Chapitre 2

Passage aux systèmes à une infinité de degrés de liberté

2.1 Exemple d'une chaîne linéaire de ressorts

2.1.1 Description en termes de coordonnées

Considérons une chaîne linéaire de $N+1$ ressorts identiques de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, reliés les uns à la suite des autres par N masses identiques m dont on négligera les dimensions. Les extrémités des deux ressorts se trouvant à l'un et l'autre bout de la chaîne sont supposées fixées. Les masses étant astreintes à se déplacer sur un axe $x'x$, leur nombre N est donc le nombre de degrés de liberté du système. Ici encore, tout phénomène dissipatif sera ignoré. En l'absence de perturbation, la position occupée par la $r$ième masse a pour abcisse $X_r = r\ell_0$, r courant de 1 à N. Le Lagrangien de ce système s'écrit

$$L = \frac{m}{2}\sum_{r=1}^{r=N} \dot{x}_r^2 - \frac{k}{2}\sum_{r=1}^{r=N+1} (x_r - x_{r-1} - \ell_0)^2 \tag{2.1}$$

x_r étant la position instantanée de la $r$ième masse, et où $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = (N+1)\ell_0$; ou, en introduisant les écarts $u_r = x_r - r\ell_0$:

$$L = \frac{m}{2}\sum_{r=1}^{r=N} \dot{u}_r^2 - \frac{k}{2}\sum_{r=1}^{r=N+1} (u_r - u_{r-1})^2 \tag{2.2}$$

en convenant que $u_0 = u_{N+1} = 0$. Avec ces variables, les équations d'Euler-Lagrange pour ce système s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_r}\right) = \frac{\partial L}{\partial u_r} \ , \quad \text{pour} \quad 1 \leq r \leq N \ , \quad \text{soit}$$

$$\ddot{u}_1 = -\omega^2 \ (2u_1 - u_2) \ , \quad \cdots \quad , \ \ddot{u}_r = -\omega^2 \ (2u_r - u_{r-1} - u_{r+1}) \ , \quad \cdots \quad , \tag{2.3}$$

$$\ddot{u}_N = -\omega^2 \ (2u_N - u_{N-1})$$

avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Ce système d'équations peut être récrit sous forme matricielle. Introduisons le vecteur à N composantes $u_1, \ u_2, \ \cdots \ , \ u_N$:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

et la matrice NxN

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

On a alors

$$\ddot{U}(t) = -\omega^2 \; MU(t) \tag{2.6}$$

La résolution de cette équation matricielle passe par la recherche des vecteurs propres de la matrice M. Or, celle-ci étant symétrique est diagonalisable et l'on peut trouver une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathcal{R}^N$ formée par des vecteurs propres de M. Montrons que non seulement les valeurs propres sont réelles mais qu'elles sont aussi positives. En effet, soit z un vecteur propre de M, associé à la valeur propre λ et de composantes notées $z_1, \; z_2, \; \cdots \; z_N$. Notant (X, Y) le produit scalaire euclidien dans $\mathcal{R}^N$, et $||X||$ la norme associée, on a, d'une part

$$(z, Mz) = \lambda \; (z, z) = \lambda \; ||z||^2 \tag{2.7}$$

et, d'autre part,

$$(z, Mz) = \sum_{r=1}^{N} u_r \frac{\partial F}{\partial z_r} \; , \quad \text{avec} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N+1} (z_r - z_{r-1})^2 \tag{2.8}$$

Mais puisque F est une fonction homogène de degré 2 selon les composantes z_r, on a[1]

$$(z, Mz) = \lambda \; ||z||^2 = 2F \geq 0 \tag{2.9}$$

Supposant $||z|| \neq 0$, on voit que la valeur propre $\lambda = 0$ correspondrait au cas où $F = 0$, c'est-à-dire à $z_1 = z_2 = \; \cdots \; = z_N = 0$ [2], soit à $||z|| = 0$, en contradiction avec l'hypothèse de départ. A noter que ce cas décrit la situation de repos complet de la chaîne, qui ne présente aucun intêret et doit donc être écartée. Ainsi, les valeurs propres de M sont strictement positives, ce qui signifie que les solutions de l'équation d'évolution (2.6) sont des fonctions sinusoïdales du temps, ce qui était en fait prévisible.

Soit I_N la matrice unité NxN et soit K la matrice NxN définie par $K = 2I_N - M$:

[1] D'après l'équation d'Euler des fonctions homogènes.
[2] Rappelons ici que la chaîne est fixée à ses deux extrémités.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

L'équation aux valeurs propres de M, $MU = \lambda U$, prend alors la forme $KU = (2-\lambda)U$ et le problème revient donc à chercher les valeurs propres $\eta = 2 - \lambda$ de K. Celles-ci annulent le déterminant NxN

$$D_N = \det(\eta I_N - K) = \begin{vmatrix} \eta & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \eta & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \eta & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & \eta & -1 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & -1 & \eta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \eta \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

En développant ce déterminant suivant les deux éléments de la première colonne, on arrive à la relation de récurrence

$$D_N = \eta D_{N-1} - D_{N-2} \tag{2.12}$$

Comme $\lambda > 0$, η est certainement inférieur à 2. Posons alors $\eta = 2\cos\varphi$. On a

$$D_2 = \eta^2 - 1 = 4\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$$

puis

$$D_3 = \eta^3 - 2\eta = 8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{\sin\varphi}$$

Supposons alors que l'on ait pour p entier ≥ 3

$$D_{p-1} = \frac{\sin p\,\varphi}{\sin\varphi} \ , \quad \text{et} \quad D_p = \frac{\sin(p+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

Ces relations sont vraies pour $p = 3$. Il vient

$$D_{p+1} = 2\cos\varphi\, D_p - D_{p-1} = \frac{1}{\sin\varphi}\ [\ 2\cos\varphi\sin(p+1)\varphi - \sin p\,\varphi\ ]$$

Or,

$$2\cos\varphi\sin(p+1)\varphi - \sin p\,\varphi \ = \ \sin(p+2)\varphi + \sin p\,\varphi - \sin p\,\varphi \ = \ \sin(p+2)\varphi$$

L'expression proposée est donc valable pour tout $p \geq 2$. On a ainsi

$$D_N = \frac{\sin(N+1)\varphi}{\sin\varphi} \tag{2.13}$$

L'annulation de D_N est obtenue pour $(N+1)\varphi = n\pi$, avec $n = 1\ ,\ 2\ ,\cdots, N$ [3]. On en déduit N valeurs propres distinctes et non nulles de M

$$\lambda_n = 2 - 2\cos\frac{n\pi}{N+1} \quad = 4\sin^2\frac{n\pi}{2(N+1)}\ ,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{2.14}$$

et N pulsations propres (non nulles) pour la chaîne

$$\omega_n = \ 2\omega\ \sin\frac{n\pi}{2(N+1)}\ , \quad n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{2.15}$$

L'équation aux valeurs propres permet aussi d'exprimer les N écarts $u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_N$ en fonction de u_1. En effet, l'équation $\lambda u_1 = 2u_1 - u_2$ donne

$$u_2 = u_1(2-\lambda) = \eta\ u_1 = 2\cos\varphi\ u_1 = u_1\ \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$$

Puis

$$u_3 = \eta u_2 - u_1 = (\eta^2 - 1)u_1 = D_2\ u_1 = u_1\ \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$$

Par récurrence, on en déduit que pour $1 \le r \le N$, on a[4]

$$u_r = u_1\ \frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi} \tag{2.16}$$

Pour chaque pulsation propre ω_n, la résolution de l'équation d'évolution $\ddot{U}_n = -\omega_n^2 U_n$ conduit à la solution générale suivante, qui décrit ce qu'on appelle un *mode propre* d'oscillations,

$$U_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t \tag{2.17}$$

où A_n et B_n sont deux vecteurs de $\mathcal{R}^N$ dont les composantes respectives a_r^n et b_r^n (où $1 \le r \le N$ et où n est l'indice de mode propre, courant de 1 à N) vérifient

$$a_r^n = a_1^n\ \frac{\sin r\varphi_n}{\sin\varphi_n}\ , \quad \text{et} \quad b_r^n = b_1^n\ \frac{\sin r\varphi_n}{\sin\varphi_n} \tag{2.18}$$

Pour chaque mode propre n, on peut donc écrire le $r$ième écart comme

$$u_r^n(t) = \frac{\sin r\varphi_n}{\sin\varphi_n}\ [\ a_1^n\ \cos\omega_n t + b_1^n\ \sin\omega_n t\ ]$$

Usant de formules connues de trigonométrie et posant $\psi_r^n = r\varphi_n$, on peut réexprimer cet écart sous la forme

$$u_r^n(t) = \alpha_n\cos(\omega_n t - \psi_r^n) + \beta_n\sin(\omega_n t - \psi_r^n) + \gamma_n\cos(\omega_n t + \psi_r^n) + \delta_n\sin(\omega_n t + \psi_r^n) \tag{2.19}$$

où α_n, β_n, γ_n et δ_n sont quatre constantes indépendantes de r données par

$$\alpha_n = -\gamma_n = \frac{b_1^n}{2\sin\varphi_n}\ , \quad \beta_n = -\delta_n = -\frac{a_1^n}{2\sin\varphi_n} \tag{2.20}$$

On peut alors envisager u_r^n comme une fonction non seulement de t mais aussi de $X_r = r\ell_0$ et poser $u_r^n = u_n(X_r, t)$. Introduisons aussi les grandeurs

[3] Les valeurs $n = 0$ et $n = N+1$ sont à exclure, car annulant aussi $\sin\varphi$, elles donnent $D_N = N+1$ pour la première et $D_N = (N+1)(-1)^{N+1}$ pour la seconde, c'est-à-dire des valeurs non nulles de D_N. De plus, la valeur $n = 0$ conduirait à $\lambda = 0$.

