

Chapitre 2

Champ et Potentiel Electrostatiques

2.1 Introduction : les interactions fondamentales

La matière est constituée d'objets microscopiques, souvent appelés *particules*, et même *particules élémentaires*¹. Cependant, ce qualificatif d'élémentaire dépend en fait du domaine scientifique considéré. Ainsi, les plus petits objets à la base de la biologie sont plutôt des macromolécules, agrégats de molécules. Les molécules, objets d'étude de la physique moléculaire, sont constituées d'atomes, objets d'étude de la physique atomique et qui concernent aussi directement la chimie. L'atome lui-même est constitué d'un noyau entouré d'un nuage d'électrons. Un noyau est constitué de protons et de neutrons et est l'objet de base de la physique nucléaire. Au bout de cette descente vers les échelles de distance de plus en plus petites se trouve la physique des particules dites élémentaires car ce sont les plus petites structures découvertes jusqu'à ce jour. Durant le siècle dernier, le développement de cette Physique a permis la découverte de très nombreuses particules, principalement grâce à la construction de grands accélérateurs qui sont des machines où l'on fait entrer en collision des particules chargées, par exemple des électrons ou des protons. On a ainsi découvert que le proton et le neutron par exemple ne sont pas des structures fondamentales, mais sont constitués de *quarks*, liés entre eux par l'intermédiaire de *gluons*, et qui, bien qu'il ne soit pas possible de les observer à l'état libre comme on pourrait le faire pour un électron, sont des ingrédients nécessaires à la bonne compréhension des phénomènes observés dans cette partie de la Physique.

D'une façon générale, selon leurs propriétés, les particules sont susceptibles d'avoir entre elles un ou plusieurs types d'interaction. Aujourd'hui, on distingue un nombre réduit d'interactions dites *fondamentales* à partir desquelles se construisent a priori les interactions plus complexes entre systèmes macroscopiques.

Les interactions les plus importantes du point de vue de leurs intensités à l'échelle microscopique sont les *interactions fortes*. L'interaction *superforte* est notamment responsable de l'agglomérat de quarks en structure de proton ou de neutron. A l'échelle d'un noyau, ces interactions sont dites *nucléaires*. Elles assurent la cohésion entre protons et neutrons dans un noyau, malgré la répulsion électrostatique entre les protons. Ces interactions intenses sont cependant de très courte portée, de l'ordre de la taille d'un proton, soit $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, et ne sont donc pas directement observables à notre échelle². Elles sont encore imparfaitement connues et font actuellement l'objet de recherches très poussées. Les particules pouvant interagir par interaction forte sont appelées des *hadrons*³.

¹Voir <http://voyage.in2p3.fr>

²http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_nucléaire, <http://semsci.u-strasbg.fr/noyau.htm>

³Mot venant du grec "hadros" qui veut dire fort, abondant.

En second viennent les interactions *électromagnétiques*⁴. Ce sont principalement des interactions entre porteurs de charges électriques, mais il existe des particules neutres ayant un moment magnétique et qui de ce fait sont aussi sujettes à ce type d'interaction (comme le neutron). L'interaction électromagnétique, bien que moins intense que l'interaction forte, est de plus longue portée que cette dernière et est donc perceptible à plus longue distance. Dans l'atome, c'est elle qui assure la cohésion du noyau avec le nuage d'électrons qui l'entoure. Par des combinaisons complexes de forces entre atomes ou entre molécules, elle est aussi à l'origine de la plupart des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques se produisant à notre échelle. Elle intervient notamment dans la cohésion de la matière, dans les forces élastiques, comme la force exercée par un ressort, et dans les forces dites de contact entre solides, comme par exemple les forces de frottement.

Les interactions *faibles*⁵, comme leur nom l'indique, sont peu intenses et de courte portée. Elle n'interviennent qu'à très petite échelle entre particules élémentaires. Elles sont responsables de la désintégration de certaines d'entre elles, comme le neutron, et d'un phénomène spectaculaire appelé *violation de la parité*, découvert en 1956⁶. Dans les années 1970 a été élaboré un modèle théorique qui regroupe les interactions électromagnétiques et faibles en une théorie unificatrice qui porte le nom de *théorie électrofaible*⁷, dont les prévisions sont pour l'heure vérifiées par l'expérience. Certaines particules ne sont sujettes (à part la gravitation, éventuellement) qu'à l'interaction électrofaible. Elles sont appelées *leptons* (du grec "leptos", qui veut dire faible).

Vient enfin l'interaction gravitationnelle⁸. Elle nous est familière à cause du phénomène de la "pesanteur". Elle s'exerce entre des corps massifs quelconques. C'est la moins intense des interactions fondamentales, mais elle est de longue portée. A l'échelle des astres et des corps célestes en général, elle supplante l'interaction électromagnétique pour la simple raison que les objets macroscopiques concernés sont globalement électriquement neutres et ont des masses énormes, ce qui fait que leur interaction gravitationnelle est de loin prépondérante. C'est la gravitation qui gouverne alors les mouvements des astres. Par contre, au niveau des particules, l'interaction gravitationnelle est complètement négligeable devant les autres types d'interaction.

Le 19ème siècle a vu l'unification des interactions électriques et magnétiques en une théorie électromagnétique élaborée par Maxwell. Le 20ème siècle a vu l'unification des interactions électromagnétiques et faibles en une théorie électrofaible. C'est un souci constant des physiciens d'établir des corrélations entre phénomènes apparemment étrangers⁹ et d'en donner une explication globale dans le cadre d'une vaste théorie unificatrice. Actuellement des recherches sont en cours pour tenter d'établir la théorie de la "grande unification" dans laquelle toutes les interactions fondamentales observées jusqu'à maintenant ne seraient que des aspects différents d'une seule et unique interaction, fondamentale celle-là.

2.2 Charges Electriques, Champ Electrique

Les particules élémentaires, qui représentent les ultimes grains d'énergie, sont pour la plupart porteuses d'une *charge électrique*, grandeur fondamentale qui leur confère la faculté d'avoir des interactions électromagnétiques. Ainsi, l'électron, dont le nom est à l'origine du mot *électricité*, porte la charge (en unité S.I.) $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ (C est le symbole de l'unité de charge électrique, le Coulomb). Cette charge est, jusqu'à présent, la plus petite qui ait été directement détectée¹⁰.

⁴La théorie électromagnétique de Maxwell date de 1864. Elle fut confirmée par la découverte des ondes électromagnétiques par Hertz en 1887.

⁵La première ébauche de théorie des interactions faibles est due à Fermi et date de 1933.

⁶<http://irfu.cea.fr/Sphn/Parity/Histo/index.php>

⁷Associée aux noms de Weinberg, Salam et Glashow, voir :

http://en.wikipedia.org/wiki/Unified_field_theory

⁸<http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newtongrav.html>

⁹En premier lieu, des symétries.

¹⁰On sait actuellement que les particules hadroniques sont constituées de sous-structures, les *quarks*, dont les charges électriques sont les fractions $\pm 2/3$ ou $\pm 1/3$ de la charge de l'électron et qui ne sont pas *directement* détectables.

Toute autre charge est égale en valeur absolue à un nombre entier de fois cette charge élémentaire : on dit que la charge est quantifiée¹¹. Le proton, le muon positif, le pion positif portent la charge $+e$. Le neutron et le photon ont une charge nulle, ce qui ne signifie pas pour autant qu'ils n'ont pas d'interactions électromagnétiques : le photon est en fait le médiateur de ces interactions, et le neutron possède un moment magnétique qui en fait un petit aimant capable d'avoir des interactions magnétiques (le proton a aussi un moment magnétique, mais son interaction proprement électrique est prépondérante). Le neutrino a une charge nulle et n'a pas d'interaction électromagnétique directe, ce qui le rend difficilement détectable. Un atome comprend un noyau autour duquel gravitent des électrons. Si Z est le numéro atomique du noyau (c'est son numéro dans la classification périodique des éléments), ce dernier est constitué de Z protons et d'un certain nombre N de neutrons, la cohésion des protons et des neutrons dans le noyau étant assurée par les interactions nucléaires. L'atome étant électriquement neutre à l'état ordinaire, Z électrons gravitent donc autour de son noyau. Un atome qui a perdu des électrons est devenu un ion positif.

L'Electrostatique est le chapitre de l'Electromagnétisme qui étudie les interactions entre charges immobiles ou ayant de très faibles vitesses en comparaison de la célérité de la lumière.

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 immobiles interagissent conformément à la *loi de Coulomb* : la force d'interaction électrostatique qui s'exerce sur la charge q_2 située au point M_2 (fig 2.1) et qui est due à la charge q_1 située au point M_1 est¹²

- ♠ proportionnelle au produit $q_1 q_2$ des deux charges,
- ♠ inversement proportionnelle au carré de la distance $r_{12} = M_1 M_2$ séparant les deux charges,
- ♠ orientée dans la direction du vecteur $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{r_{12}}$, vecteur unitaire porté par la droite $M_1 M_2$, dans le sens de M_1 vers M_2 :

$$\boxed{\vec{F}_{M_1/M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r_{12}^2}} \tag{2.1}$$

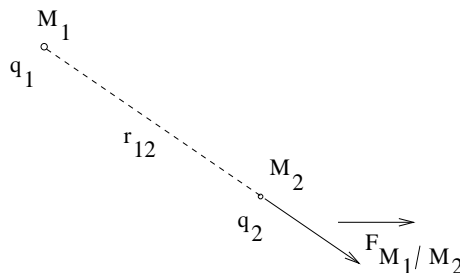


FIG. 2.1 – Force électrostatique entre deux charges ponctuelles

Dans cette expression, le paramètre ϵ_0 est une grandeur propre au vide, appelée *permittivité* du vide, tandis que le facteur $1/(4\pi)$ provient de la *rationalisation* des formules qui consiste à faire disparaître tout facteur numérique superflu d'équations jugées plus fondamentales¹³. Numériquement, on a

¹¹On notera donc le caractère *extensif* de la charge électrique.

¹²Voir la biographie de Charles Augustin de Coulomb :

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/coulomb.html>.

¹³En l'occurrence, les équations de Maxwell.

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ S.I.} \quad (2.2)$$

Cette force est attractive si les deux charges ont des signes opposés, répulsive si les charges ont le même signe. L'expression précédente donne la force que la charge q_1 en M_1 exerce sur la charge q_2 en M_2 . Bien entendu, d'après le principe de l'action et de la réaction, la force \vec{F}_{M_2/M_1} s'exerçant sur la charge q_1 et due à la charge q_2 est, vectoriellement parlant, exactement opposée à la précédente :

$$\vec{F}_{M_2/M_1} = - \vec{F}_{M_1/M_2} \quad (2.3)$$

D'après la loi de Coulomb, le vecteur $\vec{F}_{M_1/M_2} / q_2$ est indépendant de la valeur de la charge q_2 , que nous qualifierons de *charge d'essai*, placée au *point d'observation* M_2 . Il ne dépend, en fait, que de la valeur de la charge q_1 , que nous appellerons *charge source*, et de la position relative de M_2 vis-à-vis du point source M_1 . On est alors conduit à interpréter l'interaction entre les deux charges de la façon suivante.

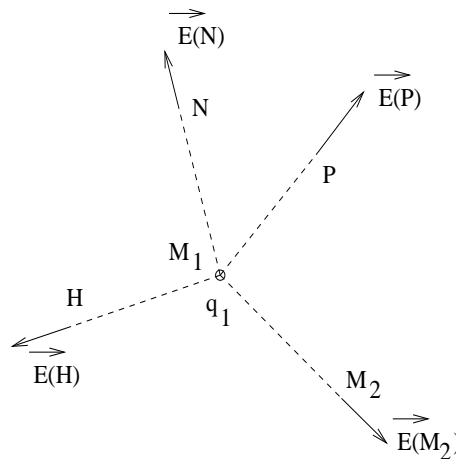


FIG. 2.2 – Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

Du fait de la présence de la charge source q_1 en M_1 , la structure de l'espace s'est modifiée : il est apparu un *Champ Electrique*, qui est de nature vectorielle. Au point d'observation M_2 (fig 2.2), ce vecteur champ électrique $\vec{E}(M_2)$ est donné par l'expression :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r_{12}^2} \quad (2.4)$$

Cette modification de l'espace se manifeste lorsqu'une charge d'essai q_2 est placée en M_2 : celle-ci est alors soumise à la force

$$\vec{F}(M_2) = q_2 \vec{E}(M_2) = \vec{F}_{M_1/M_2} \quad (2.5)$$

La notion de champ électrique est fondamentale en Electricité. Elle peut sembler artificielle en *Electrostatique*, puisqu'en fait, la considération des forces seules suffirait à décrire l'effet électrique. De plus, la notion de champ y est aussi indissociable des *charges sources*. Il en va tout autrement dans la théorie des ondes électromagnétiques où la seule donnée des charges est insuffisante pour

décrire la propagation du champ électromagnétique. On doit alors en conclure que ce champ a ses propres degrés de liberté qui ne se révèlent pleinement qu'en régime variable.

