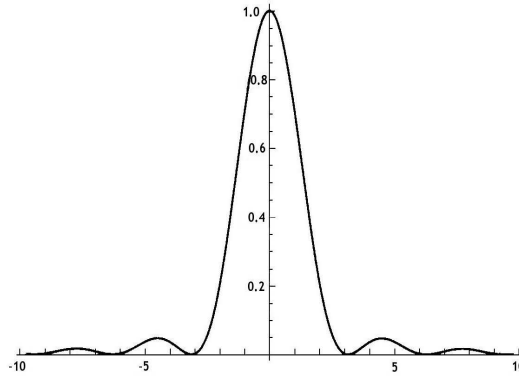


FIG. 15.15 – Représentation de la fonction  $\operatorname{sinc}^2(X)$

On obtient ainsi une tache centrale de diffraction concentrée dans un rectangle centré sur  $S$  et de côtés  $2I$  et  $2J$ . En dehors de ce rectangle, on observe d'autres taches correspondant à des maxima secondaires dont les intensités sont plus faibles. Les taches secondaires les plus importantes sont inscrites dans des rectangles de côtés  $(2I, J)$  ou  $(I, 2J)$ . Les autres taches sont inscrites dans des rectangles de côtés  $(I, J)$ . Les figures 15.16 et 15.17 en donnent des représentations en 3D pour la première, dans un plan d'observation pour la seconde, pour le cas  $a = b$ . Approximativement, les maxima secondaires sont placés aux coordonnées  $x = x_0 \pm I(n_1 + 1/2), y = y_0 \pm J(n_2 + 1/2)$ , avec  $n_1, n_2 \geq 1$ . La tache centrale est d'autant plus étalée que  $I$  et  $J$  sont grands, c'est-à-dire, que  $a$  et  $b$  sont petits. Comme attendu, la diffraction est d'autant plus accentuée que l'ouverture diffractante est petite.

A mesure que les dimensions de l'ouverture augmentent, les périodes spatiales  $I$  et  $J$  diminuent et une contraction de la figure de diffraction s'opère. A la limite, lorsque  $a$  et  $b$  sont très grands devant la longueur d'onde, infinis à la limite théorique, le faisceau incident n'est plus limité et l'image de  $S_0$  se réduit au point  $S$ , comme prévu par l'Optique géométrique : la tache de diffraction se concentre toute entière en  $S$ .

<sup>19</sup>Rappelons que  $\operatorname{sinc}(U) = \frac{\sin U}{U}$ .

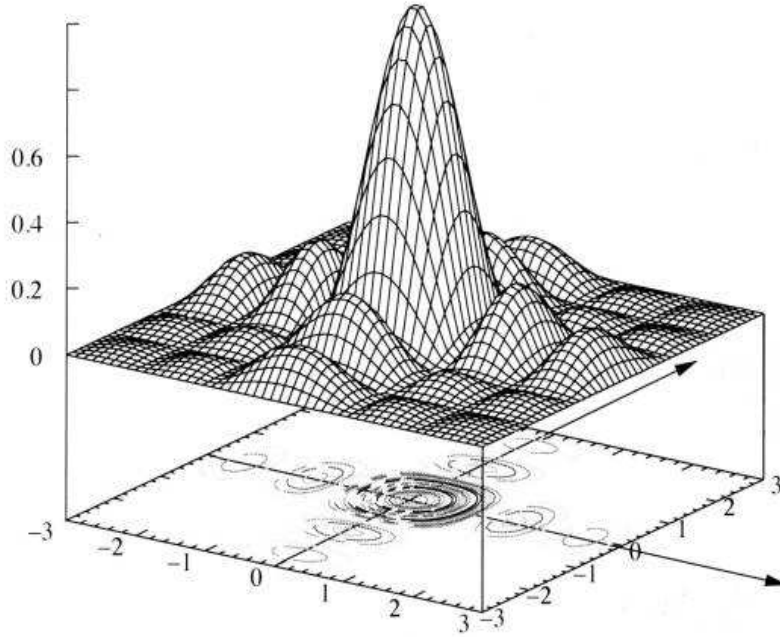


FIG. 15.16 – Représentation en 3D de la diffraction par une ouverture carrée

Si  $b$  seulement devient grand devant  $\lambda$ , l'ouverture  $\Sigma$  est alors assimilable à une fente de largeur  $a$ , quasiment infinie dans la direction parallèle à  $Oy$ . Le paramètre  $J$  étant alors très petit, l'image de diffraction est concentrée sur l'axe  $Sx$ . Par exemple, pour  $\lambda = 5600 \text{ \AA}$ ,  $b = 2\text{cm} \gg \lambda$ ,  $f = 2\text{cm}$  (distance focale de l'oeil),  $n = 1$ , on a alors  $J = \lambda$ . D'un autre côté, les maxima secondaires sont très faibles. Le premier maximum secondaire de la fonction  $\text{sinc}^2(X)$  est pour  $X \approx 3\pi/2$  et sa valeur est  $\approx 4/(9\pi^2) \approx 0,05$  : en ce point, l'intensité lumineuse ne vaut plus que 5% de sa valeur maximum en  $X = 0$ .

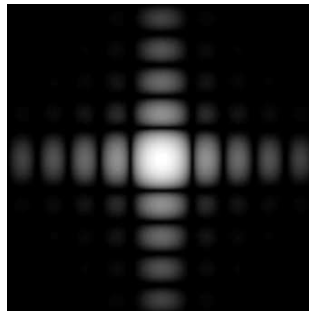


FIG. 15.17 – Observation dans un plan de la diffraction par une ouverture carrée

Aussi, lorsque  $b$  devient grand devant  $\lambda$ , est-il légitime de négliger l'étalement de l'intensité lumineuse le long de l'axe  $Sy$  au-delà du maximum central et de faire l'approximation

$$\text{sinc}\left(\pi \frac{y - y_0}{J}\right) \simeq \lim_{J \rightarrow 0} \text{sinc}\left(\pi \frac{y - y_0}{J}\right)$$



$$= 0 \text{ si } y \neq y_0, = 1 \text{ si } y = y_0 \quad (15.20)$$

La répartition en intensité prend ainsi l'expression théorique

$$\mathcal{I} = I_0 \text{sinc}^2(X) \text{ pour } y = y_0, = 0 \text{ pour } y \neq y_0 \quad (15.21)$$

Bien entendu, dans la pratique, les sources utilisées ne sont pas rigoureusement ponctuelles. D'ailleurs, pour augmenter la luminosité du phénomène sans en modifier la symétrie, on utilise une fente source parallèle à  $Oy$ . Dans ce cas, le phénomène est étendu le long de  $Sy$  et l'on observe le long de  $Sx$  des *franges de diffraction* représentées par la fonction  $\text{sinc}(X)$  pour tout  $y$ . La frange centrale, de loin la plus lumineuse, a une largeur égale à  $2I$ . Les autres ont une largeur moitié et leurs intensités vont en décroissant : celle de la troisième frange brillante est  $\approx 1,6\% I_0$ . La figure 15.18 montre la diffraction d'un faisceau laser par une fente fine .



