

Chapitre 3

Energie électrostatique

3.1 Introduction

Rappelons qu'en Mécanique, un système de N particules en interaction est dit posséder une *énergie potentielle* s'il existe une fonction $E_p(\vec{r}_i)$ des coordonnées des particules telle que le travail élémentaire $w_{\text{tot}}^{\text{int}}$ que développent les forces intérieures au système lors de déplacements infinitésimaux quelconques des particules puisse s'écrire comme l'opposé de la *différentielle* de cette fonction, qui représente la partie principale de sa variation consécutive à ces déplacements :

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_i = -dE_p \quad (3.1)$$

Si elle existe, cette fonction E_p est appelée *énergie potentielle* du système considéré. Elle en décrit entièrement les interactions entre ses particules constituantes, car les forces intérieures s'en déduisent par des dérivations partielles. On dit alors que les forces intérieures *dérivent d'une énergie potentielle*.

$$F_{ix}^{\text{int}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}, \quad F_{iy}^{\text{int}} = -\frac{\partial E_p}{\partial y_i}, \quad F_{iz}^{\text{int}} = -\frac{\partial E_p}{\partial z_i} \quad (3.2)$$

Considérons le cas d'un système constitué de deux points matériels M_1 et M_2 dont l'interaction à distance est décrite par les vecteurs forces

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{M_1/M_2}, \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{M_2/M_1} = -\vec{F}_1$$

Lorsque les deux points matériels M_1 et M_2 subissent les déplacements infinitésimaux

$$d\vec{M}_1 = dx_1 \vec{e}_x + dy_1 \vec{e}_y + dz_1 \vec{e}_z, \quad \text{et} \quad d\vec{M}_2 = dx_2 \vec{e}_x + dy_2 \vec{e}_y + dz_2 \vec{e}_z$$

respectivement, le travail total (infinitésimal) développé par les forces intérieures au système est

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{M}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{M}_2$$

soit, explicitement, en fonction des composantes cartésiennes des forces et des déplacements infinitésimaux

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = F_{1x} dx_1 + F_{1y} dy_1 + F_{1z} dz_1 + F_{2x} dx_2 + F_{2y} dy_2 + F_{2z} dz_2$$

Cette expression est une forme différentielle relativement aux six variables que sont les coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ des deux points M_1 et M_2 (les composantes des forces en dépendent) et à leurs différentielles $dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2$.

Insistons ici sur le fait que s'il existe une fonction énergie potentielle, celle-ci ne dépend que des coordonnées des points matériels en interaction et *en aucun cas des vitesses*. On peut même apporter une précision pour ce qui concerne la dépendance vis-à-vis des coordonnées. En effet, d'après le principe de l'action et de la réaction, on a $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, et par suite

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_2 \cdot d\vec{M}_1 M_2 = F_{2x} d(x_2 - x_1) + F_{2y} d(y_2 - y_1) + F_{2z} d(z_2 - z_1)$$

ce qui montre clairement qu'en fait, s'il existe une énergie potentielle, celle-ci ne dépend des coordonnées des parties en interaction que par l'intermédiaire des *coordonnées relatives* $x_i - x_j$.

Ces résultats se transposent directement à des systèmes complexes de n points matériels en interaction, et même à des systèmes pouvant être modélisés comme des milieux continus. De fait, on admet couramment l'existence d'une énergie potentielle décrivant l'interaction à distance de constituants élémentaires.

Deux particules placées en M_1 et M_2 respectivement exercent l'une sur l'autre une force *centrale* si cette force

♣ est portée par la droite $M_1 M_2$

♣ et si son intensité ne dépend que de la distance $r = M_1 M_2$.