2.3 Les distributions de charges

La généralisation de à un système \mathcal{S} de n charges sources ponctuelles q_i ($i = 1, \dots, n$) situées aux points S_i ($i = 1, \dots, n$) est la suivante. D'après les principes mêmes de la Mécanique Classique, l'effort total exercé par \mathcal{S} sur une charge d'essai Q placée en P est décrit par un vecteur force $\vec{F}(P)$ qui est la résultante vectorielle des divers vecteurs forces $\vec{F}_i(P)$ décrivant les efforts individuels des diverses charges q_i sur la charge Q :

$$\vec{F}(P) = \sum_i \vec{F}_i(P) = Q \sum_i \vec{E}_i(P) \tag{2.6}$$

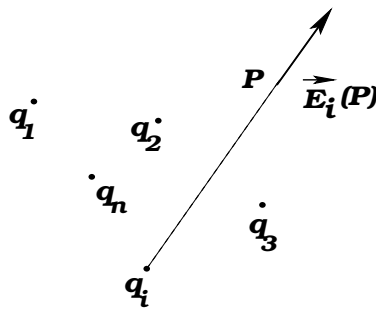


FIG. 2.3 – Distribution de charges ponctuelles

où $\vec{E}_i(P)$ est le vecteur champ électrique créée par q_i au point P (fig 2.3). Le vecteur $\vec{F}(P)/Q$ est indépendant de la valeur de Q . Il définit le champ électrique total $\vec{E}(P)$ créée en P par \mathcal{S} . On a donc

$$\vec{E}(P) = \sum_i \vec{E}_i(P) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{S_i P^2} \tag{2.7}$$

avec $\vec{u}_i = \vec{S}_i P / S_i P$.

La règle de calcul du champ électrique total suit celle utilisée pour calculer une force totale : le vecteur champ électrique total en un point est la *résultante vectorielle* des champs électriques individuels en ce point.

D'une façon générale, la somme vectorielle ci-dessus est très compliquée, elle dépend de la répartition des charges sources. Ceci fait que la variation du champ total vis-à-vis des coordonnées du point d'observation peut être très différente d'une loi en $1/r^2$. En particulier, pour certaines distributions de charges sources, on peut obtenir un champ *uniforme* (ou quasiment uniforme sur une grande étendue). Un champ est dit *uniforme* si sa direction, son sens et son module sont les mêmes en tout point (champ de vecteurs constant).

Lorsque les charges sont en très grand nombre, comme cela peut arriver à notre échelle macroscopique où d'ailleurs on ne s'intéresse pas trop aux détails microscopiques, on est amené à définir une *densité de charge*. Selon la forme du support contenant ces charges, qui peut être modélisé par une courbe, une surface ou un volume, on définit, respectivement, une densité *linéique*, une densité *surfactive* ou une densité *volumique*.

Envisageons d'abord le cas d'une distribution volumique, plus proche de la réalité physique. Autour d'un point P de cette distribution (fig 2.4), construisons un élément de volume d'extension infinitésimale $d\tau(P)$ (identique à $dx dy dz$ en coordonnées cartésiennes).

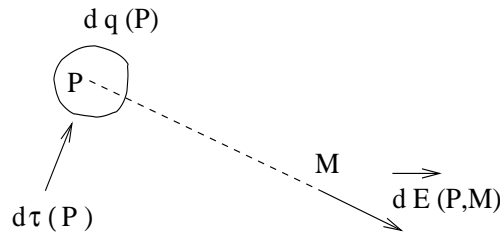


FIG. 2.4 – Champ électrostatique d'un élément de volume chargé

Ce volume, bien qu'étant considéré comme infinitésimal à notre échelle, peut déjà contenir un très grand nombre de charges élémentaires. Soit $dq(P)$ la charge contenue¹⁴ dans cet élément de volume. On définit la densité volumique de charges au point P par le rapport¹⁵.

$$\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau(P)} \quad (2.8)$$

C'est aussi un *champ scalaire*, qui s'exprime en C/m^3 dans le système S.I.. A l'échelle macroscopique, la charge $dq(P)$ est considérée comme ponctuelle. Elle est la source au point M d'un champ électrostatique *élémentaire*

$$\vec{dE}(P, M) = \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (2.9)$$

où dans la dernière expression le vecteur unitaire \vec{u} définissant l'orientation de \vec{PM} a été exprimé comme $\frac{\vec{PM}}{PM}$.

Le champ total créé par la distribution \mathcal{D}_V au point M est la somme vectorielle de tous les champs élémentaires provenant des diverses charges infinitésimales telles que $dq(P)$, le point P courant dans tout le volume \mathcal{V} où se trouvent les charges. Cette somme s'exprime ici comme une *intégrale triple* sur les coordonnées du point courant P :

$$\vec{E}(M) = \int \int \int \vec{dE}(P, M) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (2.10)$$

Selon la distribution étudiée, le système de coordonnées le plus approprié peut être celui

- des coordonnées cartésiennes x, y, z , pour lequel

$$d\tau(P) = dx dy dz \quad (2.11)$$

- ou des coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z , pour lequel

$$d\tau(P) = \rho d\rho d\phi dz \quad (2.12)$$

- ou des coordonnées sphériques r, θ, ϕ , pour lequel

¹⁴Il s'agit ici d'une moyenne

¹⁵Pour se convaincre qu'une telle quantité représente déjà une grandeur macroscopique, il suffit de songer qu'un millimètre cube de cuivre contient déjà environ 10^{20} atomes, et qu'une goutte d'eau de 1 mm de diamètre contient environ $2 \cdot 10^{19}$ molécules H_2O !

$$d\tau(P) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.13)$$

Si l'une des dimensions du volume \mathcal{V} est très petite devant les deux autres, celui-ci, très mince, est modélisable par une surface S et la distribution volumique de charges qu'il contient apparaît comme une distribution *superficielle* de charges sur cette surface.

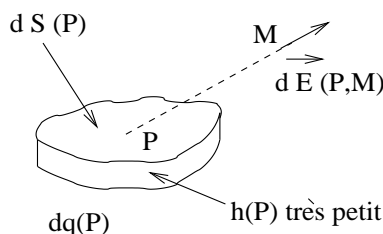


FIG. 2.5 – Champ électrostatique d'un élément de volume chargé, de très faible épaisseur, assimilable à un élément de surface

Soit un point P de cette surface et $h(P)$ l'épaisseur du volume mince en ce point. Autour de P construisons un élément de surface d'extension infinitésimale $dS(P)$ (fig 2.5). Revenant à la distribution volumique, l'élément de volume autour de P a pour extension $h(P)dS(P)$ et contient la charge $dq(P)$. La densité superficielle (ou surfacique) de charges au point P est définie par le rapport

$$\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS(P)} \quad (2.14)$$

Cette densité s'exprime en C/m^2 dans le système S.I.. Elle est liée à la densité volumique de la distribution à l'intérieur du volume mince par la relation

$$\sigma(P) = h(P)\rho(P) \quad (2.15)$$

Cette fois, le champ total de la distribution superficielle s'exprime comme une intégrale *double*

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int \int_S \vec{dE}(P, M) = \int_S \frac{\sigma(P)dS(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}} \quad (2.16)$$

Enfin, si une autre dimension du volume est elle aussi petite, il s'agira alors d'une sorte de tuyau que l'on modélisera par une courbe \mathcal{C} et la distribution de charges sera assimilée à une distribution linéique. Le long de la courbe au voisinage d'un de ses points P construisons un élément de longueur d'extension infinitésimale $d\ell(P)$ (fig 2.6). Notons $h(P)$ et $h'(P)$ les deux petites dimensions transversales du volume filiforme en P . En ce point, nous avons un élément de volume d'extension $d\tau(P) = h(P)h'(P)d\ell(P)$ contenant la charge $dq(P)$. La densité linéique de charges en P est alors définie par le rapport

$$\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell(P)} \quad (2.17)$$

Cette densité s'exprime en C/m dans le système S.I.. Elle est liée à la densité volumique de la distribution à l'intérieur du volume filiforme par la relation

$$\lambda(P) = h(P)h'(P)\rho(P) \quad (2.18)$$

Pour cette distribution linéique, le champ total s'exprime comme une intégrale *simple*

$$\vec{E}(M) = \int_C d\vec{E}(P, M) = \int_C \frac{\lambda(P) dS(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (2.19)$$

sur la coordonnée qui définit la position du point courant P sur la courbe \mathcal{C} (abscisse curviligne par exemple).

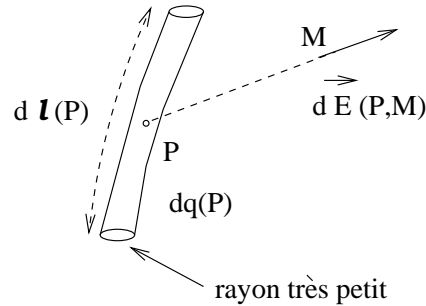


FIG. 2.6 – Champ électrostatique d’un élément de volume chargé, de très petites dimensions transversales, assimilable à un élément de courbe

2.4 Le potentiel électrostatique

Considérons à nouveau le champ créé en un point M par une charge ponctuelle q située en un point P

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

et démontrons le “théorème” suivant

$$\frac{\vec{PM}}{PM^3} = - \text{grad} \frac{1}{PM} \quad (2.20)$$

Par rapport à un repère cartésien $Oxyz$, on a

$$PM = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}$$

x, y, z et x_P, y_P, z_P étant les coordonnées cartésiennes de M et de P respectivement dans ce repère. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{PM} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} = \\ &= - \frac{(x - x_P)}{[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2]^{3/2}} = - \frac{(x - x_P)}{PM^3} \end{aligned}$$

et des relations similaires pour les dérivations par rapport aux autres coordonnées de M . Le théorème est ainsi démontré. Posons alors

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} + \text{constante} \quad (2.21)$$

Ce champ scalaire $V(M)$ est le *potentiel électrostatique* crée au point M par la charge q en P , et, d'après le théorème précédent, on a la relation fondamentale

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)} \quad (2.22)$$

c'est-à-dire, *le champ électrostatique d'une charge ponctuelle dérive d'un potentiel.*

Ce résultat peut être généralisé à une distribution de charges quelconque. En effet, de l'addition vectorielle des vecteurs champs électrostatiques résulte l'addition *algébrique* des potentiels. Par exemple, le potentiel crée en un point M par une distribution de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{P_i M} + \text{constante}$$

La généralisation au cas des distributions continues, volumique, surfacique ou linéique est immédiate

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{volumique}) \\ V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(P)dS(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{surfacique}) \\ V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P)d\ell(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{linéique}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans chaque cas, la relation "champ-potentiel" (2.22) est vérifiée. On déduit de celle-ci les propriétés suivantes.

♣ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe quelconque C joignant deux points donnés A et B est *indépendante* de la forme de cette courbe : elle est égale à la *différence de potentiel* $V(A) - V(B)$:

$$\int_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = V(A) - V(B) \quad (2.24)$$

Comme on sait, ceci équivaut à écrire

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (2.25)$$

♣ Le potentiel électrique $V(M)$ est une fonction *continue* des coordonnées du point M .

♣ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée quelconque est toujours égale à zéro.

♣ Le champ électrostatique est toujours orienté dans le sens des potentiels *décroissants*.

Cette dernière circonstance provient du signe "-" dans la relation champ-potentiel. Ce choix conventionnel du signe est lié au souhait d'obtenir un signe "+" dans la définition de l'énergie potentielle électrostatique (voir plus loin).

Notons aussi que le potentiel $V(M)$ n'est défini qu'à une constante additive près. Cette constante peut être ajustée en choisissant arbitrairement le point ou la région où le potentiel sera pris égal à zéro, sous réserve, bien entendu, que le potentiel n'y ait pas de singularité. Dans le cas d'un système de charges confinées dans une région finie de l'espace, on peut choisir le zéro du potentiel à distance infinie des charges. En Electrocinétique, on choisit couramment comme potentiel de référence (c'est-à dire comme potentiel zéro) celui de la "masse" ou celui de la Terre.

2.5 Potentiel Electrique et Energie Electrique

Lorsque la charge d'essai Q se déplace du point P au point infiniment voisin P' tel que $\overrightarrow{PP'} = d\overrightarrow{P}$, la force électrostatique $\overrightarrow{F}(P) = Q \overrightarrow{E}(P)$ s'exerçant sur cette charge développe le travail

$$dW = \overrightarrow{F}(P) \cdot d\overrightarrow{P} = Q \overrightarrow{E}(P) \cdot d\overrightarrow{P} \quad (2.26)$$

Le rapport dW/Q est lui aussi indépendant de la valeur de la charge d'essai et peut servir à définir la différence de potentiel électrique entre les deux points P et P' . Plus précisément, cette différence de potentiel, qui est ici infinitésimale, est donnée par (attention au signe! voir plus haut) :

$$dV = -dW/Q \quad (2.27)$$

L'énergie potentielle électrique d'une charge Q en un point M où règne le potentiel électrique $V(M)$ est, à une constante additive près, égale à

$$U_e(M) = QV(M) \quad (2.28)$$

C'est le travail de la force que devrait exercer un observateur sur la charge Q en contre-balançant exactement la force électrostatique pour amener la charge depuis un point de potentiel zéro jusqu'au point M . En effet, on a alors

$$\overrightarrow{F}_{\text{obs}} = -Q \overrightarrow{E}(M) \quad (2.29)$$

d'où

$$W_{\text{obs}}(M) = -Q \int_{M_0}^M \overrightarrow{E}(M) \cdot d\overrightarrow{M} = -Q(V(M_0) - V(M)) = QV(M) = U_e(M) \quad (2.30)$$

M_0 étant un point tel que $V(M_0) = 0$.

On peut faire ici un parallèle avec l'interaction gravitationnelle d'une masse m dans le champ de pesanteur terrestre. On sait que l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en un point d'altitude z supposée petite devant le rayon terrestre a pour expression $W_{\text{pes}} = mgz$, où g est "l'accélération de la pesanteur", en convenant que $W_{\text{pes}} = 0$ pour $z = 0$. Le potentiel de gravitation est donné par $V_{\text{pes}} = W_{\text{pes}}/m = gz$, et le champ de gravitation est $G(z) = -dV_{\text{pes}}/dz = -g$.