FIG. 15.18 – Diffraction par une fente fine

## 15.5 Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire <sup>20</sup>

C'est le cas le plus fréquemment rencontré dans les instruments d'optiques. En repérant un point  $P$  de l'ouverture diffractante par ses coordonnées polaires  $\rho$  et  $\psi$ , on a

$$\varphi(P, M) = k\rho [(\alpha - \alpha_0) \cos \psi + (\beta - \beta_0) \sin \psi]$$

Posons alors  $\alpha - \alpha_0 = \eta \cos \xi$ ,  $\beta - \beta_0 = \eta \sin \xi$  avec  $\eta = \sqrt{(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2}$ . L'amplitude (15.15) s'écrit alors (en supposant encore  $T(P) = 1$ )

$$E(M) = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\psi e^{jk\rho\eta \cos(\psi-\xi)}$$

où  $R$  est le rayon de l'ouverture. Le résultat n'est pas donné par une fonction élémentaire. On montre, d'une part, que

$$\int_0^{2\pi} d\psi e^{jk\rho\eta \cos(\psi-\xi)} = 2\pi J_0(k\rho\eta)$$

où  $J_0(z)$  est la *fonction de Bessel* d'ordre 0 de la variable  $z = k\rho\eta$ , et, d'autre part, que

$$\int_0^R \rho d\rho J_0(k\rho\eta) = \frac{R}{k\eta} J_1(k\eta R)$$

où  $J_1(Z)$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 de la variable  $Z = k\eta R$ . On obtient donc dans ce cas

$$E(M) = \pi R^2 \left( \frac{2J_1(Z)}{Z} \right) \quad (15.22)$$

<sup>20</sup>Cette partie est hors programme

et l'intensité lumineuse correspondante est

$$\mathcal{I}(M) = I_0 A(Z) \quad \text{avec} \quad A(Z) = \left( \frac{2J_1(Z)}{Z} \right)^2 \quad (15.23)$$

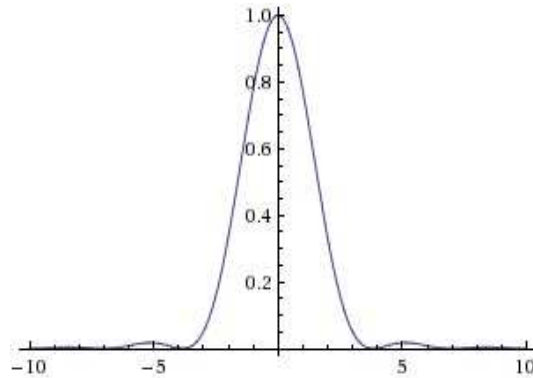


FIG. 15.19 – Graphe de  $A(Z)$

Les variations de  $A(Z)$  en fonction de  $Z$  (positif ou négatif) sont données à la figure 15.19. Il s'agit d'une fonction paire de  $Z$ , dont la valeur maximum 1 est obtenue pour  $Z = 0$ . Comme la fonction  $\text{sinc}^2(Z)$ , elle présente des maxima secondaires séparés par des zéros. Les zéros sont ceux de  $J_1(Z)$ . Ils forment une suite infinie dont les premiers termes *positifs* ont pour valeurs<sup>21</sup> :

$$j_{1,1} = 1,22 \pi ; j_{1,2} = 2,23 \pi ; j_{1,3} = 3,24 \pi ; j_{1,4} = 4,24 \pi ; j_{1,5} = 5,24 \pi \dots \quad (15.24)$$

Les maxima secondaires sont définis par l'équation  $J'_1 = J_1/Z$ . Or, les fonctions de Bessel satisfont les relations de récurrence :

$$J_{s-1}(Z) + J_{s+1}(Z) = \frac{2s}{Z} J_s(Z) \quad , \quad J_{s-1}(Z) - J_{s+1}(Z) = 2J'_s(Z)$$

Prenant  $s = 1$ , on en déduit  $J_2(Z) = \frac{J_1(Z)}{Z} - J'_1(Z)$ . Ceci montre que les maxima secondaires de  $A(Z)$  correspondent en fait aux zéros de  $J_2(Z)$ . Ces derniers forment également une suite infinie dont les premiers termes positifs (à part zéro<sup>22</sup>) ont pour valeurs :

$$j_{2,1} = 1,63 \pi ; j_{2,2} = 2,68 \pi ; j_{2,3} = 3,7 \pi ; j_{2,4} = 4,7 \pi ; j_{2,5} = 5,7 \pi \dots \quad (15.25)$$

Dans l'approximation paraxiale,  $\alpha - \alpha_0 \simeq (x - x_0)/f$ ,  $\beta - \beta_0 \simeq (y - y_0)/f$ , on a  $\eta \simeq r/f$  où  $r = SM$  est la distance séparant le point d'observation  $M$  de l'image géométrique  $S$  de la source dans le plan focal de  $L_2$ . Le paramètre  $Z$  prend alors la forme

$$Z = \frac{r}{r_0} \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{\lambda f}{2\pi R n} \quad (15.26)$$

Les maxima secondaires de  $A(Z)$  ont de très faibles valeurs : on obtient  $A(j_{2,1}) = 1,73 \cdot 10^{-2}$ ,  $A(j_{2,2}) = 4,1 \cdot 10^{-3}$ , etc. On peut donc dire que l'intensité lumineuse reste concentrée autour de l'image  $S$  dans un rayon correspondant au premier zéro d'intensité, soit pour

<sup>21</sup>Voir : "Handbook of Mathematical Functions", M. Abramowitz, I.A. Stegun, Dover Publications, Inc., New-York.

<sup>22</sup>A noter que  $Z = 0$  correspond aussi à un zéro de  $J_2(Z)$ .

$$r \leq r_a = 1,22 \pi r_0 = 1,22 \frac{\lambda f}{2nR} \quad (15.27)$$

Cette zone est appelée *tache d'Airy*<sup>23</sup> (figure 15.20) et  $r_a$  est le *rayon d'Airy*.

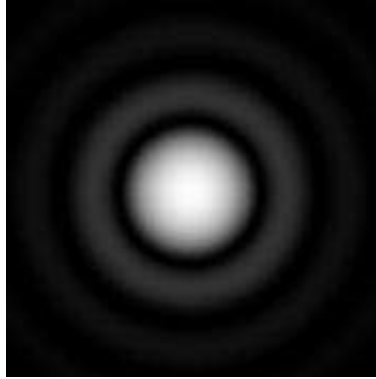


FIG. 15.20 – Diffraction par une ouverture circulaire : tache d'Airy

## 15.6 Relations générales entre la figure de diffraction et l'ouverture diffractante

### 15.6.1 Dilatation ou contraction de l'ouverture

Lorsqu'on multiplie par  $p$  et  $q$  les dimensions de l'ouverture suivant  $Ox$  et  $Oy$  respectivement, les paramètres  $I$  et  $J$  sont en conséquence divisés par  $p$  et  $q$  respectivement, et l'amplitude (15.18) devient, en supposant ici  $T(P) = 1$ ,

$$\begin{aligned} E'(x - x_0, y - y_0) &= p q 4 a b \operatorname{sinc}\left(p\pi \frac{x - x_0}{I}\right) \operatorname{sinc}\left(q\pi \frac{y - y_0}{J}\right) \\ &= p q E(p(x - x_0), q(y - y_0)) \end{aligned} \quad (15.28)$$

Supposons  $p > 1$  et  $q > 1$ . Au facteur  $pq$  près, l'amplitude de l'onde après cette *dilatation* de l'ouverture est, en un point  $M(x, y)$ , égale à l'amplitude *avant* dilatation en un point  $M'(x', y')$  plus éloigné de  $S$  que ne l'est  $M$ , puisque

$$x' - x_0 = p(x - x_0), \quad y' - y_0 = q(y - y_0) \quad (15.29)$$

On en déduit que toute dilatation (resp. contraction) de l'ouverture suivant une direction quelconque se traduit par une contraction (resp. dilatation) de la figure de diffraction suivant la même direction.

### 15.6.2 Rotation de l'ouverture

Supposons encore  $T(P) = 1$ . L'intégrand dans (15.15) ne dépend des coordonnées de  $P$  que par l'intermédiaire du produit scalaire  $\vec{OP} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0)$ . Si l'on effectue une rotation de l'ouverture  $\Sigma$ , donc une rotation des axes de références  $Ox$  et  $Oy$ , l'intégrale restera inchangée si la même

<sup>23</sup>Du nom de George Biddell Airy.

rotation est effectuée sur les axes  $Sx$  et  $Sy$ . Autrement dit, la figure de diffraction tourne en même temps que l'ouverture.