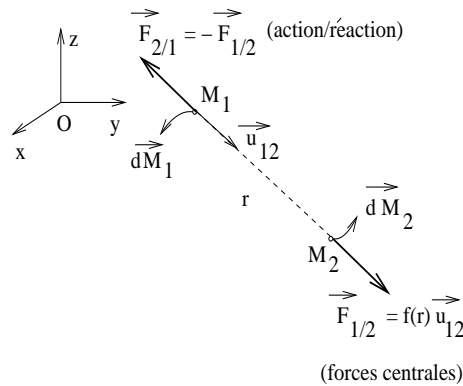


Figure 3.1

Son expression générale est donc de la forme

$$\vec{F}_{M_1/M_2} = f(r) \vec{u}_{12}$$

où $\vec{u}_{12} = \vec{M}_1 M_2 / r$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{M}_1 M_2$. Lorsque M_1 et M_2 subissent des déplacements infinitésimaux $d\vec{M}_1$ et $d\vec{M}_2$ respectivement, le travail total (infinitésimal) développé par les forces intérieures est

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_{M_1/M_2} \cdot d\vec{M}_1 M_2 = f(r) \vec{u}_{12} \cdot d\vec{M}_1 M_2$$

Puisque $\vec{M}_1 M_2 = r \vec{u}_{12}$, on a

$$d\vec{M}_1 M_2 = dr \vec{u}_{12} + r d\vec{u}_{12}$$

Mais comme $\vec{u}_{12}^2 = 1$ (vecteur unitaire), on a aussi

$$d\vec{u}_{12}^2 = 2 \vec{u}_{12} \cdot d\vec{u}_{12} = 0$$

ce qui signifie, dans le cas général, que \vec{du}_{12} est orthogonal à \vec{u}_{12} ¹. On en déduit

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = f(r)dr$$

Cette dernière expression est une forme différentielle à *une seule variable* r . Il est alors manifeste que l'on pourra introduire ici une fonction $E_p(r)$, telle que

$$\frac{dE_p}{dr} = -f(r)$$

de sorte que

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = -dE_p$$

Ainsi, une interaction par des forces centrales donne lieu à une énergie potentielle. Cette dernière ne dépend des coordonnées x_1, y_1, z_1 de M_1 et x_2, y_2, z_2 de M_2 que par l'intermédiaire de la distance $r = M_1M_2$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \left(\vec{F}_{M_1/M_2} \right)_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, & \left(\vec{F}_{M_1/M_2} \right)_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_1}, & \left(\vec{F}_{M_1/M_2} \right)_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z_1} \\ \left(\vec{F}_{M_2/M_1} \right)_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_2}, & \left(\vec{F}_{M_2/M_1} \right)_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_2}, & \left(\vec{F}_{M_2/M_1} \right)_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z_2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les *deux* forces intérieures \vec{F}_{M_1/M_2} et $\vec{F}_{M_2/M_1} = -\vec{F}_{M_1/M_2}$ dérivent de la *même* fonction énergie potentielle $E_p(r)$.

3.2 Energie potentielle des systèmes de charges

En Electrostatique, deux charges ponctuelles q_1 et q_2 interagissent effectivement par l'intermédiaire d'une force centrale. On a ici

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r^2}$$

soit

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr}$$

On en déduit par intégration

$$E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{constante} \quad (3.3)$$

La généralisation à un système quelconque de N charges ponctuelles en interaction est immédiate. Un tel système possède donc une énergie potentielle ayant pour expression

$$E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} + \text{constante} \quad (3.4)$$

où

¹Où éventuellement nul.

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Comme attendu, elle ne dépend des coordonnées que par l'intermédiaire des coordonnées relatives $x_i - x_j$. Il est important de remarquer que la sommation doit être comprise comme une sommation sur tous les *couples* (ij) , et non sur les indices i et j séparément. En fait, une sommation séparée peut être introduite, mais à condition de diviser par 2 le résultat :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \text{constante} \quad (3.5)$$

Cette dernière expression est intéressante car elle fait apparaître le potentiel électrostatique que produisent sur la charge q_i toutes les *autres* charges du système

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \text{constante} \quad (3.6)$$

Ce qui permet de récrire l'énergie potentielle sous la forme

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (3.7)$$

Comme on sait, cette énergie potentielle s'interprète comme l'*énergie de constitution du système*. Autrement dit, c'est l'énergie qu'il faut fournir (algébriquement parlant) pour rapprocher les charges jusqu'à leurs positions respectives dans le système constitué, depuis une configuration où elles sont infiniment éloignées les unes des autres.