L'unité S.I. des potentiels est le Volt (V); dans ce même système d'unités S.I., le champ électrique s'exprime quant à lui en Volt par mètre (V/m).

2.6 Le théorème de Gauss

Soit une charge ponctuelle q placée en un point P . Choisissons P comme origine d'un repère d'espace où un point M y sera repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, ϕ . Le champ électrostatique créé par q en M prend alors la forme

$$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{e}_r E_r(r), \text{ avec } E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

où $r = PM$. Utilisons alors l'expression de la divergence en coordonnées sphériques (donnée au chapitre 1). Il vient

$$\text{div } \overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r}$$

Par suite, dans tout domaine excluant la valeur $r = 0$, on a

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on en déduit que le flux du champ électrostatique à travers toute surface fermée *n'entourant pas la charge* est égal à zéro.

Considérons maintenant deux surfaces fermées entourant toutes les deux la charge et n'ayant pas d'intersection (pour simplifier) : l'une, Σ_2 , entoure complètement l'autre, Σ_1 (fig 2.7). L'association Σ des deux surfaces constitue une surface fermée délimitant un volume \mathcal{V} à l'intérieur duquel on a encore $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ et le flux sortant de \vec{E} à travers Σ est donc nul. Or, ce flux est égal à la différence des flux du champ *sortant* de Σ_2 et de Σ_1 respectivement. On en conclut que le flux sortant du champ à travers une surface *quelconque* entourant la charge ne dépend pas en fait de cette surface. Pour l'évaluer, nous prendrons comme surface particulière une sphère S centrée au point P où est située la charge, et de rayon r . Sur la sphère, le vecteur surface élémentaire est

$$\vec{dS} = r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi \wedge r d\theta \vec{e}_\theta = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\phi$$

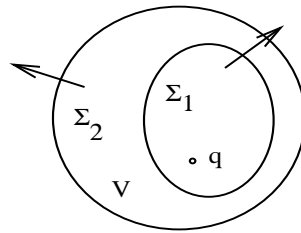


FIG. 2.7 – Volume V compris entre les deux surfaces fermées Σ_1 et Σ_2

et le flux du champ à travers l'élément de surface correspondant est

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{d\Omega}{4\pi}$$

où

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \tag{2.31}$$

est l'élément *d'angle solide* sous lequel depuis le point P on voit ledit élément de surface¹⁶. Le flux total est obtenu par intégration sur les angles θ et ϕ , entre 0 et π pour le premier, entre 0 et 2π pour le second, d'où

$$\iint d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \tag{2.32}$$

et le flux total à travers S est

$$\iint_S d\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.33}$$

Pour ce champ créé par une charge ponctuelle, on en déduit le *théorème de Gauss* :

Le flux sortant à travers une surface fermée du champ électrostatique créée par une charge ponctuelle q est égal à 0 si la charge est à l'extérieur de cette surface et égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$ si la charge est à l'intérieur de cette surface.

¹⁶Voir plus loin.

Le cas (plutôt académique) où la charge se trouve *sur* la surface est considéré plus loin.
Ce résultat se généralise immédiatement aux distributions de charges :

Le flux sortant à travers une surface fermée du champ électrostatique crée par une distribution de charges est égal à la somme Q_S des charges situées à l'intérieur de cette surface, divisée par ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

où le symbole \oint signifie que l'intégrale de surface porte sur une surface *fermée*.

S'il s'agit d'une distribution volumique de charges pour laquelle la densité locale de charges est $\rho(M)$, cette relation intégrale peut être transcrite en une relation *locale* grâce au théorème de Green-Ostrogradsky, puisque

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int \int \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \, d\mathcal{V} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \int \int_{\mathcal{V}} \rho(M) d\mathcal{V}$$

Comme cette relation doit être vraie quelle que soit l'extension du volume \mathcal{V} , il vient, en passant à la limite d'un volume infinitésimal

$$\operatorname{div} \vec{E} (M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \tag{2.34}$$

C'est l'expression *locale* du théorème de Gauss.

Puisque $\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\Delta V$, cette relation¹⁷ conduit pour le potentiel à l'équation suivante, dite *équation de Poisson*¹⁸, qui lie le potentiel à ses sources

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{2.35}$$

Dans une région en dehors des sources, là où la densité de charge est nulle, cette équation se réduit à l'*équation de Laplace*¹⁹

$$\Delta V = 0 \tag{2.36}$$

Démontrons encore le théorème suivant :

♠ *Dans toute région exempte de charge électrique, le potentiel ne peut présenter ni maximum ni minimum.*

Supposons en effet qu'en un point M le potentiel présente un maximum *local*. De part la relation champ-potentiel (2.22), les lignes de champ de \vec{E} ne peuvent que diverger à partir de ce point. Le flux sortant du champ à travers une petite surface entourant M ne peut qu'être positif, puisque le champ sera toujours orienté vers le même demi-espace que la normale sortante à cette surface. D'après le théorème de Gauss, la surface fermée entoure nécessairement une charge positive. En passant à la limite d'une surface infinitésimale, on en déduit qu'une charge positive doit se trouver

¹⁷Rappelons que le symbole ΔV représente la *Laplacien* de V ; voir le chapitre 1 pour sa définition.

¹⁸Du nom du Physicien Siméon Denis Poisson 1781-1840

¹⁹Voir : <http://www.math.unicaen.fr/~reysat/laplace/>

au point M . Si aucune charge ne se trouve en M , le potentiel ne peut donc y avoir de maximum. De même, le cas d'un minimum local du potentiel serait obligatoirement lié à la présence d'une charge négative; d'où le théorème.

2.7 Angle solide et théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique d'une charge ponctuelle q située en un point P à travers un élément de surface d'aire dS construit autour d'un point M est donné par

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{N}(M) dS(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire porté par \vec{PM} , \vec{N} la normale à dS , $r = PM$ et α l'angle entre \vec{u} et \vec{N} . Or, la quantité $d\Sigma = dS \cos \alpha$ n'est rien d'autre que la projection de l'élément d'aire dS dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{u} . Ce plan est aussi le plan tangent en M à la sphère Σ de centre P et de rayon r . L'élément $d\Sigma$ est donc un élément de surface construit autour du point M sur cette sphère. En introduisant les coordonnées sphériques r, θ, ϕ attachées au point M dans un repère d'origine P , on a

$$d\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad \text{et} \quad d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{r^2} dS = \frac{d\Sigma}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$

Cette dernière quantité $d\Omega$ représente l'angle solide élémentaire sous lequel depuis le point P on voit l'élément de surface dS . On voit que cette quantité ne dépend ni de la forme précise de dS , ni de sa distance r au point P , mais plutôt des angles d'ouverture $d\theta$ et $d\phi$ (et aussi de θ) définissant ce qui s'apparente à un cône de sommet P s'appuyant sur dS (fig 2.8).

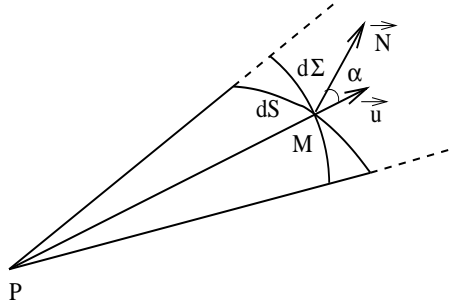


FIG. 2.8 – Angle solide sous lequel depuis P on voit les éléments de surfaces dS et $d\Sigma$ construits autour de M

L'angle solide joue, à trois dimension, un rôle similaire à celui de l'angle à deux dimensions. En particulier, l'angle solide total sous lequel depuis le point P on voit une surface n'entourant pas P est égal à zéro. Cet angle doit en effet être envisagé comme l'angle solide total balayé par toutes les orientations possibles du vecteur \vec{PM} lorsque le point M parcourt la surface fermée. Si la surface n'entoure pas P , lors de ce balayage le vecteur \vec{PM} prend la même orientation un nombre *pair* de fois, avec pour conséquence une compensation complète des angles balayés. Par contre, si la surface entoure le point P , le vecteur \vec{PM} prend la même orientation un nombre *impair* de fois et la compensation est incomplète. L'angle solide total balayé est alors le même que celui sous lequel depuis le point P on voit tout l'espace environnant. Il est facile de montrer que cet angle vaut alors 4π (formule 2.32). Le théorème de Gauss découle immédiatement de ces résultats, puisque le flux sortant à travers une surface fermée S du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q a pour expression

$$\Phi_S = \int \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_S \tag{2.37}$$

où Ω_S est l'angle solide total sous lequel la surface S est vue depuis le point P où se trouve la charge. Si la charge est à l'extérieur de S , Ω_S est nul, tandis que si elle se trouve à l'intérieur de S , cet angle solide vaut 4π .

Il est intéressant de noter ici que si la charge se trouve *sur* la surface S , l'angle solide sous lequel S est vue depuis P vaut 2π , c'est-à-dire l'angle solide sous lequel est vu un demi-espace. On a alors

$$\Phi_S = \int \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{2\epsilon_0} \tag{2.38}$$

2.8 Les symétries du champ Electrostatique

Comme nous l'avons déjà noté, la somme vectorielle entrant dans la définition du champ électrostatique est généralement très compliquée. Pour la calculer, on a toujours intérêt à faire une recherche préalable des symétries que pourrait présenter la distribution de charges étudiée. En effet, il semble justifié de penser qu'une symétrie de la distribution doit avoir une répercussion sur la structure du champ qu'elle crée, et qui en simplifie par là-même son étude. Ce point de vue résulte de multiples observations de phénomènes satisfaisant une telle règle de symétrie et a d'ailleurs été érigé en *principe général de symétrie (ou d'invariance)* dont la simplicité ne peut qu'emporter l'adhésion de tout scientifique.

Soit \mathcal{A} un système "actif" exerçant une action A sur un système "test" B . Le principe en question peut s'énoncer ainsi :

si \mathcal{A} possède une quelconque symétrie, celle-ci se répercute sur son action A

Ce principe est aussi appelé *principe de Curie*, du nom de Curie qui a été le premier à étudier les conséquences de la présence de symétries sur les phénomènes naturels.

Pour ce qui nous concerne, le système actif est une distribution de charges dont l'action sera représentée par son champ électrostatique.

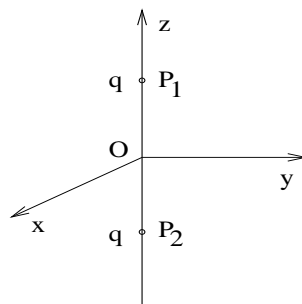


FIG. 2.9 – Système de deux charges ponctuelles identiques

Illustrons ce principe en considérant un système de deux charges ponctuelles identiques q placées aux points P_1 et P_2 respectivement (fig 2.9). Soit à calculer le champ électrostatique créé par ces charges en un point M . Tout d'abord, la position de ce point doit être localisée par rapport à un repère à définir. Quel choix faire ? On constate qu'il y a une direction privilégiée dans le système des deux charges : c'est la droite P_1P_2 . Prenons donc cette direction comme axe $z'z$. Ensuite,

quelle origine choisir ? Manifestement, le point O , milieu de P_1P_2 , paraît tout désigné : c'est le point le plus *symétrique* dans cette distribution de charges. Il reste à définir des axes Ox et Oy . Là, nous avons une *infinité* de choix possibles, tous équivalents, dans le plan perpendiculaire à P_1P_2 et passant par O . Dans ce plan, aucun choix n'est privilégié. Ceci résulte d'une certaine symétrie de la distribution qui fait qu'il y a *invariance par rotation* autour de l'axe P_1P_2 . On dit aussi que ce système possède la *symétrie cylindrique* autour de P_1P_2 .

Ayant fait un choix particulier d'axes Ox et Oy , plaçons-nous alors dans le plan xOz . Ce plan constitue un *plan de symétrie positive* pour la distribution de charges. Cette appellation se réfère à une opération géométrique de symétrie, en l'occurrence une symétrie par rapport à un plan. Effectuer l'opération de symétrie par rapport à xOz consiste à faire le changement suivant sur les coordonnées (fig 2.10)

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z,$$

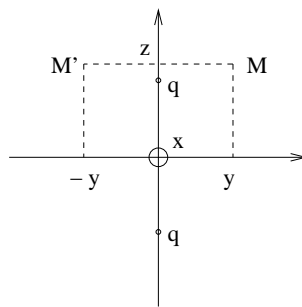


FIG. 2.10 – Symétrie par rapport à un plan quelconque contenant deux charges identiques

Cependant, comme les charges *appartiennent* au plan xOz , elle restent tout simplement en place dans cette opération. Ladite transformation laisse donc inchangée, on dit aussi laisse *invariante*, la distribution de charges. Quelle est la conséquence sur le champ $\vec{E}(M)$ en un point M du plan xOz ($y = 0$) ? Par addition vectorielle des champs créés par les deux charges, on voit facilement que le champ résultant est *contenu dans le plan xOz* (fig 2.11). Nous sommes là en présence d'un résultat général :

♣ *en tout point d'un plan de symétrie positive d'une distribution de charges, le champ électrostatique crée par cette distribution est contenu dans ce plan.*

Ici, le champ a pour expression

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{P}_1M}{P_1M^3} + \frac{\vec{P}_2M}{P_2M^3} \right) \tag{2.39}$$

Posons $P_1P_2 = 2a$. Pour un point $M(x, 0, z)$ du plan xOz , on a

$$\vec{P}_1M = x \vec{i} + (z - a) \vec{k}, \quad \vec{P}_2M = x \vec{i} + (z + a) \vec{k}$$

et les composantes du champ en ce point sont données par

$$E_x(x, z) = x \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[x^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y(x, z) = 0$$

$$E_z(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z - a}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{z + a}{[x^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right)$$

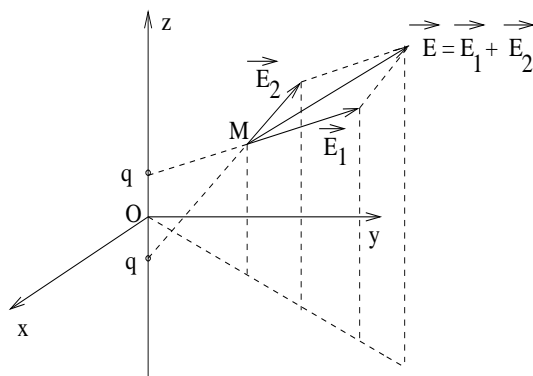


FIG. 2.11 – Résultante des champs créés par deux charges identiques

A partir de ces expressions, on constate les propriétés suivantes

$$E_x(-x, z) = -E_x(x, z), \quad E_x(x, -z) = E_x(x, z)$$

$$E_z(-x, z) = E_z(x, z), \quad E_z(x, -z) = -E_z(x, z)$$

traduisant que $E_x(x, z)$ est une fonction *impair*e vis-à-vis de x et *pair*e vis-à-vis de z , tandis que $E_z(x, z)$ est une fonction *pair*e vis-à-vis de x et *impair*e vis-à-vis de z (fig 2.12).