[4] On vérifiera que la dernière relation $u_{N-1} = \eta u_N$ est bien compatible avec cette expression.

$$v_n = \omega_n \ell_0/\varphi_n = \omega \ell_0 \frac{\sin(\varphi_n/2)}{\varphi_n/2} \tag{2.21}$$

homogènes à des vitesses. On a alors $\omega_n t \pm \psi_r^n = \omega_n \left(t \pm X_r/v_n\right)$. D'où

$$u_n(X_r, t) = f_n \left(t - X_r/v_n\right) + g_n \left(t + X_r/v_n\right) \tag{2.22}$$

avec

$$\begin{aligned} f_n \left(t - X_r/v_n\right) &= \gamma_n \cos\omega_n(t - X_r/v_n) + \delta_n \sin\omega_n(t - X_r/v_n) \\ g_n \left(t + X_r/v_n\right) &= \alpha_n \cos\omega_n(t + X_r/v_n) + \beta_n \sin\omega_n(t + X_r/v_n) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ainsi, dans l'expression de l'écart d'un mode propre donné, on trouve un terme $f_n \left(t - X_r/v_n\right)$ qui représente une déformation se propageant à la vitesse v_n le long de la chaîne. En effet, la valeur de ce signal est la même pour tous les couples (t, X_r) tels que $t - X_r/v_n$ garde une valeur constante. Si $t - X_r/v_n = t' - X_s/v_n$ avec $t' > t$, la valeur du signal à la date t à l'abcisse X_r est retrouvée à la date t' à l'abcisse $X_s = X_r + v_n(t' - t) > X_r$: il y a bien eu propagation du signal dans le sens $x'x$ à la vitesse v_n, de X_r à X_s. Le second terme quant à lui représente un signal se propageant à la vitesse $-v_n$, c'est-à-dire dans le sens xx'. De l'expression ci-dessus on tire aussi la relation

$$\frac{\partial^2}{\partial X_r^2} u_n(X_r, t) = \frac{1}{v_n^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(X_r, t) \tag{2.24}$$

qui est l'équation d'évolution associée à ladite propagation.

2.1.2 Description en termes de modes propres

L'écart $u_r(t) = u(X_r, t)$ associé à la perturbation la plus générale de la chaîne s'écrit comme une superposition d'écarts correspondants aux divers modes propres :

$$u_r(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(X_r, t) \tag{2.25}$$

avec

$$u_n(X_r, t) = \frac{\sin r\varphi_n}{\sin\varphi_n} \left[\, a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t \,\right] \tag{2.26}$$

et les impulsions associées sont données par

$$p_r(t) = m\dot{u}_r(t) = \sum_{n=1}^{N} p_n(X_r, t) \tag{2.27}$$

avec

$$p_n(X_r, t) = m\omega_n \frac{\sin r\varphi_n}{\sin\varphi_n} \left[\, -a_n \sin\omega_n t + b_n \cos\omega_n t \,\right] \tag{2.28}$$

Le Hamiltonien H de cette chaîne de ressorts s'écrit

$$H = \sum_{n=1}^{N} p_r \dot{u}_r - L = \sum_{r=1}^{r=N} \frac{p_r^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{r=1}^{r=N+1} (u_r - u_{r-1})^2 \tag{2.29}$$

Exprimons-le en termes de modes propres. Remarquons tout d'abord que les valeurs propres de M étant distinctes, les vecteurs propres associés à deux modes propres distincts doivent être orthogonaux au sens de la norme dans $\mathcal{R}^N$. On peut le vérifier facilement. En effet, notons $U^{(n)}$ le vecteur dont les N composantes sont données par (2.26). Le produit scalaire $(U^{(n)}, U^{(q)})$ fait intervenir la somme

$$\sum_{r=1}^{r=N} \sin r\varphi_n \ \sin r\varphi_q = \sum_{r=1}^{r=N} \sin rn\frac{\pi}{N+1} \ \sin rq\frac{\pi}{N+1} = \frac{N+1}{2}\delta_{nq} \tag{2.30}$$

On a donc

$$\begin{aligned}(U^{(n)}, U^{(q)}) &= \frac{N+1}{2}\ \delta_{nq}\ \frac{[\ a_n\ \cos\omega_n t + b_n\ \sin\omega_n t\ ]}{\sin\varphi_n}\ \frac{[\ a_q\ \cos\omega_q t + b_q\ \sin\omega_q t\ ]}{\sin\varphi_q} \\ ||U^{(n)}||^2 &= \frac{N+1}{2}\ \frac{[\ a_n\ \cos\omega_n t + b_n\ \sin\omega_n t\ ]^2}{\sin^2\varphi_n}\end{aligned} \tag{2.31}$$

Notons en passant que les grandeurs

$$z_{rn} = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left(rn\frac{\pi}{N+1}\right) \tag{2.32}$$

sont orthonormales suivant l'un ou l'autre indice r ou n, puisque

$$\sum_{r=1}^{N} z_{nr}z_{rq} \ = \ \delta_{nq}\ , \quad \sum_{n=1}^{N} z_{nr}z_{sn} \ = \ \delta_{rs} \tag{2.33}$$

Compte-tenu de ces résultats, on obtient

$$\sum_{r=1}^{r=N} \dot{u}_r^2 = ||\dot{U}||^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\dot{U}^{(n)}, \dot{U}^{(q)}) = \sum_{n=1}^{N}||\dot{U}^{(n)}||^2 \tag{2.34}$$

D'un autre côté, on a

$$F = (U, MU) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(U^{(n)}, MU^{(q)}) = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n||U^{(n)}||^2 \tag{2.35}$$

On en déduit

$$H = \frac{m}{2}||\dot{U}||^2 + \frac{k}{2}(U, MU) = \frac{m(N+1)}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n^2}{\sin^2\varphi_n}\ [\ a_n^2\ + b_n^2\ ] \tag{2.36}$$

où l'on a tenu compte de ce que $\omega_n = \omega_0\sqrt{\lambda_n} = 2\omega_0 \sin\varphi_n/2$. Le Hamiltonien est ainsi exprimé en fonction des $2N$ constantes indépendantes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, qui peuvent être considérées comme les intégrales premières de base du système[5]. Ces constantes sont liées aux valeurs des coordonnées et des vitesses à la date $t = 0$ puisque

$$\begin{aligned}u_r^0 = u_r(0) &= \sum_{n=1}^{N} \sin r\varphi_n\ \frac{a_n}{\sin\varphi_n} = \sqrt{\frac{N+1}{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{\sin\varphi_n}\ z_{nr} \\ \dot{u}_r^0 = \dot{u}_r(0) &= \sum_{n=1}^{N} \sin r\varphi_n\ \frac{\omega_n b_n}{\sin\varphi_n} = \sqrt{\frac{N+1}{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n b_n}{\sin\varphi_n}\ z_{nr}\end{aligned} \tag{2.37}$$

Posons

$$Q_n = \sqrt{\frac{N+1}{2}}\ \frac{a_n}{\sin\varphi_n}\ , \quad P_n = \sqrt{\frac{N+1}{2}}\ \frac{m\omega_n b_n}{\sin\varphi_n} \tag{2.38}$$

[5]Ici, la donnée arbitraire de l'origine des dates sera remplacée par la donnée d'une des constantes a_n ou b_n.

de sorte que

$$u_r^0 = \sum_{n=1}^{N} z_{rn}\, Q_n \ , \quad p_r^0 = \sum_{n=1}^{N} z_{rn}\, P_n \tag{2.39}$$

Du fait de leurs propriétés (2.33), les grandeurs z_{rn} constituent des éléments d'une matrice orthogonale $\mathcal{O}$ permettant de passer de façon bijective du jeu de variables $(u_r^0 \ , \ p_r^0)$ au jeu de variables $(Q_n \ , \ P_n)$, en nombre égal. On peut ainsi remplacer la donnée des conditions initiales de l'évolution par celle de ces nouvelles coordonnées. La transformation définie par $\mathcal{O}$ est *canonique*. Comme la transformation $u_r^0 \to u_r(t) \ , \ p_r^0 \to p_r(t)$ est une transformation canonique, la transformation $(Q_n, P_n) \to (u_r(t) \ , \ p_r(t))$ est aussi une transformation canonique. Ceci ouvre la possibilité de décrire un état du système au moyen de nouvelles variables Q_n et P_n qui sont directement liées aux modes propres et constituent de surcroît des intégrales premières de base. On a

$$\begin{gathered} Q_n = \sum_{r=1}^{N} z_{rn}\, u_r^0 \ , \quad P_n = \sum_{r=1}^{N} z_{rn}\, p_r^0 \ , \quad \text{et} \\ \{Q_n, Q_m\} = 0 \ , \quad \{P_n, P_m\} = 0 \ , \quad \{P_n, Q_m\} = \delta_{nm} \end{gathered} \tag{2.40}$$

les crochets de Poisson étant ici définis par rapport aux variables $(u_r^0 \ , \ p_r^0)$. Posons aussi

$$Q_n(t) = Q_n \cos\omega_n t + \frac{P_n}{m\omega_n} \sin\omega_n t \ , \quad P_n(t) = P_n \cos\omega_n t - m\omega_n Q_n \sin\omega_n t \tag{2.41}$$

La transformation $(Q_n \ , \ P_n) \to (Q_n(t) \ , \ P_n(t))$ est encore une transformation canonique. Comme les coordonnées Q_n et P_n, les variables $Q_n(t)$ et $P_n(t)$ sont aussi canoniquement conjuguées. Elles sont appelées *coordonnées normales*. Le passage des coordonnées $u_r(t)$ et $p_r(t)$ aux coordonnées normales permet de diagonaliser l'expression du Hamiltonien puisqu'on obtient

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{m\omega_n^2}{2}\, Q_n^2(t) \ + \frac{P_n^2(t)}{2m} \right] \equiv \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{m\omega_n^2}{2}\, Q_n^2 \ + \frac{P_n^2}{2m} \right] \tag{2.42}$$

Le Hamiltonien se présente ainsi comme une somme de Hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants les uns des autres. La dernière transformation

$$Q'_n = \sqrt{m\omega_n} Q_n \ , \quad P'_n = \frac{P_n}{\sqrt{m\omega_n}}$$

permet enfin d'écrire le Hamiltonien sous une forme déjà rencontrée (1.345)

$$H = \sum_{1}^{N} \omega_n\, h_n \ , \quad \text{avec} \ \ h_n = \frac{1}{2} \left\{ (Q'_n)^2 + (P'_n)^2 \right\}$$

2.2 Limite $N \to \infty$: vers la théorie classique des champs

2.2.1 Champ des déplacements et son Lagrangien

Le système de la chaîne linéaire de masses reliées par des ressorts peut être envisagé comme une première approche dans l'étude de la propagation de perturbations mécaniques dans un corps solide. Le solide y est alors modélisé comme une chaîne linéaire d'atomes où la position de repos d'un atome est distante de ℓ_0 de celle du précédent. Ces positions correspondent au minimum de l'énergie potentielle de l'ensemble. Sous l'effet d'une perturbation, chaque atome oscille au voisinage de sa position d'équilibre alors qu'il est soumis aux forces d'interaction de ses deux plus proches voisins.