On notera bien que cette énergie ne tient pas compte de l'énergie propre de chacune des charges en présence, c'est-à-dire de l'énergie de constitution de chacune des charges elles-mêmes. On peut s'en convaincre en remarquant que la formule précédente donne $E_p = 0$ si le système est constitué d'une seule charge. On peut cependant remédier à ce défaut à la condition de n'envisager les charges que comme des distributions continues et non plus ponctuelles.

Considérons en effet une distribution volumique confinée dans un domaine \mathcal{D} avec la densité $\rho(M)$. Nous écrivons l'énergie électrostatique de cette distribution sous la forme suivante, qui généralise celle relative aux distributions ponctuelles²

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (3.8)$$

où $V(M)$ est le potentiel *total* créé au point M par l'*ensemble* de la distribution, élément de charge $\rho(M)d\tau(M)$ compris. Montrons que cette énergie représente bien l'énergie de constitution du système de charge, c'est-à-dire son énergie propre.

Il est évident que lorsque le système n'est pas encore constitué, la densité de charge est strictement nulle, et son énergie doit être nulle, ce dont la formule ci-dessus rend bien compte. Lorsque le système est entièrement constitué la densité en M est $\rho(M)$.

On peut imaginer une étape intermédiaire où la densité en M vaut $\rho_\alpha(M) = \alpha\rho(M)$, α étant un nombre réel compris entre 0 et 1. Comme il y a une relation *linéaire* entre la densité de charge et le potentiel, ce dernier vaut alors $V_\alpha(M) = \alpha V(M)$. Pour passer de l'étape α à l'étape $\alpha + d\alpha$, il faut amener en tout point M une charge $dq(M) = d\alpha\rho(M)d\tau(M)$ depuis une région infiniment éloignée des charges déjà présentes. Comme on sait, l'énergie nécessaire vaut

²Nous utilisons ici la notation \mathcal{D} pour désigner le volume enfermant la distribution et $d\tau$ pour représenter l'élément de volume, afin d'éviter de confondre ces grandeurs avec le potentiel noté V .

$$dw = dq(M) V_\alpha(M) \quad (3.9)$$

C'est l'énergie potentielle de la charge $dq(M)$ située autour du point M où le potentiel est alors $V_\alpha(M)$. L'énergie totale à apporter à tout le domaine \mathcal{D} dans cette étape est

$$dW_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} d\alpha \rho(M) d\tau(M) V_\alpha(M) = \alpha d\alpha \int_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (3.10)$$

d'où il résulte que l'énergie totale nécessaire à la constitution du système est

$$E_p = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau(M) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (3.11)$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

3.2.1 “Délocalisation” de l'énergie

L'expression ainsi trouvée pour l'énergie potentielle contient une intégration sur le domaine \mathcal{D} renfermant la distribution et, de ce fait, donne à penser que l'énergie y est *confinée*, c'est-à-dire que l'énergie est *localisée* dans ce domaine. Nous allons montrer qu'en fait il n'en est rien, et que l'énergie est, si l'on peut dire, *délocalisée* dans tout l'espace³.

Tout d'abord, en dehors du domaine \mathcal{D} , on a $\rho \equiv 0$, ce qui fait que l'intégrale peut sans dommage être étendue à tout l'espace

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\text{esp}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (3.12)$$

