Introduction à la

THEORIE LAGRANGIENNE

Christian Carimalo

Chapitre 1

Lagrangien en Mécanique Classique non relativiste

1.1 Etat mécanique d'un système

En Mécanique Classique, on décrit un système quelconque à l'aide d'un ensemble de n variables réelles indépendantes $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$, appelées *coordonnées généralisées*. Leur nombre n est le nombre de *degrés de liberté* du système et dépend de la structure de celui-ci. L'exemple le plus simple est celui d'une particule libre dont les coordonnées généralisées sont ses trois coordonnées d'espace. Une particule libre de se mouvoir possède trois degrés de liberté.

Un ensemble particulier $(q_1^0, q_2^0, \cdots, q_n^0)$ de valeurs des coordonnées généralisées définit un état du système, que l'on peut représenter dans un espace à n dimensions, appelé *espace de configuration*. Lors de l'évolution du système au cours du temps, son point représentatif décrit une trajectoire dans l'espace de configuration. Le but de la Mécanique Classique est de déterminer cette trajectoire, compte tenu des interactions du système avec son environnement. Mathématiquement parlant, il s'agit de trouver les équations horaires

$$q_i = Q_i(t) \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

Afin de déterminer les n fonctions Q_i, il est nécessaire de disposer d'équations différentielles reliant les coordonnées q_i à leurs dérivées par rapport au temps. La résolution de ces équations, dites équations du mouvement, et l'introduction de données initiales caractérisant le protocole de l'expérience d'où résulte le mouvement, doivent en principe permettre de déterminer de façon univoque les fonctions $Q_i(t)$.

Cependant, en tant que théorie physique, la Mécanique ambitionne non seulement de décrire l'état d'un système à un instant donné, mais aussi de prévoir quelle en sera la position (dans l'espace de configuration) à l'instant immédiatement ultérieur, ce qui n'est possible que si l'on connait aussi les vitesses d'évolution des coordonnées au même instant. La description complète, prédictive, d'un système requiert donc la donnée supplémentaire de certaines dérivées temporelles des coordonnées. L'expérience montre que la donnée simultanée des coordonnées q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i$ détermine complètement l'état mécanique du système à un instant donné et permet de prévoir son évolution. De ce fait, il résulte que les accélérations $\ddot{q}_i$ à un instant donné sont connues dès lors que les coordonnées q_i et leurs vitesses $\dot{q}_i$ au même instant sont connues. Autrement dit, les équations du mouvement sont nécessairement du second ordre par rapport aux coordonnées q_i.

1.2 Lagrangien et principe de moindre action

Sous sa forme la plus abstraite, la Mécanique Classique déduit les équations du mouvement à partir d'un principe variationnel, le *principe de moindre action*, ou *principe d'action stationnaire*. Selon celui-ci, tout système mécanique est caractérisé par une fonction de Lagrange, ou *Lagrangien*, noté $\mathcal{L}$, qui dépend de l'état mécanique du système, c'est-à-dire, des coordonnées q_i et de leurs vitesses $\dot{q}_i$ et, éventuellement, du temps

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{1.2}$$

où, ici, $q = \{q_i\}$ et $\dot{q} = \{\dot{q}_i\}$ représentent symboliquement les ensembles des coordonnées et des vitesses, respectivement.

Suppososons qu'aux dates $t = t_1$ et $t = t_2$ le système occupe des positions données, $q = q_1 = \{q_1^1, q_2^1, \dots q_n^1\}$, et $q = q_2 = \{q_1^2, q_2^2, \dots q_n^2\}$, respectivement. Considérons alors l'intégrale

$$W = W([q], q_2, t_2, q_1, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \tag{1.3}$$

appelée *intégrale d'Action*, ou *Action du système* étudié. Sa valeur dépend non seulement des conditions aux limites q_2, t_2, q_1, t_1, mais aussi de la loi d'évolution $q = q(t)$, par l'intermédiaire du Lagrangien.

Le principe d'Action extrémale s'énonce alors de la façon suivante :

♠ *de toutes les lois d'évolution imaginables $q(t)$ permettant au système de passer de la position q_1 à la date t_1 à la position q_2 à la date t_2, celle effectivement réalisée rend l'intégrale d'Action extrémale.*

Exprimons mathématiquement ce principe. Pour simplifier le propos, considérons le cas où $n = 1$. Soit $Q_0(t)$ la loi horaire qui rend l'Action extrémale. Envisageons une loi $Q(t)$ infiniment voisine, que l'on peut écrire sous la forme

$$Q(t) = Q_0(t) + \epsilon g(t) \tag{1.4}$$

où ϵ est un nombre réel tel que $|\epsilon| \ll 1$, et $g(t)$ une fonction arbitraire du temps, néanmoins soumise aux conditions $g(t_1) = g(t_2) = 0$, de sorte que $Q(t)$ satisfait aux mêmes conditions aux limites que $Q_0(t)$: $Q(t_1) = q_1$, $Q(t_2) = q_2$. Effectuant un développement de $W([Q], q_1, q_2, t_1, t_2)$ suivant les puissances de ϵ, on obtient

$$\begin{aligned} W([Q], q_2, t_2, q_1, t_1) = W([Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1) + \epsilon\ C_1(g, [Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1) + \\ \epsilon^2\ C_2(g, [Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1) + \cdots \end{aligned} \tag{1.5}$$

Le terme du premier ordre en ϵ représente la partie principale de la variation de l'Action (ou variation première) lorsqu'on passe de Q_0 à Q

$$\delta W = \epsilon\ C_1(g, [Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1) \tag{1.6}$$

et est une fonctionnelle linéaire vis-à-vis de g, le terme en ϵ^2 est la variation seconde $\delta^{(2)} W$ de l'Action, quadratique vis-à-vis de g, etc.

Selon un principe général, au voisinage d'un extremum, la variation totale $\Delta W = W([Q], q_1, q_2, t_1, t_2) - W([Q_0], q_1, q_2, t_1, t_2)$ est au minimum du *second ordre* vis-à-vis de ϵ, ce qui signifie qu'on a alors

$$\delta W = 0 \tag{1.7}$$

Cette variation première est donnée par

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}\; dt \tag{1.8}$$

Or, posant $\delta q = \epsilon g(t)$, on a

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q} \tag{1.9}$$

et puisque $\delta\dot{q} = \dfrac{d}{dt}\delta q$, il vient

$$\delta\mathcal{L} = \delta q\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\delta q\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) \tag{1.10}$$

Dans toutes ces expressions, les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ sont bien entendu évaluées pour $q = Q_0$. L'équation 1.8 devient alors

$$\delta W = \left(\delta q\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)_{t=t_2} - \left(\delta q\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)_{t=t_1} + \int_{t_1}^{t_2}\delta q\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\; dt \tag{1.11}$$

Mais comme $(\delta q)(t_1) = (\delta q)(t_2) = 0$, on obtient finalement

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\delta q\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\; dt \tag{1.12}$$

D'après un théorème de mathématiques[1], l'équation $\delta W = 0$ quel que soit δq implique que l'on ait

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = 0 \tag{1.13}$$

Ces équations, appelées *équations d'Euler-Lagrange*, constituent le système d'équations cherché pour la description du mouvement. Comme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \dot{q}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^2} \tag{1.14}$$

elles font apparaître les dérivées secondes $\ddot{q}$, ce qui donne bien des équations du second ordre. Pour un nombre quelconque de variables, on disposera ainsi de n équations

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = 0 \quad , \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.15}$$

Ce sont en général des équations *couplées*, les n variables intervenant a priori simultanément dans chacune d'elles. On montre que la solution générale $Q_0(t)$ dépend de manière biunivoque de $2n$ constantes dites "arbitraires". Pour déterminer complètement la loi d'évolution réelle, il faut alors appliquer soit les conditions aux limites $Q_0(t_1) = q_1$ (n constantes), $Q_0(t_2) = q_2$ (n autres constantes), soit, comme on le fait le plus souvent, des *conditions initiales* consistant à se donner les valeurs des coordonnées et de leurs vitesses à un instant donné t_0 ($2n$ constantes).

1.3 L'Action, fonction des conditions aux limites

Soit $Q_0(t)$ la loi horaire obtenue via le principe variationnel et soumise aux contraintes $Q_0(t_1) = q_1$, $Q_0(t_2) = q_2$. La valeur (extrémale) de l'intégrale d'Action est alors $W([Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1)$. Rappelons ici que les paramètres q_2, t_2, q_1, t_1 définissant les contraintes limites sont indépendants les uns des autres. Voyons de quelle façon la valeur extrémale de l'Action dépend de ces paramètres.

[1] Il s'agit du lemme fondamental du calcul des variations.

1.3.1 Influence de q_2

Si l'on modifie la valeur de q_2 en q_2' tout en laissant fixés t_2, q_1 et t_1, l'application du principe variationnel à la nouvelle intégrale d'Action, évaluée avec le même Lagrangien, conduira à une nouvelle loi horaire $Q_0'(t)$ satisfaisant aux nouvelles conditions $Q_0'(t_1) = q_1$, $Q_0'(t_2) = q_2'$. Pour une modification infinitésimale $\delta q_2 = q_2' - q_2$, la différence $\delta q(t) = Q_0'(t) - Q_0(t)$ est elle aussi infinitésimale. Il en est de même de la différence

$$\delta W = W([Q_0'], q_2', t_2, q_1, t_1) - W([Q_0], q_2, t_2, q_1, t_1) \tag{1.16}$$

Appliquons à cette différence infinitésimale la formule générale (1.11) donnant la variation de l'Action pour une variation quelconque des coordonnées $q(t)$, t_2 et t_1 étant fixés. L'intégrale qui y apparaît est nulle ici puisque les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites pour $q(t) = Q_0(t)$. En outre, on a bien sûr $\delta q(t_1) = Q_0'(t_1) - Q_0(t_1) = q_1 - q_1 = 0$. Il reste donc

$$\delta W|_{t_2,q_1,t_1} = p_2 \delta q_2 \tag{1.17}$$

où l'on a posé

$$p_2 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)_{q=Q_0, t=t_2} \tag{1.18}$$

La grandeur

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \tag{1.19}$$

que l'on peut définir à partir du Lagrangien et indépendamment du principe variationnel est appelée *impulsion généralisée* associée à la coordonnée q. C'est cette grandeur qui gouverne l'évolution de l'Action lors d'une modification des coordonnées limites.

On en déduit le résultat

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)_{t_2,q_1,t_1} = p_2 \tag{1.20}$$

1.3.2 Influence de t_2

Changeons infiniment peu la valeur de la date supérieure de t_2 à $t_2' = t_2 + \delta t_2$, q_2, q_1 et t_1 restant fixés. La nouvelle loi horaire $Q"_0(t)$ obtenue par le principe variationnel et soumise aux conditions $Q"_0(t_2') = q_2$, $Q"_0(t_1) = q_1$, reste infiniment voisine de $Q_0(t)$. Posant alors $\delta q(t) = Q"_0(t) - Q_0(t)$, on a $\delta q(t_1) = 0$ et

$$Q"_0(t_2') = Q_0(t_2') + \delta q(t_2') \approx Q_0(t_2) + \delta t_2 \dot{Q}_0(t_2) + \delta q(t_2) = q_2 = q_2 + \delta t_2 \dot{Q}_0(t_2) + \delta q(t_2) \tag{1.21}$$

soit

$$\delta q(t_2) = -\delta t_2 \dot{Q}_0(t_2) \tag{1.22}$$

Il est facile de voir que la variation infinitésimale de l'Action consécutive à cette modification est dans ce cas égale à

$$\delta W|_{q_2,q_1,t_1} = p_2 \delta q_2 + \mathcal{L}_2 \delta t_2 = (\mathcal{L}_2 - p_2 \dot{q}_2)\, \delta t_2 \tag{1.23}$$

où $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(Q_0(t_2), \dot{Q}_0(t_2), t_2)$ et $\dot{q}_2 = \dot{Q}_0(t_2)$. Introduisons alors la grandeur

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{1.24}$$

appelée *Hamiltonien*[2]. On voit alors que la variation de l'Action consécutive à une variation de t_2 est gouvernée par la valeur du Hamiltonien pour $t = t_2$ (étant sous-entendu que celle-ci est évaluée pour $q \equiv Q_0$).

On en déduit

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_2}\right)_{q_2, q_1, t_1} = -H_2 \tag{1.25}$$

Ce résultat pouvait être également obtenu de la manière suivante. L'intégrale d'Action, en tant que fonction de sa limite supérieure t_2 a pour dérivée

$$\frac{dW}{dt_2} = \mathcal{L}_2 \tag{1.26}$$

D'un autre côté, l'Action, en tant que fonction de q_2 et t_2, a pour différentielle

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial W}{\partial t_2} dt_2 \tag{1.27}$$

Si l'on suit le système au cours de son évolution, on doit écrire $dq_2 = \dot{Q}_0(t_2)dt_2 \equiv \dot{q}_2 dt_2$ et $dW = \mathcal{L}_2 dt_2$. On obtient ainsi, après division par dt_2,

$$\frac{\partial W}{\partial t_2} = \mathcal{L}_2 - p_2 \dot{q}_2 = -H_2 \tag{1.28}$$

1.3.3 Différentielle de l'Action

Finalement, pour des variations infinitésimales quelconques des coordonnées et des dates limites, la variation infinitésimale de l'Action prendra la forme

$$dW = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H_2 dt_2 - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H_1 dt_1 \tag{1.29}$$

où les $p_i^{(2)}$, les $p_i^{(1)}$, H_2 et H_1 dépendent implicitement de la loi horaire satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange et sont fonctions des conditions aux limites $q_i^{(2)}$, $q_i^{(1)}$, t_2 et t_1. La relation (1.29) montre que, quelle que soit la nature du système considéré, la loi horaire connectant un état initial donné (1) à un état final (2) donné de ce système ne peut être quelconque car elle doit nécessairement être telle que la forme différentielle dW ainsi écrite soit une différentielle totale exacte. Ainsi, devront être satisfaites les relations[3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial q_j^{(1)}} = -\frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial q_i^{(2)}} \quad &, \quad \frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial t_1} = \frac{\partial H_1}{\partial q_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i^{(2)}} \\ \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i^{(1)}} \quad &, \quad \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial t_1} = \frac{\partial H_1}{\partial q_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial t_2} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Rappelons que dans ces expressions, toutes les grandeurs que l'on dérive sont considérées comme des fonctions de $\{q_i^{(2)}\}$, $\{q_i^{(1)}\}$, t_2 et t_1.

[2] Du nom de Hamilton.
[3] Voir un exemple en annexe

Cependant, selon un procédé connu sous le nom de *transformation de Legendre*, on peut construire à partir de W des grandeurs dépendant d'autres jeux de variables. Soit par exemple la grandeur W_2 définie par

$$W_2 = W + \sum_i p_i^{(1)} q_i^{(1)} \tag{1.31}$$

Elle a pour différentielle

$$dW_2 = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H_2 dt_2 + \sum_i q_i^{(1)} dp_i^{(1)} + H_1 dt_1 \tag{1.32}$$

Cette formule montre que W_2 doit être considérée comme une fonction de $\{q_i^{(2)}\}$, $\{p_i^{(1)}\}$, t_2 et t_1 : l'ensemble des coordonnées $\{q_i^{(1)}\}$ a ainsi été remplacé par celui des impulsions $\{p_i^{(1)}\}$. Les dérivées partielles

$$p_i^{(2)} = \frac{\partial W_2}{\partial q_i^{(2)}} \quad , \quad q_j^{(1)} = \frac{\partial W_2}{\partial p_j^{(1)}} \quad , \quad H_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial t_2} \quad , \quad H_1 = \frac{\partial W_2}{\partial t_1} \tag{1.33}$$

doivent aussi être considérées comme fonctions de ce même jeu de variables et doivent satisfaire les conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial p_j^{(1)}} = \frac{\partial q_j^{(1)}}{\partial q_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial t_1} = \frac{\partial H_1}{\partial q_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i^{(2)}} \\
&\frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial p_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial t_1} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial t_2}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Symétriquement, par la transformation

$$W_3 = W - \sum_i p_i^{(2)} q_i^{(2)} \tag{1.35}$$

on obtient une grandeur W_3 dont la différentielle

$$dW_3 = -\sum_i q_i^{(2)} dp_i^{(2)} - H_2 dt_2 - \sum_i p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H_1 dt_1 \tag{1.36}$$

montre qu'il s'agit cette fois d'une fonction des impulsions $\{p_i^{(2)}\}$, des coordonnées $\{q_i^{(1)}\}$, de t_2 et de t_1. Ses dérivées partielles

$$q_i^{(2)} = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad p_j^{(1)} = -\frac{\partial W_3}{\partial q_j^{(1)}} \quad , \quad H_2 = -\frac{\partial W_3}{\partial t_2} \quad , \quad H_1 = \frac{\partial W_3}{\partial t_1} \tag{1.37}$$

doivent être considérées comme des fonctions de ce même jeu de variables vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial q_j^{(1)}} = \frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial t_2} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i^{(2)}} \\
&\frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial t_2} = \frac{\partial H_2}{\partial q_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial t_2}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Enfin, la transformation

$$W_4 = W - \sum_i p_i^{(2)} q_i^{(2)} + \sum_i p_i^{(1)} q_i^{(1)} \tag{1.39}$$

correspond à un échange complet des coordonnées par les impulsions puisque la différentielle de W_4

$$dW_4 = -\sum_i q_i^{(2)} dp_i^{(2)} - H_2 dt_2 + \sum_i q_i^{(1)} dp_i^{(1)} + H_1 dt_1 \tag{1.40}$$

montre en effet que cette grandeur est une fonction des impulsions. Il en est de même de ses dérivées partielles

$$q_i^{(2)} = -\frac{\partial W_4}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad q_j^{(1)} = \frac{\partial W_4}{\partial p_j^{(1)}} \quad , \quad H_2 = -\frac{\partial W_4}{\partial t_2} \quad , \quad H_1 = \frac{\partial W_4}{\partial t_1} \tag{1.41}$$

qui vérifient les relations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial p_j^{(1)}} = -\frac{\partial q_j^{(1)}}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_i^{(2)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial t_2} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i^{(2)}} \\ &\frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial p_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial t_1} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial t_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial t_2} \end{aligned} \tag{1.42}$$

On notera avec intérêt que les transformations de Legendre décrites ci-dessus confèrent déjà aux impulsions $\{p_i^{(2)}\}$ et $\{p_i^{(1)}\}$ un statut de variables au même titre que les coordonnées $\{q_i^{(2)}\}$ et $\{q_i^{(1)}\}$. Comme on le verra dans la suite, l'utilisation conjointe des impulsions et des coordonnées dans la description hamiltonienne de l'état mécanique d'un système s'avère en fait très fructueuse.