Pour les faibles oscillations, ces forces sont assimilables à des forces de rappel semblables à celle d'un ressort. La distance de séparation ℓ_0 étant d'ordre microscopique, si l'on se place d'un point de vue macrocopique, il est justifié d'envisager l'approximation $h/\ell_0 = N+1 \gg 1$, c'est-à-dire, de considérer la limite d'une infinité de degrés de liberté. La chaîne d'atomes est alors modélisée comme un milieu continu, dont la densité linéique de masse est $\mu = m/\ell_0$. Dans cette approximation, la relation (2.21) conduit à une vitesse de propagation qui est pratiquement la même pour tous les modes propres. En effet, comme le rapport $\dfrac{\sin\varphi_n/2}{\varphi_n/2}$ reste toujours voisin de l'unité, même pour des valeurs extrêmes de n [6], on a

$$v_n = \omega_n \ell_0/\varphi_n = \omega\ell_0 \frac{\sin(\varphi_n/2)}{\varphi_n/2} \approx \omega\ell_0 \tag{2.43}$$

La vitesse de propagation ainsi obtenue a pour expression

$$v = \omega\ell_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \tag{2.44}$$

où le paramètre $\kappa = k\ell_0$ est lié au *module d'Young* E par la relation

$$\kappa = \frac{\mu E}{\rho \ell_0^2} \tag{2.45}$$

ρ étant la densité volumique de masse du milieu[7].

L'ensemble des écarts $u_r(t)$, en nombre quasiment infini, définit maintenant le *champ de déplacement* $u(x,t)$, fonction continue de x et de t, qui décrit la propagation d'une perturbation (onde) *longitudinale* à la vitesse v dans le milieu continu, selon l'équation d'onde, appelée aussi *équation de d'Alembert*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \tag{2.46}$$

Nous retiendrons donc ici qu'un champ est une grandeur physique à laquelle est associée une *infinité de degrés de liberté*.

L'équation d'onde (2.46) peut être retrouvée par deux procédés équivalents. Partant des équations d'évolution (2.3), le premier, qui est le plus immédiat, consiste à faire les approximations suivantes

$$u_{r\pm 1} \approx u_r \pm \ell_0 \frac{\partial u}{\partial x}(X_r,t) + \frac{\ell_0^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_r,t) \tag{2.47}$$

d'où

$$\ddot{u}_r \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X_r,t) = -\omega^2\left(2u_r - u_{r+1} - u_{r-1}\right) \approx -\omega^2\ell_0^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_r,t) \equiv v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_r,t) \tag{2.48}$$

Cependant, nous porterons plus d'attention au second qui permet d'entrer de plain-pied dans la théorie Lagrangienne des champs. Notons tout d'abord que dans la limite continue $\ell_0 \to 0$ (en fait $\ell_0 \ll h$), et en écrivant $1 = \delta r = dx/\ell_0$, on peut exprimer le Lagrangien (2.2) comme une intégrale

$$L \approx \frac{\mu}{2}\sum_{r=1}^{r=N}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \ell_0 - \frac{\kappa}{2}\sum_{r=1}^{r=N+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ell_0 \approx \kappa\int_0^h \mathcal{L}dx \tag{2.49}$$

[6] Comme $0 \leq \varphi_n/2 < \pi/2$, la quantité $\dfrac{\sin\varphi_n/2}{\varphi_n/2}$ reste toujours supérieure à $0,64$, cette valeur inférieure correspondant à la limite supérieure N de n.

[7] Cette vitesse-ci se présente donc comme la racine carrée du rapport d'un "module d'élasticité du milieu" et d'un terme de masse relatif à ce milieu, conformément à une formule générale déduite par Newton : vitesse de l'onde $= \sqrt{\text{module d'élasticité/densité de masse}}$, le module d'élasticité dépendant du type de tension associée à la perturbation.

d'une *densité lagrangienne*[8]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{2.50}$$

2.2.2 Principe variationnel pour le champ

Nous sommes ainsi conduits à envisager une intégrale d'Action sous la forme

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^h dx\ \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{2.51}$$

censée receler toutes les propriétés du champ $u(x,t)$ et qui, lorsqu'on lui applique un principe variationnel, doit permettre d'obtenir l'équation d'évolution de ce champ.

Ce principe est la simple généralisation de celui appliqué jusqu'à présent aux systèmes ayant un nombre fini de degrés de liberté : de toutes les lois $u(x,t)$ d'évolution possibles du champ soumises aux conditions que le champ ait des valeurs fixées à l'avance aux limites du domaine d'intégration, celle effectivement réalisée rend l'intégrale d'Action extrémale.

Envisageons alors une variation quelconque $\delta u(x,t)$ du champ, avec la contrainte $\delta u = 0$ au domaine frontière. La variation consécutive de l'Action est

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^h dx\ \delta\mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{2.52}$$

avec

$$\delta\mathcal{L} = \delta u + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} \tag{2.53}$$

et comme

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial \delta u}{\partial t}\ ,\quad \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \tag{2.54}$$

il vient

$$\delta\mathcal{L} = \delta u\left[\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)}\ \right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)}\right) \tag{2.55}$$

Les deux derniers termes donnant une contribution nulle au terme de l'intégration, on obtient

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^h dx\ \delta u\left[\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)}\ \right] \tag{2.56}$$

On montre que l'annulation de cette expression pour toute expression de $\delta u(x,t)$ ne peut avoir lieu que si et seulement si est satisfaite l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} = 0 \tag{2.57}$$

Pour le cas qui nous intéresse ici, la densité lagrangienne ne dépend pas directement de $u(x,t)$ et l'on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.58}$$

[8]Définie ainsi, cette densité lagrangienne est sans dimension.

c'est-à-dire l'équation d'onde (2.46). Montrons ici directement que les solutions de cette équation sont bien du type (2.22) trouvé précédemment. Posons $\eta = t - x/v$ et $\xi = t + x/v$ et considérons $u(x,t)$ comme étant aussi bien une fonction de η et ξ. On trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{2.59}$$

d'où l'on déduit que la solution générale de l'équation d'onde est de la forme

$$u(x,t) = F(\eta) + G(\xi) \tag{2.60}$$

et se présente bien comme la superposition d'un signal se propageant avec la vitesse v dans le sens des x croissants, décrit par la fonction $F(\eta)$, et d'un signal se propageant en sens inverse à la même vitesse, décrit par la fonction $G(\xi)$, les deux fonctions F et G étant a priori quelconques.

2.3 Propriétés d'invariance du Lagrangien (2.50)

2.3.1 Invariance sous le groupe $L(1,1)$

La densité lagrangienne (2.50), que nous nommerons plus simplement "Lagrangien", possède des propriétés remarquables que nous allons maintenant décrire. Pour commencer, nous utiliserons dorénavant la notation

$$x_0 = vt \tag{2.61}$$

permettant d'avoir des coordonnées x_0 et x de même dimension. De plus, nous supposerons qu'il est possible d'étendre l'intégration dans (2.51) au domaine $-\infty < x < +\infty$, et l'intégrale d'Action sera simplement écrite comme

$$W = \int\int dx_0 dx\ \mathcal{L} \tag{2.62}$$

avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{2.63}$$

Il apparaît que le Lagrangien (2.63), ainsi que l'équation d'onde qui en résulte via le principe d'Action extrémale sont invariants[9] sous certaines transformations linéaires dans l'espace bi-dimensionnel (x_0, x). En effet, effectuons le changement de variables $(x_0, x) \to (x_0', x')$ tel que

$$x_0' = ax_0 + bx\ ,\quad x' = ex_0 + fx \tag{2.64}$$

où $a,\ b,\ e,\ f$ sont des constantes réelles. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = a\frac{\partial u}{\partial x_0'} + e\frac{\partial u}{\partial x'}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = b\frac{\partial u}{\partial x_0'} + f\frac{\partial u}{\partial x'} \tag{2.65}$$

Il vient alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x_0'}\right)^2 - (f^2-e^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2\right] + 2(ae-bf)\frac{\partial u}{\partial x_0'}\frac{\partial u}{\partial x'} \tag{2.66}$$

Supposant que le champ u reste invariant, au signe près, dans cette transformation, on voit que le Lagrangien sera insensible à celle-ci si et seulement si les coefficients qui la définissent satisfont les relations

[9] Pour l'équation d'onde, on parle plutôt de sa "covariance" sous certaines transformations.

$$a^2 - b^2 = f^2 - e^2 = 1 \ , \quad ae - bf = 0 \tag{2.67}$$

Il est clair qu'on ne peut avoir ni $f = 0$, ni $a = 0$, ni $f^2 = e^2$, ni $a^2 = b^2$. Les relations ci-dessus conduisent alors à $(a^2 - f^2)(f^2 - e^2) = 0$, soit $a^2 = f^2$. On obtient ainsi les possibilités suivantes.