### 15.6.3 Déplacement du point source

Si le point source  $S_0$  se déplace, l'orientation de  $\vec{u}_0$  change,  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  deviennent  $\alpha'_0$  et  $\beta'_0$ , respectivement. Comme l'intensité diffractée dépend uniquement des différences  $\alpha - \alpha_0$  et  $\beta - \beta_0$ , pour retrouver la même valeur de cette intensité après déplacement de la source, il faudra se placer en un point  $M'(\alpha', \beta')$  tel que  $\alpha' - \alpha'_0 = \alpha - \alpha_0$ ,  $\beta' - \beta'_0 = \beta - \beta_0$ . On en conclut que la figure de diffraction se sera déplacée toute entière dans la direction opposée à celle du déplacement du point source, en suivant l'image géométrique de celle-ci.

### 15.6.4 Centre de symétrie

Si l'ouverture présente un centre de symétrie, la figure de diffraction présente un centre de symétrie analogue.

### 15.6.5 Translation de l'ouverture sur l'écran

Translatons l'ouverture  $\Sigma$  de sorte que son point central ne soit plus en  $O$  mais en un autre point  $C_1$  (figure 15.21).

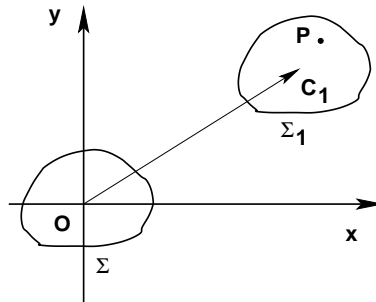


FIG. 15.21 – Translation de l'ouverture diffractante

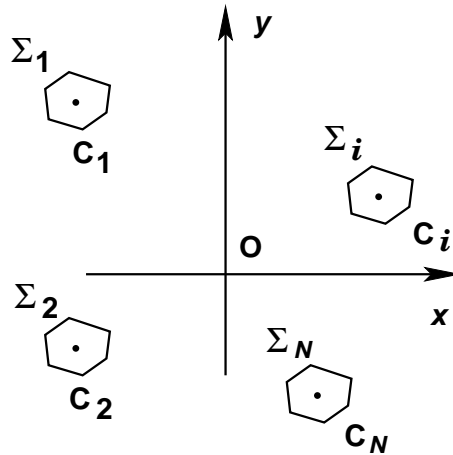
Appelons  $\Sigma_1$  la nouvelle ouverture obtenue. En convenant de choisir encore le point  $O$  comme référence des phases, la phase de l'onde émise par  $P$  sera encore donnée par (15.13). La décomposition  $\vec{OP} = \vec{OC}_1 + \vec{C}_1P$  permet de l'exprimer comme

$$\varphi(P, M) = \theta_1 + \varphi_1(P, M) \text{ , avec } \theta_1 = k \vec{OC}_1 \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0) \text{ et } \varphi_1(P, M) = k \vec{C}_1P \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0)$$

On voit que  $\varphi_1$  est l'analogue de (15.13) si  $C_1$  était choisi comme point de référence des phases pour les points de l'ouverture  $\Sigma_1$ . On en déduit que l'amplitude de l'onde diffractée donnée par  $\Sigma_1$  ne diffère de celle,  $E(M)$ , d'une ouverture  $\Sigma$  de centre  $O$  que par un facteur de phase :

$$E_1(M) = e^{j\theta_1} E(M) \tag{15.30}$$

Une intensité lumineuse étant proportionnelle au carré du module de l'amplitude du champ, la répartition en intensité ne sera donc pas affectée par ladite translation : la figure de diffraction reste donc en place, seule la phase de l'onde aura changé.

15.6.6 Diffraction par  $N$  ouvertures identiques

 FIG. 15.22 –  $N$  ouvertures identiques sur l'écran

Supposons que dans l'écran opaque on ait pratiqué  $N$  ouvertures identiques  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), de centres respectifs  $C_i$ , l'ouverture  $\Sigma_i$  étant obtenue par la simple translation de l'ouverture  $\Sigma_1$  de vecteur  $\overrightarrow{C_1 C_i}$  (figure 15.22). Prenons le centre  $C_1$  comme origine des phases. L'amplitude diffractée émise par  $\Sigma_1$  dans la direction  $\vec{u}$  est

$$E_1(M) = \int \int_{\Sigma_1} d\Sigma_1(P_1) T(P_1) e^{j\overrightarrow{C_1 P_1} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0)}$$

tandis que, comme il a été montré précédemment, celle émise par  $\Sigma_i$  dans la même direction est  $E_i(M) = E_1(M)e^{j\theta_i}$  avec

$$\theta_i = k \overrightarrow{C_1 C_i} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0)$$

D'où l'amplitude totale due à l'ensemble des ouvertures

$$E(M) = E_1(M) \sum_{m=1}^N e^{j\theta_m} \quad (15.31)$$

et l'intensité lumineuse

$$I = I_d I_i \quad , \quad \text{avec} \quad I_d = |E_1(M)|^2 \quad , \quad I_i = \left| \sum_m e^{j\theta_m} \right|^2 \quad (15.32)$$

Le facteur  $I_d$  décrit l'effet de diffraction dû à une ouverture seule : c'est la *fonction de diffraction*. Le facteur  $I_i$  ne dépend pas de la forme et de l'étendue des ouvertures, il ne fait intervenir que des différences de marche entre deux ondes : l'une issue de  $C_1$ , une autre issue de l'une quelconque des ouvertures  $C_m$ , ces deux ondes de même direction  $\vec{u}$  interférant à l'infini. C'est pourquoi ce terme est appelé *fonction d'interférence*.

Au centre de la figure de diffraction,  $\vec{u} = \vec{u}_0$  et  $\theta_m = 0$  pour toutes les ouvertures. L'intensité de la tache centrale est donc  $N^2$  fois plus grande que celle donnée par une seule ouverture. On a

$$I_i = N + 2 \sum_{n < m} \cos(\theta_n - \theta_m) \quad (15.33)$$

Dans le cas où  $N$  est grand, et où les ouvertures sont réparties de façon aléatoire, les phases  $\theta_m$  prennent des valeurs aléatoires et le terme d'interférence

$$\sum_{n < m} \cos(\theta_n - \theta_m)$$

a toutes les chances d'être nul. La figure de diffraction est alors identique à celle d'une seule ouverture, en étant  $N$  fois plus lumineuse. Au voisinage du centre, les phases  $\theta_m$  restent petites tout en variant lorsqu'on se déplace sur l'écran d'observation. La fonction d'interférence peut alors subir des fluctuations notables par rapport à sa valeur  $N^2$  au centre, ce qui donne au phénomène un aspect granulaire.

Une figure d'interférence superposée à une figure de diffraction n'est finalement observable pour un grand nombre d'ouvertures que si celles-ci sont disposées de façon *régulière*. Une telle répartition s'appelle un *réseau*<sup>24</sup>.