Ensuite, la forme locale du théorème de Gauss, à savoir, $\rho(M) = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$, permet d'écrire

$$\rho(M) V(M) = \epsilon_0 V(M) \text{div } \vec{E} = \epsilon_0 \left[\text{div}(V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \text{grad } V \right] \quad (3.13)$$

soit

$$\rho(M) V(M) = \epsilon_0 \left[\text{div}(V \vec{E}) + \vec{E}^2 \right] \quad (3.14)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky conduit à la relation

$$\int_{\text{esp}} \text{div}(V \vec{E}) d\tau(M) = \int_{\infty} V \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (3.15)$$

où la dernière intégrale représente le flux sortant du vecteur $V \vec{E}$ à travers une surface à l'infini. Pour évaluer ce flux, il faut connaître la loi de variation du champ et du potentiel à grande distance r du système de charges. Or, au minimum, V décroît comme $1/r$ et le champ décroît comme $1/r^2$. D'un autre côté, la surface augmente proportionnellement à r^2 , comme celle d'une sphère ($4\pi r^2$). Finalement, le produit $V \vec{E} \cdot d\vec{S}$ décroît au minimum comme $1/r$ et tend vers zéro à distance infinie. L'intégrale en question est donc nulle. On en déduit immédiatement la formule

$$\boxed{E_p = \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 d\tau} \quad (3.16)$$

qui fait apparaître une *densité volumique d'énergie électrostatique*, égale à

³Certains auteurs parlent de “localisation” de l'énergie, terme qui à notre avis peut prêter à confusion.

$$\boxed{\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2} \quad (3.17)$$

Cette densité d'énergie est présente en tout point où le champ est non nul, donc même en dehors du système de charges, ce qui montre que l'énergie électrostatique est distribuée dans tout l'espace, et non pas seulement à l'intérieur du domaine renfermant les charges. Du point de vue dimensionnel, cette densité est homogène à une *pression* et pour cette raison est aussi appelée *pression électrostatique*. Lorsqu'une charge d'essai est placée dans le champ créé par la distribution, l'effet de cette pression est de *pousser* la charge dans la direction du champ, dans un sens ou dans l'autre selon le signe de celle-ci.

L'expression ainsi trouvée pour l'énergie conduit au concept d'*énergie de champ* et consacre, en quelque sorte, la description de l'interaction électrostatique en terme de champ. Elle ouvre également la possibilité d'obtenir une équation de conservation *locale* de l'énergie et non plus *globale*. En outre, nous verrons plus loin que c'est bien cette expression qui se généralise au cas des régimes variables dans le temps.

L'interaction de deux systèmes de charges peut aussi être exprimée en terme de densité d'énergie. En effet, soit Σ_1 un premier ensemble de charges créant en tout point M le champ $\vec{E}_1(M)$ et Σ_2 un second ensemble de charges créant en M le champ $\vec{E}_2(M)$. Le système global Σ , réunion de Σ_1 et Σ_2 , crée en M le champ

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) \quad (3.18)$$

et a pour énergie propre

$$E_\Sigma = \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 d\tau = \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right] d\tau \quad (3.19)$$

On voit que cette énergie se présente comme une somme comprenant les énergies propres

$$W_1 = \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_1^2 d\tau, \quad W_2 = \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_2^2 d\tau \quad (3.20)$$

de Σ_1 et de Σ_2 respectivement, et d'un terme

$$\boxed{W_{12} = \int_{\text{esp}} \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau} \quad (3.21)$$

qui représente en fait l'énergie d'interaction entre les deux champs en présence, avec une densité volumique égale à

$$\boxed{\omega_{12} = \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} \quad (3.22)$$

On peut d'ailleurs montrer que dans le cas de deux charges Q et Q' réparties uniformément sur deux sphères dont les centres sont distants de D , l'énergie d'interaction W_{12} coïncide bien avec l'expression bien connue $QQ'/(4\pi\epsilon_0 D)$ (voir annexe).