(i) $b = e = 0$, $a = f = 1$. C'est la solution triviale "identité".

(ii) $b = e = 0$, $a = -f = 1$. Il s'agit de l'opération de "parité" où x est changé en $-x$. Le lagrangien reste effectivement invariant dans cette opération[10].

(iii) $b = e = 0$, $a = -f = -1$. Cette transformation est dite de "renversement du sens du temps", à laquelle le Lagrangien étudié ici est aussi insensible.

(iv) $a = f$, $b = e \neq 0$.

(v) $a = -f$, $b = -e \neq 0$.

Etudions plus particulièrement la quatrième possibilité, en supposant $a > 0$. La relation $a^2 - b^2 = 1$ suggère alors d'introduire la paramétrisation $a = \cosh\chi$, $b = \sinh\chi$. Sous forme matricielle, on a ainsi

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\chi) \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

avec

$$\mathcal{R}(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

L'ensemble des matrices $\mathcal{R}(\chi)$ forment un groupe commutatif à un paramètre χ, dont les éléments satisfont

$$\mathcal{R}(\chi)\mathcal{R}(\chi') = \mathcal{R}(\chi + \chi') \ , \quad \mathcal{R}^{-1}(\chi) = \mathcal{R}(-\chi) \ , \quad \text{det}\ \mathcal{R} = 1 \ , \quad {}^t\mathcal{R} = \mathcal{R} \tag{2.70}$$

Mais la propriété la plus importante de ces transformations est qu'elles laissent invariante la forme quadratique

$$(x_0, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = x_0^2 - x^2 \tag{2.71}$$

Ceci suggère de définir un produit scalaire dans l'espace-temps à deux dimensions (x_0, x), espace que nous noterons $\mathcal{E}_2$. Un point $M(x_0, x)$ de cet espace, repéré par ses coordonnées x_0 et x, correspond au passage d'un signal $u(x, t)$ à l'abcisse x et à la date $t = x_0/v$.

Mais faisons tout d'abord une remarque importante. Si notre étude ne concernait pas la propagation d'une perturbation dans un corps solide mais plutôt celle dans le vide d'un signal lumineux selon la direction $x'x$, décrite elle aussi par une équation de d'Alembert dans laquelle v serait remplacée par la vitesse c de la lumière dans le vide, les transformations (2.68) seraient interprétées, dans le cadre de la théorie de la Relativité restreinte, comme un changement de référentiel galiléen, x'_0 et x' étant, dans le nouveau référentiel, les coordonnées du même événement représenté par le point M dans $\mathcal{E}_2$. On sait que ces changements de référentiels impliquent le groupe des *transformations de Lorentz* dans l'espace-temps $\mathcal{E}_4$ à quatre dimensions où un événement est représenté par un point M vu, depuis un référentiel galiléen donné, avec les coordonnées $x_0 = ct, x, y, z$. Si l'on envisage uniquement des référentiels galiléens se déplaçant parallèlement à l'axe $x'x$, le passage de l'un à l'autre se fait au moyen de matrices telles que (2.69). D'un point de vue strictement mathématique, le groupe de transformations envisagé ici est identifiable au groupe de Lorentz à deux dimensions, noté $L(1, 1)$.

La similitude des équations d'onde obtenues (équations de d'Alembert) va en fait nous servir de prétexte pour développer ici un formalisme tout à fait semblable à celui de la Relativité. Le lecteur

[10] A noter que dans cette opération $u(t, x)$ est changé en $-u(t, -x)$.

devra donc considérer la suite de l'exposé uniquement comme une introduction aux théories relativistes, et abandonner toute idée d'application au système de la chaîne qui ne présente, lui, aucun caractère relativiste.

Pour terminer, signalons que la cinquième possibilité répertoriée plus haut correspondrait au produit d'une transformation (2.69) et de l'opération de "parité".

2.3.2 Métrique et algèbre tensorielle induites

Dans $\mathcal{E}_2$, les coordonnées x_0 et x, qui servent à repérer un événement ayant lieu à l'abcisse x à la date $t = x_0/v$, définiront un 2-vecteur noté $\underline{\mathsf{x}}$. L'espace $\mathcal{E}_2$ sera doté d'une structure métrique grâce au produit scalaire

$$\underline{\mathsf{x}} \cdot \underline{\mathsf{y}} = x_0 y_0 - xy \tag{2.72}$$

conduisant à la "pseudo-norme"

$$\underline{\mathsf{x}}^2 = x_0^2 - x^2 \tag{2.73}$$

En empruntant les termes utilisés en Relativité, un 2-vecteur sera dit du "genre temps", du "genre espace" ou du "genre lumière" selon que sa pseudo-norme sera positive, négative ou nulle. Un *intervalle* entre deux événements $\underline{\mathsf{x}}$ et $\underline{\mathsf{y}}$ est défini par

$$(\underline{\mathsf{x}} - \underline{\mathsf{y}})^2 = (x_0 - y_0)^2 - (x - y)^2 \tag{2.74}$$

Cet intervalle est nul (donc du genre lumière) si les deux événements correspondent aux passages d'un même signal, l'un à l'abcisse x à la date $t = x_0/v$, l'autre à l'abcisse y à la date $t' = y_0/v = t \pm (x-y)/v$. En Relativité, lorsque l'intervalle est du genre temps, cela signifie qu'il peut correspondre aux passages successifs d'un objet matériel (ayant donc une vitesse inférieure à c) aux deux points d'espace-temps définis par les coordonnées (x_0, x) et (y_0, y), respectivement. Toujours en Relativité[11], si l'intervalle est du genre espace, les deux événements en question sont sans corrélation car ils ne pourraient être joints par aucun moyen physiquement réalisable. Le produit scalaire ainsi défini, les pseudo-normes et les intervalles sont *invariants* sous les transformations (2.69). Le produit scalaire peut être récrit à l'aide du *tenseur métrique*, objet à quatre composantes notées $g_{\alpha\beta}$, telles que

$$g_{00} = 1\ ,\quad g_{11} = -1\ ,\quad g_{01} = g_{10} = 0 \tag{2.75}$$

Ce tenseur peut être représenté par la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

apparaissant dans (2.71). Les composantes x_0 et x d'un vecteur $\underline{\mathsf{x}}$ seront dites *contravariantes* et notées $x^0 \equiv x_0\ ,\ \ x^1 \equiv x$. A l'aide du tenseur métrique, on leur associe des composantes dites *covariantes* définies par

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta}\, x^\beta \tag{2.77}$$

où ici est utilisée la *convention de sommation d'Einstein* : sauf indication contraire, lorsqu'un indice est répété en position haute (contravariante) et en position basse (covariante), cela signifie qu'on effectue une sommation sur cet indice. On obtient ici

$$x_0 = x^0 = vt\ ,\quad x_1 = -x^1 = -x \tag{2.78}$$

ce qui permet d'écrire

[11] Et en Relativité seulement.

$$\underline{\mathsf{x}} \cdot \underline{\mathsf{y}} = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x_\beta y^\beta = x^\alpha y_\alpha \tag{2.79}$$

les deux indices α et β pouvant prendre les deux valeurs 0 et 1. Les composantes contravariantes peuvent être exprimées en fonction des composantes covariantes au moyen d'une transformation inverse :

$$x^\alpha = g^{\alpha\beta}\ x_\beta \tag{2.80}$$

où les $g^{\alpha\beta}$ sont les éléments de la matrice G^{-1}, tels que

$$g^{00} = 1\ ,\quad g^{11} = -1\ ,\quad g^{01} = g^{10} = 0\ ,\quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \tag{2.81}$$

δ^α_γ étant un symbole de Kronecker, élément de la matrice unité.

On prendra garde au fait que les notions de "scalaire", de "vecteur" et plus généralement de "tenseur" ne se réfèreront plus ici aux éventuelles propriétés de transformation de certaines grandeurs vis-à-vis des rotations dans l'espace ordinaire à trois dimensions, mais bien à leur comportement respectif vis-à-vis des transformations de Lorentz (2.69). De ce point de vue, le Lagrangien (2.63), invariant sous ces transformations, est donc un scalaire[12]. Un ensemble de deux grandeurs A et B pourra être qualifié de 2-vecteur, si sous une transformation (2.69), A et B se transforment conformément à (2.68). S'il en est ainsi, A et B sont les composantes contravariantes d'un certain 2-vecteur $\underline{\mathsf{C}}$. Nous écrirons la loi de transformation des composantes contravariantes V^α d'un 2-vecteur $\underline{\mathsf{V}}$ sous la forme

$$V^{'\alpha} = \mathcal{R}^\alpha_\beta\ V^\beta \tag{2.82}$$

L'invariance du produit scalaire nous permet d'obtenir la loi de transformation des composantes covariantes d'un vecteur. En effet, on a

$$x^\alpha y_\alpha = x^{'\alpha} y'_\alpha = \mathcal{R}^\beta_\alpha x^\alpha y'_\beta \tag{2.83}$$

Comme ceci doit être vrai pour tout vecteur $\underline{\mathsf{x}}$, on en déduit

$$y_\alpha = \mathcal{R}^\beta_\alpha y'_\beta\ ,\quad \text{soit}\quad y'_\gamma = (\mathcal{R}^{-1})^\beta_\gamma\ y_\beta \tag{2.84}$$

Ainsi, les composantes covariantes d'un vecteur se transforment selon la matrice ${}^t\mathcal{R}^{-1}$. Ceci peut être également déduit de l'écriture matricielle du produit scalaire. Puisque

$$\underline{\mathsf{x}} \cdot \underline{\mathsf{y}} = {}^tX\ G\ Y = {}^tX'\ G\ Y' = {}^tX\ {}^t\mathcal{R}\ G\ \mathcal{R}\ Y \tag{2.85}$$

on a les relations

$$G = {}^t\mathcal{R} G \mathcal{R}\ ,\quad \text{ou}\quad {}^t\mathcal{R}^{-1} = G\mathcal{R}G^{-1} \tag{2.86}$$

qui explicitent l'invariance de G sous les transformations (2.69).