## 15.7 Retour sur le dispositif des fentes de Young

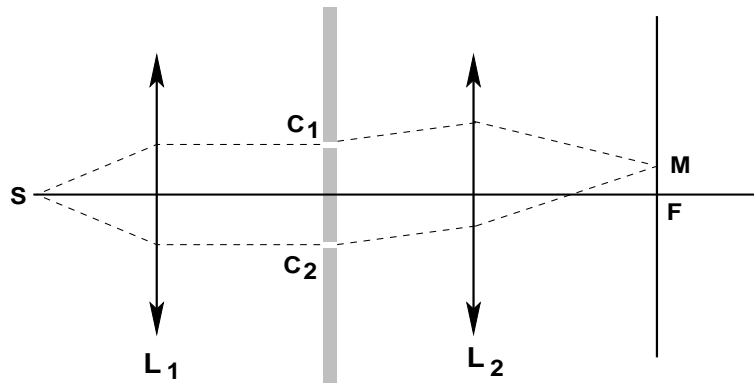


FIG. 15.23 – Schéma pour l'observation de la diffraction à l'infini des fentes de Young

Reproduisons le dispositif de Young en nous plaçant dans les conditions d'observation de la diffraction à l'infini. Les ouvertures diffractantes sont des fentes fines de largeur  $a$ , séparées par une distance  $h = C_1 C_2$ . La fente source est placée au foyer de la première lentille  $L_1$ , de sorte que son image usuelle se trouve au foyer de  $L_2$  (figure 15.23). L'intensité lumineuse observée en un point  $M$  du plan focal de  $L_2$  est

$$\mathcal{I}(M) = 4 I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi x/I) \cos^2(\pi x/\ell) \tag{15.34}$$

avec  $I = \lambda f/(2na)$ ,  $\ell = \lambda f/(nh)$  étant l'interfrange. La largeur  $a$  étant supposée petite devant  $h$ , on a  $\ell < I$ , et l'on observe alors des franges d'interférence à l'intérieur des franges de diffraction. La figure 15.24 qui représente le graphe de la fonction  $\operatorname{sinc}^2(\pi t/4) \cos^2(3\pi t/2)$  donne une idée de l'intensité lumineuse qui peut être observée dans le plan focal de  $L_2$  pour  $h = 12a$ . On note que les franges d'interférence ne sont pratiquement observables qu'à l'intérieur de la zone centrale de diffraction car l'intensité lumineuse est très faible en dehors de celle-ci. Cette zone comprend un nombre de franges égal à  $m = 2I/\ell - 1$ , ce qui donne ici  $m = 11$ .

<sup>24</sup>L'étude des réseaux sort du cadre de ce cours.

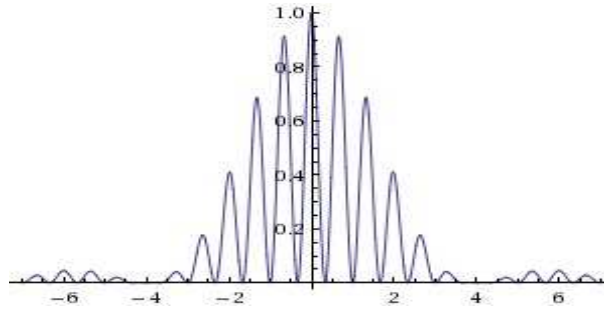


FIG. 15.24 – Graphe de la fonction  $\text{sinc}^2(\pi t/4) \cos^2(3\pi t/2)$

## 15.8 Pouvoir séparateur des instruments d'Optique

Même si l'on suppose un instrument optique parfait du point de vue du stigmatisme et des aberrations chromatiques, l'inévitable diffraction fait qu'un instrument ne donne jamais d'un objet ponctuel une image ponctuelle, celle-ci se présentant plutôt comme une petite tache lumineuse. Considérons à nouveau le dispositif de la diffraction à l'infini par une fente. On place dans le plan focal du collimateur  $L_1$  deux sources *indépendantes*  $A$  et  $B$  en forme de fentes fines parallèles à la fente diffractive et situées très près l'une de l'autre.

Dans le plan focal de  $L_2$ , on obtient deux figures de diffraction, chacune centrée sur l'image géométrique de la source correspondante.

Suivant l'écartement des deux sources, les figures se chevauchent plus ou moins. Si elles sont suffisamment proches, les figures se superposent. Dans le cas où les intensités des deux sources sont égales, on obtient une répartition de l'intensité lumineuse semblable à celle représentée à la figure 15.25.

Soit  $d_0$  la distance séparant le maximum du premier minimum pour chacune des courbes d'intensité lumineuse relatives à l'une et l'autre source,  $d$  la distance séparant les maxima de ces deux courbes. Si  $d > 2d_0$ , les deux taches centrales sont séparées par une zone d'éclairement nul et les deux images sont bien séparées.

Si  $d \ll d_0$ , on n'aperçoit plus qu'une seule tache brillante, les deux images sont confondues.

On définit le *pouvoir séparateur* du récepteur utilisé comme la distance minimale entre les deux sources, au dessus de laquelle cet appareil peut permettre de reconnaître qu'on a bien affaire à deux sources distinctes  $A$  et  $B$ . Ce pouvoir séparateur dépend cruciallement des qualités du récepteur, notamment de sa capacité à faire la distinction entre l'intensité  $I_0$  et de l'intensité  $I_c$  (voir figure...). De ce fait, il n'existe pas de formule universelle du pouvoir séparateur, qui serait valable pour tous les récepteurs et tous les éclairagements.

On peut néanmoins poser une limite conventionnelle en disant que les images sont bien séparées dès lors que  $d \gg d_0$ . On prend alors comme définition du pouvoir séparateur la distance des deux sources pour laquelle  $d = d_0$ , auquel cas le centre de l'une des figures coïncide avec le premier minimum de l'autre : c'est le *critère de Rayleigh*.

En admettant que l'intensité diffractée venant de l'une des deux sources ait pour expression

$$\mathcal{J} \simeq I_0 \text{sinc}^2 [ka(\alpha - \alpha_0)] \quad \text{avec} \quad k = 2\pi n/\lambda$$

la configuration  $d = d_0$  est obtenue pour  $|\alpha'_0 - \alpha_0| = \lambda/(2na)$ . Lorsque les sources  $A$  et  $B$  sont proches du foyer de  $L_1$ , la grandeur  $|\alpha'_0 - \alpha_0|$  représente approximativement l'angle  $\varepsilon$  sous lequel on voit le segment  $AB$  depuis le centre optique de  $L_1$ . Le pouvoir séparateur *angulaire* théorique

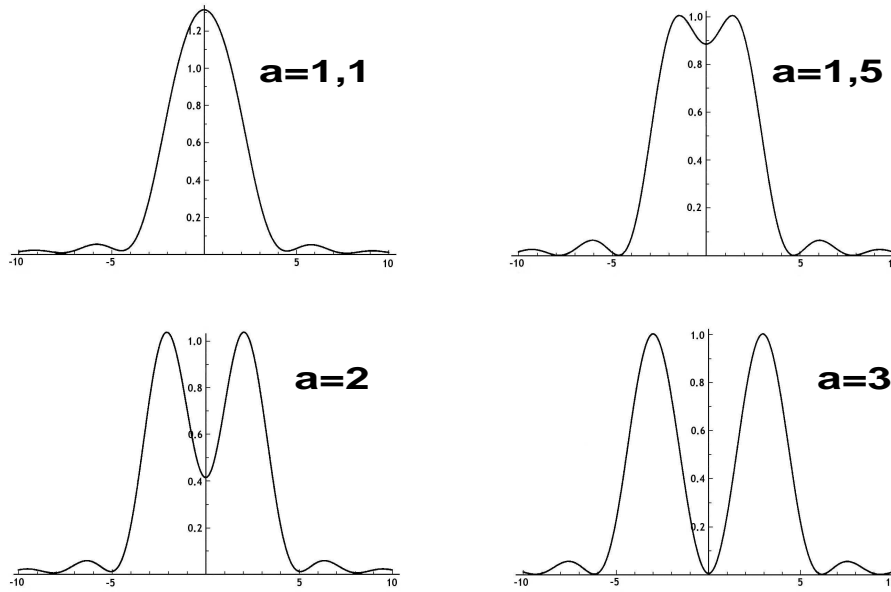


FIG. 15.25 – Graphes de la fonction  $\text{sinc}^2(x + a) + \text{sinc}^2(x - a)$  pour diverses valeurs de  $a$

de l'objectif  $L_2$  est la séparation angulaire minimum entre les deux sources ponctuelles, en dessous de laquelle l'instrument ne peut plus les distinguer. Pour un objectif diaphragmé par une fente fine de largeur  $2a$  il vaut :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2na} \tag{15.35}$$