1.4 Equations de Hamilton

On sait qu'il est toujours possible de réduire une équation différentielle du second ordre du type

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{1.43}$$

à un système différentiel du premier ordre en posant $y = \dot{x}$. En effet, on obtient alors le système d'équations

$$y = \dot{x} \quad , \quad \dot{y} = f(x, y, t) \tag{1.44}$$

qui est du premier ordre par rapport aux variables x et y. On dit alors qu'on a mis l'équation différentielle sous forme *canonique*. Cependant, le choix ci-dessus n'est pas la seule possibilité d'aboutir à une forme canonique. En l'occurrence, il existe en Mécanique une forme canonique des équations qui s'avère particulièrement avantageuse et que l'on déduit de la fonction de Hamilton. Montrons tout d'abord que la fonction de Hamilton H définie en (1.24) s'exprime en fait comme une fonction des coordonnées, éventuellement du temps, et des impulsions (et non pas des vitesses). En effet, sa différentielle est

$$dH = d(p\dot{q}) - d\mathcal{L} = p d\dot{q} + \dot{q} dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{1.45}$$

ce qui, compte tenu de la définition (1.19), conduit à l'expression

$$dH = \dot{q} dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{1.46}$$

soit

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{1.47}$$

dans le cas de $n > 1$ degrés de liberté. Au vu de cette différentielle, on constate que le Hamiltonien H s'exprime donc plus directement en fonction des coordonnées et des impulsions. On a ainsi

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{1.48}$$

Lorsque les équations horaires $q_i(t)$ satisfont les équations d'Euler-Lagrange, soit

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{1.49}$$

coordonnées et impulsions satisfont les *équations de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.50}$$

Alors que les équations de Lagrange sont du second ordre suivant les coordonnées q, les équations de Hamilton constituent un nouvel ensemble d'équations du *premier ordre* suivant les $2n$ variables q et p. Le passage des équations de Lagrange aux équations de Hamilton correspond donc à une mise sous forme canonique des équations du mouvement, où les n vitesses $\dot{q}_i$ sont remplacées par les n impulsions p_i.

L'avantage des équations de Hamilton sur les équations de Lagrange réside d'une part dans leur simplicité formelle (équations du premier ordre) et d'autre part dans le fait que coordonnées et impulsions y interviennent *symétriquement*. Cette symétrie est mise en évidence de manière frappante dans la transformation

$$p \to q \quad , \quad q \to p \quad , \quad H(p,q) \to H'(p,q) = H(-q,p) \tag{1.51}$$

qui laisse invariante la forme des équations de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial p} &= \frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{\substack{p \to -q \\ q \to p}} = -\,\dot{p}\Big|_{\substack{p \to -q \\ q \to p}} = \dot{q} \\ \frac{\partial H'}{\partial q} &= -\frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{\substack{p \to -q \\ q \to p}} = -\,\dot{q}\Big|_{\substack{p \to -q \\ q \to p}} = -\,\dot{p} \end{aligned} \tag{1.52}$$

Pour ces raisons, les équations de Hamilton sont appelées *équations canoniques* du mouvement et les variables q et p, variables *canoniquement conjuguées*. On peut en outre exploiter davantage les rôles symétriques joués par q et p en définissant l'état mécanique d'un système non plus par la donnée simultanée des coordonnées et des vitesses, mais plutôt par celle des coordonnées et des impulsions. On aboutit alors à la description hamiltonienne de l'état mécanique à l'aide des variables canoniques q et p où un état mécanique d'un système correspondant à des valeurs données de ses n coordonnées q et de ses n impulsions p est représenté par un point dans un espace à $2n$ dimensions, appelé *espace des phases*, où les coordonnées sont portées selon n axes et les impulsions selon les n autres axes. On connaît toute l'importance qu'a prise cette description dans le passage de la Mécanique Classique à la Mécanique Quantique, via le *principe de correspondance*. On notera aussi avec intérêt que cette description ouvre la perspective de possibles transformations ponctuelles dans l'espace des phases.

On peut accentuer encore le rôle de variables joué par les impulsions en reformulant le principe variationnel dans la description hamiltonienne. La relation (1.29) incite en effet à exprimer l'action comme intégrale de la forme différentielle

$$dW = pdq - Hdt \tag{1.53}$$

soit

$$W = \int_{1\to 2} [\; pdq - Hdt \;] \tag{1.54}$$

Considérons alors q et p comme indépendants. Pour des variations arbitraires δq et δp, la variation consécutive de l'action sera

$$\delta W = \int_{1\to 2} [\ \delta p dq + p\delta dq - \delta H dt\ ] \tag{1.55}$$

Comme $p\delta dq = d(p\delta q) - \delta q dp$ et puisque l'on doit imposer $\delta q = 0$ aux limites d'intégration, on obtient finalement

$$\delta W = \int_{1\to 2} \left[\ \delta p \left(\ dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt\right) - \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt\right)\ \right] \tag{1.56}$$

La condition $\delta W = 0$ ne pouvant être réalisée que si les coefficients de δq et de δp sont nuls, on obtient bien de cette façon les équations de Hamilton, après division par dt.

1.5 Transformations canoniques

1.5.1 Définition

Sous la condition que l'état mécanique du système étudié soit défini sans ambigüité par la donnée d'un ensemble de variables q_i et de leurs dérivées $\dot{q}_i$, le choix de ces variables n'est a priori dicté par aucun impératif. Se pose alors la question de l'équivalence, au regard du principe d'Action extrémale, de deux descriptions d'un même système utilisant des jeux différents de coordonnées.

Un premier élément de réponse est apporté par l'observation suivante. Supposons que l'évolution d'un système soit bien décrite au moyen d'un Lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ utilisant un ensemble de coordonnées q, via le principe variationnel appliqué à l'Action W (eq. 1.3) produite par ce Lagrangien. Soit $F(q, t)$ une fonction des coordonnées q et du temps. Définissons un nouveau Lagrangien $\mathcal{L}'$ par

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}(q, t) \tag{1.57}$$

Ce Lagrangien conduit à la nouvelle Action

$$W' = W + F(q_2, t_2) - F(q_1, t_1) \tag{1.58}$$

La différence $W' - W$ ne dépendant que des conditions aux limites q_2, q_1, t_2, t_1, il est clair que puisque celles-ci sont fixées lorsqu'on applique le principe variationnel, la condition $\delta W = 0$ implique $\delta W' = 0$ et réciproquement. Ainsi, deux Lagrangiens ne différant l'un de l'autre que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées et du temps doivent être considérés comme *équivalents*. On aura ainsi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1.59}$$

Dans la nouvelle description au moyen du Lagrangien $\mathcal{L}'$, les coordonnées utilisées sont les mêmes. Par contre, les impulsions sont différentes. En effet, on a maintenant

$$p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = p + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dF}{dt} \tag{1.60}$$

et comme

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial F}{\partial q}\right) = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{1.61}$$

il vient

$$p' = p + \frac{\partial F}{\partial q} \tag{1.62}$$

Le nouvel Hamiltonien sera défini comme

$$H' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = H + \dot{q}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{dF}{dt} \tag{1.63}$$

soit

$$H' = H - \frac{\partial F}{\partial t} \tag{1.64}$$

Il est facile de vérifier directement que les équations de Hamilton gardent la même forme, à condition d'utiliser les nouvelles impulsions p'. En effet, on a

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial q}\right)_{p',t} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p',t} - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} = -\dot{p} + \dot{q}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{p',t} - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} \tag{1.65}$$

Ici, d'après (1.62), l'ancienne impulsion p doit être considérée comme une fonction de p', q et t, et l'on a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{p',t} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \tag{1.66}$$

D'où

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial q}\right)_{p',t} = -\dot{p} - \dot{q}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} \tag{1.67}$$

Or

$$\dot{p}' = \dot{p} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = \dot{p} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} + \dot{q}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \tag{1.68}$$

On a donc bien

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial q}\right)_{p',t} = -\dot{p}' \tag{1.69}$$

D'un autre côté, on a

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial p'}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial H}{\partial p'}\right)_{q,t} = \dot{q}\left(\frac{\partial p}{\partial p'}\right)_{q,t} = \dot{q} \tag{1.70}$$

Ces résultats nous conduisent à interpréter le changement de Lagrangien décrit plus haut comme une transformation des variables canoniques qui laisse invariantes la forme des équations d'Euler-Lagrange ainsi que celle des équations de Hamilton. Une transformation qui possède cette propriété est appelée une *transformation canonique*. Celle considérée ici est particulière car elle ne transforme que les impulsions. On peut cependant envisager des transformations plus générales dans l'espace des phases, impliquant conjointement coordonnées et impulsions[4]. Cependant, une transformation quelconque dans l'espace des phases n'est pas nécessairement de nature canonique. Nous allons maintenant rechercher les conditions pour qu'elle le soit.

Tout d'abord, on peut se demander s'il est possible d'élargir la relation d'équivalence (1.57) entre Lagrangiens à des fonctions F qui dépendent non seulement des coordonnées et du temps, mais aussi des vitesses $\dot{q}$. Dans ce cas, la nouvelle Action prendra la forme

$$W' = W + F(q_2, \dot{q}_2, t_2) - F(q_1, \dot{q}_1, t_1) \tag{1.71}$$

[4] A noter qu'une transformation des variables canoniques revient à transformer les coordonnées et leurs vitesses.

On remarque immédiatement que la nouvelle Action W' dépend alors des vitesses $\dot{q}_2$ et $\dot{q}_1$ aux limites d'intégration, contrairement à W. Or, dans l'énoncé du principe variationnel, il est spécifié que seules sont imposées les conditions $\delta q_2 = \delta q_1 = 0$, mais aucune condition semblable n'est imposée sur les vitesses. La raison en est que les conditions aux limites imposées doivent être compatibles avec la solution des équations déduites de ce principe. L'expérience montre qu'elles doivent être du second ordre suivant les coordonnées. On sait alors que leur solution générale dépend de $2n$ constantes arbitraires. On ne peut donc fixer ni plus ni moins que $2n$ constantes aux limites afin de déterminer une solution particulière. C'est ainsi que les conditions aux limites sont bien compatibles avec la résolution des équations : on ne peut se fixer à la fois arbitrairement les coordonnées et les vitesses aux deux extrémités de la trajectoire, puisqu'on sait a priori qu'il doit y avoir une relation biunivoque entre les deux couples $(q_2, \dot{q}_2)$ et $(q_1, \dot{q}_1)$ [5]

Si l'on s'en tenait à la description de l'état mécanique du système considéré au moyen de q et $\dot{q}$, la nouvelle fonction $\mathcal{L}'$ paraîtrait tout à fait inadéquate pour être interprétée comme un Lagrangien, car, contrairement à $\mathcal{L}$, elle dépend non seulement de q et $\dot{q}$, mais aussi des accélérations $\ddot{q}$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial F}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \tag{1.72}$$

Or, d'une part, suivant un principe fondamental de la Mécanique Classique, l'évolution au cours du temps d'un système mécanique doit toujours être déduite à partir d'équations qui sont du second ordre suivant les coordonnées. D'autre part, les propriétés de ce système sont indépendantes du choix des variables utilisées pour les décrire. Il en résulte que, si $\mathcal{L}'$ représente bien un Lagrangien acceptable, il ne peut s'exprimer qu'en fonction d'un nouveau jeu de variables Q et $\dot{Q}$, puisque ce n'est qu'à partir d'une intégrale d'Action de la forme

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(Q(t), \dot{Q}(t), t)dt \tag{1.73}$$

que l'on obtient des équations du second ordre via le principe variationnel.

Autrement dit, il devient nécessaire d'interpréter la transformation du Lagrangien comme une transformation sur les coordonnées et les vitesses. On résout ainsi la difficulté en reportant la dépendance de $\mathcal{L}'$ vis-à-vis de q, $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ en une dépendance selon de nouvelles variables Q et $\dot{Q}$, qui elle-mêmes dépendent de q, $\dot{q}$ et t.

Il reste maintenant à établir quelle doit être la dépendance générale de la fonction F vis-à-vis de ces diverses variables pour que soit assurée l'équivalence parfaite entre les deux Lagrangiens. Il est certain qu'il sera équivalent d'appliquer le principe variationnel à W ou à W' si l'on a,

$$\delta W' - \delta W = \delta(F_2 - F_1) = 0 \tag{1.74}$$

lorsque les conditions aux limites sont fixées pour chacun des ensembles de coordonnées q ou Q. Ceci suggère que la différence $G = F_2 - F_1$ des valeurs prises par F aux extrémités de la trajectoire considérée ne peut dépendre que de ces conditions aux limites : q_1, q_2, Q_1, Q_2, t_2 et t_1. Or, supposant les équations d'Euler-Lagrange satisfaites, nous avons vu que si l'on fait varier les conditions à la limite supérieure, on a (en supprimant les indices)

$$dW' = PdQ - H'dt \quad \text{et} \quad dW = pdq - Hdt \tag{1.75}$$

Il s'ensuit que l'on doit avoir

$$dG = PdQ - H'dt - pdq + Hdt \tag{1.76}$$

relation qui montre que G se doit d'être une fonction uniquement de q, de Q et éventuellement de t. Cette fonction génère dans l'espace des phases une transformation ponctuelle $(p, q) \leftarrow (P, Q)$ telle que

[5] Par exemple, pour un mouvement rectiligne uniforme, on a $\dot{q}_2 = \dot{q}_1 = \dfrac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$.

$$P = \frac{\partial G}{\partial Q} \tag{1.77}$$

$$p = -\frac{\partial G}{\partial q} \tag{1.78}$$

$$H' = H - \frac{\partial G}{\partial t} \tag{1.79}$$

Les relations (1.77) et (1.78) indiquent en effet que q et p respectivement doivent être considérés comme des fonctions de P, Q et t.

Par construction même, cette transformation laisse invariante la forme des équations, en particulier la forme canonique de Hamilton. C'est l'expression la plus générale d'une *transformation canonique* dont la fonction G constitue la *fonction génératrice*. La formule donnant la différentielle de G peut d'ailleurs être considérée comme une définition des fonctions génératrices de transformations canoniques, laquelle formule conduit, sur la trajectoire, à la relation

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dG}{dt} \tag{1.80}$$

On notera au passage que la fonction génératrice permettant le passage inverse de $\mathcal{L}'$ à $\mathcal{L}$ est $-G$.

On notera aussi que puisque l'expression dG *doit être* une différentielle totale exacte, on a les relations

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_{Q,t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{q,t} \tag{1.81}$$

et

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{Q,q} = \left(\frac{\partial (H-H')}{\partial Q}\right)_{q,t} \quad , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{Q,q} = -\left(\frac{\partial (H-H')}{\partial q}\right)_{Q,t} \tag{1.82}$$

Nous avons vu au paragraphe précédent un exemple de transformation canonique où $q \to -p$, $p \to q$ et $H' = H(-q, p)$. Les nouvelles variables sont $P = -q$, $Q = p$ et la fonction génératrice de la transformation est $G = -qQ$. Ce simple exemple montre clairement que les variables q ou Q ne peuvent plus être imaginées comme des coordonnées purement spatiales, et l'utilisation des transformations canoniques enlève à la notion de coordonnées et d'impulsions généralisées son sens initial. La différence entre les deux groupes de variables devient ainsi une simple question de nomenclature.

Par le jeu de transformations de Legendre, il peut être intéressant d'introduire des fonctions génératrices en termes de couples de variables (q, P), (p, Q) ou (p, P). Posons

$$G_2 = G - PQ \quad , \quad G_3 = G + pq \quad , \quad G_4 = G + pq - PQ \tag{1.83}$$

On a

$$dG_2 = -QdP - pdq + (H - H')dt \quad , \quad \text{donc} \quad G_2 = G_2(q, P, t) \tag{1.84}$$

$$dG_3 = PdQ + qdp + (H - H')dt \quad , \quad \text{donc} \quad G_3 = G_3(p, Q, t) \tag{1.85}$$

$$dG_4 = -QdP + qdp + (H - H') \quad , \quad \text{donc} \quad G_4 = G_4(p, P, t) \tag{1.86}$$

Les formes différentielles $dG_{2,3,4}$ étant des différentielles totales exactes, on a notamment

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{P,t} = \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)_{q,t} \tag{1.87}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{Q,t} = \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{p,t} \tag{1.88}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_{P,t} = -\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_{p,t} \tag{1.89}$$

On remarquera que, suivant la relation d'équivalence introduite sur l'ensemble des Lagrangiens admissibles, toute fonction $f(p, q, t)$ peut servir à définir une fonction génératrice de l'un des quatre types, G ou G_2, G_3, G_4 (1.83), la seule condition étant que cette fonction ne présente pas de singularité, et en tout cas permet une relation biunivoque entre les anciennes variables et les nouvelles. A part cela, il n'y a aucune restriction. De ce point de vue, le jeu de formules (1.77), (1.78) et (1.79) et les formules analogues que l'on obtient avec G_2, G_3 ou G_4 seront considérées comme une définition des nouvelles variables, de la nouvelle fonction de Hamilton, puis du nouveau Lagrangien. Soit par exemple la fonction

$$G = \frac{q}{f(p, q, t)} \tag{1.90}$$

où $f(p, q, t)$ est toujours différent de zéro. Alors, en posant $Q = f(p, q, t)$ ou bien $P = f(p, q, t)$, G devient une fonction génératrice d'une transformation canonique.