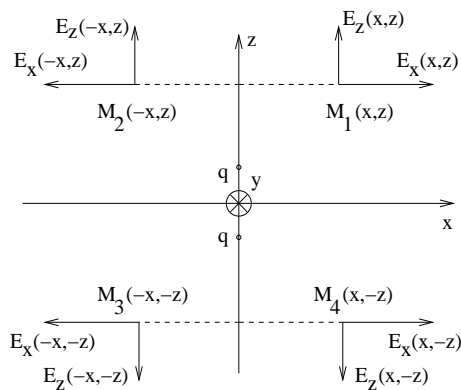


FIG. 2.12 – Symétries du champ résultant créé par deux charges identiques

Ces propriétés résultent en partie du fait que le plan xOy est aussi un plan de symétrie positive pour ce système de charges. A la différence du cas précédent, dans une opération de symétrie par rapport au plan xOy , les deux charges ne restent pas en place. Cependant, comme elles sont échangées l'une en l'autre, et que les valeurs de leurs charges sont identiques, la distribution se retrouve *globalement inchangée* dans cette opération : elle est symétrique par rapport au plan xOy .

D'une façon *générale*, les conséquences sur les composantes d'un champ \vec{E} d'une symétrie positive par rapport à un plan \mathcal{P} , dit plan de symétrie positive et que nous noterons \mathcal{P}_+ , sont les suivantes. Notant M' le point symétrique de M par rapport à ce plan,

♠ les composantes du champ suivant les directions parallèles au plan restent inchangées :

$$\left[\vec{E} (M') \right]_{//} = \left[\vec{E} (M) \right]_{//} \quad (2.40)$$

♠ la composante du champ suivant la direction perpendiculaire au plan change de signe :

$$\left[\vec{E} (M') \right]_{\perp} = - \left[\vec{E} (M) \right]_{\perp} \quad (2.41)$$

On peut ajouter une autre propriété importante se référant à une symétrie par rapport à un point. S'il existe un point par rapport auquel la distribution étudiée est symétrique, alors, dans une opération géométrique de symétrie par rapport à ce point, dans laquelle un point M est transformé en M'' , on a

$$\vec{E} (M'') = - \vec{E} (M) \quad (2.42)$$

Ces propriétés du champ électrostatique sont en fait la conséquence directe de la nature des interactions des charges au niveau élémentaire, telles qu'elle sont décrites par la loi de Coulomb : elles sont *radiales*, c'est-à-dire que la force d'interaction entre deux charges ponctuelles est portée par la droite qui relie les charges. Ce fait fondamental confère au champ électrostatique toutes les propriétés de symétrie énoncées plus haut et qui sont finalement tout à fait analogues à celles d'un vecteur "position" tel que \vec{OM} :

◇ Dans une symétrie par rapport au plan xOz par exemple, on a

$$\vec{OM} \rightarrow \vec{OM}' = x \vec{i} - y \vec{j} + z \vec{k}$$

et les composantes de \vec{OM} dans les directions parallèles au plan xOz , soit x et z , restent inchangées, alors que la composante dans la direction perpendiculaire à ce plan, soit y , change de signe.

◇ Dans une symétrie par rapport au point O

$$\vec{OM} \rightarrow \vec{OM}'' = - \vec{OM}$$

Un champ de vecteurs qui possède ces propriétés de transformations est appelé *champ de vecteurs polaire*.

Revenons au système des deux charges identiques. Des relations précédentes, on déduit que $E_x(0, z) = 0$, c'est-à-dire qu'en un point du plan zOy , le champ est contenu dans ce plan. Cela est normal, puisque ce plan est un \mathcal{P}_+ . Nous ferons ici une remarque importante concernant une déduction du type précédent, à savoir :

“en tout point d'un \mathcal{P}_+ la composante normale du champ à ce plan est nulle”.

Ceci n'est en fait vérifié que si et seulement si cette composante est bien définie dans ce plan, ce qui nécessite au moins qu'elle ne diverge pas lorsqu'on s'approche de ce plan, mais aussi, dans ce cas, que ses limites d'un côté ou de l'autre du plan soient égales. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas et qu'en particulier, le champ présente effectivement des discontinuités lorsqu'on a affaire à des distributions superficielles de charges.

Dans le cas du système des deux charges, les variables les plus appropriées pour étudier le champ sont en fait les coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z du point d'observation. Relativement à ce système de coordonnées le champ électrostatique admet la décomposition

$$\vec{E} (M) = E_{\rho}(\rho, \phi, z) \vec{e}_{\rho} + E_{\phi}(\rho, \phi, z) \vec{e}_{\phi} + E_z(\rho, \phi, z) \vec{e}_z$$

Or, pour la distribution étudiée, le plan contenant l'axe $z'z$ et le point M est un \mathcal{P}_+ . On en déduit que

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = 0$$

En outre, l'invariance par rotation autour de $z'z$, résultant de la symétrie cylindrique du système de charges étudié autour de cet axe, fait que l'angle ϕ est en fait défini de façon arbitraire, puisque le choix des axes $x'x$ et $y'y$ est arbitraire. On dit que ϕ n'est pas une *variable sensible*. Les composantes E_ρ et E_z du champ qui caractérisent un phénomène physique, à savoir l'intensité d'une force qui s'exercerait sur une charge unité placée en M , ne peuvent en aucun cas dépendre d'une variable dont la définition arbitraire est laissée au libre choix de l'expérimentateur étudiant le système de charges. Il s'ensuit que ces composantes sont nécessairement indépendantes de ϕ . Un autre argument décisif en faveur de ce résultat nous est fourni par la loi naturelle (2.22) selon laquelle le champ électrostatique dérive d'un potentiel. En effet, puisque E_ϕ est nul, cette loi nous indique que

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

et que par conséquent le potentiel $V(\rho, \phi, z)$ est nécessairement indépendant de ϕ . Il en résulte que les dérivées partielles

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

sont elles aussi indépendantes de ϕ , ce qui est conforme à l'idée que l'on se fait de la symétrie cylindrique de la distribution, idée qui n'est donc pas en contradiction avec les lois de l'électrostatique, ce qui est rassurant et conforte la justesse des principes d'invariance.

On peut noter à ce propos qu'il serait plus judicieux d'appliquer les principes d'invariance directement au potentiel électrostatique, ce qui allégerait singulièrement les raisonnements, puisque ceux-ci ne feraient alors appel qu'à *une seule fonction scalaire*, au lieu des *trois fonctions* que sont les composantes du vecteur champ électrostatique. Ainsi, si la distribution étudiée possède la symétrie cylindrique, ce qui est le cas pour le système des deux charges étudié ici, nous dirons que le potentiel ne doit pas dépendre de la variable ϕ qui est alors définie arbitrairement, répercutant ainsi directement cette symétrie sur le potentiel. On en déduit immédiatement que les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axes $z'z$, et que, d'une part

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

et que, d'autre part, les composantes restantes E_ρ et E_z du vecteur champ électrostatique sont indépendantes de ϕ .

Considérons maintenant le cas de deux charges opposées, $+q$ située en P_1 et $-q$ située en P_2 (fig 2.13).

Ici encore, de façon évidente, nous choisirons un système d'axe dont l'origine est au milieu du segment P_1P_2 , dont l'axe des z est la droite P_1P_2 , les axes Ox et Oy étant dans le plan perpendiculaire à P_1P_2 passant par O . Comme précédemment, pour tout point M , le plan contenant M et l'axe des z est un plan de symétrie positive, ce qui fait que le champ électrostatique en M est contenu dans ce plan.

Par contre, le plan xOy est cette fois-ci un plan de *symétrie négative*, on dit aussi *plan d'antisymétrie*. En effet, dans une opération de symétrie par rapport à ce plan, les deux charges sont échangées et tout se passe comme si l'on avait changé le signe de ces charges en les laissant sur place. Or, d'après l'expression générale d'un champ électrostatique, lorsqu'on change le signe de toutes les charges, ce champ est changé en son opposé. Il s'agit là d'une *symétrie interne* des distributions de charges.

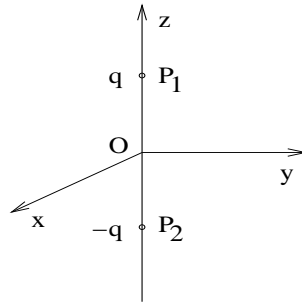


FIG. 2.13 – Système de deux charges ponctuelles opposées

D'une façon générale, les conséquences sur les composantes d'un champ électrostatique d'une symétrie négative par rapport à un plan \mathcal{P} , que nous noterons alors \mathcal{P}_- , sont les suivantes. Notant M' le point symétrique de M par rapport à ce plan,

♠ Les composantes du champ suivant les directions parallèles au plan changent de signe :

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{//} = - \left[\vec{E}(M) \right]_{//} \tag{2.43}$$

♠ La composante du champ suivant la direction perpendiculaire au plan reste inchangée :

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{\perp} = \left[\vec{E}(M) \right]_{\perp} \tag{2.44}$$

On en déduit en particulier qu'en tout point d'un \mathcal{P}_- , le champ en ce point est perpendiculaire à ce plan. Il s'ensuit qu'un \mathcal{P}_- est une équipotentielle. Pour le système des deux charges opposées, les propriétés de symétrie permettent de déduire rapidement, de façon qualitative, l'orientation générale du champ et par là même celle des lignes de champ dans un plan quelconque contenant l'axe des z (figs 2.14 et 2.15).

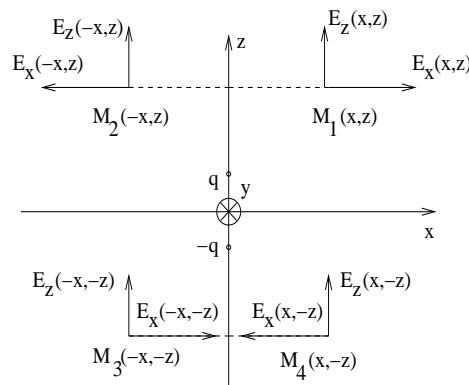


FIG. 2.14 – Symétries du champ résultant créé par deux charges ponctuelles opposées

Tout d'abord, cette distribution possédant la symétrie cylindrique autour de l'axe des z , le potentiel doit être indépendant de ϕ . On en déduit que la composante orthoradiale $E_{\phi}(\rho, \phi, z)$ du champ est nulle en tout point, et que les composantes restantes E_{ρ} et E_z sont indépendantes de l'angle ϕ .

Ceci fait que pour étudier la structure générale du champ, il suffit de se placer dans un plan quelconque contenant l'axe des z . Définissant dans ce plan des coordonnées x et z , et observant

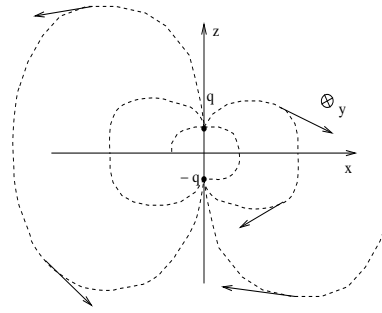


FIG. 2.15 – Lignes du champ de deux charges ponctuelles opposées dans un plan contenant ces charges

que, d’une part, le plan xOz ainsi défini est un \mathcal{P}_+ et que, d’autre part, le plan xOy est un \mathcal{P}_- , on déduit que $E_x(x, z)$ est une fonction impaire de x et de z , tandis que $E_z(x, z)$ est une fonction paire de ces deux variables :

$$\begin{aligned} E_x(-x, z) &= -E_x(x, z), & E_x(x, -z) &= -E_x(x, z) \\ E_z(-x, z) &= E_z(x, z), & E_z(x, -z) &= E_z(x, z) \end{aligned}$$

d’où l’allure qualitative des lignes de champ dans le plan xOz représentée dans la figure 2.15.

2.9 Formalisation du principe de symétrie

Commençons tout d’abord par étudier le comportement du vecteur position \overrightarrow{OM} vis-à-vis d’opérations géométriques de symétrie. La position de M sera définie par la donnée de ses coordonnées cartésiennes x, y, z relativement au repère cartésien $Oxyz$.