Pour une ouverture circulaire de rayon  $R$ , le même critère donnerait  $d \geq r_a$ , soit

$$\varepsilon = 1,22 \frac{\lambda}{2nR} \tag{15.36}$$

Dans le cas d'une ouverture rectangulaire, on note que pour  $d = d_0$ , au centre de la figure, c'est-à-dire, pour  $\alpha = (\alpha_0 + \alpha'_0)/2$ , l'intensité lumineuse vaut

$$I_c = 2I_0 \text{sinc}^2 [ka(\alpha_0 - \alpha'_0)/2] = \frac{8I_0}{\pi^2} = 0.81I_0 \tag{15.37}$$

En principe, il suffirait donc que l'intensité au centre de la figure de diffraction soit inférieure de 2/10 à l'intensité sur les bords pour que cette figure soit perçue par le récepteur (qui peut être un œil) comme formée de deux taches distinctes.

Le critère de Rayleigh n'est pas suffisant dans la mesure où il ne tient pas compte de possibles défauts de l'instrument optique. Il suppose notamment que l'image de diffraction observée est bien celle prévue par la théorie, ignorant ainsi éventuelles *aberrations transversales* pouvant provoquer une modification de la tache centrale de diffraction. Le *critère de Couder* donne une limite sur ces aberrations qui assure que le pouvoir séparateur théorique est bien atteint. D'autres défauts qui n'affectent pas les dimensions de la tache centrale peuvent néanmoins altérer la répartition lumineuse aux dépens de la tache centrale, en diffusant de la lumière en dehors de cette tache, réduisant ainsi la perception des détails et donc le contraste de l'image observée. Le *critère de Françon*, qui est un critère de contraste, donne le but à atteindre pour une optique excellente. Enfin, il existe un *rapport de Stehl* qui est un indicateur direct de la qualité des images.



## 15.9 Complément I : justification mathématique de la formule 15.3

### 15.9.1 Par la formule de Kirchhoff <sup>25</sup>

Considérons à nouveau la formule de Kirchhoff (14.55) établie dans le complément I du chapitre 14 :

$$F(M) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \overrightarrow{d\Sigma}(P) \cdot \frac{e^{-jkMP}}{MP} \left\{ \overrightarrow{\nabla} F + F \left( jk \overrightarrow{v} + \frac{\overrightarrow{v}}{MP} \right) \right\} \quad (15.38)$$

avec  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MP}/MP$ ,  $P$  et  $M$  étant échangés pour convenance et où nous avons aussi effectué le changement  $k \rightarrow -k$ , ce qui en fait ne change rien au résultat. Notons qu'a priori l'intégrale (15.38) donne bien  $F(M)$  si  $M$  est dans le domaine délimité par la surface fermée  $\Sigma$ , mais donne un résultat nul si  $M$  est en dehors de ce domaine.

Considérons la surface fermée  $\Sigma$  constituée par le plan  $xOy$  et de la demi-sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $O$ , de rayon  $R$  infini, tournée vers la région  $z \geq 0$ . Supposons que le plan  $xOy$  soit matérialisé par un écran opaque dans lequel est ménagé une ouverture  $\sigma$  de centre  $O$ , comme dans la figure 15.8. L'écran est éclairé par une source ponctuelle  $S$  située dans la région  $z < 0$  émettant une onde monochromatique de vecteur d'onde  $k$ . Faisons les hypothèses suivantes.

♠ Sur l'écran et du côté  $z = 0^+$ , on a  $F(P) = 0$  et  $\overrightarrow{e}_z \cdot \overrightarrow{\nabla} F(P) = 0$  pour tout point  $P$  en dehors de  $\sigma$ . L'écran étant opaque, cette hypothèse semble a priori raisonnable.

♠ En tout point  $P$  de  $\sigma$ , l'amplitude de l'onde est celle émise par  $S$ , éventuellement affectée d'un coefficient de transfert  $T(P)$  au passage à travers  $\sigma$ , soit  $F(P) = T(P)e^{-jkSP}/SP$ .

♠ Pour tous les points  $M$  de la demi-sphère  $\mathcal{S}$ , on a

$$R \left( F + jk \overrightarrow{e}_R \cdot \overrightarrow{\nabla} F \right) = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{pour } R \rightarrow \infty \quad (15.39)$$

où  $\overrightarrow{e}_R = \overrightarrow{OM}/R$ . Cette condition est appelée *condition de rayonnement* de Sommerfeld<sup>26</sup>. Elle assure que la contribution de la demi-sphère à l'intégrale (15.38) est nulle pour  $R$  infini.

Avec ces hypothèses, (15.38) devient

$$F(M) \simeq \frac{1}{4\pi} \int \int_{\sigma} d\sigma(P) \left( -\overrightarrow{e}_z \right) \cdot \frac{e^{-jkMP}}{MP} \left\{ \overrightarrow{\nabla} F + F \left( jk \overrightarrow{v} + \frac{\overrightarrow{v}}{MP} \right) \right\}$$

En supposant de plus que  $k \gg 1/SP$  et  $k \gg 1/MP$ , ce qui est équivalent à  $SP \gg \lambda$  et  $MP \gg \lambda$ , soit à dire que  $S$  et  $M$  sont suffisamment éloignés de l'ouverture, et compte-tenu de  $\overrightarrow{e}_z \cdot \overrightarrow{\nabla} T = 0$ , puisque  $T(P)$  ne dépend que des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $P$ ,

$$F(M) \simeq \frac{-jk}{4\pi} \int \int_{\sigma} d\sigma(P) T(P) \frac{e^{-jkSP}}{SP} \frac{e^{-jkMP}}{MP} \overrightarrow{e}_z \cdot \left( \overrightarrow{u}_0 + \overrightarrow{u} \right) \quad (15.40)$$

en posant  $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PM}/MP$ . Supposons  $S$  très éloigné de l'ouverture, ou placé dans le plan focal d'une lentille. L'onde incidente est dans ce cas assimilable à une onde plane. Dans (15.40),

<sup>25</sup>G. Kirchhoff, Ann. d. Physik. 1883, **18**, p663.

<sup>26</sup>Voir par ex. A. Sommerfeld : "Optics", Academic Press Inc., Pub., New-York, 1954 p199.

la distance  $OS$  doit alors être considérée comme très grande devant les dimensions de l'ouverture, ce qui amène à l'approximation

$$SP \simeq OS + \vec{u}_0 \cdot \vec{OP}$$

d'où, à des termes d'ordre supérieur près,

$$F(M) \simeq \frac{-jk}{2\pi} \frac{e^{-jkOS}}{OS} \iint_{\sigma} d\sigma (P) T(P) \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-j\varphi_i} \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{u}_0 + \vec{u})}{2} \quad (15.41)$$

où  $r = MP$ . A un facteur inessentiel près, on obtient ici une formule tout à fait semblable à (15.3), ce qui justifie cette dernière. La déduction précédente permet d'identifier le facteur d'obliquité à

$$K(M, P) = \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{u}_0 + \vec{u})}{2} \quad (15.42)$$

On notera avec intérêt que  $K(M, P)$  défini ainsi est voisin de 1 dans l'approximation paraxiale ( $\vec{u}_0$  et  $\vec{u}$  voisins de  $\vec{e}_z$ ) et que, si cela pouvait se produire, il devient petit si  $\vec{u}$  pointait vers la région  $z < 0$  en s'annulant pour  $\vec{u} = -\vec{u}_0$ . Ceci est réminiscent du fait que l'intégrale dans (15.38) doit s'annuler si  $M$  est dans la région  $z < 0$  et en accord avec un principe de non-retour de la lumière.