1.5.2 L'évolution comme transformation canonique

Il est intéressant de mettre en évidence la structure canonique de l'évolution même des variables (q, p) au cours du mouvement. Soit q_t et p_t leurs valeurs à la date t et $q_{t+\tau}$ et $p_{t+\tau}$ leurs valeurs à la date $t + \tau$. Ces dernières sont reliées aux premières de façon biunivoque et dépendent du paramètre τ

$$q_{t+\tau} = g(q_t, p_t, \tau) \quad , \quad p_{t+\tau} = h(q_t, p_t, \tau) \tag{1.91}$$

Soit

$$W_\tau = \int_t^{t+\tau} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\ dt \tag{1.92}$$

l'Action du système entre les deux dates t et $t + \tau$. On sait que, en tant que fonction des paramètres définissant les bornes de la portion de trajectoire considérée, W_τ a pour différentielle

$$dW_\tau = p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t + (H_t - H_{t+\tau})dt \tag{1.93}$$

et que

$$\frac{dW_\tau}{dt} = \mathcal{L}_{t+\tau} - \mathcal{L}_t \tag{1.94}$$

La forme de ces relations est tout à fait identique à celle qui définit une transformation canonique (voir plus haut). Ainsi, la transformation qui fait passer des variables (q_t, p_t) aux variables $(q_{t+\tau}, p_{t+\tau})$ est bien une transformation canonique dont la fonction génératrice est W_τ, à une constante additive près.

1.5.3 Propriété de groupe des transformations canoniques

Il est facile de montrer que l'ensemble des transformations canoniques a une structure de groupe.

♠ Si T_1 et T_2 sont deux transformations canoniques

$$T_1 \quad : \quad (q, p) \to (Q_1, P_1) \ ; \quad T_2 \quad : \quad (Q_1, P_1) \to (Q_2, P_2) \tag{1.95}$$

le produit $T_2 T_1$ est encore une transformation canonique. En effet, si W, W_1 et W_2 sont les Actions respectivement associées aux variables (q, p), (Q_1, P_1) et (Q_2, P_2), les deux conditions $\delta W = 0$ et $\delta W_1 = 0$ coïncident d'une part via T_1, et les deux conditons $\delta W_1 = 0$ et $\delta W_2 = 0$ coïncident d'autre part via T_2. Il en résulte que les deux conditions $\delta W = 0$ et $\delta W_2 = 0$ sont équivalentes. Le produit $T_2 T_1$ qui permet de passer des variables (q, p) aux variables (Q_2, P_2) est donc aussi de nature canonique.

♠ Les produits de transformations canoniques est de façon évidente *associatif*.

♠ L'ensemble des transformations canoniques possède un élément neutre, la transformation *identité* $(q,p) \to (q,p)$ dont la fonction génératrice sera prise égale à zéro.

♠ Les transformations canoniques sont par définition *inversibles* : si G est la fonction génératrice de $T\,:\,(q,p) \to (Q,P)$, $-G$ est la fonction génératrice de la transformation inverse $T^{-1}\,:\,(Q,P) \to (q,p)$ [6].

Des quatre propriétés énoncées ci-dessus il résulte que l'ensemble des transformations canoniques forment un groupe. On remarquera qu'au produit de transformations canoniques est associé l'addition de leurs fonctions génératrices.

1.5.4 Jacobien d'une transformation canonique, théorème de Liouville

Considérons la transformation canonique $T \;:\; (q,p) \to (Q,P)$. Par définition, son Jacobien est le déterminant

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ & & & & & \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_n,P_1,\cdots,P_n)}{\partial(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)} \tag{1.96}$$

Comme T est inversible, J doit être différent de zéro. Puisque

$$dQ_1 \wedge \cdots \wedge dQ_n \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_n = J\; dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \tag{1.97}$$

on peut exprimer J comme le rapport des deux Jacobiens

$$J_1 = \left.\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_n}{\partial(q_1,\cdots,q_n}\right|_{P=\mathrm{cste}} \quad \text{et} \quad J_2 = \left.\frac{\partial(p_1,\cdots,p_n}{\partial(P_1,\cdots,P_n}\right|_{q=\mathrm{cste}} \tag{1.98}$$

En effet, on a

$$dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n = \left.\frac{\partial(p)}{\partial(P)}\right|_q \; dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_n \tag{1.99}$$

et

$$dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_n = \left.\frac{\partial(q)}{\partial(Q)}\right|_P \; dQ_1 \wedge \cdots \wedge dQ_n \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_n \tag{1.100}$$

Comme

$$\left.\frac{\partial(p)}{\partial(P)}\right|_q = J_2 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial(q)}{\partial(Q)}\right|_P = \frac{1}{J_1} \tag{1.101}$$

on a bien

[6] On admet que toutes les opérations effectuées n'induisent aucune singularité ou ambigüité.

$$J = \frac{J_1}{J_2} \tag{1.102}$$

Or, J_1 a pour éléments les quantités $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_P$ (ième ligne, jème colonne), tandis que J_2 a pour éléments les quantités $\left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_q$ (jème ligne, ième colonne). Mais, d'après la relation (1.87), ces él'ements sont égaux. Par conséquent, J_1 et J_2 étant des déterminants de matrices transposées l'une de l'autre sont égaux et l'on a

$$J = 1 \tag{1.103}$$

Le Jacobien de toute transformation canonique est égal à 1. On sait que la forme extérieure

$$d\Gamma = dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \tag{1.104}$$

est liée à un volume élémentaire dans l'espace des phases (q, p) à $2n$ dimensions. D'après le résultat précédent, il s'ensuit que ce volume est *invariant* par rapport aux transformations canoniques. Plus généralement, en transformant canoniquement les variables (q, p) en variables (Q, P), les volumes des régions des espaces (q, p) et (Q, P) qui se correspondent sont égaux. Or, nous avons vu que l'évolution elle-même une transformation canonique. Ainsi, en supposant que chaque point d'un certain volume de l'espace des phases se déplace conformément aux équations du mouvement du système mécanique considéré, ce volume se déplacera en bloc au cours du temps dans l'espace des phases tout en gardant une valeur *constante*. Ce résultat constitue le *théorème de Liouville*[7].

1.6 Les crochets de Poisson

Soient f et g deux fonctions des variables canoniques (q, p) et du temps t. On appelle *crochets de Poisson* de f et g l'expression

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{1.105}$$

ou, en explicitant d'éventuels indices,

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\,\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) \tag{1.106}$$

Les propriétés de ces grandeurs se déduisent facilement de leur définition.

♠ Antisymétrie

$$\{g, f\} = -\{f, g\} \tag{1.107}$$

♠ Linéarité

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1\{f_1, g\} + a_2\{f_2, g\} \tag{1.108}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes.

♠ Si C est une constante :

$$\{f, C\} = 0 \tag{1.109}$$

[7]Dont on trouve une application importante en Mécanique Statistique.

♠ En prenant $f = q_i$ ou $f = p_i$, on obtient

$$\{q_i, g\} = -\frac{\partial g}{\partial p_i} \quad , \quad \{p_i, g\} = \frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{1.110}$$

d'où l'on déduit les formules importantes

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{1.111}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

♠ Distributivité

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \tag{1.112}$$

♠ Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'importante *identité de Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{1.113}$$

Cette propriété et les propriétés d'antisymétrie et de linéarité confèrent à l'ensemble des fonctions de q et p une structure *d'algèbre de Lie*.

Les crochets de Poisson apparaissent naturellement lorsqu'on veut exprimer de façon compacte la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction $f(q, p, t)$. En effet, les équations du mouvement étant vérifiées, on a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{1.114}$$

soit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{1.115}$$

Ainsi, l'évolution d'une grandeur mécanique quelconque est-elle essentiellement déterminée par ses crochets de Poisson avec le Hamiltonien.

Pour définir les crochets de Poisson nous avons utilisé un jeu particulier (q, p) de variables canoniques et l'on peut se demander s'ils dépendent de ce choix. En fait, il n'en est rien car les crochets de Poisson sont *invariants* vis-à-vis des transformations canoniques (c'est ce que laisse entrevoir la relation (1.115)). En effet, soit $\{F, G\}_{q,p}$ les crochets de F et G calculé avec les variables (q, p) et $T : (q, p) \to (Q, P)$ la transformation canonique permettant de passer des variables (q, p) aux variables (Q, P). On a

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{q,p} &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \\ &= \sum_{j,k} \frac{\partial F}{\partial Q_j}\,\frac{\partial G}{\partial Q_k}\,\{Q_j, Q_k\}_{q,p} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\,\{P_j, P_k\}_{q,p} \\ &\quad + \sum_{j,k} \left(\frac{\partial F}{\partial P_j}\,\frac{\partial G}{\partial Q_k} - \frac{\partial F}{\partial Q_k}\,\frac{\partial G}{\partial P_j}\right)\{P_j, Q_k\}_{q,p} \end{aligned} \tag{1.116}$$

Il suffit donc de montrer que les crochets des nouvelles variables (Q, P) exprimés en termes des anciennes variables (q, p) satisfont encore aux relations (1.111), auquel cas on aura effectivement $\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{Q,P}$.

En premier lieu, exprimons Q_i comme une fonction de q et p ayant pour différentielle

$$dQ_i = \sum_\ell \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\right)_p dq_\ell + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_\ell}\right)_q dp_\ell \tag{1.117}$$

Or, la relation (1.78) permet d'exprimer p_ℓ comme une fonction de q et Q dont la différentielle est

$$dp_\ell = \sum_m \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_n}\right)_Q dq_n + \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial Q_n}\right)_q dQ_n \tag{1.118}$$

Combinant ces deux formules, on obtient

$$\sum_\ell \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial Q_n}\right)_q = \delta_{in} \tag{1.119}$$

et

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\right)_p + \sum_n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_n}\right)_q \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\ell}\right)_Q = 0 \tag{1.120}$$

Cette dernière relation permet d'écrire

$$\begin{aligned}\{Q_i, Q_k\}_{q,p} &= \sum_n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_p - \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\right)_p \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_\ell}\right)_q \\ &= \sum_{n,\ell} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_n}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_\ell}\right)_q \left[\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\ell}\right)_Q - \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_n}\right)_Q\right]\end{aligned} \tag{1.121}$$

Mais, d'après (1.78),

$$\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\ell}\right)_Q = -\frac{\partial^2 G}{\partial q_n \partial q_\ell} = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_n}\right)_Q \tag{1.122}$$

Par conséquent, on a

$$\{Q_i, Q_k\}_{q,p} = 0 \tag{1.123}$$

On montre de même que

$$\{P_i, P_k\}_{q,p} = \sum_{n,\ell} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_n}\right)_q \left(\frac{\partial P_k}{\partial p_\ell}\right)_q \left[\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\ell}\right)_P - \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_n}\right)_P\right] = 0 \tag{1.124}$$

car (1.84)

$$\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\ell}\right)_P = -\frac{\partial^2 G_2}{\partial q_n \partial q_\ell} = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_n}\right)_P \tag{1.125}$$

Passons ensuite au calcul des crochets de P et Q. Comme

$$\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_p = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_P + \sum_n \left(\frac{\partial Q_k}{\partial P_n}\right)_q \left(\frac{\partial P_n}{\partial q_\ell}\right)_p \tag{1.126}$$

on a

$$\begin{aligned}\{P_i, Q_k\}_{q,p} &= \sum_\ell \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_P \\ &+ \sum_{n,\ell} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial P_n}\right)_q \left(\frac{\partial P_n}{\partial q_\ell}\right)_p - \sum_\ell \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_\ell}\right)_p \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_\ell}\right)_q\end{aligned} \tag{1.127}$$

Or, d'après (1.87), on a

$$\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_P = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial P_k}\right)_q \tag{1.128}$$

d'où

$$\sum_\ell \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell}\right)_P = \sum_\ell \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial P_k}\right)_q = \delta_{ik} \tag{1.129}$$

Puis, compte-tenu de ce que $\{P_i, P_k\}_{q,p} = 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n,\ell} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial P_n}\right)_q \left(\frac{\partial P_n}{\partial q_\ell}\right)_p &= \sum_{n,\ell} \left(\frac{\partial P_n}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial Q_k}{\partial P_n}\right)_q \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_\ell}\right)_p \\ &= \sum_\ell \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_\ell}\right)_q \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_\ell}\right)_p \end{aligned} \tag{1.130}$$

Rassemblant tous ces résultats, on voit que l'on a bien

$$\{P_i, Q_k\}_{q,p} = \delta_{ik} \tag{1.131}$$

ce qui confirme que les crochets de Poisson ont une signification universelle, indépendante du choix des variables canoniques utilisées pour les calculer. Cependant, ce résultat ne signifie pas que les crochets de Poisson sont globalement invariants vis-à-vis des transformations canoniques, car les fonctions F et G considérées peuvent elles-mêmes changer dans ces transformations (par exemple, le Lagrangien).

On peut énoncer une proposition réciproque de la précédente, à savoir, si la transformation (que l'on suppose biunivoque) menant des variables q, p aux variables Q, P est telle que ces variables satisfont aux relations

$$\begin{array}{ll} \{P_i, P_k\}_{q,p} = \{P_i, Q_k\}_{Q,P} = 0 & \{p_i, p_k\}_{Q,P} = \{p_i, p_k\}_{q,p} = 0 \\ \{P_i, Q_k\}_{q,p} = \{P_i, Q_k\}_{Q,P} = \delta_{ik} & \{p_i, q_k\}_{Q,P} = \{p_i, q_k\}_{q,p} = \delta_{ik} \\ \{Q_i, Q_k\}_{q,p} = \{Q_i, Q_k\}_{Q,P} = 0 & \{q_i, q_k\}_{Q,P} = \{q_i, q_k\}_{q,p} = 0 \end{array} \tag{1.132}$$

alors il s'agit d'une transformation canonique. La démonstration présentée ici repose sur les formules suivantes que nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)_Q - \left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)_Q &= \sum_{i,k} \{Q_i, Q_k\}_{q,p} \left(\frac{\partial p_r}{\partial Q_i}\right)_q \left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_k}\right)_q \\ \left(\frac{\partial P_r}{\partial Q_s}\right)_q - \left(\frac{\partial P_s}{\partial Q_r}\right)_q &= \sum_{i,k} \{q_i, q_k\}_{Q,P} \left(\frac{\partial P_r}{\partial q_i}\right)_Q \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_k}\right)_Q \\ \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_s}\right)_Q + \left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_k}\right)_q &= \sum_i \left(\frac{\partial p_s}{\partial P_i}\right)_q \left[\{P_i, P_k\}_{q,p} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_k}\right)_q - \left(\frac{\partial P_k}{\partial Q_i}\right)_q\right] \\ &\quad + \sum_{i,m} \left(\frac{\partial p_m}{\partial P_i}\right)_q \left(\frac{\partial P_k}{\partial Q_m}\right)_q [\delta_{im} - \{P_i, Q_m\}_{q,p}] \end{aligned} \tag{1.133}$$

De ces formules on tire que si les équations (1.133) sont satisfaites, alors sont vérifiées les relations

$$\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)_Q = \left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)_Q \quad , \quad \left(\frac{\partial P_r}{\partial Q_s}\right)_q = \left(\frac{\partial P_s}{\partial Q_r}\right)_q \quad , \quad \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_s}\right)_Q = -\left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_k}\right)_q \tag{1.134}$$

qui indiquent que la forme différentielle

$$\sum_r P_r dQ_r - p_r dq_r \tag{1.135}$$

est une forme différentielle totale exacte suivant les variables q et Q. Ces dernières formules permettent aussi de montrer que l'on a

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial t}\right)_{q,Q} = \frac{\partial}{\partial Q_r}\,(H - H')|_{q,t} \quad , \quad \left(\frac{\partial p_r}{\partial t}\right)_{q,Q} = \frac{\partial}{\partial Q_r}\,(H' - H)|_{Q,t} \tag{1.136}$$

ce qui achève de montrer que la différence des différentielles des actions W' et W relatives aux variables (Q, P) et (q, p) respectivement, soit

$$dW' - dW = \sum_r P_r dQ_r - p_r dq_r + (H - H')dt \tag{1.137}$$

est la difféntielle d'une fonction $G(q, Q, t)$, d'où l'on déduit immédiatement la relation

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{dG}{dt}(q, Q, t) \tag{1.138}$$

mettant ainsi en évidence la structure canonique de la transformation.

1.7 Structure symplectique

Soient $(\delta q, \delta p)$ d'une part et $(\Delta q, \Delta p)$ d'autre part des déplacements infinitésimaux quelconque des variables canoniques à partir d'un point (q, p) de l'espace des phases. Soient encore Q et P de nouvelles variables canoniques reliées à q et p par une certaine transformation T. Les déplacements précédents induisent sur les nouvelles variables les variations infinitésimales

$$\begin{aligned}
\delta P_i &= \sum_r \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\right)_p \delta q_r + \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right)_q \delta p_r \quad , \quad \Delta P_i = \sum_r \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\right)_p \Delta q_r + \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right)_q \Delta p_r \\
\delta Q_k &= \sum_s \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_s}\right)_p \delta q_s + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_s}\right)_q \delta p_s \quad , \quad \Delta Q_k = \sum_s \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_s}\right)_p \Delta q_s + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_s}\right)_q \Delta p_s
\end{aligned} \tag{1.139}$$

Considérons alors la forme bilinéaire antisymétrique

$$\omega = \sum_i \delta P_i \Delta Q_i - \Delta P_i \delta Q_i \tag{1.140}$$

et exprimons-la en fonction des variations des variables (q, p). On obtient une expression de la forme

$$\omega = \sum_{r,s} A_{r,s}\ \delta p_r \Delta p_s + B_{r,s}\ \delta q_r \Delta q_s + C_{r,s}\ \left[\delta p_r \Delta q_s - \Delta p_r \delta q_s\right] \tag{1.141}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{rs} &= \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right)_q \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_s}\right)_q - \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_s}\right)_q \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_r}\right)_q \\
B_{rs} &= \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r}\right)_p \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right)_p - \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_s}\right)_p \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_r}\right)_p \\
C_{rs} &= \sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right)_q \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right)_p - \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_s}\right)_p \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_r}\right)_q
\end{aligned} \tag{1.142}$$

Utilisant la relation

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_m}\right)_q = \sum_u \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_u}\right)_q \left(\frac{\partial Q_u}{\partial p_m}\right)_q \tag{1.143}$$

on montre facilement que

$$A_{rs} = \sum_{im} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_q - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_q\right] \left(\frac{\partial Q_m}{\partial p_r}\right)_q \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_s}\right)_q \tag{1.144}$$

De même, écrivant que

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_m}\right)_p = \sum_u \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_u}\right)_p \left(\frac{\partial Q_u}{\partial p_m}\right)_q \tag{1.145}$$

Il vient

$$B_{rs} = \sum_{im} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_p - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_p\right] \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_r}\right)_p \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right)_p \tag{1.146}$$

Nous laissons enfin au lecteur le soin de démontrer que l'on a

$$\begin{aligned} C_{rs} = \delta_{rs} - \sum_i \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_s}\right)_Q + \left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_i}\right)_q\right] \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_r}\right)_p \\ - \sum_{i,m} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_q - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_q\right] \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_r}\right)_p \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_s}\right)_p \end{aligned} \tag{1.147}$$

Si la transformation des variables est de nature canonique, tous les termes entre crochets dans ces dernières expressions sont nuls en vertu du fait que les différentielles dG, dG_2, dG_3 et dG_4 sont des différentielles totales exactes.