Lors d’une symétrie par rapport au point O , le point M est transformé en M' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

Le signe ”-” qui apparaît dans cette relation définit ce qu’on appelle la *parité* du champ de vecteurs \overrightarrow{OM} . Cette parité vaut donc -1 , et \overrightarrow{OM} est qualifié de *vecteur polaire*. Plus généralement, un champ de vecteurs quelconque $\overrightarrow{U}(M)$ sera reconnu comme étant de *nature polaire* si, dans une opération de symétrie par rapport à un point (ici le point O) le champ de vecteurs transformé \overrightarrow{U}' est tel que

$$\boxed{\overrightarrow{U}'(M') = -\overrightarrow{U}(M)} \tag{2.45}$$

M' étant le transformé de M dans cette opération, appelée aussi *réflexion d’espace* ou encore *opération de parité*.

Un champ de vecteurs polaire doit présenter des propriétés de transformation similaires à celles du vecteur position lui-même. Ainsi, dans une symétrie par rapport au plan xOz par exemple, le point M est transformé en M'' dont les coordonnées sont

$$x'' = x, \quad y'' = -y, \quad z'' = z$$

où l’on voit que les composantes du champ transformé \overrightarrow{OM}'' dans les directions parallèles au plan xOz (directions Ox et Oz) sont les mêmes que celles du champ \overrightarrow{OM} , alors que la composante

normale au plan xOz de \vec{OM}'' (suivant la direction Oy) est l'opposée de celle de \vec{OM} . Plus généralement, dans une symétrie par rapport à un plan \mathcal{P} , un champ de vecteurs polaire \vec{U} sera transformé en un champ de vecteurs \vec{U}'' tel que

$$\boxed{\left[\vec{U}'' (M'') \right]_{//} = \left[\vec{U} (M) \right]_{//}} \quad (2.46)$$

pour les composantes définies parallèlement au plan \mathcal{P} , et

$$\boxed{\left[\vec{U}'' (M'') \right]_{\perp} = - \left[\vec{U} (M) \right]_{\perp}} \quad (2.47)$$

pour la composante définie perpendiculairement à \mathcal{P} .

On prendra bien garde au fait que les nouvelles fonctions vectorielles \vec{U}' ou \vec{U}'' qui résultent de ces opérations de symétrie n'ont aucune raison d'être identiques à la fonction vectorielle \vec{U} . Elles dépendent crucialement du phénomène physique que le champ \vec{U} est censé décrire. Précisons ce point en examinant certaines propriétés du champ électrostatique crée par une distribution de charges ponctuelles :

$$\vec{E} (M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{P}_i M}{P_i M^3}$$

Une opération de symétrie étant une *isométrie* (elle conserve les longueurs), on a $P_i' M' = P_i M$, $P_i'' M'' = P_i M$: les distances $P_i M$ sont des invariants. Les valeurs des charges restent également inchangées par des opérations de symétrie. Il en résulte que, fondamentalement, les propriétés de transformation du champ électrostatique vis-à-vis des opérations de symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan sont de même nature que celles des vecteurs positions $\vec{P}_i M = \vec{OM} - \vec{OP}_i$: le champ électrostatique est donc de nature *polaire*.

Supposons alors que la distribution de charge étudiée possède un plan de symétrie. Cela signifie que si l'on effectue une opération de symétrie par rapport à ce plan, la nouvelle distribution de charges observée est identique à la précédente. On dit que la distribution reste *globalement invariante* dans cette opération. En appliquant le principe de symétrie, nous dirons que du fait de cette symétrie, la nouvelle fonction vectorielle \vec{E}'' doit être identique à la fonction vectorielle \vec{E} de départ.

Considérons alors un point M appartenant au plan de symétrie \mathcal{P}_+ , qui sera qualifié de plan de symétrie *positive*. Dans une opération de symétrie par rapport à \mathcal{P} , le point M est identique à son transformé : $M'' \equiv M$. D'après ce qui précède, nous en déduisons

$$\left[\vec{E}'' (M'') \right]_{\perp} \equiv \left[\vec{E}'' (M) \right]_{\perp} \equiv \left[\vec{E} (M) \right]_{\perp} = - \left[\vec{E} (M) \right]_{\perp} \quad (2.48)$$

c'est-à-dire qu'au point M , la composante du champ perpendiculairement au plan \mathcal{P}_+ est nulle. D'où le résultat : en tout point d'un plan de symétrie positive, le champ est contenu dans ce plan.

Supposons maintenant que la distribution de charges possède un plan de symétrie *negative* \mathcal{P}_- . Cela signifie que dans une opération de symétrie par rapport à \mathcal{P}_- , tout se passe comme si l'on avait purement et simplement changé le signe de toutes les charges. D'après l'expression générale du champ électrostatique, si l'on change le signe de toutes les charges, le champ change simplement de signe. Il s'agit là d'une propriété de symétrie *interne* du champ. En appliquant le

principe de symétrie, nous dirons alors que la fonction vectorielle \vec{E}'' doit être l'opposée de la fonction vectorielle de départ \vec{E} . Il en résulte qu'en tout point de \mathcal{P}_- on aura

$$\left[\vec{E}''(M'') \right]_{//} \equiv \left[\vec{E}''(M) \right]_{//} \equiv - \left[\vec{E}(M) \right]_{//} = \left[\vec{E}(M) \right]_{//} \quad (2.49)$$

Cette fois, ce sont les composantes parallèlement à \mathcal{P}_- qui sont nulles. Par conséquent, en tout point d'un plan de symétrie négative, le champ est perpendiculaire à ce plan.

2.10 Application du théorème de Gauss à des calculs de champs

Le théorème de Gauss peut être considéré comme une relation de *cause à effet* reliant le champ (l'effet) aux charges (les causes). Posons-nous la question de savoir s'il est possible d'utiliser cette relation pour calculer le champ, plutôt que d'avoir à manipuler des formules compliquées telles que celles donnant le champ sous forme d'intégrales dans le cas des distributions continues. Le but recherché ici est d'arriver, si possible, à une formule du type

$$E.S = Q_S / \epsilon_0 \quad (2.50)$$

permettant d'extraire l'expression du champ sans trop de difficulté. Les densités de charges étant connues, le calcul du second membre de (2.50) ne pose pas de problème a priori. Par contre, l'intégrale de flux peut s'avérer difficilement réductible à un simple produit ES . On conçoit bien qu'une telle réduction ne pourra être réalisée que si d'importantes simplifications interviennent, ce qui nécessite certainement que les distributions de charges envisagées doivent posséder suffisamment de symétries. Répertorions les difficultés qui se présentent.

→ Le théorème de Gauss fait intervenir un produit scalaire dans le flux :

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Le champ comportant trois composantes, en faisant un produit scalaire, on perd a priori deux informations sur trois. Est-il alors possible de simplifier ce produit scalaire ?

Une simplification extrême est son annulation pure et simple. Existe-t-il donc des surfaces à travers lesquelles le champ a un flux nul ? La réponse est *oui*, et ceci est d'ailleurs vrai pour n'importe quel champ de vecteurs. Nous avons introduit au chapitre 1 la notion de *ligne de champ*. Il s'agit, rappelons-le, d'une courbe dont la tangente en tout point est définie par le champ de vecteurs considéré. En tout point où le champ est défini, il passe une ligne de champ. Il y a donc une infinité de lignes de champ. On peut faire une collection de telles courbes pour constituer une surface, qui sera la surface enveloppe de la famille de lignes de champ considérée. La surface ainsi obtenue a pour propriété fondamentale qu'en chacun de ses points, le champ est dans son plan tangent et a donc un flux nul à travers elle. Comme nous le verrons, cette circonstance peut être utilisée efficacement dans certains cas, bien que, fournissant un flux nul, elle ne permette pas d'obtenir directement le champ.

Bien entendu, la simplification recherchée est plutôt celle correspondant au cas où le champ se projette intégralement sur la normale à la surface, c'est-à-dire où l'on a :

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(M) dS(M)$$

où $E(M)$ est, au signe près, le module du champ au point considéré. Existe-t-il des surfaces réalisant cette simplification ? La réponse est encore *oui* pour le champ électrostatique, mais ce résultat ne peut être généralisé à n'importe quel champ de vecteurs. Cette circonstance est due au fait que le champ électrostatique *dérive d'un potentiel*. En tout point où le potentiel et le champ sont définis il passe une surface équipotentielle et le champ en ce point est *perpendiculaire*

à cette surface. Ainsi, les surfaces pour lesquelles le flux se simplifie comme indiqué ci-dessus sont les surfaces équipotentielles, puisque le champ y est orienté suivant la normale.

Dans les cas les plus simples, les surfaces équipotentielles sont des surfaces fermées. Pour tenter d'obtenir le champ en un point M_1 donné, on appliquera alors le théorème de Gauss à la surface équipotentielle $S(M_1)$ passant par ce point :

$$\int \int_{S(M_1)} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}(M) = \int \int_{S(M_1)} E(M) dS(M) = Q_{S(M_1)}/\epsilon_0$$

où M est un point courant sur $S(M_1)$. On voit apparaître ici une seconde difficulté :

→ $E(M)$ garde-t-il une valeur constante sur $S(M_1)$?

La réponse est *non* d'une façon générale et l'on ne peut guère aller plus loin dans la simplification. Ce n'est que dans le cas de distribution présentant de grandes symétries qu'une telle circonstance se produit. Le calcul du champ devient alors quasiment immédiat puisque :

$$\int \int_{S(M_1)} E(M) dS(M) = E(M_1) A(M_1) = Q_{S(M_1)}/\epsilon_0$$

où $A(M_1)$ représente ici l'aire de la surface $S(M_1)$.

Il subsiste une autre difficulté lorsque, pour la distribution étudiée, les surfaces équipotentielles ne sont pas fermées. Or, le théorème de Gauss ne s'applique qu'aux surfaces fermées. Comment dès lors constituer une telle surface fermée à l'aide d'équipotentielles qui seules apportent la simplification souhaitée du produit scalaire ?

Ici encore, la solution existe grâce au fait que le champ électrostatique dérive d'un potentiel. En effet, dans toute région où le champ et le potentiel sont définis, on trouve à la fois des équipotentielles et des lignes de champ. De par les propriétés du gradient, le réseau de lignes de champ et le réseau d'équipotentielles sont deux ensembles géométriques orthogonaux. Une ligne de champ donnée joint toutes les équipotentielles en les traversant orthogonalement.

Envisageons alors un faisceau de lignes de champ formant ce qu'on appelle un "tube de champ"²⁰. Ce tube découpe sur une première équipotentielle une surface Σ_1 et sur une seconde équipotentielle une surface Σ_2 (fig 2.16).

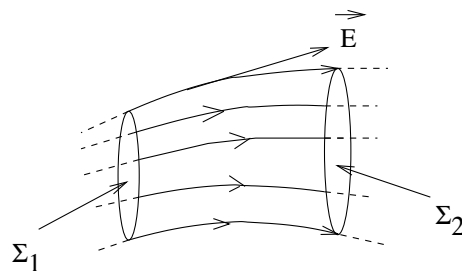


FIG. 2.16 – Tube de champ

L'ensemble formée par Σ_1 , Σ_2 et le tube de champ est une surface fermée à laquelle on peut appliquer le théorème de Gauss. Le flux du champ à travers le tube de champ est nul puisque celui-ci est surface enveloppe de lignes de champ. Le flux total se réduit ainsi au flux à travers Σ_1 et Σ_2 :

$$\begin{aligned} & \int \int_{\text{tot}} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}(M) \\ &= \int \int_{\Sigma_1} E(M) d\Sigma_1(M) - \int \int_{\Sigma_2} E(M') d\Sigma_2(M') = Q_{\text{tot}}/\epsilon_0 \end{aligned}$$

²⁰Bien que parfois la figure réalisée soit loin de ressembler à un tube.

Ici, l'extraction du champ est plus compliquée : d'une part il faut que l'amplitude du champ reste constante sur une équipotentielle donnée, et d'autre part il faut pouvoir corrélérer les valeurs du champ sur Σ_2 à celles sur Σ_1 . Mais ceci n'est possible que si la distribution de charges étudiée possède suffisamment de symétries.

Pour l'application du théorème de Gauss au calcul du champ électrostatique, nous retiendrons donc le mot d'ordre "*recherche systématique des symétries*". Si la distribution étudiée n'en possède pas de particulière, il faut revenir aux formules de définition du champ (ou du potentiel) car le théorème de Gauss n'est alors d'aucune utilité du point de vue calculatoire. En outre, dans l'étude préalable des symétries, on recherchera systématiquement les surfaces équipotentielles. Ce sont ces surfaces, seules ou en association avec des tubes de champ selon qu'elles sont fermées ou non, que l'on appelle *surfaces de Gauss*.

2.11 Quelques calculs de champs électrostatiques

2.11.1 Le fil rectiligne uniformément chargé

Considérons un fil rectiligne infiniment long sur lequel une infinité de charges sont disposées de façon uniforme. C'est le cas typique d'une distribution linéique de charges. Ici, la densité linéique de charges λ de cette distribution est donc supposée constante.

Définissons l'axe $z'z$ comme étant selon le fil. Du fait que la distribution est uniforme, quelque soit le point M considéré, celui-ci appartient à deux plans de symétrie positive de la distribution. Il s'agit d'une part du plan P contenant M et l'axe $z'z$ et d'autre part du plan P' contenant M et perpendiculaire à l'axe $z'z$. Cette dernière symétrie mérite d'être explicitée. Elle est due, d'une part, à l'uniformité de la distribution, et, ce qui est tout aussi crucial, au fait que puisque la distribution est d'extension infinie selon $z'z$, chacune de ses charges a une charge symétrique par rapport à P' . Il en résulte que dans une symétrie par rapport à P' , la distribution reste globalement inchangée. Ce plan P' est donc bien un plan de symétrie positive de la distribution étudiée.