### 15.9.2 En utilisant une fonction de Green

Si les approximations inhérentes à la situation physique considérée peuvent être justifiées dans la déduction précédente, cette dernière présente cependant un défaut sur le plan strictement mathématique, dû à la condition imposée à la fonction  $F$  sur le plan  $xOy$ . D'une part, l'hypothèse que, pour  $z = 0^+$ ,  $F$  et  $\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} F$  sont nuls pour tout point en dehors de l'ouverture et prennent en tout point de l'ouverture leurs valeurs données par l'onde incidente, induit sur ces grandeurs une discontinuité, alors que l'application du théorème de la divergence présuppose au moins leur continuité. Ce défaut est toutefois mineur. On peut en effet y remédier, au moins en principe, en imaginant un processus d'absorption progressive de l'onde par l'écran, permettant ainsi d'éliminer la discontinuité apparente. Un défaut plus sérieux est la non-compatibilité du modèle avec le résultat mathématique selon lequel une condition aux limites du type

$$F(M) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}(M) \cdot \vec{\nabla} F(M) = 0 \quad (15.43)$$

imposée à une solution  $F(M)$  de l'équation de Helmholtz (14.51) en tout point  $M$  d'une surface  $\Sigma_0$ , même finie et non fermée, conduit alors à  $F(M) = 0$  dans tout le domaine considéré<sup>27</sup> (voir en annexe). Ceci est le reflet du fait qu'on ne peut fixer une condition aux limites, sur une surface, à la fois sur la fonction  $F$  et sur sa dérivée normale  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} F$ . On peut pallier cet inconvénient en procédant comme suit.

Considérons à nouveau la formule 14.52

$$\iint_{\Sigma(\tau)} \left\{ G \vec{\nabla} F - F \vec{\nabla} G \right\} \cdot \vec{d\Sigma} = 0 \quad (15.44)$$

où  $F$  et  $G$  vérifient l'équation de Helmholtz dans le domaine  $\tau$  délimité par la surface fermée  $\Sigma$ . On appelle *fonction de Green* attachée à une surface  $\Sigma_0$  (contenue dans  $\tau$ ) une fonction  $G(P, M)$  telle que

<sup>27</sup>Le vecteur  $\vec{n}(M)$  est la normale à  $\Sigma_0$  en  $M$ .

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \Delta_P G(P, M) + k^2 G(P, M) = 0 \quad \text{dans } \tau \\
 (b) \quad & G(P, M) = 0 \quad \text{pour } P \text{ sur } \Sigma_0 \\
 (c) \quad & G(P, M) \rightarrow \frac{e^{-jkMP}}{MP} \quad \text{lorsque } P \rightarrow M \\
 (d) \quad & r \left( \frac{\partial G}{\partial r} + jkG \right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } r = PM \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{15.45}$$

où  $\Delta_P$  est le Laplacien relativement aux coordonnées de  $P$ . D'après (15.45) (c), la fonction  $G$  présente une singularité lorsque  $P$  approche  $M$ . On suppose d'ailleurs que c'est la seule. Comme dans le complément 1 du chapitre 14, prenons alors comme domaine  $\tau$  celui compris entre deux surfaces fermées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  entourant  $M$ , la dernière  $\Sigma_2$  étant une sphère de centre  $M$  et de rayon  $\varepsilon$  tendant vers zéro. Comme nous l'avons vu, à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il vient

$$F(M) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_1} \vec{d\Sigma}_1 \cdot \left( F \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} F \right) \tag{15.46}$$

Supposons maintenant que  $G$  soit la fonction de Green associée à cette surface  $\Sigma_1$ . On obtient alors la formule

$$F(M) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_1} F \vec{\nabla} G \cdot \vec{d\Sigma}_1 \tag{15.47}$$

montrant que pour connaître la valeur de  $F$  en un point quelconque du domaine considéré, il suffit d'en connaître les valeurs sur une surface fermée entourant ce point, sans qu'il soit besoin d'imposer une contrainte sur son gradient (problème de Dirichlet). Cependant, le résultat n'est pas aussi simple qu'il y paraît, car il reste à déterminer la fonction de Green relative à ladite surface, et ce problème peut s'avérer tout aussi difficile que le problème initial de la détermination directe de  $F$ . Il existe cependant un cas, de grande importance pratique et qui nous concerne directement ici, pour lequel il est facile de trouver une fonction de Green.

Soit  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport au plan  $xOy$ ,  $M$  se trouvant dans le demi-espace  $z \geq 0$ . Considérons la fonction

$$G(P, M) = \frac{e^{-jkMP}}{MP} - \frac{e^{-jkM'P}}{M'P} \tag{15.48}$$

Cette fonction est nulle en tout point du plan  $xOy$  et satisfait (15.45) (a), (c). Un calcul simple montre qu'elle satisfait aussi (15.45) (d). Prenons alors comme surface fermée  $\Sigma_1$  entourant  $M$  celle constituée par un disque situé dans le plan  $xOy$ , de centre  $O$  et de rayon  $R \gg OM$  et de la demi-sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  tournée vers la région  $z \geq 0$ . Sur la demi-sphère, écrivons

$$\vec{e}_R \cdot \left( F \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} F \right) = F \left( \vec{e}_R \cdot \vec{\nabla} G + jkG \right) - G \left( \vec{e}_R \cdot \vec{\nabla} F + jkF \right)$$

avec  $\vec{e}_R = \vec{OP} / OP$ . Si les fonctions  $F$  et  $G$  satisfont toutes deux à la condition de rayonnement (15.45) (d) (introduite par A. Sommerfeld) tout en décroissant comme  $1/R$  pour  $R$  grand, l'expression ci-dessus décroît comme  $1/R^3$ . Il en résulte qu'à la limite  $R \rightarrow \infty$ , la contribution de la demi-sphère à l'intégrale (15.46) est nulle<sup>28</sup>. Il ne reste plus que la contribution du plan  $xOy$  sur lequel la fonction de Green (15.48) est nulle. On obtient donc

<sup>28</sup>Rappelons que l'élément de surface sphérique croît comme  $R^2$

$$F(M) = -\frac{1}{4\pi} \int \int_{xOy} dx_P dy_P F(P) \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} G(P, M) \quad (15.49)$$

Ecrivons

$$\vec{\nabla} G = -\vec{u} \frac{e^{-jkr}}{r} \left( jk + \frac{1}{r} \right) + \vec{u}' \frac{e^{-jkr'}}{r'} \left( jk + \frac{1}{r'} \right)$$

où  $\vec{u} = \vec{MP} / MP$ ,  $\vec{u}' = \vec{M'P} / M'P$ ,  $r = MP$  et  $r' = M'P$ . Pour un point  $P$  dans le plan  $xOy$ , on a  $r = r'$  et  $\vec{u}' - \vec{u} = \vec{M'M} / r$ , d'où

$$\vec{\nabla} G = 2 \vec{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta \left( jk + \frac{1}{r} \right)$$

où l'on a posé  $\cos \theta = HM/r$ ,  $H$  étant le milieu de  $M'M$ . L'expression (15.49) prend ainsi la forme

$$F(M) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{xOy} dx_P dy_P F(P) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta \left( jk + \frac{1}{r} \right) \quad (15.50)$$

Pour un point  $M$  pas trop près du plan  $xOy$ , soit, plus précisément, pour  $kr \gg 1$ , on aboutit à l'expression

$$F(M) \simeq -\frac{jk}{2\pi} \int \int_{xOy} dx_P dy_P F(P) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta \quad (15.51)$$