3.3 Dipôle dans un champ extérieur

Avant de terminer ce chapitre, trouvons l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ *extérieur* \vec{E} . Considérons donc le système constitué d'une charge q au point $A(x, y, z + a/2)$ et d'une charge $-q$ au point $B(x, y, z - a/2)$. Les coordonnées cartésiennes du milieu M de AB sont donc x, y et z . Le champ produit le potentiel V_A au point A et le potentiel V_B au point B . L'énergie potentielle d'interaction des deux charges avec le champ extérieur est donc

$$E_p = q(V_A - V_B) \quad (3.23)$$

Comme la distance a séparant les deux charges est supposée très petite en comparaison des échelles macroscopiques, on peut effectuer les développements suivants :

$$V_A \approx V_M + \frac{a}{2} \frac{\partial V}{\partial z}(M), \quad V_B \approx V_M - \frac{a}{2} \frac{\partial V}{\partial z}(M) \quad (3.24)$$

d'où

$$E_p \approx qa \frac{\partial V}{\partial z}(M) \quad (3.25)$$

soit, puisque

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M)$$

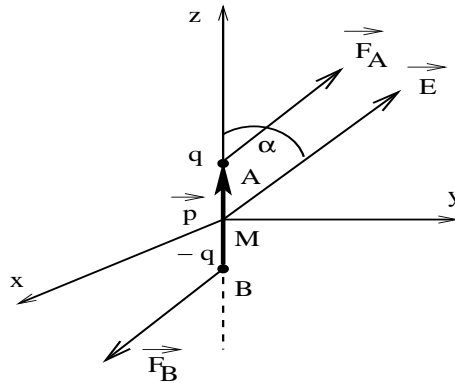


Figure 3.2

et en introduisant le moment dipolaire

$$\vec{p}(M) = qa \vec{e}_z$$

l'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M) \quad (3.26)$$

On note que cette énergie potentielle est *minimum* lorsque le moment dipolaire du système est orienté suivant le champ. Cette configuration représente pour lui une position d'équilibre *stable* dans le champ extérieur.

La force \vec{F} agissant sur le dipôle peut être évaluée de deux façons. La première, directe, consiste à appliquer le principe général selon lequel la force se déduit par dérivation de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p \quad (3.27)$$

ce qui donne

$$\boxed{\vec{F} = \text{grad} \left(\vec{p} \cdot \vec{E} (M) \right)} \quad (3.28)$$

Avec l'orientation choisie pour le moment dipolaire, on a explicitement

$$F_x = p \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad F_y = p \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad F_z = p \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (3.29)$$

Cette force est nulle si le champ est *uniforme*. En fait, on a alors affaire à un couple de forces dont le moment résultant par rapport à M peut être calculé comme

$$\boxed{\Gamma = - \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = pE \sin \alpha} \quad (3.30)$$

α étant l'angle entre \vec{p} et \vec{E} .

On peut retrouver ces expressions en détaillant les forces comme suit.

La force résultante s'exerçant sur le système des deux charges est

$$\vec{F} = q \left[\vec{E}_A - \vec{E}_B \right] \quad (3.31)$$

soit, en introduisant les développements limités :

$$\vec{E}_A \approx \vec{E} (M) + \frac{a}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} (M), \quad \vec{E}_B \approx \vec{E} (M) - \frac{a}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} (M)$$

l'expression

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} (M) \quad (3.32)$$

D'où

$$F_x = p \frac{\partial E_x}{\partial z} (M), \quad F_y = p \frac{\partial E_y}{\partial z} (M), \quad F_z = p \frac{\partial E_z}{\partial z} (M) \quad (3.33)$$

Mais, en vertu de la relation $\text{rot } \vec{E} = 0$, on a

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.34)$$

d'où, aussi bien

$$F_x = p \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad F_y = p \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad F_z = p \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

comme précédemment.

Le moment résultant par rapport à M est

$$\vec{\Gamma} = q \vec{MA} \wedge \vec{E}_A - q \vec{MB} \wedge \vec{E}_B \quad (3.35)$$

soit, en ne retenant que les termes du premier ordre en a :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = q \vec{BA} \wedge \vec{E}(M) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)} \quad (3.36)$$

3.4 Annexe 1 : énergie potentielle d'une boule uniformément chargée

Pour cet exemple simple, nous allons vérifier que les deux formules (3.8) et (3.16) donnent bien la même valeur pour l'énergie potentielle du système de charges. Pour les expressions du champ et du potentiel électrostatiques de cette distribution, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 2.11.4 (ρ est la densité volumique de charges, constante, et R est le rayon de la boule).