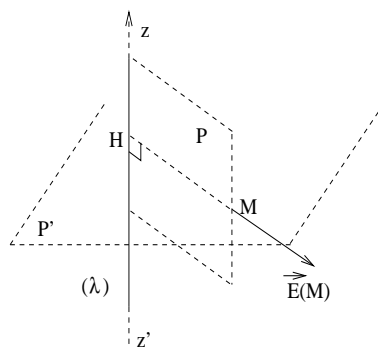


FIG. 2.17 – Champ créé par un fil uniformément chargé, rectiligne et de longueur infinie

D'après les propriétés générales du champ électrostatique énoncées précédemment, le champ au point M doit appartenir à la fois à P et à P' , donc à leur intersection. Si H est le projeté orthogonal de M sur $z'z$, cette intersection est la droite HM (fig 2.17).

Manifestement, l'usage des coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z est ici le plus approprié. D'après ce qui vient d'être dit, la seule composante non nulle du champ est radiale et nous écrivons

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, \phi, z) \vec{e}_\rho$$

Cependant, les variables ϕ et z ne sont pas des variables sensibles. Pour ce qui concerne ϕ , ceci est dû à la symétrie cylindrique de la distribution d'où il résulte que l'on a invariance par rotation

autour de $z'z$. Pour ce qui concerne z , ceci est dû à l'uniformité de λ et à l'extension infinie de la distribution, d'où il résulte que l'on a une *invariance par translation parallèle au fil*. On peut envisager cette invariance de deux façons équivalentes. Ou bien, en laissant la distribution en place, on se déplace parallèlement au fil ; l'invariance se traduit par le fait qu'après ce déplacement, la distribution est vue de la même manière. Ou bien, restant en place, on déplace en bloc la distribution parallèlement à elle-même le long de $z'z$; l'invariance signifie qu'après ce déplacement la distribution est encore vue de la même manière depuis le point d'observation. Or, ce qui change dans ce dernier déplacement est la cote z du point d'observation. Dire que le déplacement n'apporte aucune modification dans le phénomène physique observé, en l'occurrence le champ électrostatique, c'est dire que la variable z n'est pas une variable sensible. En fait, puisque la répartition des charges sur le fil est uniforme, aucune position sur l'axe $z'z$ n'est privilégiée plutôt qu'une autre. Il s'ensuit que le choix d'une origine O sur cet axe est complètement arbitraire et laissé librement à l'observateur. La variable z est donc définie arbitrairement. La grandeur physique qu'est le champ électrostatique ne peut contenir de quantités définies arbitrairement par l'observateur. En conclusion, le champ ne peut dépendre de z .

Finalement, l'expression générale du champ en un point $M(\rho, \phi, z)$ est de la forme

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$$

Calculons maintenant explicitement la composante $E_\rho(\rho)$. Plaçons-nous dans le plan P contenant M et $z'z$. Pour repérer les points de l'axe $z'z$ par une cote z , nous choisirons l'origine au point H . Soit $Q(z)$ un point de l'axe $z'z$ où est située une charge élémentaire λdz (fig 2.18).

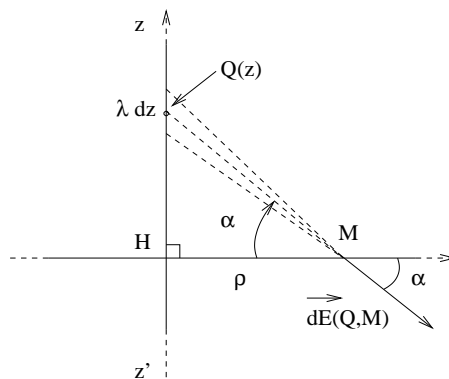


FIG. 2.18 – Paramétrage utilisé dans le calcul direct du champ du fil infini

Le champ élémentaire créée par cette charge au point M est

$$\vec{dE}(Q, M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{QM}}{QM^3}$$

et l'on a

$$\vec{E}(M) = \int \vec{dE}(Q, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{QM}}{QM^3}$$

et

$$E_\rho(\rho) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{QM^3}$$

où l'on a posé $\rho = HM$. Pour effectuer l'intégration, nous introduirons l'angle α entre \vec{HM} et \vec{QM} (fig 2.18). On a

$$z = \rho \tan \alpha, \quad QM = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

d'où

$$dz = \rho d \tan \alpha = \rho \frac{d \tan \alpha}{d \alpha} d \alpha = \rho \frac{d \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\rho dz}{QM^3} = \frac{d \alpha}{\cos \alpha} \frac{\rho^2}{QM^3} = \frac{\cos \alpha d \alpha}{\rho}$$

Le calcul s'en trouve alors simplifié. On obtient en effet

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d \alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

Une remarque importante s'impose ici. L'expression trouvée ci-dessus pour le champ d'un fil infini montre que les variations de ce champ vis-à-vis des coordonnées ne suivent plus une loi en $1/r^2$ comme dans le cas d'une charge ponctuelle, mais une loi en $1/\rho$. Ceci est dû à la complexité de la distribution étudiée qui fait que l'addition vectorielle de champs élémentaires obéissant individuellement à la loi de Coulomb conduit à un champ résultant dont les variations peuvent sembler en contradiction avec la loi de Coulomb en $1/r^2$, mais qui bien sûr ne le sont pas²¹ !

Calculons ensuite le potentiel électrostatique $V(\rho, \phi, z)$ créée par cette distribution. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= -E_\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -E_\phi = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = 0 \end{aligned}$$

Le potentiel n'est donc fonction que de ρ (symétrie cylindrique et invariance par translation parallèle à $z'z$) et l'on a

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

d'où

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{constante}$$

A cause de la présence du logarithme, le zéro des potentiels ne peut être pris ni à distance nulle $\rho = 0$ ni à distance infinie $\rho \rightarrow \infty$ des charges. On peut néanmoins choisir ce zéro à distance finie $\rho = \rho_0$, ce qui donne

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_0 + \text{constante}$$

d'où

$$\boxed{V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)} \quad (2.51)$$

Les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axe $z'z$, l'équipotentielle $V = 0$ étant bien sûr le cylindre de rayon ρ_0 . On remarquera que les expressions du champ et du potentiel obtenues sont bien conformes à l'analyse dimensionnelle présentée en annexe.

²¹Voir en annexe

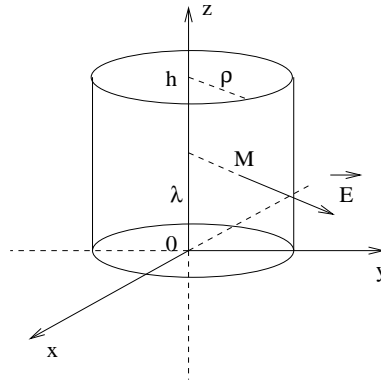


FIG. 2.19 – Surface de Gauss utilisée pour appliquer le théorème de Gauss

Les résultats précédents peuvent être obtenus plus simplement en utilisant le théorème de Gauss. En effet, les symétries de la distribution évoquées plus haut font que le potentiel ne dépend que de ρ . Il s'ensuit que les équipotentiels sont des cylindres d'axe $z'z$ et que, par voie de conséquence, les lignes de champ sont toutes les demi-droites parallèles au plan xOy et issues des divers points de l'axe $z'z$, puisque

$$E_\rho = \frac{dV}{d\rho}(\rho), \quad E_\phi = 0, \quad E_z = 0$$

Nous sommes ainsi dans un cas où les équipotentiels ne sont pas des surfaces fermées. Pour constituer une surface de Gauss, considérons une portion de cylindre de rayon ρ , morceau de surface équipotentielle, que nous supposons s'étendre entre les cotes $z = 0$ et $z = h$. Fermons cette surface par les deux disques de rayon ρ situés respectivement à la cote $z = 0$ et à la cote $z = h$ (fig 2.19). On remarquera que ces deux disques sont des morceaux de surface enveloppes de lignes de champ, à travers lesquels le flux du champ est nul. Le flux du champ à travers la surface cylindrique de normale \vec{e}_ρ est

$$\iint_{\text{cyl}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} E_\rho(\rho) \rho d\phi = 2\pi\rho h E_\rho(\rho) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\boxed{E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}} \tag{2.52}$$

On peut également utiliser l'équation locale de Laplace, comme indiqué dans l'annexe.

2.11.2 Plan uniformément chargé

Considérons maintenant un système de charges distribuées uniformément sur un plan P . C'est un exemple typique de distribution superficielle de charges. Soit σ la densité surfacique de charges, supposée constante.

Etudions tout d'abord les symétries de cette distribution et ses conséquences sur la structure du champ qu'elle crée en un point M en dehors du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan P (fig 2.20). Manifestement, tout plan contenant la droite HM est un P_+ pour la distribution. Il s'ensuit que le champ est nécessairement porté par HM . Il est tout aussi manifeste que dans toute translation effectuée parallèlement au plan P (HM est maintenu constant) la distribution est toujours vue de la même manière. Cela signifie que les coordonnées pouvant servir à définir la position de M dans des directions parallèles au plan P ne sont pas des variables

sensibles. Autrement dit, le champ ne dépend que de la cote z du point M dans la direction $z'z$ perpendiculaire à P :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$$

Notons également une autre symétrie : le plan P lui-même est un P_+ pour la distribution. Dans une symétrie par rapport à P , le point M est transformé en son symétrique par rapport à P , dont la cote est $-z$. Comme E_z est la composante du champ dans la direction perpendiculaire à P , on en déduit la relation

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

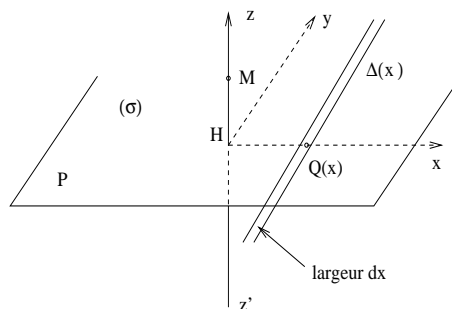


FIG. 2.20 – Calcul par superposition du champ d’un plan uniformément chargé

Pour déterminer $E_z(z)$, nous utiliserons l’astuce décrite ci-après. Tout d’abord, définissons dans le plan P un repère cartésien xHy d’origine H (projeté orthogonal de M sur P), et découpons le plan en une infinité de bandes parallèles à l’axe $y’Hy$, et de largeurs infinitésimales, la bande se trouvant au voisinage de l’abscisse x ayant la largeur dx (fig 2.20). Chacune de ces bandes infiniment étroites peut être assimilée à un fil rectiligne de longueur infinie, uniformément chargé. Notons $\Delta(x)$ le fil contenant tous les points de P d’abscisse x . Considérons un point M de cote $z > 0$. Soit $Q(x)$ son projeté orthogonal sur $\Delta(x)$ et $\vec{e}_\rho(x)$ le vecteur unitaire porté par $Q(x)M$. Soit λ la densité linéique de charges portées par $\Delta(x)$. D’après l’étude faite au paragraphe précédent, le champ créé par les charges de $\Delta(x)$ a pour expression

$$d\vec{E}(M, x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_\rho(x)}{\rho(x)}$$

où $\rho(x) = Q(x)M$. Ce champ, créé par la bande $\Delta(x)$ de largeur infinitésimale dx , est lui-même infinitésimal. Le champ résultant en M sera donné par

$$\vec{E}(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{E}(M, x)$$

l’intégration portant sur la variable x , abscisse de $Q(x)$.

Le problème ensuite est de déterminer l’expression de la densité λ . Pour ce faire, nous ferons le bilan de la charge contenue sur une longueur ℓ de $\Delta(x)$. Du point de vue d’une distribution linéique de densité λ , cette charge est $\lambda\ell$. Cependant, dans la réalité, $\Delta(x)$ est une bande étroite de largeur dx chargée avec la densité superficielle σ . De ce point de vue, la charge cherchée vaut $\sigma dx \ell$. L’identification des deux expressions trouvées nous donne

$$\lambda = \sigma dx$$

Ainsi

$$\vec{E}(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_\rho(x)}{\rho(x)}$$

et

$$E_z(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dx \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 \rho(x)}$$

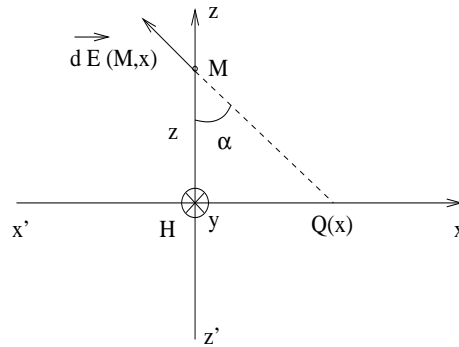


FIG. 2.21 – Paramétrisation utilisée pour le calcul par superposition du champ du plan uniformément chargé

où α est l'angle entre $\vec{Q(x)M}$ et l'axe $z'z$. Pour effectuer l'intégration, nous utiliserons cet angle α plutôt que x (fig 2.21). On a

$$z = \rho(x) \cos \alpha, \quad x = z \tan \alpha$$

d'où l'on déduit

$$dx \cos \alpha = z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \rho(x) d\alpha$$

La variation de x dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ se répercute sur α par une variation dans l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$. On obtient donc

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Le résultat est remarquable : le champ est constant. Le fait qu'il ne dépende même pas de la variable z peut être compris comme étant dû à l'extension infinie de la distribution. A distance finie, l'effet principal est dû aux charges les plus proches, mais lorsqu'on s'éloigne de la distribution, on voit apparaître de plus en plus de charges des régions éloignées. L'effet net est un champ constant.