Inversement, envisageons toutes les transformations (y compris leurs inverses) telles que l'on ait simultanément $A_{rs} = 0$, $B_{rs} = 0$ et $C_{rs} = \delta_{rs}$. Des relations

$$\sum_{rs} A_{rs} \left(\frac{\partial p_r}{\partial Q_m}\right)_q \left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_i}\right)_q = \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_q - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_q = 0$$

$$\sum_{rs} B_{rs} \left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_m}\right)_p \left(\frac{\partial q_s}{\partial Q_i}\right)_p = \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_p - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_p = 0$$

$$\sum_r C_{rs} \left(\frac{\partial p_r}{\partial Q_m}\right)_q = -\left(\frac{\partial P_m}{\partial q_s}\right)_Q + \sum_{ir} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right)_p \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_m}\right)_q - \left(\frac{\partial P_m}{\partial Q_i}\right)_q\right] \tag{1.148}$$

$$= \left(\frac{\partial p_s}{\partial Q_m}\right)_q = -\left(\frac{\partial P_m}{\partial q_s}\right)_Q \tag{1.149}$$

et des relations symétriques (en considérant la transformation inverse)

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\right)_Q = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)_Q \quad , \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\right)_P = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)_P \tag{1.150}$$

on déduit facilement, comme précédemment, que la différence $dW' - dW$ doit être la différentielle d'une fonction $G(q, Q, t)$ et qu'il ne peut donc s'agir que d'une transformation canonique.

La conclusion est que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme (1.140) soit conservée dans une transformation des variables est que la transformation soit de nature canonique. Autrement dit, le groupe des transformations canoniques est celui qui laisse invariante la forme (1.140). Ce résultat confère à la Mécanique hamiltonienne une structure *symplectique*[8]. On notera à ce propos que la forme (1.140) est liée à la 2-forme extérieure

$$\Omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i \tag{1.151}$$

qui est donc invariante sous les transformations canoniques ainsi que les divers produits extérieurs

$$\Omega^{2k} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} dp_{i_1} \wedge \cdots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_k} \tag{1.152}$$

qui constituent donc autant d'invariants au cours de l'évolution du système considéré (invariants par le *flot hamiltonien*).

1.8 Algèbre de Lie induite par les crochets de Poisson

Le fait que les crochets de Poisson aient une valeur intrinsèque, indépendante du choix des variables canoniques, permet d'affirmer que l'algèbre de Lie induite par ces crochets a aussi une signification intrinsèque, indépendante de ce choix. Cette algèbre est constituée par l'ensemble des fonctions de p et q, muni de l'opération interne "crochets de Poisson". Elle est de dimension infinie. Pour simplifier, nous ne considèrerons que le cas d'un seul degré de liberté et seulement les fonctions analytiques de p et q, développables en série de Taylor

$$f(p,q) = \sum_{m,n} p^m q^n f^{(m,n)} \tag{1.153}$$

où l'on voit que l'algèbre, en tant qu'espace vectoriel de dimension infinie, peut être engendré par les monônes

$$e_{m,n} = p^m q^n \tag{1.154}$$

formant une base pour laquelle les constantes de structure de l'algèbre définies par les crochets

$$\{e_{m,n}\ ,\ e_{m',n'}\} = \sum_{r,s} C^{r,s}_{m,n,m',n'}\ e_{r,s} \tag{1.155}$$

sont donnés par

$$C^{r,s}_{m,n,m',n'} \ = \ (mn' - nm')\ \delta^r_{n+n'-1}\ \delta^s_{m+m'-1} \tag{1.156}$$

Le théorème de Campbell et Hausdorff montre que l'exponentielle d'une algèbre de Lie quelconque L, définie par

$$\exp a = e^a = \sum_r \frac{a^r}{r!} \tag{1.157}$$

où a est un élément quelconque de cette algèbre, a la structure d'un groupe G. Le produit de deux éléments du groupe s'écrit sous la forme

$$e^a\ e^b = e^z \tag{1.158}$$

où z est construit à partir de a et de b selon la formule

$$z = a + b + \frac{1}{2}(a,b) + \frac{1}{12}(\ (a,b)\ ,b) + \frac{1}{12}(\ (a,b)\ ,a) + \cdots \tag{1.159}$$

[8]Voir "Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique", V. Arnold, Ed. Mir, 1976.

(a, b) étant les crochets de Lie dans L ; a et b étant des élémennts de L, leurs crochets successifs sont aussi des élémets de L et donc z aussi. L est dite *algèbre de Lie associée à G*.
La représentation du groupe G dans l'algèbre L elle-même est appelée *représentation adjointe* du groupe et agit comme suit. A tout élément a de L associons l'opérateur noté D_a, appelé *opérateur adjoint* de a, tel que pour tout b de L on ait

$$D_a(b) = (a, b) \tag{1.160}$$

L'élément du groupe qui lui est associé est $\exp D_a$ et l'on a

$$b' = e^{D_a}(b) = e^a \; b \; e^{-a} \tag{1.161}$$

où e^{-a} est l'inverse de e^a et où

$$b' = b + (a, b) + \frac{1}{2} \; (a, b) + \cdots + \frac{1}{n!} \; (a, (a, \cdots, b \; \underbrace{)) \cdots))}_{n \; crochets} \; + \cdots \tag{1.162}$$

L'élément a est dit *générateur* de la transformation e^a, et le groupe G laisse globalement invariante l'algèbre L et son opération interne, les crochets de Lie.

Ici, les crochets de Lie sont des crochets de Poisson. L'opérateur adjoint d'une fonction $f(p, q)$ est formellement défini par

$$D_f = \{f \; , \; . \; \} \tag{1.163}$$

L'ensemble des opérateurs adjoints forme la représentation adjointe de l'algèbre des fonctions f. Alors que le crochet de Lie de cette dernière est le crochets de Poisson, celui de sa représentation adjointe est le *commutateur*

$$[D_f, D_g] = D_f \; D_g - D_g \; D_f \tag{1.164}$$

L'application qui à une fonction f fait correspondre son opérateur adjoint est un *homomorphisme* d'algèbres de Lie. En effet, d'après l'identité de Jacobi (1.113), on a

$$\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{ \; \{f, g\}, h\} \tag{1.165}$$

ce qui peut se traduire par

$$D_f D_g(h) - D_g D_f(h) = D_{\{f,g\}}(h) \tag{1.166}$$

pour toute fonction h, ce qui permet de faire l'identification

$$[D_f, D_g] = D_{\{f,g\}} \tag{1.167}$$

montrant que l'application envisagée respecte les crochets de Lie.

La représentation adjointe est une autre représentation d'une algèbre de Lie abstraite dont l'espace des fonctions $f(p, q)$ muni des crochets de Poisson est lui-même une représentation particulière.

1.9 Groupes continus de transformations canoniques

Les fonctions génératrices des transformations canoniques les plus générales sont quelconques et définissent ces transformations de façon implicite. Il en résulte qu'il est impossible de donner une formule générale des transformations canoniques, ni une forme générale des fonctions génératrices qui les engendrent. Comme nous allons le voir, on peut toutefois donner une forme explicite des transformations canoniques infinitésimales.

Les fonctions génératrices étant des fonctions arbitraires $G(q, Q, t)$, l'ensemble des transformations canoniques n'est pas un groupe continu globalement. Un groupe n'est dit *continu* que s'il est possible de passer de manière continue d'un élément à un autre. L'ensemble des transformations canoniques est assez vaste pour contenir des sous-groupes continus et c'est à ceux-ci que nous allons porter notre attention.

Considérons donc un groupe continu à un seul paramètre réel α qui peut éventuellement dépendre du temps. Soit (q, p) un ensemble donné de variables canoniques. La transformation du groupe correspondant à la valeur α du paramètre transforme ces variables en

$$Q_\alpha = Q(\alpha) \quad , \quad P_\alpha = P(\alpha) \tag{1.168}$$

qui dépendent elles-mêmes de α. La fonction génératrice associée à cette transformation sera notée

$$G_\alpha = G(q, Q_\alpha, P_\alpha) \tag{1.169}$$

et l'on a

$$P_\alpha = \frac{\partial G_\alpha}{\partial Q_\alpha} \quad , \quad p = -\frac{\partial G_\alpha}{\partial q} \quad , \quad H - H'_\alpha = \frac{\partial G_\alpha}{\partial t} \tag{1.170}$$

Afin de déduire le générateur infinitésimal de la transformation, envisageons la transformation infiniment voisine de fonction génératrice $G_{\alpha+\delta\alpha}$ correspondant à la valeur $\alpha + \delta\alpha$ du paramètre, $\delta\alpha$ étant infinitésimal, amenant les variables canoniques aux valeurs $(Q_{\alpha+\delta\alpha}, P_{\alpha+\delta\alpha})$. On notera

$$\delta Q_\alpha = Q_{\alpha+\delta\alpha} - Q_\alpha = \delta\alpha \; g \quad , \quad \delta P_\alpha = P_{\alpha+\delta\alpha} - P_\alpha = \delta\alpha \; h \tag{1.171}$$

g et h étant deux fonctions de Q_α, P_α et α.

La variation infinitésimale de la fonction génératrice est (q est fixé)

$$\delta G_\alpha = G_{\alpha+\delta\alpha} - G_\alpha = \frac{\partial G_\alpha}{\partial Q_\alpha} \; \delta Q_\alpha + \frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha} \; \delta\alpha \tag{1.172}$$

q, p et t étant fixés, on a

$$dG_{\alpha+\delta\alpha} = P_{\alpha+\delta\alpha} \; \delta Q_{\alpha+\delta\alpha} \quad , \quad dG_\alpha = P_\alpha \; \delta Q_\alpha \tag{1.173}$$

d'où la différentielle de δG_α à q, p et t fixés

$$d\delta G_\alpha = P_{\alpha+\delta\alpha} \; \delta Q_{\alpha+\delta\alpha} - P_\alpha \; \delta Q_\alpha = \delta P_\alpha dQ_\alpha + P_\alpha d\delta Q_\alpha = d\left(P_\alpha \; \delta Q_\alpha + \frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha} \; \delta\alpha\right) \tag{1.174}$$

On en déduit ainsi la différentielle

$$d\left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha} \; \delta\alpha\right) = \delta P_\alpha \; dQ_\alpha - \delta Q_\alpha \; dP_\alpha \tag{1.175}$$

Posons alors

$$B = -\frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\delta Q_\alpha}{\delta\alpha} = g \quad , \quad \frac{\delta P_\alpha}{\delta\alpha} = h \tag{1.176}$$

il vient

$$dB = g \; dP_\alpha - h \; dQ_\alpha \tag{1.177}$$

La grandeur B peut ainsi être considérée comme fonction de Q_α et P_α seulement et l'on a

$$g = \frac{\partial B}{\partial P_\alpha} \quad , \quad h = -\frac{\partial B}{\partial Q_\alpha} \tag{1.178}$$

ce qui montre que g et h sont aussi fonctions de Q_α et P_α seulement. Mais les dernières relations indiquent que si l'on connait la fonction B, la transformation infinitésimale des variables est connue explicitement. A cet égard, en choisissant d'avance et arbitrairement la fonction B, on peut engendrer un groupe continu via ces relations qui fixent de manière explicite la loi de variation des variables canoniques.

Inversement, si l'on connait les variations des variables canoniques, la fonction B peut en être déduite par intégration, la condition pour ce faire étant que soit satisfaite la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{\partial g}{\partial Q}\right)_P = -\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_Q \tag{1.179}$$

Sous l'effet de la transformation infinitésimale envisagée plus haut, une fonction quelconque F de Q_α, P_α, α et t est transformée comme suit

$$\delta F = \delta Q_\alpha \, \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q_\alpha} + \delta P_\alpha \, \frac{\partial F_\alpha}{\partial P_\alpha} + \delta\alpha \, \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \tag{1.180}$$

soit

$$\delta F = \delta\alpha \, \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \{\delta\alpha B, F\} \tag{1.181}$$

Si F ne dépend pas explicitement de α cette relation devient

$$\delta F = \{\delta\alpha B, F\} \tag{1.182}$$

Le résultat essentiel ici est que la variation de F est simplement donnée par les crochets de F avec B. Ceci fait dire que la fonction B doit être considérée comme le *générateur du groupe considéré*. En effet, d'après (1.162), si l'opérateur a de la transformation est infinitésimal, alors $\delta b = b' - b = (a, b)$, c'est-à-dire que la variation infinitésimale de b est donnée par les crochets du générateur infinitésimal a avec b.

On notera que toute fonction $f(q, p)$ peut être considérée comme le générateur d'un groupe de Lie à un paramètre α, via l'exponentiation, la variation infinitésimale de toute autre fonction $z(q, p)$ étant alors donnée par

$$\delta z = \{\delta\alpha f, z\} \tag{1.183}$$

Ceci établit précisément la connexion entre les fonctions des variables canoniques et les transformations canoniques. De la précédente relation on déduit que

$$\frac{dz}{d\alpha} = \{f, z\} = D_f(z) \tag{1.184}$$

équation qui peut s'intégrer formellement pour donner

$$z' = z(Q_\alpha, P_\alpha, \alpha) = \exp\left(\alpha D_f\right)(z) \tag{1.185}$$

On engendre ainsi un groupe à un paramètre dont les éléments sont les exponentielles

$$\exp\left(\alpha D_f\right) \tag{1.186}$$

Pour illustrer les formules précédentes, considérons les transformations suivantes.

1.9.1 Translation spatiale

Supposons que q soit une coordonnée spatiale sur laquelle on effectue la translation infinitésimale $\delta\alpha$. On a alors $g = 1$, $h = 0$, d'où $dB = dp$, soit, par intégration

$$B_{\text{translation spatiale}} = p \tag{1.187}$$

à une constante non significative près. Les générateurs infinitésimaux des translations des coordonnées q sont donc représentés par les impulsions associées à ces dernières. Ce résultat peut d'ailleurs servir à déduire les crochets de Poisson entre impulsions et coordonnées. En effet, on doit avoir (avec n coordonnées)

$$\delta q_i = \{\sum_k \delta\alpha_k \; B_k \; , \; q_i\} = \delta\alpha_i = \sum_k \delta\alpha_k \{p_k \; , \; q_i\} \tag{1.188}$$

La dernière égalité ne peut être vérifiée pour des translations quelconques que si et seulement si l'on a

$$\{p_k \; , \; q_i\} = \delta_{ik} \tag{1.189}$$

1.9.2 Translation temporelle

Si le paramètre α représente le temps, on a $g = \dot{q}$ et $h = \dot{p}$. D'où

$$dB = \dot{q} \; dp - \dot{p} \; dq = dH \tag{1.190}$$

et

$$B_{\text{translation temporelle}} = H \tag{1.191}$$

On retrouve ici le fait que le Hamiltonien est associé à l'évolution temporelle.

1.9.3 Transformation linéaire des coordonnées

Envisageons maintenant une transformation linéaire infinitésimale des coordonnées de la forme

$$\delta q_i = \delta\alpha \sum_j T_{ij} \; q_j \tag{1.192}$$

où T_{ij} est un élément d'une matrice nxn. Les conditions d'intégrabilité analogues à (1.179) prennent ici la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\delta q_i}{\delta\alpha}\right) = \; T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\delta p_j}{\delta\alpha}\right) \tag{1.193}$$

ce qui signifie que l'on a nécessairement

$$\delta p_i = -\delta\alpha \sum_j T_{ji} \; p_j \tag{1.194}$$

c'est-à-dire que les impulsions se transforment selon l'opposée de la matrice transposée de $\{T_{ij}\}$. Il vient alors

$$dB = \sum_{ij} T_{ij} \left(q_j \; dp_i + p_i \; dq_j\right) \tag{1.195}$$

d'où (on impose $B_T = 0$ si $T = 0$)

$$B_T = \sum_{ij} T_{ij}\ p_i q_j \tag{1.196}$$

A l'aide de cette formule, vérifions que l'application $T \to B_T$ est bien un isomorphisme d'algèbre de Lie. Soit $B_{T'}$ le générateur associé à la matrice T'. On a

$$\{B_T\ ,\ B_{T'}\} = \sum_{ij} \sum_{k\ell} T_{ij} T'_{k\ell}\ \{p_i q_j\ ,\ p_k q_\ell\} \tag{1.197}$$

Or

$$\{p_i q_j\ ,\ p_k q_\ell\} = p_k\ q_j\ \delta_{i\ell}\ -\ p_i\ q_\ell\ \delta_{jk} \tag{1.198}$$

d'où

$$\{B_T\ ,\ B_{T'}\} = -\sum_{ij} \sum_{k\ell} \left(T_{ij} T'_{j\ell}\ -\ T'_{ij} T_{j\ell}\right) p_i q_\ell = -\sum_{i\ell} [T\ ,\ T']_{i\ell}\, p_i q_\ell = -B_{[T,T']} \tag{1.199}$$

où $[T, T'] = TT' - T'T$ est le commutateur des deux matrices T et T'. Au signe près, auquel on pourrait remédier par une redéfinition des crochets de Poisson, la relation entre T et B est bien un homomorphisme d'algèbre de Lie. Celui-ci n'est d'ailleurs pas limité aux seules transformations linéaires et ce résultat n'est finalement qu'une traduction du fait que si les générateurs B sont les représentants de cette algèbre agissant sur des fonctions de q et p, il est tout à fait normal qu'ils vérifient les mêmes règles de commutation générales de cette algèbre (au sens des crochets de Poisson).