Plus généralement, la loi de transformation des composantes totalement contravariantes d'un tenseur d'ordre p est

$$A'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} = \mathcal{R}^{\alpha_1}_{\beta_1}\ \mathcal{R}^{\alpha_2}_{\beta_2}\ \cdots\ \mathcal{R}^{\alpha_p}_{\beta_p}\ A^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \tag{2.87}$$

tandis que celle de ses composantes totalement covariantes est

$$A'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} = (\mathcal{R}^{-1})^{\beta_1}_{\alpha_1}\ (\mathcal{R}^{-1})^{\beta_2}_{\alpha_2}\ \cdots\ (\mathcal{R}^{-1})^{\beta_p}_{\alpha_p}\ A_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_p} \tag{2.88}$$

On a notamment

[12] En Relativité, un scalaire est un invariant relativiste.

$$g'_{\rho\nu} = (\mathcal{R}^{-1})^{\lambda}_{\rho}\ (\mathcal{R}^{-1})^{\beta}_{\nu}\ g_{\lambda\beta} = g_{\rho\nu}\ ,\quad g'^{\rho\nu} = \mathcal{R}^{\rho}_{\lambda}\ \mathcal{R}^{\nu}_{\beta}\ g^{\lambda\beta} = g^{\rho\nu} \tag{2.89}$$

Mais le tenseur métrique sert à transformer des indices contravariants en indices covariants. On obtient ainsi des composantes mixtes de tenseurs présentant des indices en haut et en bas, par exemple

$$A^{\alpha\beta}{}_{..\,\rho} = g_{\rho\gamma}\ A^{\alpha\beta\gamma}\ ,\quad A^{\alpha}{}_{.\,\beta}{}^{\rho}_{.} = g_{\beta\gamma}\ A^{\alpha\gamma\rho} \tag{2.90}$$

et ayant des lois de transformation “mixtes” :

$$A'^{\alpha\beta}{}_{..\,\rho} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\gamma}\ \mathcal{R}^{\beta}_{\lambda}\ (\mathcal{R}^{-1})^{\mu}_{\rho}\ A^{\gamma\lambda}{}_{..\,\mu} \tag{2.91}$$

Il existe d'autres procédés pour construire des tenseurs mixtes, par exemple, en multipliant des composantes contravariantes de tenseurs par des composantes covariantes d'autres tenseurs. On peut également effectuer des opérations de contraction d'indices telle que celles-ci :

$$V^{\lambda} = A^{\mu\lambda}{}_{..\,\mu}\ ,\quad A^{\gamma\lambda}{}_{..\,\mu}\ B_{\gamma\sigma}{}^{..\,\alpha\beta} = C^{\lambda\alpha\beta}{}_{...\,\mu\gamma\sigma} \tag{2.92}$$

qui permettent d'obtenir de nouveaux tenseurs de divers ordres. La contraction d'indices sur les propres composantes d'un tenseur donné d'ordre p conduit à un tenseur d'ordre $p-2$. Les opérations de dérivations donnent également naissance à des tenseurs[13]. Par exemple,

$$\pi_{\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}}\ ,\quad \pi^{\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \tag{2.93}$$

sont, respectivement, les composantes covariantes et les composantes contravariantes du gradient de u dans $\mathcal{E}_2$. Par la suite, nous utiliserons les notations

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ ,\quad \partial^{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \tag{2.94}$$

L'application, avec contraction des indices, de l'opérateur ∂^{α} aux composantes covariantes V_{α} d'un champ de vecteurs $V(\underline{x})$ donne la *2-divergence* de ce champ de vecteurs dans $\mathcal{E}_2$:

$$\partial^{\alpha}\ V_{\alpha} \equiv \partial^0 V_0 + \partial^1 V_1 = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} + \frac{\partial V^1}{\partial x} \tag{2.95}$$

On peut notamment récrire l'équation d'Euler-Lagrange (2.57) à l'aide d'une 2-divergence

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \partial_{\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}u)} \tag{2.96}$$

Pour le Lagrangien considéré ici, on en déduit que le champ de vecteurs de composantes $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}u)}$ a une 2-divergence nulle.

On notera également que le Lagrangien s'exprime comme une pseudo-norme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\alpha}u\partial_{\alpha}u \tag{2.97}$$

ce qui met plus clairement en évidence son invariance sous le groupe $L(1,1)$, et que l'équation d'onde prend la forme

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}u = 0 \tag{2.98}$$

[13] Au sens de $L(1,1)$.

2.3.3 Transformations générales, théorème de Noether

Envisageons maintenant une transformation a priori quelconque provoquant à la fois un changement des coordonnées : $\underline{x} \to \underline{x}'$ et du champ : $u(\underline{x}) \to u'(\underline{x}')$. On supposera toutefois que cette transformation est un élément d'un groupe continu, ce qui permet notamment d'envisager des transformations infinitésimales. Dans ladite transformation $\mathcal{O}$, on a

$$\underline{x}' = \mathcal{R}(\mathcal{O})\ \underline{x}\ ,\quad u'(\underline{x}') = \mathcal{M}(\mathcal{O})\ u(\underline{x}) \tag{2.99}$$

où $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ sont les représentations de $\mathcal{O}$ agissant, respectivement, sur les coordonnées et sur le champ. Pour une transformation infinitésimale $\mathcal{O} = 1 + \mathcal{Q}$ où $\mathcal{Q}$ est un opérateur infinitésimal, on aura corrélativement $\mathcal{R} = 1 + \Lambda$ et $\mathcal{M} = 1 + \Delta$ où Λ et Δ sont aussi infinitésimaux. On a alors

$$x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha(\underline{x})\ ,\quad u'(\underline{x}') = u(\underline{x}) + \Delta u(\underline{x}) \tag{2.100}$$

mais

$$u'(\underline{x}') = u'(\underline{x} + \delta\underline{x}) \approx u'(\underline{x}) + \delta x^\alpha \partial_\alpha u(\underline{x}) \tag{2.101}$$

Par suite

$$u'(\underline{x}) = u(\underline{x}) - \delta x^\alpha \partial_\alpha u(\underline{x}) + \Delta u(\underline{x}) \tag{2.102}$$

La différence

$$\delta_0 u(\underline{x}) = u'(\underline{x}) - u(\underline{x}) = -\delta x^\alpha \partial_\alpha u(\underline{x}) + \Delta u(\underline{x}) \tag{2.103}$$

représente une variation *de forme* du champ en un point donné, provoquée par la transformation. On vérifie que les symboles δ_0 et ∂_α sont permutables[14]. Utilisant ce symbole δ_0, la variation de toute fonctionnelle du champ sera de la même façon écrite sous la forme

$$\delta F = F'(\underline{x}') - F(\underline{x}) = \delta_0 F(\underline{x}) + \delta x^\alpha \partial_\alpha F(\underline{x}) \tag{2.104}$$

Dans ce changement de coordonnées infinitésimal, l'élément de "volume" $d^2\underline{x} = dx_0 dx$ est changé en

$$d^2\underline{x}' = (1 + \partial^\alpha \delta x_\alpha) d^2\underline{x} \tag{2.105}$$

La variation consécutive de l'intégrale d'Action est

$$\delta W = \int\!\!\int d^2\underline{x}\ [\ \partial^\alpha \delta x_\alpha\ \mathcal{L} + \delta_0 \mathcal{L} + \delta x^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L}\ ] \tag{2.106}$$

Or, compte-tenu de l'équation (2.96), on a

$$\begin{aligned}\delta_0 \mathcal{L} = \delta_0 u\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \delta_0(\partial_\alpha u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u)} &= \delta_0 u\ \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u)} + \partial_\alpha(\delta_0 u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u)} \\ &= \partial_\alpha \left(\delta_0 u\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u)} \right)\end{aligned} \tag{2.107}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\delta W &= -\int\!\!\int d^2\underline{x}\ \partial^\alpha J_\alpha \quad , \quad \text{avec} \\ J_\alpha &= -\delta x_\alpha \mathcal{L} - \delta_0 u\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha u)}\end{aligned} \tag{2.108}$$

[14] Nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification.