Revenons maintenant à l'étude de la diffraction. On voit que l'expression (15.51) ci-dessus fournit la formulation *exacte* du principe de Huygens pour le dispositif de la figure 15.8, avec un facteur d'obliquité  $K(P, M) = \cos \theta$ , le plan  $xOy$  étant celui de l'écran comportant une ouverture  $\sigma$ . Supposons que l'écran soit éclairé par une source ponctuelle  $S$  située dans la région  $z < 0$ . Comme précédemment, on imposera (de façon justifiable)  $F(P) = 0$  pour  $P$  en dehors de  $\sigma$ ,  $F(P) = e^{-jkSP} / SP$  si  $P$  est dans  $\sigma$  (à un facteur  $T(P)$  près), d'où le résultat

$$F(M) \simeq -\frac{jk}{2\pi} \int \int_{\sigma} dx_P dy_P \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{e^{-jkSP}}{SP} \cos \theta \quad (15.52)$$

Dans la configuration de Fraunhofer et dans l'approximation paraxiale, pour laquelle  $\cos \theta \simeq 1$ , la formule (15.52) conduit elle aussi, mais de façon plus satisfaisante, à l'expression (15.15).

### 15.9.3 Annexe

Ce qui suit est une extension, à des fonctions satisfaisant l'équation de Helmholtz en trois dimensions, d'un théorème établi par B. Riemann pour des fonctions qui satisfont l'équation de Laplace en deux dimensions (fonctions harmoniques)<sup>29</sup> et qu'il a notamment énoncé dans sa dissertation inaugurale à Göttingen en 1851.

Considérons un champ scalaire  $F(M)$  vérifiant la condition  $F(M) = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} F(M) = 0$  si  $M$  appartient à une surface  $\Sigma_0$  finie mais non nécessairement fermée. L'exemple suivant, en coordonnées cylindriques adimensionnées  $(\rho, \varphi, z)$ ,

<sup>29</sup>On peut en trouver la démonstration dans l'ouvrage "Oeuvres Mathématiques de Riemann", publié par Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1898 §XI, p.25; réédité par les Editions Jacques Gabay, Paris, 1990; numérisation disponible sur le site de la bibliothèque numérique Gallica de la BNF (à rechercher directement sur internet par les mots-clés "Gallica Riemann Bernhard").

$$F(\rho, z) = (1 - e^{-z^2})e^{-z^2} \quad \text{pour } \rho \leq 1$$

$$F(\rho, z) = \left[ (\rho - 1)^2 + 1 - e^{-z^2} \right] e^{-z^2} e^{-(\rho-1)^2} \quad \text{pour } \rho \geq 1 \quad (15.53)$$

d'une fonction possédant toutes les propriétés de régularité souhaitables et qui s'annule, ainsi que son gradient, sur le disque  $z = 0$ ,  $\rho \leq 1$ , montre que de telles fonctions existent. Cependant, si la fonction doit vérifier en plus l'équation de Helmholtz (ce qui n'est pas le cas pour l'exemple cité), ladite condition implique nécessairement  $F(M) \equiv 0$  partout. Ci-après sont décrites deux justifications possibles de cette assertion.

On notera en passant que la surface  $\Sigma_0$  représente pour la fonction  $F$  une composante de l'équipotentielle  $F(M) = 0$ , une autre composante pouvant être à l'infini si l'on considère une fonction s'annulant aussi dans cette région. Comme sur toute équipotentielle, le gradient de  $F$  y est orienté en tout point  $M$  suivant sa normale  $\vec{n}(M)$  et, par suite, la condition sur le gradient signifie donc que celui-ci est également nul en tout point de  $\Sigma_0$ .

Dans ce qui suit, les fonctions considérées sont supposées être à valeurs *réelles*. On étend immédiatement le résultat à des fonctions à valeurs complexes en supposant que leurs parties réelles et imaginaires vérifient l'équation de Helmholtz et sont soumises à la même contrainte.

♣ **Première méthode** <sup>30</sup>

Supposons que la fonction  $F$  ne soit pas partout nulle. De part et d'autre de  $\Sigma_0$ , existent certainement des zones où  $F$  prend soit des valeurs positives, soit des valeurs négatives. On peut toujours imaginer une sphère  $\mathcal{S}$  interceptant  $\Sigma_0$ , ayant pour rayon  $R$  et dont le centre  $C$  est en dehors de  $\Sigma_0$ . La surface  $\Sigma_0$  partage la boule délimitée par  $\mathcal{S}$  en deux parties dont l'une,  $\tau$ , ne contient pas le centre  $C$  de  $\mathcal{S}$ . On peut toujours s'arranger pour que l'extension de  $\tau$  soit suffisamment petite pour que  $F$  y garde un signe constant, par exemple *positif*. Le volume  $\tau$  est délimité, d'un côté par la surface  $\sigma_0$  découpée par  $\mathcal{S}$  sur  $\Sigma_0$ , de l'autre côté par un morceau  $S$  de la sphère  $\mathcal{S}$ . Considérons la fonction

$$G(P) = \frac{1}{CP} - \frac{1}{R}$$

C'est une fonction de Green de l'équation de Laplace :  $\Delta_P G = 0$  pour  $P \neq C$ ,  $G = 0$  sur la sphère  $\mathcal{S}(C, R)$ . Partout où il est défini, le vecteur

$$\vec{w} = F \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} F \quad (15.54)$$

vérifie l'équation

$$\text{div } \vec{w} = F \Delta_P G - G \Delta_P F = k^2 F G \quad (15.55)$$

Appliquons-lui le théorème de la divergence pour le volume  $\tau$  :

$$\int \int_{\Sigma} \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int \int \int_{\tau} \text{div } \vec{w} \, d\tau \quad (15.56)$$

Sur  $\sigma_0$ , on a  $\vec{w} \cdot \vec{n} = F \vec{n} \cdot \vec{\nabla} G - G \vec{n} \cdot \vec{\nabla} F = 0$  du fait de la contrainte sur  $F$  et son gradient. Sur la surface  $S$  on a  $G = 0$  et la normale sortante y est  $\vec{e}_R = \vec{CP}/R$ . On a donc

$$\int \int_S \dots = \int \int_S R^2 d\Omega F \vec{e}_R \cdot \left( -\frac{\vec{e}_R}{R^2} \right) = - \int \int_S d\Omega F$$

<sup>30</sup>Cette méthode est fondée sur une astuce utilisée en deux dimensions par H. Weber, Mathem. Ann. Vol. 1, (1869), p.1 ; cet article est disponible sur internet via Google Books.

où  $d\Omega$  est l'angle solide sous lequel depuis  $C$  on voit un élément de surface sphérique (en coordonnées sphériques centrées sur  $C$ , on a  $d\Omega \sin\theta d\theta d\varphi$ ). Ainsi, on aboutit finalement à la relation

$$\int \int_S d\Omega F = -k^2 \int \int \int_\tau F G d\tau \quad (15.57)$$

Par hypothèse,  $F$  prend des valeurs positives sur  $S$  et dans  $\tau$ . Dans ce même volume,  $CP \leq R$  et  $G$  y prend donc des valeurs *positives*. Comme  $k^2 > 0$ , les deux membres de (15.57) ont des signes opposés tandis que les intégrands gardent des signes constants. Il y a donc une contradiction qui ne peut être contournée que si et seulement si  $F$  est identiquement nulle dans le domaine considéré. La surface  $S$  peut ensuite à son tour jouer le rôle de  $\sigma_0$  et, de proche en proche, on peut ainsi montrer que  $F$  doit être nulle partout.