Pour illustrer ce propos, considérons le cas du groupe des rotations spatiales, et plus particulièrement son action sur des vecteurs de l'espace ordinaire à trois dimensions repéré par un trièdre (O, x, y, z).

Dans une rotation infinitésimale d'angle $\delta\varphi$ autour de l'axe Oz, les variations des coordonnées sont[9]

$$\delta x = -\,\delta\varphi\ y\quad ,\quad \delta y = \delta\varphi\ x\quad ,\quad \delta z = 0 \tag{1.200}$$

ce que l'on peut exprimer sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \delta\varphi\ \mathcal{Z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.201}$$

On vérifiera que des rotations infinitésimales autour des axes Ox et Oy font intervenir les matrices

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.202}$$

respectivement. Les trois matrices ainsi définies constituent une représentation de l'algèbre de Lie du groupe des rotations et satisfont aux relations de commutation

$$[\ \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{Y}\ ] = \mathcal{Z}\quad ,\quad [\ \mathcal{Y}\ ,\ \mathcal{Z}\ ] = \mathcal{X}\quad ,\quad [\ \mathcal{Z}\ ,\ \mathcal{X}\ ] = \mathcal{Y} \tag{1.203}$$

Les générateurs correspondant à $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ sont une autre représentation de cette algèbre et ont respectivement pour expression

$$B_x = -(yp_z - zp_y)\quad ,\quad B_y = -(zp_x - xp_z)\quad ,\quad B_z = -(xp_y - yp_x) \tag{1.204}$$

et satisfont aux relations

$$\{\ B_x\ ,\ B_y\ \} = B_z\quad ,\quad \{\ B_y\ ,\ B_z\ \} = B_x\quad ,\quad \{\ B_z\ ,\ B_x\ \} = B_y \tag{1.205}$$

[9] Voir le chapitre 4.

La correspondance homomorphique est parfaite si l'on définit les opérateurs *hermitiques*

$$\mathcal{L}_x = i\mathcal{X} \quad , \quad \mathcal{L}_y = i\mathcal{X} \quad , \quad \mathcal{L}_z = i\mathcal{Z} \tag{1.206}$$

d'une part, et

$$L_x = iB_x \quad , \quad L_y = iB_y \quad , \quad L_z = iB_z \tag{1.207}$$

d'autre part, qui satisfont aux mêmes relations de commutation

$$\{\ L_x\ ,\ L_y\ \} = iL_z \quad , \quad \{\ L_y\ ,\ L_z\ \} = iL_x \quad , \quad \{\ L_z\ ,\ L_x\ \} = iL_y \tag{1.208}$$

On notera que les expressions de B_x, B_y et B_z font intervenir les composantes d'un moment cinétique, ce qui révèle que cette dernière grandeur est étroitement liée à des rotations spatiales.

1.9.4 Transformation linéaire sur l'ensemble des coordonnées et des impulsions

Considérons ensuite une transformation linéaire impliquant à la fois les coordonnées et les impulsions. Une transformation infinitésimale induira sur ces grandeurs les variations

$$\delta q_i = \sum_k (a_{ik} q_k + b_{ik} p_k) \quad , \quad \delta p_i = \sum_k (c_{ik} q_k + d_{ik} p_k) \tag{1.209}$$

où les éléments de matrice a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} et d_{ik} sont infinitésimaux. Les conditions d'intégrabilité (1.179) impliquent que l'on ait, d'une part,

$$\frac{\partial \delta q_i}{\partial p_k} = b_{ik} = \frac{\partial \delta q_k}{\partial p_i} = b_{ki} \ , \quad \frac{\partial \delta p_i}{\partial q_k} = c_{ik} = \frac{\partial \delta p_k}{\partial q_i} = c_{ki} \tag{1.210}$$

et les matrices $\{b_{ik}\}$ et $\{c_{ik}\}$ se doivent d'être symétriques. D'autre part, on doit avoir

$$\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} = a_{ik} = -\frac{\partial \delta p_k}{\partial q_i} = -d_{ki} \tag{1.211}$$

Ainsi, comme en (1.194), la matrice $\{d_{ik}\}$ est l'opposée de la transposée de la matrice $\{a_{ik}\}$. De façon condensée, on écrira donc[10]

$$\begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -{}^t a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{1.212}$$

La différentielle (1.177) du générateur de la transformation[11] s'écrit

$$dB = \sum_i (\delta q_i dp_i - \delta p_i dq_i) \tag{1.213}$$

et l'on a

$$\frac{\partial B}{\partial p_i} = \delta q_i \ , \quad \frac{\partial B}{\partial q_i} = -\delta p_i \tag{1.214}$$

L'intégration de ces équations conduit à l'expression suivante du générateur[12]

$$B = \frac{1}{2}\sum_{ik} b_{ik} p_i p_k - \frac{1}{2}\sum_{ik} c_{ik} q_i q_k + \sum_{ik} a_{ik} p_i q_k \tag{1.215}$$

[10] Le symbole ${}^t a$ représente la matrice transposée de a.

[11] Afin de ne pas multiplier les notations, nous appelerons encore générateur B la fonction permettant de générer une transformation infinitésimale et dont l'expression contient encore les paramètres infinitésimaux correspondants. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les vrais générateurs en bonne et due forme.

[12] Ici encore on impose $B = 0$ si les matrices a, b et c sont nulles.

qui généralise (1.196). Comme il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ matrices nxn symétriques et que la matrice a, a priori quelconque, possède n^2 éléments, il y a au total $n(2n+1)$ formes telles que (1.215), ce qui est conforme au fait qu'il est possible de construire autant de formes tensorielles du second ordre (produits du type $x_i y_j$) avec les coordonnées et les impulsions.

Pour un système à n degrés de liberté, considérons le cas du groupe $SO(N)$ avec $N = 2n$ (groupe spécial orthogonal à N dimensions). Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des matrices NxN laissant invariant le produit scalaire euclidien

$$ {}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_Ny_N \tag{1.216} $$

avec

$$ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix} \tag{1.217} $$

Ces matrices doivent vérifier la relation

$$ {}^tMM = 1 \ , \quad \text{soit} \quad {}^tM = M^{-1} \tag{1.218} $$

d'où l'on déduit que le déterminant d'une telle matrice doit être égal à ± 1. Plus précisément, les matrices de $SO(N)$ sont celles ayant un déterminant égal à $+1$. Or, le déterminant d'une matrice étant le jacobien J de la transformation qu'elle engendre, cette transformation peut être de nature canonique, puisqu'alors $J = 1$.

Une transformation infinitésimale a pour matrice $M = 1 + A$ où 1 est ici compris comme la matrice unité NxN, et où A est une matrice NxN, de coefficients infinitésimaux, représentant le générateur infinitésimal de la transformation. Comme $M^{-1} = 1 - A = {}^tM = 1 + {}^tA$, on doit avoir

$$ {}^tA = -A \tag{1.219} $$

Les générateurs infinitésimaux sont donc des matrices *antisymétriques*. On en déduit que l'algèbre de Lie de $SO(N)$ est de dimension $\dfrac{N(N-1)}{2}$. Un générateur infinitésimal du groupe peut donc s'écrire sous la forme

$$ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.220} $$

où a, b, c et d sont des matrices nxn vérifiant

$$ {}^ta = -a \ , \quad {}^td = -d \ , \quad c = -{}^tb \tag{1.221} $$

En fait, la représentation de l'algèbre de Lie de $SO(N)$ par des générateurs (1.215) ne peut être que partielle. En effet, pour les générateurs correspondants, on est maintenant conduit à considérer des expressions de la forme

$$ B = \frac{1}{2}\sum_{ik} b_{ik}\left(p_ip_k + q_iq_k\right) + \sum_{ik} a_{ik}p_iq_k \tag{1.222} $$

où $\{b_{ik}\}$ est une matrice nxn symétrique et $\{a_{ik}\}$ une matrice nxn antisymétrique. Le nombre total de telles expressions est donc $n(n+1)/2 + n(n-1)/2 = n^2 = N^2/4$, c'est-à-dire un nombre inférieur à la dimension de l'algèbre de Lie de $SO(N)$. Ceci provient notamment du fait que certains générateurs (1.222) peuvent être nuls : c'est le cas lorsque le générateur associé (1.220) est tel que sa matrice a est nulle et que sa matrice b est antisymétrique ; ou bien encore si sa matrice d ne vérifie pas la condition d'intégrabilité $d = -{}^ta = a$. Il est alors certain que les nouveaux crochets de Poisson n'ont pas la forme requise (1.111) et que la fonction génératrice d'une transformation canonique éventuellement associée est tout simplement inexistante[13].

On notera que les formes (1.222) s'expriment en fonction de combinaisons élémentaires symétriques ou antisymétriques :

$$S_{ij} = q_i q_j + p_i p_j \ , \quad A_{ij} = p_i q_j - p_j q_i \tag{1.223}$$

qui satifont les relations

$$\begin{aligned} \{A_{ij}, A_{k\ell}\} &= \delta_{ik} A_{j\ell} + \delta_{j\ell} A_{ik} - \delta_{jk} A_{i\ell} - \delta_{i\ell} A_{jk} \\ \{S_{ij}, S_{k\ell}\} &= \delta_{ik} A_{j\ell} + \delta_{j\ell} A_{ik} + \delta_{jk} A_{i\ell} + \delta_{i\ell} A_{jk} \\ \{A_{ij}, S_{k\ell}\} &= \delta_{ik} S_{j\ell} - \delta_{j\ell} S_{ik} - \delta_{jk} S_{i\ell} + \delta_{i\ell} S_{jk} \end{aligned} \tag{1.224}$$

tout à fait similaires aux relations de commutation des générateurs de l'algèbre de Lie du groupe $SU(n)$. Dans leur représentation standard, ces derniers sont des matrices nxn vérifiant

$$M^\dagger = ({}^t M)^* = -M \ , \quad \text{et} \quad \text{Tr } M = 0 \tag{1.225}$$

et qui peuvent être exprimées sous la forme $M = a + is$ où a et s sont des matrices nxn à coefficients réels, respectivement antisymétrique et symétrique, avec de plus Tr $s = 0$. L'analogie est complète si, posant $S = \sum_i S_{ii}$, on remplace le tenseur symétrique S_{ij} par le tenseur

$$S'_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij} \ \frac{S}{n} \tag{1.226}$$

lui aussi symétrique mais dont la trace est nulle. En effet, le scalaire

$$S = \sum_i \ \left(q_i^2 + p_i^2\right) \tag{1.227}$$

qui est en fait une "norme" invariante sous les transformations de $SO(N)$ a des crochets nuls avec toutes les formes A_{ij} ou S_{ij} et, de ce fait, les relations (1.224) restent valables lorsqu'on remplace S_{ij} par S'_{ij}.

Etablissons la forme générale de la fonction génératrice d'une transformaton canonique linéaire agissant à la fois sur les coordonnées et les impulsions. En fonction des anciennes coordonnées $\{q_i\}$ et impulsions $\{p_i\}$, les nouvelles coordonnées Q_i et leurs nouvelles impulsions P_i seront donc données sous la forme

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j \left[\ U_{ij} q_j + V_{ij} p_j \ \right] \\ P_i &= \sum_j \left[\ U'_{ij} q_j + V'_{ij} p_j \ \right] \end{aligned} \tag{1.228}$$

où U_{ij}, V_{ij}, U'_{ij} et V'_{ij} sont des éléments de matrices réelles nxn, toutes supposées *inversibles*. Il s'agit tout d'abord d'exprimer les impulsions p_i et P_i en fonction des coordonnées q_i et Q_i :

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j \left\{\ V^{-1}_{ij} Q_j - (V^{-1}U)_{ij} q_j \ \right\} \\ P_i &= \sum_j \left\{ \left[\ U'_{ij} - (V'V^{-1}U)_{ij}\right] q_j + (V'V^{-1})_{ij} Q_j \ \right\} \end{aligned} \tag{1.229}$$

Les conditions d'intégrabilité de la forme $dG = \sum_i P_i dQ_i - p_i dq_i$ conduisent aux relations suivantes entre les matrices U, V, U' et V'

[13] Un exemple est considéré en annexe 3.

$$V'V^{-1} = {}^t(V'V^{-1}) \ , \quad V^{-1}U = {}^t(V^{-1}U) \ , \quad U' + {}^tV^{-1} = V'V^{-1}U \tag{1.230}$$

Les matrices $V'V^{-1}$ et $V^{-1}U$ sont donc nécessairement symétriques et l'on déduit facilement que la matrice ${}^tUU'$ doit aussi être symétrique. Compte-tenu de ces relations, l'intégration de dG conduit à l'expression

$$G = \frac{1}{2}\sum_{ij}(V'V^{-1})_{ij}\ Q_iQ_j + \frac{1}{2}\sum_{ij}(V^{-1}U)_{ij}\ q_iq_j - \sum_{ij}V^{-1}_{ij}\ q_iQ_j \tag{1.231}$$

qui, en fonction des anciennes variables, s'écrit aussi

$$G = \frac{1}{2}\sum_{ij}({}^tV'V)_{ij}\ p_ip_j + \frac{1}{2}\sum_{ij}({}^tUU')_{ij}\ q_iq_j + \sum_{ij}({}^tVU')_{ij}\ p_iq_j \tag{1.232}$$

A partir de cette dernière expression on peut retrouver la formule (1.215) donnant le générateur infinitésimal d'une transformation d'un groupe à un paramètre α. En effet, celui-ci peut être calculé en utilisant la relation

$$B = -\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)_{Q,q}\delta\alpha = -\delta G|_{q,p} + \sum_i P_i(\alpha)\delta Q_i(\alpha)|_{q,p} \tag{1.233}$$

Au voisinage de $\alpha = 0$, on écrira

$$U \simeq 1 + a \ , \quad V \simeq b \ , \quad U' \simeq c \ , \quad V' \simeq 1 + d \tag{1.234}$$

où a, b, c et d sont des matrices nxn infinitésimales. De la relation

$${}^tVV' = {}^tV'V \simeq {}^tb \simeq b \tag{1.235}$$

où l'on ne retient que les termes de plus bas ordre, on déduit que la matrice b doit être symétrique. De même, la relation

$${}^tUU' = {}^tU'U \simeq c \simeq {}^tc \tag{1.236}$$

montre que la matrice c doit aussi être symétrique. Enfin, exploitant la relation ${}^tVU' + 1 = {}^tV'U$, on trouve

$$1 \simeq 1 + a + {}^td \ , \quad \text{soit} \quad d = -\,{}^ta \tag{1.237}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} B &= \sum_{ij} p_i\left[q_j\delta U_{ij} + p_j\delta V_{ij}\right] - \frac{1}{2}\sum_{ij}p_ip_j\delta V_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{ij}q_iq_j\delta U'_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij}p_ip_j\delta V_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{ij}q_iq_j\delta U'_{ij} + \sum_{ij}p_iq_j\delta U_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij}p_ip_jb_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{ij}q_iq_jc_{ij} + \sum_{ij}p_iq_ja_{ij} \end{aligned} \tag{1.238}$$

où l'on a posé $\delta U = a$, $\delta V = b$, $\delta U' = c$.

A titre d'application, considérons la fonction

$$G = \frac{c}{2s}\left(Q^2 + q^2\right) - \frac{1}{s}Qq \tag{1.239}$$

où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. On a

$$P = \left(\frac{\partial G}{\partial Q}\right)_q = \frac{1}{s}\left(cQ - q\right) \ , \quad -p = \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_Q = \frac{1}{s}\left(cq - Q\right) \tag{1.240}$$

d'où l'on tire

$$Q = cq + sp \ , \quad P = cp - sq \tag{1.241}$$

Il s'agit donc d'une rotation d'angle θ dans le plan (q, p). On a

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{q,Q} = -\frac{1}{s^2}\left(q^2 + Q^2\right) + \frac{c}{s^2} qQ = -\frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right) \tag{1.242}$$

Le générateur infinitésimal des rotations dans le plan (q, p) est donc $\frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$.

Considérant l'expression (1.232), on remarque que si la transformation linéaire a lieu uniquement entre coordonnées et, de façon concomitante et appropriée uniquement entre impulsions, on a alors $V \equiv 0$ et $U' \equiv 0$ et par conséquent $G \equiv 0$: la fonction génératrice est alors égale à zéro. Par contre, le générateur infinitésimal est fini et égal à

$$\frac{B}{\delta\alpha} = \sum_{ij} p_i q_j \frac{\delta U_{ij}}{\delta\alpha} \tag{1.243}$$

Considérons l'exemple suivant où

$$G = \frac{c}{s}\left(Q_1 Q_2 + q_1 q_2\right) - \frac{1}{s}\left(q_1 Q_1 + q_2 Q_2\right) \tag{1.244}$$

avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial G}{\partial Q_1}\right)_{Q_2,q} &= P_1 = \frac{cQ_2 - q_1}{s} \ , \quad \left(\frac{\partial G}{\partial Q_2}\right)_{Q_1,q} = P_2 = \frac{cQ_1 - q_2}{s} \\
\left(\frac{\partial G}{\partial q_1}\right)_{q_2,Q} &= -p_1 = \frac{cq_2 - Q_1}{s} \ , \quad \left(\frac{\partial G}{\partial q_2}\right)_{q_1,Q} = -p_2 = \frac{cq_1 - Q_2}{s}
\end{aligned} \tag{1.245}$$

d'où

$$Q_1 = cq_2 + sp_1 \ , \quad Q_2 = cq_1 + sp_2 \ , \quad P_1 = -sq_1 + cp_2 \ , \quad P_2 = -sq_2 + cp_1 \tag{1.246}$$

En fonction des anciennes coordonnées q et impulsions p, la fonction génératrice s'écrit

$$G = cs\left(p_1 p_2 - q_1 q_2\right) - s^2\left(q_1 p_1 + q_2 p_2\right) \tag{1.247}$$

Les anciennes coordonnées q et impulsions p étant supposées données, c'est-à-dire indépendantes de θ, on constate que G s'annule si $\theta = 0$, auquel cas

$$Q_1 = q_2 \ , \quad Q_2 = q_1 \ , \quad P_1 = p_2 \ , \quad P_2 = p_1 \tag{1.248}$$

et la transformation se réduit à un simple échange d'indice des coordonnées d'une part et des impulsions d'autre part. Par contre, le générateur infinitésimal associé aux transformations d'angles $\theta \geq 0$ donné par

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{q,Q} \equiv q_1 q_2 + p_1 p_2 \tag{1.249}$$

reste constant, même à la limite où $\theta = 0$. Il est clair que ce générateur ne peut représenter la transformation qui consiste à permuter q_1 et q_2 d'un côté et p_1 et p_2 de l'autre, qui n'est d'ailleurs pas en elle-même une transformation continue.