Le 2-vecteur J_α est ce qu'on appelle un *courant*. Nous admettrons ici que toute fonctionnelle du champ s'annule pour $x \to \pm\infty$. L'intégration de $\partial^1 J_1$ donne alors un résultat nul. L'intégrale double ci-dessus ne reçoit donc de contribution que du terme $\partial^0 J_0$ et, en supposant l'intégration sur x_0 limitée à l'intervalle $vt_1 \leq x_0 \leq vt_2$, on a

$$\delta W = -\Phi(t_2) + \Phi(t_1) \ , \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J_0(x_0, x) \tag{2.109}$$

Le théorème de Noether se déduit de ce résultat. En effet, si l'Action est invariante sous la transformation envisagée pour toutes valeurs de t_1 et t_2, alors $\delta W = 0$ et la grandeur $\Phi(t)$ est indépendante de t : c'est donc une "constante du mouvement". Cette invariance est également associée à la *conservation d'un courant* puisque l'annulation de δW implique celle de la 2-divergence de J_α :

$$\partial^\alpha J_\alpha = 0 \tag{2.110}$$

2.3.4 Invariance par translations spatio-temporelles - tenseur d'énergie impulsion

Nous avons déjà signalé que la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale pour un système isolé résultent d'une invariance par translation spatio-temporelle. Voyons comment s'exprime cette invariance pour le champ étudié ici[15] . Considérons donc une translation infinitésimale telle que $\delta x_\alpha = a_\alpha$ où a_α, infinitésimal, est indépendant des coordonnées. Nous admettrons que u est invariant dans cette opération[16], c'est-à-dire que $u'(\underline{x}') = u(\underline{x})$. Il s'ensuit que $\delta_0 u = -a^\alpha \partial_\alpha u$ et le courant correspondant s'écrit

$$J_\alpha = -a_\alpha \mathcal{L} + a^\beta \partial_\beta u \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha u)} = a^\beta \left(\partial_\alpha u \ \partial_\beta u - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}\right) = a^\beta T_{\alpha\beta} \tag{2.111}$$

où

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u \ \partial_\beta u - g_{\alpha\beta}\mathcal{L} \tag{2.112}$$

sont les composantes covariantes du *tenseur d'énergie-impulsion* du champ u. Ces composantes sont symétriques selon les deux indices α et β et l'on a l'équation de conservation

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \ , \quad \partial^\beta T_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.113}$$

équation qui peut d'ailleurs être vérifée directement :

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = (\partial^\alpha \partial_\alpha u) \ \partial_\beta u + \partial_\alpha u \ (\partial^\alpha \partial_\beta u) - \partial_\beta \mathcal{L} = \partial_\alpha u \ (\partial^\alpha \partial_\beta u) - \partial_\alpha u \ (\partial_\beta \partial^\alpha u) = 0$$

car $\partial^\alpha \partial_\alpha u = 0$ et $\partial_\beta \partial^\alpha u = \partial^\alpha \partial_\beta u$. Explicitons les composantes $T_{\alpha\beta}$. On a

$$T_{00} = (\partial_0 u)^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2\right] = \mathcal{H} \tag{2.114}$$

où $\mathcal{H}$ est la densité hamiltonienne, ou simplement le Hamiltonien du champ u. Son intégrale

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} \ dx \tag{2.115}$$

coïncide avec la limite du Hamiltonien de la chaîne d'atomes lorsque $N \to \infty$ et pour une longueur infinie de la chaîne. Ici aussi, c'est une constante du mouvement (système isolé) qui représente l'énergie du champ. Notons ici que la grandeur

[15] L'invariance par translation spatiale ne peut être réalisée qu'en l'absence de contrainte sur la coordonnée spatiale x, c'est-à-dire si celle-ci peut varier dans tout l'intervalle $] -\infty, +\infty[$. La présence d'une contrainte telle que $0 \leq x \leq h$ signalerait une action du monde extérieur sur le système qui ne serait donc plus isolé.

[16] Rappelons néanmoins que dans le modèle de la chaîne, u est un écart de coordonnées d'espace.

$$\pi_0 = \partial_0 u \tag{2.116}$$

représente le champ conjugué de u et que le Hamiltonien $\mathcal{H}$ se déduit de $\mathcal{L}$ via la formule usuelle

$$\mathcal{H} = \pi_0 \partial_0 u - \mathcal{L} \tag{2.117}$$

On trouve aussi $T_{11} = \mathcal{H}$, puis

$$T_{01} = T_{10} = \partial_0 u \ \partial_1 u \tag{2.118}$$

On montre que T_{01} est une densité de quantité de mouvement du champ[17]. L'intégrale,

$$P^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{01}\ dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} T_{01}\ dx \tag{2.119}$$

qui est une constante du mouvement, est la quantité de mouvement transportée par le champ u.

Les deux grandeurs P_0 et $P_1 = -P^1$ sont aussi les composantes covariantes d'un 2-vecteur. Pour l'expliciter, nous ferons ici une nouvelle digression sur la structure géométrique de l'espace ponctuel $\mathcal{E}_2$ muni du produit scalaire (2.72), en empruntant encore la nomenclature de la Relativité.

Tout d'abord, définissons dans $\mathcal{E}_2$ un repère de référence cartésien xOx_0, auquel on associe les vecteurs $\overrightarrow{e_0}$ pour $\overrightarrow{Ox_0}$ et $\overrightarrow{e_x}$ pour $\overrightarrow{Ox}$, constituant une base orthonormée au sens du produit scalaire ordinaire. Dans ce repère cartésien, un vecteur $\overrightarrow{\tau} = \tau_0\ \overrightarrow{e_0}\ + \tau_x\ \overrightarrow{e_x}$ est du genre temps, du genre espace ou du genre lumière selon que l'on a, respectivement, $|\tau_0| > |\tau_x|$, $|\tau_0| < |\tau_x|$ ou $|\tau_0| = |\tau_x|$. Autrement dit, le genre du vecteur correspond à l'orientation de celui-ci par rapport aux régions délimitées par les deux bissectrices $x_0 = x$ et $x_0 = -x$. Explicitement, dans une représentation cartésienne, le vecteur est du genre temps si son angle polaire θ par rapport à $\overrightarrow{Ox}$ vérifie $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$, auquel cas il sera dit du genre temps-futur, ou $\dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{7\pi}{4}$; il est du genre espace si $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$ ou $\dfrac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$; il est du genre lumière s'il est parallèle à l'une des bissectrices en question.

Nous dirons qu'une courbe est du genre espace si en chacun de ses points son vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{\tau}$ est du genre espace. En chacun des points de la courbe, la perpendiculaire à la courbe est donc du genre temps et nous choisirons son vecteur unitaire $\overrightarrow{N} = N_0\ \overrightarrow{e_0}\ + N_x\ \overrightarrow{e_x}$ comme étant celui pointant vers le futur : $N_0 > 0$.

L'élément de longueur sur la courbe est $dL = \sqrt{(dx_0)^2 + (dx)^2}$ et comme $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{dM} = N_0 dx_0 + N_x dx = 0$, on a $dL = |dx|\sqrt{1 + (N_x/N_0)^2}$. Puisque $N_0 > |N_x|$, nous poserons $N_x/N_0 = \tanh\zeta$, soit

$$N_0 = \frac{\cosh\zeta}{\sqrt{\cosh^2\zeta + \sinh^2\zeta}}\ ,\quad N_x = \frac{\sinh\zeta}{\sqrt{\cosh^2\zeta + \sinh^2\zeta}}\ ,\quad dL = |dx|\frac{\sqrt{\cosh^2\zeta + \sinh^2\zeta}}{\cosh\zeta} \tag{2.120}$$

D'un autre côté, l'intervalle $ds^2 = (dx_0)^2 - (dx)^2$, étant négatif, donc du genre espace, nous poserons $d\sigma = \sqrt{-ds^2} = |dx|\sqrt{1 - (N_x/N_0)^2} = |dx|/\cosh\zeta$. On obtient finalement la relation

$$\overrightarrow{N}\ dL = \frac{\cosh\zeta\ \overrightarrow{e_0}\ + \sinh\zeta\ \overrightarrow{e_x}}{\sqrt{\cosh^2\zeta + \sinh^2\zeta}}\ dL = \left(\cosh\zeta\ \overrightarrow{e_0}\ + \sinh\zeta\ \overrightarrow{e_x}\right) d\sigma$$

[17] Voir plus loin.

Or, du point de vue du produit scalaire (2.72), le vecteur

$$n_0 = \cosh\zeta \ \overrightarrow{e_0} + \sinh\zeta \ \overrightarrow{e_x} \tag{2.121}$$

est unitaire, du genre temps-futur. On fait ainsi le lien entre géométrie euclidienne et la géométrie pseudo-euclidienne induite par la pseudo-norme (2.71) en posant

$$\overrightarrow{N} \ dL \equiv n_0 \ d\sigma \tag{2.122}$$

Au vecteur n_0 nous adjoindrons le "vecteur tangent" du genre espace

$$n_1 = \cosh\zeta \ \overrightarrow{e_x} + \sinh\zeta \ \overrightarrow{e_0} \tag{2.123}$$

afin de disposer d'une base de vecteurs satisfaisant, au sens du produit scalaire (2.72), les relations d'orthogonalité

$$n_0 \cdot n_0 = 1 \ , \quad n_1 \cdot n_1 = -1 \ , \quad n_0 \cdot n_1 = 0 \tag{2.124}$$

On notera que, inversement, on a

$$\begin{gathered} e_0 = \cosh\zeta \ n_0 - \sinh\zeta \ n_1 \ , \quad e_x = \cosh\zeta \ n_1 - \sinh\zeta \ n_0 \\ \text{avec ici} \quad e_0 \cdot e_0 = 1 \ , \quad e_x \cdot e_x = -1 \ , \quad e_0 \cdot e_x = 0 \end{gathered} \tag{2.125}$$

Pour $\zeta = 0$, on a $n_0 \equiv e_0$, $n_1 \equiv e_x$ et $d\sigma \equiv |dx|$.