La formule (3.8) fournit l'expression

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho \left\{ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right\}$$

soit, tous calculs faits (l'intégration sur les angles donne un facteur 4π)

$$E_p = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \quad (3.37)$$

Pour calculer l'énergie potentielle à l'aide de la formule (3.16), nous décomposerons l'intégration en deux parties correspondant l'une, E_{p1} , à l'intérieur de la boule $r \leq R$, l'autre E_{p2} , à l'extérieur de la boule $r \geq R$, étant donné que le champ a des expressions différentes dans l'une et dans l'autre. On a ainsi

$$E_{p1} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\epsilon_0} \quad (3.38)$$

Puis

$$E_{p2} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^{+\infty} r^2 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho^2 R^6}{9\epsilon_0^2 r^4} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0} \quad (3.39)$$

Rassemblant ces résultats, on obtient

$$E_{p1} + E_{p2} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

c'est-à-dire, le même résultat qu'en (3.37), comme attendu.

En outre, ces résultats indiquent que $E_{p2}/E_p = 5/6$: cinq sixièmes de l'énergie potentielle totale sont "délocalisés" à l'extérieur de la boule.

3.5 Annexe 2 : interaction de deux sphères chargées

Considérons deux sphères identiques S et S' de rayon R , dont les centres respectifs O et O' sont distants de $OO' = D > 2R$, et sur lesquelles sont réparties uniformément les charges Q et Q' , respectivement. Le champ créé par S en un point M est nul à l'intérieur de S et vaut

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

à l'extérieur de S . De même, le champ créé en M par S' est nul à l'intérieur de S' et vaut

$$\vec{E}'(M) = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{O'M}}{O'M^3}$$

à l'extérieur de S' . Définissons un repère cartésien d'origine O , tel que la demi-droite OO' en soit l'axe Oz . Dans ce repère, la position de M sera caractérisée par ses coordonnées sphériques $r = OM, \theta, \phi$.

A l'extérieur de S et S' , on a alors

$$\omega_{12} = \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{QQ'}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{r - D \cos \theta}{r^2 r'^3}$$

où $r' = O'M = [r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta]^{1/2}$ pour tout point M à l'extérieur de S et S' . On obtient ainsi

$$W_{12} = \frac{QQ'}{16\pi^2\epsilon_0} \int_{r>R, r'>R} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \frac{r - D \cos \theta}{r^2 r'^3}$$

soit, en posant $u = \cos \theta$ et après intégration sur l'angle ϕ

$$W_{12} = \frac{QQ'}{8\pi\epsilon_0} I$$

avec

$$I = \int_{r>R, r'>R} dr du \frac{r - Du}{r'^3}$$

Comme r' doit rester supérieur à R , les limites d'intégration sur $u = \cos \theta$ peuvent dépendre de r . En effet, la condition $r'^2 > R^2$ conduit à

$$u = \cos \theta < \frac{r^2 + D^2 - R^2}{2Dr} = U$$

et cette limite U n'est effective que si elle est inférieure à 1, soit lorsque r vérifie

$$D - R < r < D + R$$

Posant

$$X = \frac{r - Du}{r'^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r'} \right)$$

Il vient ainsi

$$I = \int_R^{D-R} dr \int_{-1}^1 X du + \int_{D-R}^{D+R} dr \int_{-1}^U X du + \int_{D+R}^{\infty} dr \int_{-1}^1 X du$$

On a successivement

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{r'} = -\frac{1}{rD} [r'_{u=+1} - r'_{u=-1}] = \frac{2}{D} \quad \text{pour } r < D$$

$$= \frac{2}{r} \quad \text{pour } r > D$$

et

$$\int_{-1}^U \frac{du}{r'} = -\frac{1}{rD} [R - D - r] = \frac{1}{D} + \frac{D - R}{rD} \quad \text{pour } D - R < r < D + R$$

D'où

$$I = \int_R^{D-R} dr \left(-\frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{2}{D} + \int_{D-R}^{D+R} dr \left(-\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{1}{D} + \frac{D-R}{rD}\right) + \int_{D+R}^{\infty} dr \left(-\frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{2}{r}$$

et

$$I = 0 + \frac{D-R}{D} \left(\frac{1}{D-R} - \frac{1}{D+R}\right) + \frac{2}{D+R} = \frac{2}{D}$$

Par suite

$$W_{12} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 D}$$

et l'on retrouve bien l'énergie potentielle d'interaction des deux charges Q et Q' .