On fera attention au fait qu'il existe cependant une dépendance cachée vis-à-vis de la variable z , en ce sens que la valeur du champ pour $z < 0$ est opposée à la valeur du champ pour $z > 0$:

$$E_z(-z) = -E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

et que, par conséquent, on observe une *discontinuité* du champ pour $z = 0$:

$$E_z(+0) - E_z(-0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ce fait est d'ailleurs général pour les distributions superficielles de charges : au passage à travers une surface portant une distribution superficielle de charges, la composante du champ suivant la normale à la surface subit une discontinuité égale à

$$\frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

où M est le point de traversée et $\sigma(M)$ la densité superficielle de charges en ce point.

La méthode qui vient d'être utilisée pour le calcul du champ se réfère au *principe de superposition*, selon lequel le champ créé par un système de charges \mathcal{S} est une résultante vectorielle de champs élémentaires créés par les sous-systèmes constituant \mathcal{S} . Ce principe nous a permis de calculer le champ créé par un plan uniformément chargé en considérant cette distribution comme une superposition de distributions plus simples, à savoir une infinité de fils infinis uniformément chargés, disposés parallèlement les uns aux autres.

Déterminons ensuite le potentiel de la distribution étudiée. La seule variable sensible étant la cote z , le potentiel $V(z)$ se calcule en intégrant l'équation

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{pour } z > 0$$

d'où

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1$$

Pour $z < 0$, on a

$$\frac{dV}{dz} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

d'où

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2$$

Du point de vue mathématique, la fonction potentiel est une fonction *continue*, car sa dérivée existe et est donnée par le champ électrique. On en déduit pour $z = 0$ la relation $C_1 = C_2$. Fixons alors le zéro du potentiel pour $z = 0$. Les résultats précédents peuvent alors être réécrits sous la forme condensée

$$\boxed{V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|} \quad (2.53)$$

où l'on voit apparaître la fonction $|z|$ qui est une fonction continue, mais dont la dérivée présente une discontinuité en $z = 0$.

Ici encore, le théorème de Gauss peut être utilisé efficacement pour déterminer le champ. La symétrie de la distribution fait que le potentiel V ne dépend que de la cote z du point d'observation et que, de plus, V doit être une fonction *paire* de z . Les équipotentielles sont donc des plans parallèles au plan de la distribution, choisi comme plan xOy . Comme

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z(z) = -\frac{dV}{dz}(z) = -E_z(-z)$$

les lignes de champ sont toutes les demi-droites parallèles à Oz ou Oz' , issues des points du plan xOy . Une surface de Gauss sera ici constituée de la manière suivante. Soit une surface cylindrique de rayon R , parallèle à $z'z$ et fermée par deux disques : le premier se trouve à la cote $z > 0$, le second à la cote $-z$ (fig 2.22). La surface cylindrique est surface enveloppe de lignes de champ, tandis que les deux disques sont deux portions de surfaces équipotentielles. En notant S l'aire de l'un ou l'autre disque, le flux du champ à travers la surface de Gauss ainsi constituée est

$$[E_z(z) - E_z(-z)] S$$

puisque la normale au disque de cote z est \vec{e}_z , alors que celle du disque de cote $-z$ est $-\vec{e}_z$. La surface cylindrique découpe sur le plan contenant les charges un disque de même aire S . On obtient ainsi

$$[E_z(z) - E_z(-z)] S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = 2S E_z(z)$$

d'où

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{2.54}$$

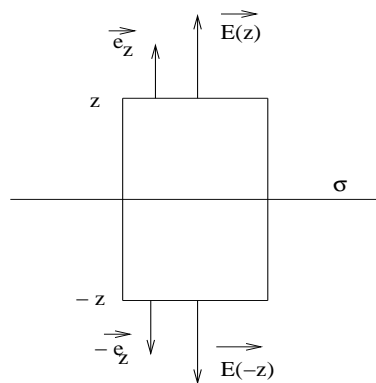


FIG. 2.22 – Surface de Gauss utilisée pour le calcul du champ du plan uniformément chargé au moyen du théorème de Gauss

2.11.3 Sphère uniformément chargée

Considérons une sphère S (surface!), de centre O et de rayon R , sur laquelle des charges sont disposées uniformément avec la densité surfacique (constante!) σ . Cette distribution possède la symétrie sphérique, c'est-à-dire que, puisqu'elle est vue de la même manière depuis un point d'observation quelconque situé à une distance r donnée du centre O , il y a invariance de la distribution par rapport à une rotation quelconque autour de O . Il est utile de préciser ici que cette invariance résulte non seulement du fait que le support sur lequel se trouvent les charges a manifestement la symétrie sphérique, mais aussi parce que les charges y sont réparties de façon uniforme. Si, par exemple, les charges avaient été réparties sur la sphère avec la densité

$$\sigma(P) = \sigma_0 \cos \theta$$

en un point P de la sphère ayant les coordonnées sphériques R, θ, ϕ , la distribution obtenue n'aurait que la symétrie cylindrique autour de l'axe des z .

La symétrie sphérique fait que pour tout point M , tout plan contenant la droite OM est un P_+ . Le champ électrostatique doit donc appartenir à l'intersection de tous les plans contenant OM , c'est-à-dire, porté par la droite OM elle-même : le champ électrostatique de cette distribution est donc radial, au sens des coordonnées sphériques construites autour de O (fig 2.23). Il s'ensuit que le potentiel électrostatique n'est fonction que de la distance r à laquelle le point d'observation $M(r, \theta, \phi)$ se trouve vis-à-vis du centre O , puisque

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_\theta = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = -E_\phi = 0$$

En fait, nous aurions pu étudier d'emblée l'effet de la symétrie sphérique sur la fonction potentiel $V(r, \theta, \phi)$, et déduire que θ et ϕ n'étant pas des variables sensibles, cette fonction ne peut dépendre que de r .

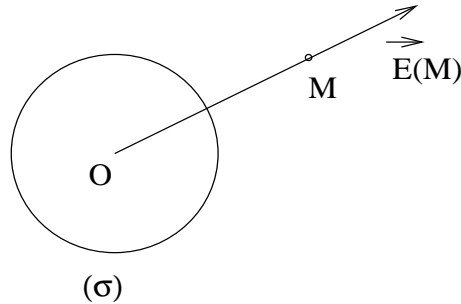


FIG. 2.23 – Orientation radiale du champ d'une sphère uniformément chargée

Comme nous allons le constater très vite, il est plus aisé de calculer en premier lieu le potentiel électrostatique. Comme la distribution est confinée sur la sphère, donc limitée spatialement, l'origine des potentiels peut être choisie à distance infinie des charges, c'est-à-dire pour $r \rightarrow \infty$. Avec cette convention, le potentiel en un point M a alors pour expression

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS(P)}{PM}$$

la densité σ étant constante, P étant un point de la sphère, et $dS(P) = R^2 \sin \theta d\phi$ un élément de surface de cette sphère. L'intégration est une double intégration portant sur les angles θ (entre 0 et π) et ϕ (entre 0 et 2π). Pour effectuer les intégrations le plus simplement possible, choisissons un système d'axes tel que l'axe \vec{Oz} soit orienté suivant \vec{OM} . Il est alors facile de voir que la distance PM est indépendante de l'angle ϕ défini à partir de cette convention. Ceci permet d'effectuer aisément l'intégration portant sur cet angle :

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{PM}$$

Or,

$$PM^2 = \vec{PM}^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 = \vec{OM}^2 + \vec{OP}^2 - 2 \vec{OM} \cdot \vec{OP}$$

Posons $OM = r$. Comme $OP = R$ et que θ est l'angle entre les deux vecteurs \vec{OM} et \vec{OP} , il vient

$$PM^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

d'où

$$dPM^2 = 2PM d(PM) = 2rR \sin \theta d\theta$$

et

$$\frac{\sin \theta d\theta}{PM} = \frac{dPM}{rR}$$

A l'aide de cette relation, on peut récrire l'intégrale ci-dessus de la façon suivante

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{PM} = \frac{1}{rR} \int_{PM_{\min}}^{PM_{\max}} dPM = \frac{1}{rR} [PM_{\max} - PM_{\min}]$$

où PM_{\max} et PM_{\min} sont, respectivement, les valeurs maximum et minimum de la distance PM , données par

$$PM_{\max} = R + r, \quad (\cos \theta = -1), \quad \text{et} \quad PM_{\min} = |R - r|, \quad (\cos \theta = +1)$$

Deux cas doivent donc être considérés

- Soit $r < R$, auquel cas

$$\frac{1}{rR} [PM_{\max} - PM_{\min}] = \frac{2}{R}$$

- Soit $r > R$ et alors

$$\frac{1}{rR} [PM_{\max} - PM_{\min}] = \frac{2}{r}$$

Il s'ensuit que

- pour $r < R$ (M à l'intérieur de la sphère)

$$V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \tag{2.55}$$

et le potentiel est donc *constant* dans cette région ;

- pour $r > R$ (M à l'extérieur de la sphère)

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{r\epsilon_0} \tag{2.56}$$

et le potentiel décroît comme $1/r$ dans cette région.

Le vecteur champ électrostatique créé par cette distribution s'exprime comme

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$$

soit

$$\boxed{E_r(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < R \quad \text{et} \quad E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour} \quad r > R} \tag{2.57}$$

Comme attendu pour une distribution superficielle, le champ est discontinu à la traversée de la sphère :

$$E_r(R - 0) = 0 \quad \text{alors que} \quad E_r(R + 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On remarque aussi que pour un point extérieur à la sphère, le champ s'exprime aussi en fonction de la charge totale $Q = 4\pi R^2 \sigma$ de la distribution comme

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

et prend donc la même forme que le champ créé au point considéré par une charge ponctuelle Q placée en O . On a donc le résultat important suivant : pour un point à l'extérieur de la sphère, tout se passe comme si la charge totale de la distribution était concentrée en O . Bien sûr, ce résultat est dû à la symétrie sphérique de la distribution et n'est pas généralisable a priori à une distribution quelconque.

Comme dans les exemples précédents, retrouvons tous ces résultats en appliquant le théorème de Gauss. Le cas est plus simple ici puisque les équipotentielles sont des surfaces fermées. D'après l'étude des symétries, ces équipotentielles sont des sphères de centre O , et sur chacune d'elles, le champ garde une norme constante. Choisisant la sphère S de rayon r dont la normale sortante locale est \vec{e}_r , on obtient de façon évidente

$$\int \int_{S(O,r)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge se trouvant à l'intérieur de S . Si $r < R$, cette charge est nulle et le champ est donc nul dans cette région. Si $r > R$, la charge en question est la charge totale de la distribution $Q_{\text{tot}} = 4\pi R^2 \sigma$. On a alors, après simplification,

$$E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

2.11.4 Boule uniformément chargée

Etudions enfin le cas d'une distribution volumique de charges. Le plus simple est celui de charges distribuées uniformément avec la densité volumique (constante) ρ à l'intérieur d'une boule B de rayon R et de centre O (fig 2.24).

Cette distribution D_v possède la symétrie sphérique autour de O . On en déduit (les arguments de symétrie étant les mêmes ici que ceux du paragraphe précédent) que le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par D_v en un point $M(r, \theta, \phi)$ est fonction uniquement de la distance $r = OM$ et que le vecteur champ électrostatique est radial. Ici encore, le plus simple est de calculer tout d'abord le potentiel $V(r)$.

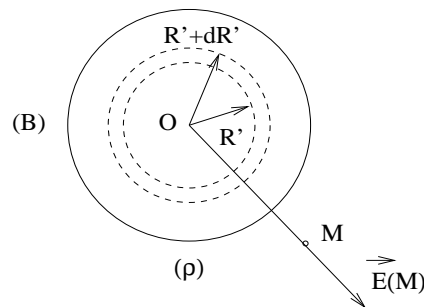


FIG. 2.24 – Calcul par superposition du champ d'une boule uniformément chargée

Pour ce faire, nous utiliserons l'astuce suivante. Découpons la boule B en couronnes sphériques élémentaires (fig 2.24). Une telle couronne est une région comprise entre deux sphères de même centre O , l'une de rayon R' et l'autre de rayon infiniment voisin $R' + dR'$, dR' étant infinitésimal et R' pouvant varier entre 0 et le rayon R de la boule B . L'épaisseur dR' de la couronne est supposée si petite que l'on pourra assimiler l'ensemble des charges contenues dans la couronne sphérique élémentaire à une distribution superficielle de charges sur la sphère de rayon R' . La densité surfacique correspondante s'obtient en calculant de deux façons équivalentes la charge totale dQ contenue dans la couronne élémentaire. D'une part, celle-ci est calculable naturellement en utilisant la densité volumique ρ comme

$$dQ = \rho \times \text{volume de la couronne} = \rho 4\pi R'^2 dR'$$

D'autre part, en interprétant la distribution dans la couronne comme une distribution superficielle de densité σ , on a

$$dQ = \sigma \times \text{surface de la sphère} = \sigma 4\pi R'^2$$

On en déduit

$$\sigma = \rho dR'$$

Appliquons ensuite le principe de superposition. La couronne élémentaire donne la contribution élémentaire dV au potentiel total créé en M par la distribution volumique D_v . D'après les résultats du paragraphe précédent, cette contribution est telle que

$$dV = \frac{\sigma R'}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} R' dR' \quad \text{pour } r < R'$$

et

$$dV = \frac{\sigma R'^2}{r\epsilon_0} = \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' \quad \text{pour } r > R'$$

Pour un point M en dehors de la boule B , on a $r \geq R$ et R' est toujours inférieur à r . Il vient alors

$$V(r) = \int_0^R \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' = \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$$

soit, en fonction de la charge totale $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ de la distribution

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \tag{2.58}$$

Ainsi, pour un point M à l'extérieur de D_v , cette distribution se comporte comme une charge ponctuelle Q située en O .