Dans la suite, nous ne considèrerons que des droites "du genre espace". A chacune sera associée une base du type (n_0, n_1). En Relativité, une telle base est attachée à un observateur pour lequel l'axe des temps est défini par n_0, celui de la dimension spatiale étant défini par n_1. Pour cet observateur, la grandeur représentant l'énergie sera donnée par

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \ n_0^\alpha \ T_{\alpha\beta} \ n_0^\beta \tag{2.126}$$

et celle représentant la quantité de mouvement par

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \ n_0^\alpha \ T_{\alpha\beta} \ n_1^\beta \tag{2.127}$$

l'intégration étant effectuée tout le long de la droite d'espace $\mathcal{D}$ attachée à l'observateur. Les formules sont similaires pour un second observateur de base (n'_0, n'_1) et de droite d'espace $\mathcal{D}'$:

$$P'_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma' \ {n'}_0^\alpha \ {T'}_{\alpha\beta} \ {n'}_0^\beta \ , \quad P'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma' \ {n'}_0^\alpha \ {T'}_{\alpha\beta} \ {n'}_1^\beta \tag{2.128}$$

Considérons alors le domaine fermé délimité par les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et, dans les régions de dimensions spatiales infinies, par deux courbes C et C' joignant $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$. De par l'équation de conservation (2.113), on a dans ce domaine

$$\int\int d^2\underline{x} \ \partial^\alpha T_{\alpha\beta} \ = 0 \tag{2.129}$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky adapté à deux dimensions, cette intégrale peut être transformée en l'intégrale de flux

$$\oint d\sigma \ \mathcal{N}^\alpha \ T_{\alpha\beta} \ = 0 \tag{2.130}$$

$\mathcal{N}$ étant le 2-vecteur normal à la courbe fermée délimitant ledit domaine. Supposant encore que toute fonctionnelle du champ s'annule pour des dimensions spatiales infinies, on en déduit la relation[18]

[18] On peut supposer ici que l'on a $\mathcal{N} = +n'$ sur $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{N} = -n$ sur $\mathcal{D}$.

$$\int_{\mathcal{D}'} d\sigma' \ {n'}_0^{\alpha} \ {T'}_{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{D}} d\sigma \ n_0^{\alpha} \ T_{\alpha\beta} \tag{2.131}$$

d'où

$$P'_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \ n_0^{\alpha} \ T_{\alpha\beta} \ {n'}_0^{\beta} \ , \quad P'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \ n_0^{\alpha} \ T_{\alpha\beta} \ {n'}_1^{\beta} \tag{2.132}$$

Mais la base (n'_0, n'_1) se déduit de la base (n_0, n_1) par une transformation $\mathcal{R}$ de $L(1,1)$, de paramètre $\chi = \zeta' - \zeta$ pour laquelle

$$\begin{aligned} n'_0 &= \cosh\chi \ n_0 + \sinh\chi \ n_1 \ , \quad n'_1 = \cosh\chi \ n_1 + \sinh\chi \ n_0 \\ x'_0 &= n'_0 \cdot \underline{\mathrm{x}} = \cosh\chi \ n_0 \cdot \underline{\mathrm{x}} + \sinh\chi \ n_1 \cdot \underline{\mathrm{x}} = x_0 \cosh\chi - x \sinh\chi \\ x' &= -n'_1 \cdot \underline{\mathrm{x}} = -\cosh\chi \ n_1 \cdot \underline{\mathrm{x}} - \sinh\chi \ n_0 \cdot \underline{\mathrm{x}} = x \cosh\chi - x_0 \sinh\chi \end{aligned} \tag{2.133}$$

Ainsi, dans la transformation $\mathcal{R}$, on a

$$P'_0 = \cosh\chi \ P_0 + \sinh\chi \ P_1 \ , \quad P'_1 = \cosh\chi \ P'_1 + \sinh\chi \ P_0 \tag{2.134}$$

et P_0 et P_1 se transforment bien comme les composantes covariantes d'un 2-vecteur.

2.3.5 Invariance sous $L(1,1)$ - tenseur de moment angulaire

Dans une transformation infinitésimale $\mathcal{R} = 1 + \Lambda$ de $L(1,1)$, on a

$$\delta x^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} \ x^{\beta} \tag{2.135}$$

D'après (2.89), la matrice infinitésimale Λ^{α}_{β} est telle que

$$g^{\rho\nu} = (\delta^{\rho}_{\lambda} + \Lambda^{\rho}_{\lambda}) \ \left(\delta^{\nu}_{\beta} + \Lambda^{\nu}_{\beta}\right) \ g^{\lambda\beta} \approx g^{\rho\nu} + g^{\lambda\nu} \ \Lambda^{\rho}_{\lambda} + g^{\rho\beta} \ \Lambda^{\nu}_{\beta}$$

soit

$$\Lambda^{\rho\nu} + \Lambda^{\nu\rho} = 0 \tag{2.136}$$

Autrement dit, le tenseur $\Lambda^{\nu\rho}$ est *antisymétrique*. En supposant ici encore $\Delta u = 0$ [19], on a

$$\delta_0 u = -\delta x^{\alpha} \ \partial_{\alpha} u = -\Lambda^{\alpha\beta} \ x_{\beta} \ \partial_{\alpha} u$$

Le courant correspondant à cette transformation est donc

$$J_{\alpha} = -\Lambda_{\alpha\beta} \ x^{\beta} \ \mathcal{L} + \Lambda^{\gamma\beta} \ x_{\beta} \ \partial_{\gamma} u \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\alpha} u)}$$

soit

$$J_{\alpha} = \Lambda^{\gamma\beta} \ x_{\beta} \ T_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2}\Lambda^{\beta\gamma} \ \mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.137}$$

où

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma} = x_{\beta} \ T_{\alpha\gamma} - x_{\gamma} \ T_{\alpha\beta} \tag{2.138}$$

[19] Ceci revient à supposer que le champ $u(\underline{\mathrm{x}})$ est un scalaire au sens de $L(1,1)$. A noter qu'une application éventuelle du présent formalisme au système de la chaîne trouverait ici sa limite, puisque u représentant pour ce système un écart de coordonnées *spatiales* ne devrait pas rester invariant sous $L(1,1)$.

est le tenseur de *moment angulaire*, antisymétrique suivant les deux indices β et γ. On notera que sa forme est similaire à celle du moment cinétique en Mécanique classique[20]. Sa conservation est liée au fait que le tenseur énergie-impulsion est symétrique, puisque

$$\partial^\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\gamma} - T_{\gamma\beta} = 0 \tag{2.139}$$

et est associée à l'invariance de l'équation d'onde sous le groupe $L(1,1)$. Le tenseur $\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}$ n'a que quatre composantes non nulles, $\mathcal{M}_{001}$, $\mathcal{M}_{010} = -\mathcal{M}_{001}$, $\mathcal{M}_{101}$, $\mathcal{M}_{110} = -\mathcal{M}_{101}$, et l'intégrale

$$\mathcal{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \mathcal{M}_{001} = x_0 P_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ T_{00} \tag{2.140}$$

est une constante du mouvement qui représente le générateur de $L(1,1)$.

Il s'impose à ce point de faire une remarque importante. Nous avons vu que l'intégrale P_0, qui représente l'énergie du champ, est une composante covariante d'un 2-vecteur et n'est donc pas invariante sous le groupe $L(1,1)$. Néanmoins, ce groupe étant associé à une propriété d'invariance du système étudié, le théorème de Noether montre que son générateur $\mathcal{R}$ est une grandeur conservée. Ainsi, dès lors que sont impliquées des transformations d'espace-temps, la propriété de conservation d'une grandeur n'est pas directement liée à celle du Hamiltonien. Par rapport à ce que nous avons observé en Mécanique classique, où la conservation d'un générateur d'un groupe est liée à l'annulation de ses crochets de Poisson avec le Hamiltonien, crochets qui déterminent l'action sur le Hamiltonien de la transformation engendrée par ce générateur, il s'opère donc ici un changement de statut du Hamiltonien[21]. Le Hamiltonien doit être considéré comme un simple générateur d'un groupe (en l'occurence celui des translations temporelles), au même titre que d'autres, et qui, tout en représentant une grandeur conservée, peut ne pas rester invariant sous un autre groupe d'invariance du système. Il s'agit là d'un fait essentiel dont on conçoit bien, d'après ce qui précède, qu'il soit pris en compte tout naturellement dans les théories relativistes, dans lesquelles le Lagrangien reprend un rôle central.

2.4 Analyse de Fourier du champ

2.4.1 Analyse par une intégrale double de Fourier

Nous procèderons à une analyse du champ au moyen d'une intégrale double de Fourier, sous une forme présentant une "covariance" manifeste sous le groupe $L(1,1)$. Ainsi, la transformée de Fourier du champ $u(\underline{\mathsf{x}})$ sera écrite comme

$$\hat{u}(\underline{\mathsf{k}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ u(\underline{\mathsf{x}})\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} \tag{2.141}$$

où $\underline{\mathsf{k}}$ est un 2-vecteur de composante temporelle k_0 et de composante spatiale k, et où $\underline{\mathsf{k}}\cdot\ \underline{\mathsf{x}} = k_0 x_0 - kx$ est un produit scalaire au sens de $L(1,1)$. Inversement, on a[22]

$$u(\underline{\mathsf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk\ \hat{u}(\underline{\mathsf{k}})\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} \tag{2.142}$$

L'équation d'onde (2.46) à laquelle satisfait le champ $u(\underline{\mathsf{x}})$ s'exprime sur sa transformée de Fourier par l'équation

[20] Malheureusement, le fait qu'il n'y ait ici qu'une seule dimension spatiale ne permet pas de montrer le lien qui existe effectivement entre ce type de tenseur et le groupe des rotations spatiales.

[21] En quelque sorte, une démocratisation.