### ♣ Deuxième méthode

Supposons que la fonction  $F$  ne soit pas partout nulle. Il doit alors exister des lignes de champ de son gradient joignant  $\Sigma_0$  à d'autres surfaces équipotentielles de  $F$ , certaines orientées de  $\Sigma_0$  vers les régions où  $F$  prend des valeurs positives, les autres orientées vers  $\Sigma_0$  provenant de possibles régions où  $F$  prend des valeurs négatives.

Envisageons sur  $\Sigma_0$  un élément de surface  $\sigma_0$  construit autour d'un point  $M_0$  et dont l'extension est suffisamment petite pour que, en chacun de ses points, la ligne de champ de  $\vec{\nabla} F$  qui y passe *parte* de  $\Sigma_0$ . En un point  $M$  au voisinage immédiat de  $M_0$  mais en dehors de  $\Sigma_0$ ,  $F(M) = F_0$  est donc *positif*.

Construisons une surface fermée de la façon suivante. En chacun des points de la frontière de  $\sigma_0$  passe une ligne de champ de  $\vec{\nabla} F$ . En collectant l'ensemble de telles lignes de champ, on construit une surface  $\mathcal{T}$ , dont l'intersection avec la surface équipotentielle  $\mathcal{F}$  où  $F = F_0$  est une surface  $S$  pour laquelle on peut faire en sorte que  $M$  en soit un point central (il suffit de prendre  $M$  sur la ligne de champ de  $\vec{\nabla} F$  passant par  $M_0$ ). L'ensemble des trois surfaces  $\sigma_0$ ,  $\mathcal{T}$  et  $S$  constitue une surface fermée  $\Sigma$  délimitant un volume  $\tau$  à l'intérieur duquel on a  $0 \leq F \leq F_0$ .

Le vecteur

$$\vec{V} = (F - F_0) \vec{\nabla} F \quad (15.58)$$

est nul sur  $\Sigma_0$  et aussi sur la surface équipotentielle  $\mathcal{F}$ . On vérifie immédiatement que le flux total de  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma$  est nul, ce qui donne l'équation

$$\int \int \int_\tau \operatorname{div} \vec{V} d\tau = 0$$

Or

$$\operatorname{div} \vec{V} = \left( \vec{\nabla} F \right)^2 + k^2 F (F_0 - F) \quad (15.59)$$

Chacun des termes de cette expression étant positif et la somme de leurs intégrales étant nulle, ils ne peuvent donc qu'être nuls. On en déduit que  $F$  est identiquement nulle dans  $\tau$ , puis, par extension, dans tout le domaine de définition envisagé.

## 15.10 Complément II : Diffraction et relations d'incertitude de Heisenberg

On peut interpréter le phénomène de Diffraction en Optique à un processus de mesure de position, tel qu'on le décrit en Mécanique Quantique. Ici, il faut se rappeler qu'à une onde électromagnétique est toujours associé une particule, le Photon. S'agissant d'une onde plane, monochromatique, de fréquence  $\nu$ , se propageant dans le vide dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_0$ , son Photon a une énergie et une quantité de mouvement bien définies, égales à  $E = h\nu$  et  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_0$  respectivement,  $h$  étant la constante de Planck. Par contre, pour cette onde, il est impossible de connaître la position exacte du Photon qui l'accompagne. En effet, dans le langage probabiliste de la Mécanique Quantique,  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  étant les écarts quadratiques moyens respectifs de la position d'un corpuscule suivant l'axe  $x'x$  et de la projection de sa quantité de mouvement suivant cet axe, on a nécessairement la relation<sup>31</sup>

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (15.60)$$

appelée *relation d'incertitude* de Heisenberg. La même relation vaut également pour les autres coordonnées et les projections correspondantes de la quantité de mouvement. La relation (15.60) indique que si l'on connaît exactement  $p_x$ , la position  $x$  a une incertitude maximum, et vice-versa : la position et la quantité de mouvement correspondante ne peuvent donc être simultanément connues avec précision. Toute amélioration de l'information sur l'une de ces grandeurs se traduit inévitablement par une perte d'information sur la seconde. Pour rappeler ce fait, on qualifie la position et la quantité de mouvement de *variables conjuguées*<sup>32</sup>.

L'interposition sur le trajet de ladite onde d'un écran opaque comportant une ouverture force le Photon à passer par cette ouverture et doit donc s'interpréter comme une tentative de mesure de la position dudit Photon. Il n'est donc pas étonnant que l'on perde alors l'information précise dont on disposait auparavant sur sa quantité de mouvement : après l'écran, les directions de propagation possibles  $\vec{u}$  du photon s'étaient autour de la direction initiale  $\vec{u}_0$ , il s'est produit un phénomène de diffraction et celui-ci apparaît bien comme étant inhérent au processus de mesure envisagé.

Pour simplifier le propos et les évaluations, nous assimilerons un écart quadratique moyen à une simple variation par rapport à une valeur centrale. Prenons  $\vec{u}_0 \equiv \vec{e}_z$ , et supposons que l'ouverture dans l'écran soit une fente infiniment longue suivant  $y'y$  et de largeur  $\Delta x = 2a$  suivant  $x'x$ . La diffraction ne modifie alors la direction de propagation que dans le plan  $xOz$ . Posons  $\vec{u} = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z$  où  $\theta$  est a priori un petit angle. On a  $\Delta p_x = h\nu \sin \theta / c = h \sin \theta / \lambda$ , d'où

$$\Delta p_x \Delta x = h \sin \theta \ 2a \lambda \geq \frac{h}{4\pi}$$

soit

$$\sin \theta \simeq \Delta \theta \geq \frac{\lambda}{8\pi a}$$

Cette relation signifie que, de façon incontournable, on observe après l'écran une dispersion de la répartition des directions de propagation autour de  $\vec{u}_0$  dans un intervalle angulaire *au moins égal*

<sup>31</sup>L'écart quadratique moyen d'une variable aléatoire  $\xi$  est défini par la formule  $\Delta \xi = \sqrt{\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2}$ , le symbole  $\langle \dots \rangle$  représentant une valeur moyenne évaluée à l'aide de la loi de probabilité de  $\xi$ .

<sup>32</sup>Nous avons déjà rencontré ce type de relation entre l'étendue spectrale  $\delta\nu$  d'un signal et sa durée de vie moyenne  $\delta t$  :  $\delta\nu \delta t \geq \text{constante}$ . En mécanique Quantique, on peut également établir une relation d'incertitude temps-énergie, liant l'incertitude  $\Delta E$  sur la valeur prise par l'énergie d'un système à un intervalle de temps  $\Delta t$  caractéristique de l'évolution de ce système.

à  $\frac{\lambda}{8\pi a}$ . Cette dispersion est en fait plus importante, mais le fait marquant est que le principe d'incertitude en donne une limite inférieure intangible. On observe d'ailleurs que cette limite croît avec la longueur d'onde et que, dans le domaine du visible notamment, les radiations rouges sont plus diffractées que les radiations bleues. En lumière blanche, on observe bien une tache centrale blanche bordée de rouge, indiquant que les radiations bleues disparaissent en premier du spectre. On en conclut que la diffraction affecte plus les radiations rouges que les radiations bleues, celles-ci restant plus concentrées dans la zone centrale (figure 15.26).

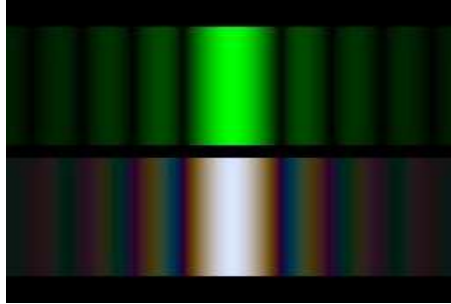


FIG. 15.26 – Diffraction de la lumière blanche