Pour un point M à l'intérieur de D_v , on a $r \leq R$, et il faut distinguer deux cas, soit $R' \leq r$, soit $R' \geq r$. La contribution au potentiel des charges telles que $R' \leq r$ est donnée par

$$V_{<}(r) = \int_0^r \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

tandis que celle des charges telles que $R' \geq r$ est

$$V_{>}(r) = \int_r^R \frac{\rho}{\epsilon_0} R' dR' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

Le potentiel en un point M à l'intérieur de la boule est donc

$$V(r) = V_{<}(r) + V_{>}(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \tag{2.59}$$

Quant au vecteur champ électrostatique en M , il est donné par

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$$

soit

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \text{ pour } r < R \text{ et } E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ pour } r > R \quad (2.60)$$

On remarquera que cette fois le champ électrostatique est une fonction continue de r . On démontre de façon plus générale que *le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une distribution volumique quelconque est une fonction continue des coordonnées du point M* . Rappelons que le potentiel, quant à lui, est en toute circonstance une fonction continue.

Terminons en montrant comment l'application du théorème de Gauss à une sphère S de centre O et de rayon r permet de retrouver les résultats ci-dessus. Il vient

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Si $r < R$, on a $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, d'où

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

tandis que pour $r > R$, $Q_{\text{int}} = Q$ et

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2.12 Le dipôle électrique

Un dipôle électrique est un ensemble de deux particules A et B portant des charges opposées, $q > 0$ et $-q$ respectivement, et séparées d'une distance $2a$ petite par rapport aux distances auxquelles on étudie le champ qu'il produit (fig 2.25).

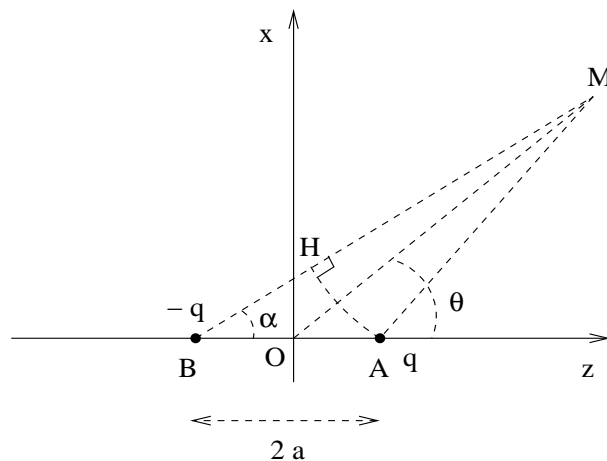


FIG. 2.25 – Le dipôle électrique

Nous ne reviendrons pas sur les symétries de ce système, qui ont déjà été étudiées. Ici, nous rechercherons plutôt les expressions asymptotiques (c'est-à-dire pour AM ou $BM \gg a$) du champ et du potentiel. Comme précédemment, prenons l'axe des z suivant \vec{BA} , et le milieu O

de AB comme origine. Le plan xOy est le plan médiateur de AB . Par rapport à ce repère, nous définirons la position d'un point M par ses coordonnées sphériques ($r = OM$, θ est l'angle entre \vec{BA} et \vec{OM}). Du fait de la symétrie, on peut toujours choisir le plan xOz comme celui défini par les deux vecteurs \vec{BA} et \vec{OM} et se placer dans le cas où z est positif comme indiqué dans la figure 2.25. Le potentiel en M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{BM - AM}{BM AM}$$

Si, dans le plan de la figure, on trace un cercle de centre M et de rayon AM , ce cercle coupe BM en H , et l'on a *exactement* $BH = BM - AM$. Lorsque $r \gg a$, BH/r est un infiniment petit du premier ordre, alors que AM/r et BM/r sont voisins de 1. Aussi, en se limitant à un développement du potentiel au premier ordre en a/r , on a

$$V(M) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{BH}{r^2}$$

Mais, à grande distance r , l'arc de cercle \widehat{AH} se confond avec le segment de droite AH , les angles α et θ peuvent aussi être confondus, et, dans le triangle rectangle BAH , on a $BH \approx 2a \cos \theta$. D'où l'expression asymptotique du potentiel

$$V(M) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} \tag{2.61}$$

Elle fait intervenir le produit $P = 2aq$ qui définit une grandeur appelée *moment dipolaire électrique* du système²². Vectoriellement, ce moment dipolaire a pour expression

$$\vec{P} = q \vec{BA} \tag{2.62}$$

et l'on peut encore écrire le potentiel sous la forme

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{r^3} \tag{2.63}$$

valable pour tout M tel que $r \gg a$ (c'est-à-dire, aussi bien pour $z < 0$).

Les composantes sphériques du champ s'en déduisent simplement par des dérivations appropriées du potentiel. Il vient

$$E_r = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad E_\phi = 0 \tag{2.64}$$

Les surfaces équipotentielles ont pour équation

$$r^2 = K \cos \theta \tag{2.65}$$

K étant une constante. Ces surfaces sont fermées. On sait qu'au voisinage de l'une des charges, les équipotentielles sont quasiment des sphères centrées sur celle-ci, puisqu'alors c'est son potentiel

²²L'unité S.I. pour le moment dipolaire est le Coulomb-mètre (C-m); cependant, en physique atomique, une unité plus adaptée est le *Debye* dont la valeur est $\frac{1}{3} 10^{-29}$ C-m

qui prédomine. Les sphères se déforment au fur et à mesure qu'on s'éloigne des charges. Si K est positif, on se trouve dans la région du côté de la charge positive : θ est alors astreint à varier entre 0 et $\pi/2$. Si K est négatif, θ doit varier entre $\pi/2$ et π (fig 2.26).

Les lignes de champ ont pour équations $\phi = \text{constante}$, puisque $E_\phi = 0$, et satisfont l'équation

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \quad (2.66)$$

soit (a priori pour $r \neq 0$)

$$\frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{rd\theta}{\sin \theta} \quad (2.67)$$

qui a pour solution

$$r = K' \sin^2 \theta \quad (2.68)$$

K' étant une constante positive. L'allure qualitative, dans un plan contenant le moment dipolaire, des lignes de champs et des intersections des surfaces équipotentielles avec ce plan est représentée à la figure 2.26.

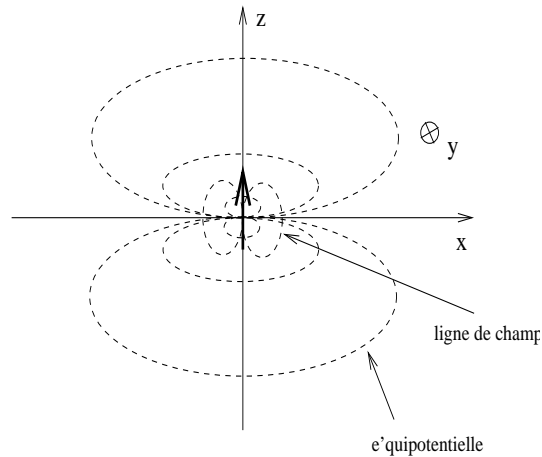


FIG. 2.26 – Equipotentiels et lignes du champ du dipôle électrique

2.13 Annexe : A propos des singularités du champ

Comme nous l'avons déjà signalé, le type de variation du champ électrostatique vis-à-vis des coordonnées du point d'observation considéré dépend crucialement de la distribution des charges. On peut néanmoins dégager quelques propriétés générales en procédant à une simple analyse dimensionnelle. De ce point de vue, en effet, le champ se présente comme le rapport d'une charge et du carré d'une distance :

$$E \sim \frac{Q}{L^2} \quad (2.69)$$

De là nous pouvons déduire que la loi en $1/L^2$ prévaut si la distribution de charges est vue comme une charge ponctuelle. C'est le cas bien sûr si l'on a vraiment affaire à une charge ponctuelle, mais c'est aussi vrai lorsqu'on se trouve à grande distance d'une distribution, pourvu que sa charge totale soit non nulle. La distance L sera alors la distance séparant le point d'observation d'un point moyen à l'intérieur de la distribution. Dans le cas où la charge totale est nulle, on peut prévoir que la variation à grande distance du champ sera en première approximation du type

$$E \sim \frac{q\ell}{L^3}$$

où q est une charge et ℓ une longueur caractéristique de la distribution. Il ne peut en être autrement car la dimension du champ doit être respectée. C'est bien ce type de variation en $1/L^3$ que l'on observe à grande distance pour le dipôle électrostatique : ℓ est alors la distance séparant les deux charges opposées. On notera que la dépendance angulaire ne peut être prévue par analyse dimensionnelle, car elle fait intervenir des fonctions trigonométriques qui sont sans dimension...

La loi en $1/L^2$ induit une singularité du champ lorsqu'on se rapproche d'une charge ponctuelle. En fait, cette divergence selon l'inverse du carré de la distance est la pire des singularités qui peut advenir pour le champ électrostatique. Cependant, d'autres types de singularités peuvent apparaître dans le cas des distributions continues.

Supposons en effet que la distribution soit linéique. Lorsqu'on se rapproche de la distribution, sa charge n'est pas vue de façon globale, comme une charge ponctuelle. Elle est alors perçue comme le produit d'une densité linéique que multiplie une longueur. Dans ces conditions, $Q \sim \lambda L$ et l'on peut alors s'attendre à voir une variation du champ non plus suivant une loi en $1/L^2$, mais plutôt suivant une loi en $1/L$:

$$E \sim \frac{\lambda}{L} \quad (2.70)$$

C'est bien ce type de loi qui est observé au voisinage d'un fil uniformément chargé. On voit qu'alors la plus grande singularité du champ est une divergence en $1/L$ lorsque L tend vers zéro : l'augmentation de complexité de la distribution a pour conséquence une moindre singularité du champ.

La même analyse appliquée au cas de distributions surfaciques de charges conduit à prévoir que dans certaines conditions, on peut observer pour le champ des valeurs *constantes*. En effet, à proximité d'une telle distribution, on doit envisager la charge comme le produit d'une densité superficielle σ par une surface qui est le carré d'une longueur : $Q \sim \sigma L^2$, d'où

$$E \sim \sigma L^2 / L^2 \sim \text{constante} \quad (2.71)$$

Ceci ne signifie pas pour autant qu'ici le champ n'a plus de singularité, car la constante peut différer suivant le domaine considéré. Autrement dit, le champ peut exhiber des *discontinuités*. Ceci est un fait général : pour des distributions surfaciques, le champ subit une discontinuité

lorsqu'on traverse une surface chargée. Néanmoins, ce type de singularité est moindre que les précédents.

Enfin, le cas des distributions volumiques est celui où le champ n'a plus aucune singularité, pourvu bien sûr que la densité volumique de charges n'en présente pas non plus. Du fait qu'à proximité des charges de densité volumique ρ on a $Q \sim \rho L^3$, on peut s'attendre à voir évoluer le champ suivant la loi

$$E \sim \rho L^3 / L^2 \sim \rho L \quad (2.72)$$

c'est-à-dire une variation linéaire vis-à-vis d'une distance. Pour les distributions volumiques dont les densités ne présentent pas de singularités, le champ est une fonction continue des coordonnées. Bien sûr, lorsqu'on sort de la distribution volumique et qu'on s'en éloigne à grande distance, on doit retrouver a priori une loi en $1/L^2$.

Insistons sur le fait que si l'on trouve ainsi pour les distributions continues des variations du champ électrostatique très différentes de celle donnée par la loi de Coulomb, c'est que, considérant des systèmes à grand nombre de charges, on a en quelque sorte *moyenné* cette loi sur des domaines spatiaux petits par rapport à notre échelle macroscopique, mais déjà très grand vis-à-vis des échelles du monde microscopique²³.

Montrons aussi comment l'équation de Laplace impose la forme du potentiel et du champ, dans les cas de distributions de charge possédant certains types de symétrie.

Supposons par exemple que la distribution possède la symétrie cylindrique autour de l'axe z/z . Dans ce cas le potentiel possède lui aussi cette symétrie et ne doit donc dépendre que de ρ . En dehors des sources, le potentiel V satisfait l'équation de Laplace qui, compte-tenu de la symétrie du potentiel se réduit à

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \quad (2.73)$$

d'où

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{K}{\rho} = -E_\rho(\rho) \quad (2.74)$$

où K est une constante, puis

$$V(\rho) = K \ln \rho + K' \quad (2.75)$$

K' étant une seconde constante. La première constante K , directement liée au champ, peut en principe être calculée en appliquant le théorème de Gauss. La seconde constante peut être choisie arbitrairement, sous réserve que la continuité du potentiel soit respectée.

Supposons maintenant que, au moins localement, la distribution possède la symétrie plane. En faisant un choix approprié de coordonnées cartésiennes x, y, z , cela signifie par exemple que les deux variables x et y ne sont pas des variables sensibles. Le potentiel ne dépend alors que de z . Ce cas se rencontre dans le cas des distributions superficielles de charges. En dehors des charges sources, le potentiel satisfait l'équation

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad (2.76)$$

d'où

²³Cette échelle intermédiaire entre le monde microscopique et le monde macroscopique est l'échelle *mésoscopique*.

$$\frac{dV}{dz} = -E_z = K \quad (2.77)$$

où K est une constante. Ici, comme prévu, le champ est localement constant. Une nouvelle intégration conduit à l'expression

$$V(z) = Kz + K' \quad (2.78)$$

où K' est une constante à ajuster, comme dans l'exemple précédent, pour assurer la continuité du potentiel.

Enfin, pour un potentiel à symétrie sphérique, l'équation de Laplace, vérifiée en dehors des sources, conduit à

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (2.79)$$

soit

$$\frac{dV}{dr} = -E_r = \frac{K}{r^2} \quad (2.80)$$

et

$$V(r) = -\frac{K}{r} + K' \quad (2.81)$$