Cette situation particulière est imputable au fait que les matrices V et U' sont maintenant nulles. En effet, étant donné que les nouvelles coordonnées Q sont indépendantes des anciennes impulsions p, inversement ces dernières ne dépendent pas des nouvelles coordonnées Q. Il s'ensuit que la relation

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\right)_Q = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right)_q = 0 \tag{1.250}$$

qui est l'une des conditions d'intégrabilité de la forme $dG = PdQ - pdq$ n'apporte que la seule information que les nouvelles impulsions ne dépendent pas des anciennes coordonnées. Elles ne dépendent donc que des anciennes impulsions, mais l'exploitation des conditions d'intégrabilité de dG ne permet pas à elle seule de déduire la forme de cette dépendance. On voit alors la nécessité d'introduire la fonction génératrice $G_3(p,Q) = G(q,Q) + qp$ dont la différentielle est $dG_3 = PdQ + qdp$ et qui conduit à la condition

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)_Q = \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right)_p = \left({}^tU^{-1}\right)_{ik} \tag{1.251}$$

d'où l'on déduit que les nouvelles impulsions doivent être des combinaisons linéaires des anciennes impulsions avec pour coefficients les éléments de la matrice $V' = \left({}^tU^{-1}\right)$ [14]. Il vient alors

$$\sum_i P_i dQ_i \; = \; \sum_{mn}\sum_i \; \left({}^tU^{-1}\right)_{im} p_m U_{in} dq_n \; = \; \sum_{mn} \delta_{mn} p_m dq_n \; = \; \sum_i p_i dq_i \tag{1.252}$$

d'où

$$dG_3 = \sum_i \; [p_i dq_i + q_i dp_i] \; = \; \sum_i d\,(q_i p_i) \tag{1.253}$$

Finalement,

$$G_3 = \sum_i q_i p_i \;, \quad \text{et} \quad G = 0 \tag{1.254}$$

résultat qui confirme que dans une transformation canonique linéaire des coordonnées, le "produit scalaire" $\sum_i P_i Q_i$ reste invariant.

1.10 Intégrales premières, théorème de Noether, théorème de Poisson

On appelle *intégrale première* toute fonction $F(q,p,t)$ qui reste constante au cours du mouvement, c'est-à-dire telle que

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{1.255}$$

pour tout t. Cette condition peut être récrite à l'aide des crochets de Poisson de F avec H :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{ \; H \; , \; F \; \} = 0 \tag{1.256}$$

Si F ne dépend pas explicitement du temps, ceci revient à écrire

$$\{ \; H \; , \; F \; \} = 0 \tag{1.257}$$

On sait que la solution générale du système d'équations canoniques pour un système à n degrés de liberté dépend de $2n$ constantes arbitraires que l'on choisit généralement comme étant les valeurs des

[14] C'est aussi la condition pour que l'on ait $\{P_i, Q_k\} = \delta_{ik}$.

variables canoniques à une certaine date, le plus souvent $t = 0$ (conditions initiales correspondant à un protocole particulier d'expérience). La correspondance entre les ensembles de variables $(q(t), p(t)$ et $(q(0), p(0)$ est biunivoque. Dans le principe, on peut alors réexprimer les $2n$ constantes $q(0)$ et $p(0)$ en fonction de $q(t)$ et $p(t)$, pour obtenir $2n$ relations

$$q(0) = q_0 = \Phi(q, p, t) \quad , \quad p(0) = p_0 = \Psi(q, p, t) \tag{1.258}$$

Les quantités q_0 et p_0 sont bien fonctions des variables canoniques et de t et restent constantes au cours du mouvement. Ce sont donc des intégrales premières et l'on déduit que les équations canoniques admettent au minimum $2n$ intégrales premières. En fait, toutes les intégrales premières ne sont pas indépendantes les unes des autres. En effet, pour un système fermé, les équations du mouvement ne contiennent pas explicitement le temps dont on peut donc fixer arbitrairement l'origine. Parmi les $2n$ constantes dont dépend la loi horaire, l'une pourra ainsi être choisie sous forme d'une constante additive au temps t. Ceci revient à changer l'origine des temps, ce qui n'a dans ce cas aucune influence sur la forme de la loi horaire trouvée. Par conséquent, pour un système fermé ayant n degrés de liberté, on ne peut trouver que $2n - 1$ intégrales premières *indépendantes*.

Inversement, si l'on connait $2n - 1$ intégrales premières indépendantes qui ne se réduisent pas à de simples constantes mais dépendent effectivement des variables canoniques, alors le problème de l'intégration des équations du mouvement est résolu.

Le théorème de Noether et le théorème de Poisson peuvent aider à trouver des intégrales premières.

1.10.1 Théorème de Noether

Ce théorème affirme que *si le système est invariant sous un groupe continu à M paramètres, il existe M quantités conservées au cours du mouvement.*

Naturellement, seules sont envisagées ici des transformations laissant invariante la forme des équations canoniques et qui sont donc de nature canonique. Pour simplifier, considérons comme précédemment un groupe continu à un paramètre α. Soient (q, p) les variables canoniques pour $\alpha = 0$, et $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ le Lagrangien correspondant. Dans la transformation $T_\alpha : (q, p) \to (Q_\alpha, P_\alpha)$ de fonction génératrice $G(q, Q_\alpha, \alpha, t)$, le Lagrangien devient

$$\mathcal{L}'_\alpha(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dG}{dt}(q, Q_\alpha, \alpha, t) \tag{1.259}$$

On remarquera que cette relation indique déjà que la forme même du Lagrangien peut être modifiée par la transformation. La transformation infiniment voisine $T_{\alpha+\delta\alpha} : (q, p) \to (Q_{\alpha+\delta\alpha}, P_{\alpha+\delta\alpha})$ correspondant à la valeur $\alpha + \delta\alpha$ du paramètre, transforme le Lagrangien en

$$\mathcal{L}'_{\alpha+\delta\alpha}(Q_{\alpha+\delta\alpha}, \dot{Q}_{\alpha+\delta\alpha}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dG}{dt}(q, Q_{\alpha+\delta\alpha}, \alpha + \delta\alpha, t) \tag{1.260}$$

Prenons la différence des deux précédentes équations :

$$\mathcal{L}'_{\alpha+\delta\alpha}(Q_{\alpha+\delta\alpha}, \dot{Q}_{\alpha+\delta\alpha}, t) - \mathcal{L}'_\alpha(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) = \frac{dG}{dt}(q, Q_{\alpha+\delta\alpha}, \alpha + \delta\alpha, t) - \frac{dG}{dt}(q, Q_\alpha, \alpha, t) \tag{1.261}$$

Ici, il faut prendre garde non seulement au changement des coordonnées mais aussi au changement de forme du Lagrangien. Nous écrirons donc, explicitement,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}'_{\alpha+\delta\alpha}(Q_{\alpha+\delta\alpha}, \dot{Q}_{\alpha+\delta\alpha}, t) - \mathcal{L}'_\alpha(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) = \\ &\delta\mathcal{L}'_\alpha(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) + \delta Q_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha}{\partial Q_\alpha}(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) + \delta\dot{Q}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha}{\partial \dot{Q}_\alpha}(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) \end{aligned} \tag{1.262}$$

soit, en utilisant les équations du mouvement et en allégeant l'écriture

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{\alpha+\delta\alpha}(Q_{\alpha+\delta\alpha}, \dot{Q}_{\alpha+\delta\alpha}, t) - \mathcal{L}'_{\alpha}(Q_{\alpha}, \dot{Q}_{\alpha}, t) &= \delta\mathcal{L}'_{\alpha}(Q_{\alpha}, \dot{Q}_{\alpha}, t) + \delta Q_{\alpha}\dot{P}_{\alpha} + \delta\dot{Q}_{\alpha}P_{\alpha} \\ &= \delta\mathcal{L}'_{\alpha}(Q_{\alpha}, \dot{Q}_{\alpha}, t) + \frac{d}{dt}\left(P_{\alpha}\delta Q_{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{1.263}$$

D'un autre côté, on écrira

$$\frac{dG}{dt}(q, Q_{\alpha+\delta\alpha}, \alpha+\delta\alpha, t) - \frac{dG}{dt}(q, Q_{\alpha}, \alpha+\alpha, t) = \frac{d\delta G}{dt}(q, Q_{\alpha}, \alpha, t) \tag{1.264}$$

et compte-tenu de (1.174), on obtient finalement

$$\delta\mathcal{L}'_{\alpha}(Q_{\alpha}, \dot{Q}_{\alpha}, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G_{\alpha}}{\partial\alpha}\,\delta\alpha\right) = -\delta\alpha\frac{dB}{dt} \tag{1.265}$$

soit encore, en se plaçant à la valeur $\alpha = 0$ du paramètre,

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{dB}{dt} \tag{1.266}$$

De cette dernière équation on déduit que si le Lagrangien garde la même forme après transformation, ce qui signifie que les propriétés du système considéré sont insensibles à cette transformation, alors le générateur infinitésimal correspondant est une grandeur conservée car alors

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = -\frac{dB}{dt} \tag{1.267}$$

Pour un système *isolé*, on admet en particulier l'existence de trois groupes d'invariance, dûe à des propriétés fondamentales d'uniformité du temps et d'isotropie de l'espace. Il s'agit

♣ des translations dans le temps, dont le générateur est le Hamiltonien ;

♣ des translations spatiales du système dans son ensemble, dont les générateurs sont les impulsions associées aux trois coordonnées d'espace décrivant globalement le système ;

♣ des rotations globales autour d'un point O dont les générateurs constituent le moment cinétique total du système autour de ce point.

Pour un système isolé, on connait donc 7 intégrales premières. Toutefois, celles-ci ne sont pas toujours indépendantes. Ainsi, pour une particule libre, son Hamiltonien

$$H = \frac{\overrightarrow{p}^{\,2}}{2m} \tag{1.268}$$

n'est pas indépendant de sa tri-impulsion $\overrightarrow{p}$.

Pour les systèmes dits *conservatifs*, la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps. Il s'ensuit que le Hamiltonien, qui représente le générateur des translations temporelles, est une constante du mouvement. Le nombre d'intégrales premières à trouver est alors réduit d'une unité.

Si l'une des coordonnées q n'intervient pas explicitement dans l'expression du Lagrangien, elle est dite *cyclique*. Le théorème de Noether indique alors que le générateur infinitésimal permettant de faire évoluer cette coordonnée est une constante du mouvement. C'est bien ce qu'on observe lorsque le système mécanique étudié possède la symétrie de révolution autour d'un axe. Si φ est l'angle de rotation autour de cet axe, on a

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \tag{1.269}$$

ce qui, d'après l'équation d'Euler-Lagrange correspondante conduit à

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{constante} \tag{1.270}$$

On montre d'ailleurs que cette dernière grandeur représente la composante du moment cinétique selon l'axe de révolution.

1.10.2 Théorème de Poisson

Ce théorème énonce que *si* $F_1(q,p,t)$ *et* $F_2(q,p,t)$ *sont des intégrales premières, leurs crochets de Poisson en sont une aussi.*

Sa démonstration n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser a priori, car, pour une fonction $f(q,p,t)$ quelconque, on a par exemple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dt}\right) - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \neq \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{df}{dt}\right) \tag{1.271}$$

On obtient en fait

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\frac{df}{dt},g\} + \{f,\frac{dg}{dt}\} - \{f,g\}\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right) \tag{1.272}$$

et comme les équations canoniques donnent

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0 \tag{1.273}$$

il vient finalement

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\frac{df}{dt},g\} + \{f,\frac{dg}{dt}\} \tag{1.274}$$

Le théorème de Poisson résulte de l'application de cette dernière formule aux deux intégrales premières F_1 et F_2 pour lesquelles on a $\dfrac{dF_1}{dt} = 0$ et $\dfrac{dF_2}{dt} = 0$.

Ainsi, connaissant deux intégrales premières F_1 et F_2 on peut en construire une troisième en formant leurs crochets de Poisson $F_3 = \{F_1, F_2\}$, puis une autre à l'aide des crochets $\{F_3, F_1\}$, et ainsi de suite. Toutefois, deux éventualités peuvent limiter la poursuite de ce processus de construction d'intégrales premières.

• Ou bien les fonctions ainsi obtenues sont des constantes, pouvant être nulles. Par exemple, si F est une intégrale première qui ne dépend pas explicitement du temps, $\{H, F\} = 0$.

• Ou bien les fonctions obtenues à partir d'un certain stade dépendent toutes fonctionnellement des précédentes. Il se peut qu'après un nombre fini d'opérations on obtienne les fonctions desquelles on était parti. On a alors engendré une algèbre de Lie de dimension finie. Ce cas peut effectivement se produire si le système étudié admet un groupe d'invariance auquel s'applique le théorème de Noether. Si ce groupe ne traduit pas les seules propriétés de symétrie d'espace et de temps, on l'appelle *groupe dynamique d'invariance*. Ceci montre l'importance prise par la recherche de tels groupes dynamiques d'invariance dans le cadre de la résolution des équations du mouvement.

♣ Considérons par exemple une particule de masse m soumise au potentiel $V(r) = -\dfrac{K}{r}$ où K est une constante et $r = OM$. Son Hamiltonien

$$H = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} + V(r) \tag{1.275}$$

où $\overrightarrow{p} = m\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$ est l'impulsion de la particule, est une constante du mouvement. Il est aussi invariant par rotation autour de l'origine O. Il s'ensuit que le moment cinétique

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} \tag{1.276}$$

est aussi une constante du mouvement et ses crochets avec H sont nuls. Pour résoudre totalement le problème, il faut disposer de deux autres intégrales premières. Celles-ci ne peuvent être déduites de H et $\overrightarrow{L}$ puisque

$$\{H,\,\overrightarrow{L}\} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \{L_i, L_j\} = -\sum_k \epsilon_{ijk}\; L_k \tag{1.277}$$

ϵ_{ijk} étant le tenseur de rang trois complètement antisymétrique et tel que $\epsilon_{123} = 1$.

On montre que le *vecteur de Runge et Lenz*

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{\sqrt{2m|H|}}\left(\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{p} + mK\frac{\overrightarrow{OM}}{r}\right) \tag{1.278}$$

a des crochets nuls avec H. C'est donc aussi une constante du mouvement, et si l'on calcule les crochets de ses composantes entre elles ou avec celles du moment cinétique, on trouve

$$\{A_i, A_j\} = \epsilon \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad , \quad \{L_i, A_j\} = -\sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{1.279}$$

où ϵ est le signe de H. On n'obtient donc aucune intégrale première nouvelle. Les relations ci-dessus montrent que $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{L}$ engendrent l'algèbre de Lie du groupe $SO(4)$ si $\epsilon = -1$ et celle du groupe $L(3,1)$ si $\epsilon = +1$. Ces groupes sont des groupes d'invariance spécifique du problème considéré (potentiel de Coulomb).

Envisageons maintenant un système hypothétique à n degrés de liberté dont le Hamiltonien H serait invariant sous le groupe $SO(2n)$ constitué de transformations agissant à la fois sur les coordonnées et leurs impulsions[15]. A priori, on dispose de $n(2n-1)$ intégrales premières avec les représentants des générateurs du groupe agissant sur les fonctions des coordonnées et des impulsions. Cependant, l'invariance de H sous une transformation donnée n'implique pas pour autant que cette transformation conduise à de nouvelles variables canoniques. Comme nous l'avons vu au paragraphe (1.9.4), seuls n^2 de ces représentants sont associés à des transformations canoniques. Les intégrales premières du mouvement sont donc à rechercher uniquement parmi ceux-ci et, plus précisément, parmi les n^2 formes (1.223). Ces formes sont d'ailleurs en nombre suffisant pour fournir les $2n-1$ intégrales premières indépendantes requises.

1.11 Exemples de transformations canoniques

1.11.1 Pour un degré de liberté

Envisageons une transformation canonique $(q,p) \to (Q,P)$ indépendante du temps. Dans ce cas, le nouvel Hamiltonien est obtenu à partir de l'ancien simplement en remplaçant dans ce dernier les expressions des anciennes variables en fonction des nouvelles

$$H'(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P)) \tag{1.280}$$

Nous supposerons que l'on a ajusté les dimensions de q et p de manière à rendre ces grandeurs sans dimension. On peut alors représenter l'ensemble (q,p) par le nombre complexe sans dimension

[15] C'est le cas d'un oscillateur à n dimensions n'ayant qu'une seule pulsation propre.

$z = q + ip$ et imaginer ladite transformation comme une tranformation dans le plan complexe $z \rightarrow Z = Q + iP$.