Les énergies propres de S et S' s'obtiennent sans difficulté :

$$W_1 = \int_{r>R} \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_1^2}{E_1} d\tau = \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$W_2 = \frac{Q'^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

A ce point, il est intéressant de faire quelques évaluations concernant les particules chargées, telles l'électron, en modélisant celles-ci par des petites sphères chargées de rayon fini R .

D'une part, en assimilant l'énergie propre électrostatique de l'électron à son énergie au repos donnée par la relation d'Einstein $E_0 = mc^2$, où m est la masse de l'électron et c la célérité de la lumière dans le vide, on peut estimer le rayon ainsi attribué à l'électron. On trouve :

$$R = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{r_e}{2}$$

où

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

est appelé *rayon classique de l'électron*. Sa valeur numérique est $2,82 \cdot 10^{-15}$ m.

D'autre part, on peut s'interroger quant à la stabilité d'une telle petite sphère chargée sur laquelle les charges, de même signe, se repoussent. Évaluons alors la force qui s'exerce sur un élément de surface dS de cette sphère, due aux autres charges de la sphère. Cette force \vec{dF} a pour expression

$$\vec{dF} = \sigma dS \vec{E}_{\text{ext}} \quad (3.40)$$

σ étant la densité de charge au point où se trouve dS , et \vec{E}_{ext} le champ créé en ce point par les charges de la sphère situées à l'extérieur de dS . Pour évaluer ce champ, procédons de la façon suivante.

Faisons le choix d'assimiler dS à un petit disque de centre M et orientons sa normale \vec{n} de l'intérieur de la sphère vers l'extérieur. On sait que le champ créé par ce disque en un point de son axe à proximité immédiate de M est

$$\vec{E}_{dS} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{à l'extérieur de la sphère}$$

et

$$\vec{E}_{dS} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{à l'intérieur de la sphère}$$

En passant de l'intérieur vers l'extérieur de la sphère, il subit une discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$.

Cependant, le champ \vec{E}_{ext} ne subit aucune discontinuité dans ce passage par le point M puisque les charges rencontrées ne sont pas celles qui le créent. Or, à l'intérieur de la sphère, le champ *total* créé par celle-ci est *nul*. Dans cette région, on doit donc avoir

$$\vec{E}_{\text{ext}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \vec{0}$$

Par conséquent, on a au point M

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad (3.41)$$

et

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n} \quad (3.42)$$

Comme attendu, cette force a tendance à expulser les charges de la sphère et à faire éclater celle-ci. La pression équivalente est

$$P = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (3.43)$$

Or, le champ *total* à l'extérieur de la sphère et au voisinage immédiat de M est

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (3.44)$$

On en déduit que la pression calculée plus haut peut être exprimée en fonction du champ total à l'aide de la formule suivante

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{\text{tot}}^2 \quad (3.45)$$

Autrement dit, la pression qui s'exerce sur les charges en M est donnée par la densité d'énergie électrostatique en ce point. Ceci justifie que cette densité soit aussi appelée *pression électrostatique*.

Dans le cas d'un électron, cette pression est trouvée égale à

$$P = \frac{2}{\pi} \frac{mc^2}{r_e^3} \approx 2,3 \cdot 10^{25} \text{ atm}$$

Ce nombre gigantesque⁴ force le doute sur la représentation, assez commune, d'une particule comme une "petite boule de matière"...

⁴Évalué pour la première fois par Poincaré.