Le Jacobien de la transformation étant égal à 1, cette transformation est donc *conforme* (elle conserve les angles). Supposons de plus qu'elle soit représentée par une fonction *holomorphe*, c'est-à-dire que l'on puisse écrire

$$Z = f(z) \tag{1.281}$$

où la fonction f de la variable complexe z est holomorphe dans tout domaine borné. Dans ce cas, on a les relations de Cauchy

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial p} \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial P}{\partial q} \tag{1.282}$$

et la dérivée de f est donnée par

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial q} - i\frac{\partial Q}{\partial p} \tag{1.283}$$

On sait que le carré du module de cette dérivée est égal au Jacobien de la transformation. Ainsi

$$|f'(z)| = 1 \ , \quad \text{pour tout } z \tag{1.284}$$

Ceci élimine d'emblée les fonctions holomorphes telles que $(z - a)^n$ pour $n \geq 2$, $\exp z^2$, etc, dont la dérivée s'annule en un point du plan complexe. La relation précédente conduit à exprimer la dérivée sous la forme

$$f'(z) = \exp i\theta(z) \tag{1.285}$$

où $\theta(z)$ est une fonction réelle de z. Or, $f(z)$ étant holomorphe, $f'(z)$ l'est également. Cependant, d'après un théorème dû à Liouville, une fonction holomorphe et bornée dans le plan complexe *ouvert* (point à l'infini exclu) est une constante. Comme la dérivée a un module égal à 1, elle est bornée et est donc constante. On en déduit que θ est une simple constante réelle. Par conséquent, la seule forme analytique possible pour $f(z)$ est

$$f(z) = ze^{i\theta} + C \tag{1.286}$$

où C est une constante complexe. Le facteur $e^{i\theta}$ décrit une rotation alors que C rend compte d'une translation. Ainsi, les seules transformations canoniques correspondant à des fonctions holomorphes sont des *déplacements* (rotations, translations) dans le plan (q, p).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les transformations suivantes sont canoniques.

$$Q = \sqrt{2\lambda q}\ \cos p \ , \quad P = \sqrt{\frac{2q}{\lambda}}\ \sin p \quad \text{(on suppose } q > 0)$$

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \ , \quad P = q \cot p$$

$$Q = \ln\left(1 + \sqrt{q} \cos p\right) \ , \quad P = 2\sqrt{q}\left(1 + \sqrt{q}\right) \sin p$$

1.11.2 Pour deux degrés de liberté

Voici des exemples de transformations canoniques :

$$
\begin{aligned}
Q_1 = q_1^2 + \lambda^2 p_1^2 \ , \quad Q_2 = \frac{1}{2\lambda^2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \lambda^2 p_1^2 + \lambda^2 p_2^2\right) \\
P_1 = \frac{1}{2\lambda}\left(\tan^{-1}(\frac{q_1}{\lambda p_1}) - \tan^{-1}(\frac{q_2}{\lambda p_2})\right) \ , \quad P_2 = \lambda \tan^{-1}(\frac{q_2}{\lambda p_2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1 = \sqrt{\frac{2q_1}{\lambda_1}}\ \cos p_1 + \sqrt{\frac{2q_2}{\lambda_2}}\ \cos p_2 \ , \quad Q_2 = -\sqrt{\frac{2q_1}{\lambda_1}}\ \cos p_1 + \sqrt{\frac{2q_2}{\lambda_2}}\ \cos p_2 \\
P_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 q_1}{2}}\ \sin p_1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 q_2}{2}}\ \sin p_2 \ , \quad P_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_1 q_1}{2}}\ \sin p_1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 q_2}{2}}\ \sin p_2
\end{aligned}
$$

1.12 Application 1 : Oscillateur harmonique à une dimension, libre et non amorti

Le Lagrangien d'un tel oscillateur peut être écrit sous la forme générique suivante

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\alpha}{2}\dot{q}^2 - \frac{\beta}{2}q^2 \tag{1.287}$$

α et β étant positifs. Il peut s'agir d'une masse M accrochée au bout d'un ressort de raideur k et évoluant sans frottement le long d'un axe horizontal, auquel cas $\alpha = M$, $\beta = k$ et q est la coordonnée du centre de gravité de la masse selon cet axe ; s'il s'agit d'un fil de torsion de moment d'inertie I et de constante de torsion C, alors q représentera l'angle de rotation du fil et l'on aura $\alpha = I$, $\beta = C$.

L'équation d'Euler-Lagrange donne

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\beta q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \alpha \ddot{q} \tag{1.288}$$

d'où l'équation différentielle

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \ , \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{1.289}$$

La solution générale de cette équation est bien connue et s'écrit sous la forme

$$q(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{1.290}$$

a et b étant deux constantes à ajuster par des conditions initiales ou des conditions aux limites. Appliquant les conditions aux limites

$$q(t_1) = q_1 = a\cos\omega t_1 + b\sin\omega t_1 \ , \quad q(t_2) = q_2 = a\cos\omega t_2 + b\sin\omega t_2 \tag{1.291}$$

il vient

$$a = \frac{[\ q_1\sin\omega t_2 - q_2\sin\omega t_1\ ]}{\sin\omega(t_2 - t_1)} \ , \quad b = \frac{[\ -q_1\cos\omega t_2 + q_2\cos\omega t_1\ ]}{\sin\omega(t_2 - t_1)} \tag{1.292}$$

et

$$q(t) = \frac{[\ q_1\sin\omega(t_2 - t) + q_2\sin\omega(t - t_1)\ ]}{\sin\omega(t_2 - t_1)} \tag{1.293}$$

Pour la loi horaire ainsi trouvée, le Lagrangien prend la forme

$$L = \frac{\beta}{2\sin^2\omega(t_2 - t_1)} \left[\ q_1^2 \cos 2\omega(t_2 - t) + q_2^2 \cos 2\omega(t - t_1) - 2q_1 q_2 \cos\omega(t_2 + t_1 - 2t)\ \right] \quad (1.294)$$

On trouve alors l'expression suivante de l'intégrale d'Action

$$W = \frac{\beta}{2\omega \sin\omega(t_2 - t_1)} \left[\ (q_1^2 + q_2^2)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2q_2 q_1\ \right] \quad (1.295)$$

L'impulsion est donnée par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \alpha \dot{q} = \frac{\beta}{\omega \sin\omega(t_2 - t_1)} [\ q_2 \cos\omega(t - t_1) - q_1 \cos\omega(t_2 - t)\ ] \quad (1.296)$$

d'où le Hamiltonien

$$H = p\dot{q} - L = \frac{\beta}{2\sin^2\omega(t_2 - t_1)} \left[\ q_2^2 + q_1^2 - 2q_2 q_1 \cos\omega(t_2 - t_1)\ \right] \quad (1.297)$$

Ce Hamiltonien est constant, ce qui résulte du fait que le Lagrangien, sous sa forme générale, ne dépend pas explicitement du temps.

On vérifie sans peine les relations

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = -p_1\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial t_2} = -H_2 = -H \quad (1.298)$$

Posons, de façon provisoire, $C = \cos 2\omega(t_2 - t_1)$ et $S = \sin 2\omega(t_2 - t_1)$ et exprimons q_2 et p_2 en fonction de q_1, p_1, t_2 et t_1. On obtient

$$q_2 = q_1 C + p_1 \frac{S}{\alpha\ \omega}\ ,\quad p_2 = p_1 C - q_1 \alpha\ \omega S \quad (1.299)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} dp_2 \wedge dq_2 &= (dp_1 C - dq_1 \alpha\ \omega S) \wedge \left(dq_1 C + dp_1 \frac{S}{\alpha\ \omega} \right) \\ &= dp_1 \wedge dq_1 (C^2 + S^2) = dp_1 \wedge dq_1 \end{aligned} \quad (1.300)$$

et le volume élémentaire d'espace des phases est bien conservé au cours du mouvement.

En fonction des coordonnées et des impulsions, l'Action prend une forme extrêmement simple :

$$W = \frac{1}{2}\,(q_2 p_2 - q_1 p_1) \quad (1.301)$$

Notons que si l'on pose $a = A\cos\omega t_0$ et $b = A\sin\omega t_0$, A étant une constante pouvant être choisie positive et t_0 une constante arbitraire homogène à un temps, la loi horaire (1.290) devient

$$q(t) = A\cos\omega(t - t_0) \quad (1.302)$$

Comme attendu, si l'on change l'origine du temps en prenant comme nouvelle date $t' = t - t_0$, la loi horaire ne dépend plus que d'une seule constante A : pour ce système à un seul degré de liberté, il n'existe qu'une seule intégrale première fondamentale à partir de laquelle toutes les autres se construisent. Le Hamiltonien H étant conservé, on peut le choisir comme étant cet invariant fondamental. On trouve notamment que A s'exprime en fonction de H comme

$$A = \sqrt{\frac{2H}{\beta}} \quad (1.303)$$

On peut retrouver ce résultat d'une autre façon. Tout d'abord, signalons que si l'on fait le changement d'échelle $q \to Q = q/\rho$ où ρ est une constante, il est nécessaire de faire également sur l'impulsion un changement d'échelle $p \to P = p/\rho'$ si l'on veut préserver les équations canoniques (cette transformation doit être canonique). Les deux paramètres ρ et ρ' doivent donc être tels que

$$\{p, q\}_{Q,P} = \rho\rho' = 1 \tag{1.304}$$

Dans cette opération, le Hamiltonien est conservé et prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} + \frac{\beta q^2}{2} = \frac{\beta\rho^2}{2}\left[Q^2 + \frac{P^2}{\alpha\beta\rho^4}\right] \tag{1.305}$$

Faisons alors le choix

$$\rho = \frac{1}{(\alpha\beta)^{1/4}} \tag{1.306}$$

de sorte que

$$H = \omega h \ , \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{2}\left[Q^2 + P^2\right] \tag{1.307}$$

La nouvelle coordonnée Q et son impulsion associée P ont maintenant la même dimension, celle de la racine carrée du produit d'une énergie par un temps. Envisageant des transformations dans un plan (Q, P) (c'est l'espace des phases pour l'oscillateur), il est clair que seules les rotations laissent invariantes la "norme" $Q^2 + P^2$. D'après le théorème de Noether, on en déduit que le générateur infinitésimal de ces rotations est une grandeur conservée. Or, pour une rotation infinitésimale d'angle $\delta\theta$, les variations de Q et de P sont, respectivement,

$$\delta Q = \delta\theta\ P \ , \quad \text{et} \quad \delta P = -\delta\theta\ Q \tag{1.308}$$

Utilisant la relation (1.215) avec $a = 0$, $b = -c = 1$, on trouve que ledit générateur a pour expression

$$B = \delta\theta\ h \tag{1.309}$$

ce qui confirme que, pour ce système, la seule intégrale première fondamentale est le Hamiltonien lui-même.
On peut retrouver la loi horaire du mouvement de l'oscillateur en effectuant une transformation canonique. Posons en effet

$$Q' = \frac{1}{2}\left[Q^2 + P^2\right] \ , \quad P' = -\tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right) \tag{1.310}$$

On a

$$\frac{\partial Q'}{\partial P} = P \ , \quad \frac{\partial Q'}{\partial Q} = Q \ , \quad \frac{\partial P'}{\partial P} = \frac{Q}{Q^2 + P^2} \ , \quad \frac{\partial P'}{\partial Q} = -\frac{P}{Q^2 + P^2} \tag{1.311}$$

d'où l'on déduit que

$$\{P', Q'\}_{Q,P} = 1 \tag{1.312}$$

et donc que cette transformation est bien de nature canonique. En fonction des nouvelles variables, le Hamiltonien prend la forme

$$H = \omega Q' \tag{1.313}$$

de laquelle on déduit les nouvelles équations canoniques

$$\dot{Q}' = \frac{\partial H}{\partial P'} = 0 \ , \quad \dot{P}' = -\frac{\partial H}{\partial Q'} = -\omega \tag{1.314}$$

d'où

$$Q' = \text{constante} = H/\omega \ , \quad P' = -\omega t + \text{constante} = -\omega(t - t_0) \tag{1.315}$$

Etant donné, qu'à un signe près inessentiel, on a

$$Q = \sqrt{\frac{Q'}{2}} \cos P' \tag{1.316}$$

la loi horaire (1.302) en résulte immédiatement.

1.13 Application 2 : Oscillateur harmonique à deux dimensions, libre et non amorti

Nous considérons ici un Lagrangien de la forme

$$L(q_1, q_2, , \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{\alpha}{2} \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) - \frac{\beta}{2} \left(q_1^2 + q_2^2 \right) \tag{1.317}$$

conduisant au Hamiltonien[16]

$$H = \frac{1}{2\alpha} \left[p_1^2 + p_2^2 \right] + \frac{\beta}{2} \left[q_1^2 + q_2^2 \right] \tag{1.318}$$

Comme dans le cas de l'oscillateur à une dimension, faisons un changement d'échelle sur les coordonnées et les impulsions à l'aide du paramètre (1.306), de sorte que, avec les nouvelles coordonnées et les nouvelles impulsions que nous continuerons de noter q_1 et q_2 pour les premières et p_1 et p_2 pour les secondes, le Hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{\omega}{2} \left[\ q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \ \right] \ , \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{1.319}$$

Il devient alors clair que ce Hamiltonien est invariant sous le groupe des rotations dans l'espace des phases, qui est ici à quatre dimensions, et que l'on munit de la “norme euclidienne”

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2} \tag{1.320}$$

Ces rotations forment le groupe $SO(4)$ et ont 6 générateurs infinitésimaux représentés par les matrices 4x4 suivantes

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad G_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad G_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.321}$$

$$G_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad G_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad G_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.322}$$

Le générateur G_{ij} engendre des rotations dans le plan (i, j) : il s'agit de rotations dans le plan (q_1, q_2) pour G_{12}, de rotations dans le plan (q_2, p_1) pour G_{23}, etc.

Introduisons alors les matrices

[16] Le Lagrangien se présente finalement comme la différence de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V. Il en résulte que le Hamiltonien s'écrit $H = T + V$.

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[G_{23} - G_{14}\right] \ , \quad A_2 = -\frac{1}{2}\left[G_{13} + G_{24}\right] \ , \quad A_3 = \frac{1}{2}\left[G_{12} - G_{34}\right] \tag{1.323}$$

d'une part, et

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[G_{23} + G_{14}\right] \ , \quad B_2 = -\frac{1}{2}\left[-G_{13} + G_{24}\right] \ , \quad B_3 = \frac{1}{2}\left[G_{12} + G_{34}\right] \tag{1.324}$$

d'autre part. On montre que ces matrices vérifient les relations de commutation

$$\begin{gathered} [A_1, A_2] = -A_3 \quad [A_2, A_3] = -A_1 \quad [A_3, A_1] = -A_2 \\ [A_i, B_j] = 0 \\ [B_1, B_2] = -B_3 \quad [B_1, B_2] = -B_3 \quad [B_1, B_2] = -B_3 \end{gathered} \tag{1.325}$$

qui révèlent que les matrices A_i d'une part et les matrices B_j d'autre part forment des algèbres de Lie indépendantes (elles ont entre elles des commutateurs nuls), et que ces algèbres sont homomorphes à celle, $su(2)$, du groupe des rotations à trois dimensions déjà mentionnée en (1.203). Ce résultat est bien connu : l'algèbre de Lie $so(4)$ est la somme directe $su(2) \oplus su(2)$. Par ailleurs, toutes les matrices A_i ou B_j ont pour carrés $-1/4$.

Comme on l'a vu au au paragraphe (1.9.4), tous les générateurs de $SO(4)$ ne peuvent servir à définir une transformation canonique. C'est le cas des matrices A_1 et A_3 qui s'écrivent

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.326}$$

et dont les transformations qu'elles engendrent conduisent à de nouvelles coordonnées et de nouvelles impulsions qui ne satisfont pas les bons crochets de Poisson. Par exemple, A_1 engendre des transformations décrites par la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.327}$$

Les nouvelles variables sont

$$\begin{aligned} q'_1 &= \cos\theta \ q_1 + \sin\theta \ p_2 \quad q'_2 = \cos\theta \ q_2 - \sin\theta \ p_1 \\ p'_1 &= \cos\theta \ p_1 + \sin\theta \ q_2 \quad p'_2 = \cos\theta \ p_2 - \sin\theta \ q_1 \end{aligned} \tag{1.328}$$

et ont pour crochets

$$\{p'_2, q'_1\} = \{p'_1, q'_2\} = 0 \ , \quad \{p'_2, q'_2\} = \{p'_1, q'_1\} = \cos 2\theta \ , \quad \{q'_1, q'_2\} = \{p'_2, p'_1\} = \sin 2\theta \tag{1.329}$$

Seules les matrices A_2, B_1, B_2 et B_3 ont la forme requise. On obtient pour chacune de ces matrices les générateurs (1.222) suivants

$$\begin{aligned} B(A_2) &= -\frac{1}{4} \ \delta\alpha_1 \ \left[\ q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 \ \right] \quad B(B_1) = \frac{1}{2} \ \delta\alpha_2 \ \left[\ q_1 q_2 + p_1 p_2 \ \right] \\ B(B_2) &= -\frac{1}{4} \ \delta\alpha_3 \ \left[\ q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2 \ \right] \quad B(B_3) = \frac{1}{2} \ \delta\alpha_4 \ \left[\ p_1 q_2 - p_2 q_1 \ \right] \end{aligned} \tag{1.330}$$

où l'on reconnait les formes élémentaires déjà mentionnées en (1.223). On pouvait s'attendre à retrouver parmi elles le Hamiltonien (dans l'expression de $B(A_1)$), qui est l'une des intégrales premières de cet oscillateur. Deux autres intégrales premières peuvent être choisies comme étant $I_1 = \frac{1}{2}\ [\ q_1 q_2 + p_1 p_2\ ]$ et $I_2 = \frac{1}{2}\ [\ p_1 q_2 - p_2 q_1\ ]$. L'intégrale première $I_3 = -\frac{1}{4}\ [\ q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2\ ]$, étant donnée par les crochets de I_1 et I_2 n'est pas indépendante de I_1 et I_2. On trouve bien au total $3 =$ 2x2-1 intégrales premières indépendantes.

Il est facile de vérifier que ces trois intégrales premières forment une algèbre de Lie homomorphe à $su(2)$:

$$\{I_1, I_2\} = -I_3\ ,\quad \{I_3, I_1\} = -I_2\ ,\quad \{I_2, I_3\} = -I_1 \tag{1.331}$$

1.14 Application 3 : Système de deux ressorts couplés

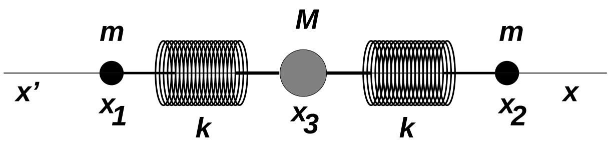

Figure 1.1

On considère ici un système mécanique comportant une masse M reliée à deux masses identiques m par deux ressorts identiques, sans masse, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, comme indiqué à la figure (1.1). L'ensemble est astreint à évoluer le long d'un axe fixe $x'x$, dans un référentiel galiléen et n'est soumis à aucune action provenant d'un éventuel champ extérieur. Tout frottement est négligé. On note x_1 l'abcisse de la première masse m, x_2 celle de la masse M et x_3 celle de la seconde masse m ($x_3 > x_2 > x_1$). Il s'agit d'un système à trois degrés de liberté dont le Lagrangien s'écrit

$$L = \frac{m}{2}\ [\ \dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\ ] + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}\ [\ (x_2 - x_1 - \ell_0)^2 + (x_3 - x_2 - \ell_0)^2\ ] \tag{1.332}$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant

$$u_1 = x_3 - x_1 - 2\ell_0\ ,\quad u_2 = x_1 + x_3 - 2x_2\ ,\quad u_3 = x_1 + x_3 + \frac{M}{m}x_2 - \ell_0\left(2 + \frac{M}{m}\right) \tag{1.333}$$

soit

$$x_1 = \frac{1}{2(1+\frac{2m}{M})}\left[u_2 - u_1(1+\frac{2m}{M}) + \frac{2m}{M}u_3\right]\ ,\quad x_2 = \ell_0 + \frac{1}{1+\frac{2m}{M}}\,[u_3 - u_2]\,\frac{m}{M} \tag{1.334}$$

et

$$x_3 = 2\ell_0 + \frac{1}{2(1+\frac{2m}{M})}\left[u_2 + u_1(1+\frac{2m}{M}) + \frac{2m}{M}u_3\right] \tag{1.335}$$

En fonction de ces nouvelles variables et de leurs dérivées temporelles, le Lagrangien prend la forme

$$L = \frac{m}{4}\dot{u}_1^2 + \frac{mM}{4(M+2m)}\dot{u}_2^2 + \frac{m^2}{2(M+2m)}\dot{u}_3^2 - \frac{k}{4}\ [\ u_1^2 + u_2^2\ ] \tag{1.336}$$

Cette expression ne contient pas la variable u_3 qui est donc ici une variable *cyclique*[17]. Appliquant l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à u_3, on trouve

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_3}\right) = \frac{m^2}{(M+2m)}\frac{d\dot{u}_3}{dt} = 0 \ , \quad \text{soit} \quad \dot{u}_3 = \ \text{constante} \tag{1.337}$$

Ce résultat était prévisible. En effet, d'après sa définition, u_3 est lié à la grandeur $m(x_1+x_3)+Mx_2$ qui n'est autre que l'abcisse du centre de masse du système. Or, ce système étant isolé[18] dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, la vitesse de son centre de masse reste constante au cours du mouvement. Cette vitesse est donc une intégrale première.

Eliminons alors du Lagrangien l'énergie cinétique du centre de masse[19] et redéfinissons le Lagrangien comme

$$L = \frac{m}{4}\dot{u}_1^2 + \frac{mM}{4(M+2m)}\dot{u}_2^2 - \frac{k}{4}\left[\ u_1^2 + u_2^2\ \right] \tag{1.338}$$

Un nouveau changement de coordonnées

$$q_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}} \ , \quad q_2 = u_2\sqrt{\frac{M}{2(M+2m)}} \tag{1.339}$$

conduit à l'expression

$$L = \frac{m}{2}\left[\ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\ \right] - \frac{k}{2}q_1^2 - \frac{k'}{2}q_2^2 \ , \quad \text{avec} \quad k' = k\left(1+\frac{2m}{M}\right) \tag{1.340}$$

Effectuons enfin le dernier changement $q_1 = \lambda_1 Q_1$, $q_2 = \lambda_2 Q_2$. Il vient

$$L = \lambda_1^2\left[\frac{m}{2}\dot{Q}_1^2 - \frac{k}{2}Q_1^2\right] + \lambda_2^2\left[\frac{m}{2}\dot{Q}_2^2 - \frac{k'}{2}Q_2^2\right] \tag{1.341}$$

Les impulsions associées aux variables Q_1 et Q_2 sont, respectivement,

$$P_1 = m\lambda_1^2\dot{Q}_1 \ , \quad \text{et} \quad P_2 = m\lambda_2^2\dot{Q}_2 \ , \tag{1.342}$$

d'où le Hamiltonien

$$H = \lambda_1^2\left[\frac{m}{2}\dot{Q}_1^2 + \frac{k}{2}Q_1^2\right] + \lambda_2^2\left[\frac{m}{2}\dot{Q}_2^2 + \frac{k'}{2}Q_2^2\right] = \frac{P_1^2}{2m\lambda_1^2} + \lambda_1^2\frac{k}{2}Q_1^2 + \frac{P_2^2}{2m\lambda_2^2} + \lambda_2^2\frac{k'}{2}Q_2^2 \tag{1.343}$$

Faisons maintenant le choix

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{\sqrt{mk}} \ , \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{\sqrt{mk'}} \tag{1.344}$$

Posant $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k'}{m}}$, le Hamiltonien prend alors la forme simplifiée

$$H = \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 \ , \quad \text{avec} \quad h_1 = \frac{1}{2}\left(Q_1^2 + P_1^2\right) \ , \quad h_2 = \frac{1}{2}\left(Q_2^2 + P_2^2\right) \tag{1.345}$$

Les équations de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\dot{P}_1 \ , \quad \frac{\partial H}{\partial Q_2} = -\dot{P}_2 \ , \quad \frac{\partial H}{\partial P_1} = \dot{Q}_1 \ , \quad \frac{\partial H}{\partial P_2} = \dot{Q}_2 \tag{1.346}$$

[17] Une variable est dite cyclique si le Lagrangien n'en dépend pas explicitement. D'après l'équation d'Euler-Lagrange qui lui correspond, l'impulsion qui lui est associée est donc une constante du mouvement.

[18] Plus précisément, *pseudo-isolé* car les deux ressorts sont astreints, par un système mécanique externe, à se déplacer selon la direction spécifiée $x'x$, contrainte qui d'ailleurs réduit le nombre de degrés de liberté du système.

[19] Ce qui revient à se placer dans le référentiel du centre de masse.

conduisent aux deux équations d'évolution

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1 \ , \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 \tag{1.347}$$

qui ont pour solutions

$$Q_1 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t \ , \quad Q_2 = a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t \tag{1.348}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 étant des constantes. Le système considéré a donc deux pulsations propres ω_1 et ω_2, et Q_1 et Q_2 représentent les "modes propres" associés.

Nous avons déjà signalé qu'une de ces constantes peut être éliminée par une redéfinition de l'origine des temps, de sorte que l'on peut récrire les lois horaires précédentes sous la forme

$$Q_1 = A_1 \cos\omega_1 t \ , \quad Q_2 = A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t \tag{1.349}$$

Les nouvelles constantes A_1, A_2 et B_2 sont liées aux "sous-Hamiltoniens" h_1 et h_2. En effet, puisque $P_1 = \dot{Q}_1/\omega_1$ et $P_2 = \dot{Q}_2/\omega_2$, on a

$$Q_1^2 + P_1^2 = A_1^2 = 2h_1 \ , \quad Q_2^2 + P_2^2 = A_2^2 + B_2^2 = 2h_2 \tag{1.350}$$

Il est facile de vérifier que les crochets de Poisson de h_1 et h_2 avec H sont nuls, et que ces grandeurs constituent donc des intégrales premières. Le système étant à trois degrés de liberté, il possède 5 intégrales premières indépendantes. Quatre émergent clairement de ce qui précède : la vitesse, constante, du centre de masse, les "sous-Hamiltoniens" h_1 et h_2, et A_2. A noter que les trois dernières sont associées aux deux degrés de liberté "internes" décrits par les variables Q_1 et Q_2. L'intégrale première manquante pourra être choisie comme étant l'abcisse qui définit la position initiale du centre de masse. Le bilan est ainsi complet.

Dans le cas de l'oscillateur à deux degrés de liberté qui a été étudié à l'annexe 3 et qui n'a qu'une seule pulsation propre, nous avons trouvé trois intégrales premières formant une algèbre homomorphe à $su(2)$. Ceci reflètait la symétrie évidente du Hamiltonien d'alors sous le groupe $SO(4)$. Dans le cas présent, nous n'avons plus cette symétrie, car $\omega_2 \neq \omega_1$. On a maintenant

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(Q_1 Q_2 + P_1 P_2\right) = \frac{1}{2} A_1 \left[A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t + B_2 \sin(\omega_2 - \omega_1)t\right] \tag{1.351}$$

et

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(P_1 Q_2 - P_2 Q_1\right) = \frac{1}{2} A_1 \left[A_2 \sin(\omega_2 - \omega_1)t - B_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t\right] \tag{1.352}$$

Manifestement, I_1 et I_2 ne sont plus des constantes du mouvement, du fait de l'existence de deux pulsations propres distinctes. Seule la grandeur $I_3 = \frac{1}{2}\left[h_2 - h_1\right]$ reste encore une intégrale première. La raison en est que le nouvel Hamiltonien est lui aussi invariant d'une part sous des rotations dans le plan (Q_1, P_1) générées par h_1, et, d'autre part, sous des rotations dans le plan (Q_2, P_2) générées par h_2. Néanmoins, I_1, I_2 et I_3 forment malgré tout une algèbre $su(2)$, mais qui n'est plus complètement associée à un groupe d'invariance du Hamiltonien.

Recherchons alors s'il est possible, à l'aide des trois intégrales premières correspondant aux deux degrés de liberté internes du système, de construire une algèbre de Lie de structure connue, qui serait donc associée à un groupe dynamique d'invariance du système. Il est facile de vérifier que parmi toutes les 10 formes quadratiques indépendantes telles que (1.215) générant des transformations linéaires sur les coordonnées et les impulsions, seules h_1 et h_2 ont des crochets nuls avec H et sont donc intégrales premières, ce que nous savons déjà. Cela signifie que, à part les rotations engendrées par h_1 et h_2, il n'existe pas d'autre groupe d'invariance agissant linéairement sur les coordonnées et les impulsions. La troisième intégrale première à rechercher ne s'exprime donc pas de façon quadratique en fonction des coordonnées et des impulsions. C'est d'ailleurs ce qui ressort de l'étude menée plus haut : le coefficient A_2 qui peut être choisi comme intégrale première fait intervenir des fonctions trigonométriques des coordonnées et des impulsions.

Par souci de symétrie, nous récrirons les lois horaires sous la forme

$$Q_1 = \rho_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \ , \quad Q_2 = \rho_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{1.353}$$

Comme

$$P_1 = -\rho_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \ , \quad P_2 = -\rho_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \tag{1.354}$$

on a $\rho_1^2 = Q_1^2 + P_1^2$ et $\rho_2^2 = Q_2^2 + P_2^2$. Nous choisirons

$$\rho_1 = \sqrt{Q_1^2 + P_1^2} = \sqrt{2h_1} \ , \quad \rho_2 = \sqrt{Q_2^2 + P_2^2} = \sqrt{2h_2} \tag{1.355}$$

Posons alors

$$t_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\omega_1 + \omega_2} \ , \quad \alpha = \frac{\omega_1 \phi_2 - \omega_2 \phi_1}{\omega_1 + \omega_2} \ , \quad t' = t + t_0 \tag{1.356}$$

Il vient

$$Q_1 = \rho_1 \cos(\omega_1 t' - \alpha) \ , \quad Q_2 = \rho_2 \cos(\omega_2 t' + \alpha) \tag{1.357}$$

Ces nouvelles expressions font apparaître clairement une nouvelle intégrale première, l'angle α. Ceci peut être mis en évidence d'une autre façon. En effet, toute intégrale première F qui ne dépend pas explicitement du temps doit avoir des crochets nuls avec le Hamiltonien :

$$\{H, F\} = \omega_1 P_1 \frac{\partial F}{\partial Q_1} - \omega_1 Q_1 \frac{\partial F}{\partial P_1} + \omega_2 P_2 \frac{\partial F}{\partial Q_2} - \omega_2 Q_2 \frac{\partial F}{\partial P_2} = 0 \tag{1.358}$$

Posant $Q_1 = \rho_1 \cos\psi_1$, $P_1 = \rho_1 \sin\psi_1$, $Q_2 = \rho_2 \cos\psi_2$, $P_2 = \rho_2 \sin\psi_2$, et considérant F comme fonction de ρ_1, ρ_2, ψ_1 et ψ_2, cette équation prend la forme

$$\omega_1 \frac{\partial F}{\partial \psi_1} + \omega_2 \frac{\partial F}{\partial \psi_2} = 0 \tag{1.359}$$

Posons

$$\frac{\psi_1}{\omega_1} = \gamma - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_1\omega_2} \ \alpha \ , \quad \frac{\psi_2}{\omega_2} = \gamma + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_1\omega_2} \ \alpha \tag{1.360}$$

Avec les nouvelles variables γ et α, la dernière équation devient

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0 \tag{1.361}$$

ce qui montre que toute intégrale première s'exprime comme une fonction uniquement de $\rho_1 = \sqrt{2h_1}$, de $\rho_2 = \sqrt{2h_2}$ et de

$$\alpha = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left\{ \omega_1 \tan^{-1}(\frac{P_2}{Q_2}) - \omega_2 \tan^{-1}(\frac{P_1}{Q_1}) \right\} \tag{1.362}$$

On note les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial Q_1} &= \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \ \frac{P_1}{\rho_1^2} & \frac{\partial \alpha}{\partial P_1} &= -\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \ \frac{Q_1}{\rho_1^2} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial Q_2} &= -\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \ \frac{P_2}{\rho_2^2} & \frac{\partial \alpha}{\partial P_2} &= \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \ \frac{Q_2}{\rho_2^2} \\
\{\rho_1, \cos\alpha\} &= -\frac{\omega_2 \sin\alpha}{\rho_1(\omega_1 + \omega_2)} & \{\rho_1, \sin\alpha\} &= \frac{\omega_2 \cos\alpha}{\rho_1(\omega_1 + \omega_2)} \\
\{\rho_2, \cos\alpha\} &= \frac{\omega_1 \sin\alpha}{\rho_2(\omega_1 + \omega_2)} & \{\rho_2, \sin\alpha\} &= -\frac{\omega_1 \cos\alpha}{\rho_2(\omega_1 + \omega_2)}
\end{aligned} \tag{1.363}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \{\rho_1\rho_2, \rho_1\rho_2\cos\alpha\} &= \frac{\sin\alpha}{\omega_1+\omega_2}\left(\omega_1\rho_1^2 - \omega_2\rho_2^2\right) \\ \{\rho_1\rho_2, \rho_1\rho_2\sin\alpha\} &= \frac{\cos\alpha}{\omega_1+\omega_2}\left(\omega_2\rho_2^2 - \omega_1\rho_1^2\right) \end{aligned} \tag{1.364}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} X &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\rho_1\rho_2\cos\alpha \\ Y &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\rho_1\rho_2\sin\alpha \\ Z &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}\left(\omega_1 h_1 - \omega_2 h_2\right) \end{aligned} \tag{1.365}$$

Il apparaît que ces trois fonctions constituent une algèbre de Lie homomorphe à $su(2)$:

$$\{X, Y\} = -Z \ , \quad \{Y, Z\} = -X \ , \quad \{Z, X\} = -Y \tag{1.366}$$

mais celle-ci ne semble pas avoir d'interprétation physique immédiate.

Posons alors $\Omega = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$, $\cos\theta = \omega_1/\Omega$, $\sin\theta = \omega_2/\Omega$, et effectuons la transformation canonique suivante[20]

$$\begin{aligned} Q_1' &= h_1\cos\theta + h_2\sin\theta \ , \quad P_1' = \psi_1\cos\theta + \psi_2\sin\theta \\ Q_2' &= h_2\cos\theta - h_1\sin\theta \ , \quad P_2' = \psi_2\cos\theta - \psi_1\sin\theta \end{aligned} \tag{1.367}$$

La première coordonnée Q_1' est facilement identifiable : $Q_1' = H/\Omega$. La seconde impulsion P_2' est liée à l'angle α : $P_2' = \alpha(\omega_1+\omega_2)/\Omega$. Les deux coordonnées Q_1', Q_2' et l'impulsion P_2' peuvent être choisies comme intégrales premières fondamentales. Comme $\{P_1', Q_1'\} = \{P_1', H\}/\Omega = 1 \neq 0$, l'impulsion P_1' n'est pas une intégrale première. C'est en fait une fonction affine du temps puisque

$$P_1' = \frac{\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2}{\Omega} = \frac{\omega_1}{\Omega}\left[\alpha-\omega_1 t\right] + \frac{\omega_2}{\Omega}\left[-\alpha-\omega_2 t\right] = -\Omega t + \alpha\,\frac{\omega_1-\omega_2}{\Omega} \tag{1.368}$$

Posons maintenant

$$T = \frac{\Omega}{\omega_1\omega_2}P_2' = \frac{\psi_2}{\omega_2} - \frac{\psi_1}{\omega_1} \tag{1.369}$$

Comme elle a des crochets de Poisson nuls avec ψ_1 et ψ_2, la fonction T, considérée comme opérateur, engendre des transformations qui laissent invariantes les orientations des "vecteurs" (Q_1, P_1) et (Q_2, P_2), mais qui agissent sur leurs normes $\sqrt{2h_1}$ et $\sqrt{2h_2}$, puisque

$$\{T, \omega_1 h_1\} = -1 \ , \quad \{T, \omega_2 h_2\} = +1 \tag{1.370}$$

Le résultat de cette action sera donc une translation de $\omega_1 h_1$ et une translation exactement opposée de $\omega_2 h_2$, laissant leur somme H invariante. Il s'agit bien d'une symétrie du Hamiltonien du système, correspondant à un groupe d'invariance[21].

[20]Vérifier qu'il s'agit bien d'une transformation canonique.

[21]On notera le fait intéressant que l'échange de $\omega_1 h_1$ en $\omega_2 h_2$ laisse aussi le Hamiltonien invariant, mais comme cette opération ne peut être associée à un groupe continu de transformations, elle ne peut conduire à une intégrale première. L'invariance du Hamiltonien par les translations dont il est question ici est une autre expression de cette symétrie au moyen d'un groupe continu.