[22] Rappelons que l'on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot(\underline{\mathsf{x}}'-\underline{\mathsf{x}})} = (2\pi)^2\delta(\underline{\mathsf{x}}'-\underline{\mathsf{x}}) = (2\pi)^2\delta(x_0'-x_0)\delta(x'-x)$, où la notation $\delta(z)$ représente ici la distribution de Dirac d'argument z. Le symbole $\delta(\underline{\mathsf{x}}'-\underline{\mathsf{x}})$ représente donc une distribution de Dirac "double".

$$\underline{\mathsf{k}}^2\ \hat{u}(\underline{\mathsf{k}}) = 0 \tag{2.143}$$

Il s'ensuit que la transformée de Fourier du champ est nécessairement de la forme

$$\hat{u}(\underline{\mathsf{k}}) = A(\underline{\mathsf{k}})\ \delta(\underline{\mathsf{k}}^2) \equiv A(k_0, k)\ \delta(k_0^2 - k^2) \tag{2.144}$$

où $A(\underline{\mathsf{k}})$ est une amplitude, a priori complexe, dépendant de la structure du champ. Utilisant la formule

$$\delta(k_0^2 - k^2) = \frac{1}{2|k|}\ [\ \delta(k_0 - k) + \delta(k_0 + k)\ ] \tag{2.145}$$

il vient

$$\hat{u}(\underline{\mathsf{k}}) = \frac{1}{2|k|}\ [\ A(|k|, k)\ \delta(k_0 - k) + A(-|k|, k)\ \delta(k_0 + k)\ ] \tag{2.146}$$

d'où

$$\begin{aligned} u(\underline{\mathsf{x}}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2|k|}\ \left[\ A(|k|, k)\ e^{-i|k|x_0} + A(-|k|, k)\ e^{i|k|x_0}\ \right]\ e^{ikx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2|k|}\ \left[\ A(|k|, k)\ e^{-i|k|x_0}\ e^{ikx} + A(-|k|, -k)\ e^{i|k|x_0}\ e^{-ikx}\ \right] \end{aligned} \tag{2.147}$$

Utilisons maintenant les notations $k_0 = |k|$, $\underline{\mathsf{k}} = (|k|, k)$, $A(|k|, k) = 2\pi c(\underline{\mathsf{k}})$, $A(-|k|, -k) = 2\pi c'(\underline{\mathsf{k}})$. En tenant compte de ce que le champ est supposé être une fonction à valeurs réelles, on doit avoir $c'(\underline{\mathsf{k}}) = c^\star(\underline{\mathsf{k}})$. On obtient alors

$$u(\underline{\mathsf{x}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|}\ [\ c(\underline{\mathsf{k}})\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} + c^\star(\underline{\mathsf{k}})\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ ] \tag{2.148}$$

Les fonctions $c(\underline{\mathsf{k}})$ et $c^\star(\underline{\mathsf{k}})$ sont les *composantes de Fourier du champ*, qui ici sont complexes conjuguées l'une de l'autre. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que toutes les opérations effectuées sont mathématiquement justifiées, malgré la présence du facteur $|k|$ au dénominateur, qui induit une apparente singularité lorsque $k = 0$. L'origine de ce facteur est imputable à la formule (2.145) et la raison pour laquelle il est préférable de le laisser apparaître est que l'élément différentiel $\dfrac{dk}{(2\pi)2|k|}$ est invariant sous $L(1,1)$, alors que l'élément dk seul ne l'est pas[23]. Ceci permet d'obtenir une décomposition de Fourier du champ qui soit manifestement invariante sous $L(1,1)$.

2.4.2 Expressions du Hamiltonien et de la quantité de mouvement en fonction des composantes de Fourier

♣ Le Hamiltonien

Evaluons tout d'abord l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ (\partial_0 u)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{(2\pi)2|k'|} \times$$

$$(-k_0\ k_0')\left[\ -c(\underline{\mathsf{k}})\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} + c^\star(\underline{\mathsf{k}})\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]\ \left[\ -c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}} + c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]$$

$$= \int\int \frac{dkdk'}{8\pi}\ \left[\ -\left[c(\underline{\mathsf{k}})c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-2i|k|x_0} + c^\star(\underline{\mathsf{k}})c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{2i|k|x_0}\ \right]\delta(k + k') + 2|c(\underline{\mathsf{k}})|^2\delta(k - k')\right]$$

[23] Puisque $\underline{\mathsf{k}}$ est du genre lumière, sous une transformation de $L(1,1)$ sa composante k est simplement transformée en $k' = k\exp(\pm\chi)$, et par suite $\dfrac{dk'}{|k'|} = \dfrac{dk}{|k|}$.

puis l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ (\partial_1 u)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{(2\pi)2|k'|} \times$$

$$(-k\ k')\left[\ c(\underline{\mathsf{k}})\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ - c^\star(\underline{\mathsf{k}})\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]\ \left[\ c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ - c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]$$

$$= \int \int \frac{dkdk'}{8\pi}\ \left[\ \left[c(\underline{\mathsf{k}})c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-2i|k|x_0}\ + c^\star(\underline{\mathsf{k}})c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{2i|k|x_0}\ \right]\delta(k+k') + 2|c(\underline{\mathsf{k}})|^2\delta(k-k')\right]$$

où l'on a tenu compte de ce que $kk'\delta(k+k') = -k^2\delta(k+k')$. On obtient ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left[\ (\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2\ \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\ |c(\underline{\mathsf{k}})|^2$$

soit

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left[\ (\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2\ \right]\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|}\ k_0\ |c(\underline{\mathsf{k}})|^2 \tag{2.149}$$

en tenant compte de l'égalité $k_0 = |k|$. La dernière expression peut s'interpréter en termes de probabilités. En effet, dans cette optique, le facteur

$$d\mathcal{P} = \frac{dk}{(2\pi)2|k|}\ |c(\underline{\mathsf{k}})|^2 \tag{2.150}$$

représenterait, à un facteur de normalisation près, une probabilité élémentaire de trouver dans le champ $u(\underline{\mathsf{x}})$ une composante de Fourier ayant un 2-vecteur compris entre $\underline{\mathsf{k}}$ et $\underline{\mathsf{k}} + d\underline{\mathsf{k}}$, et $c(\underline{\mathsf{k}})$ serait une *amplitude de probabilité*. La composante k_0 s'interprèterait alors comme étant, à un facteur près, l'énergie transportée par cette composante de Fourier, et le Hamiltonien serait la valeur moyenne des énergies sur l'ensemble des composantes de Fourier.

♣ La quantité de mouvement

On obtient une formule analogue pour la quantité de mouvement. On a en effet

$$P^1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \partial_0 u\ \partial_1 u = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{(2\pi)2|k'|} \times$$

$$(-k_0\ k')\left[\ -c(\underline{\mathsf{k}})\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} + c^\star(\underline{\mathsf{k}})\ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]\ \left[\ c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ - c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}}\ \right]$$

$$= \int \int \frac{dkdk'}{8\pi}\ \frac{k'}{|k'|}\ \left[-\left[c(\underline{\mathsf{k}})c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-2i|k|x_0}\ + c^\star(\underline{\mathsf{k}})c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{2i|k|x_0}\ \right]\delta(k+k') + 2|c(\underline{\mathsf{k}})|^2\delta(k-k')\right]$$

Mais

$$\int \int \frac{dkdk'}{|k'|}\ k'\ \left[c(\underline{\mathsf{k}})c(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{-2i|k|x_0}\ + c^\star(\underline{\mathsf{k}})c^\star(\underline{\mathsf{k}}')\ e^{2i|k|x_0}\ \right]\delta(k+k')$$

$$= -\int \frac{dk}{|k|}\ k\ \left[\ c(|k|,k)c(|k|,-k))\ e^{-2i|k|x_0}\ + c^\star(|k|,k)c^\star(|k|,-k)\ e^{2i|k|x_0}\ \right] = 0$$

car cette intégrale selon k, portant sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, est celle du produit d'une fonction paire par une fonction impaire de cette variable. On obtient finalement

$$P^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|}\ k\ |c(\underline{k})|^2 \tag{2.151}$$

ce qui fait dire que la composante k est associée à une quantité de mouvement (composante contravariante) portée par la composante de Fourier de 2-vecteur $\underline{k}$.

2.5 Variables canoniques et crochets de Poisson pour le champ

On peut donner au Hamiltonien une forme "canonique" similaire à celle obtenue pour les oscillateurs harmoniques (1.345). Posons en effet

$$c(\underline{k}) = \frac{Q(\underline{k}) + iP(\underline{k})}{\sqrt{2}} \tag{2.152}$$

où $Q(\underline{k})$ et $P(\underline{k})$ sont deux fonctions de $\underline{k}$ à valeurs réelles. On a alors

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)2|k|}\ \frac{k_0}{2}\ \left[\ Q^2(\underline{k}) + P^2(\underline{k})\ \right] \tag{2.153}$$

Il est alors légitime de se demander si $Q(\underline{k})$ et $P(\underline{k})$ pourraient jouer le rôle de variables *canoniquement conjuguées*. Or, pour l'oscillateur harmonique, les relations

$$\{H, Q\} = \omega P\ ,\quad \{H, P\} = -\omega Q$$

où ω est la pulsation propre de l'oscillateur, permettent d'exprimer l'une des variables canoniques au moyen des crochets de Poisson de sa variable conjuguée avec le Hamiltonien. Il est tentant de définir ici des crochets de Poisson ayant des propriétés semblables à celles des crochets de Poisson usuels, de sorte que

$$\begin{gathered} \{H, Q(\underline{k})\} = k_0 P(\underline{k})\ ,\quad \{H, P(\underline{k})\} = -k_0 Q(\underline{k}) \\ \{Q(\underline{k}'), Q(\underline{k})\} = 0\ ,\quad \{P(\underline{k}'), P(\underline{k})\} = 0 \end{gathered} \tag{2.154}$$

Mais

$$\{H, Q(\underline{k})\}\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{8\pi}\ \{Q^2(\underline{k}') + P^2(\underline{k}'), Q(\underline{k})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{8\pi}\ \{P^2(\underline{k}'), Q(\underline{k})\}$$

et, en imposant la propriété dite "de Leibnitz"[24]

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

qui donne

$$\{P^2(\underline{k}'), Q(\underline{k})\} = 2P(\underline{k}')\ \{P(\underline{k}'), Q(\underline{k})\},\quad \text{et}\quad \{P(\underline{k}'), Q^2(\underline{k})\} = 2Q(\underline{k})\ \{P(\underline{k}'), Q(\underline{k})$$

il vient

$$\{H, Q(\underline{k})\}\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{4\pi}\ P(\underline{k}')\ \{P(\underline{k}'), Q(\underline{k})\}$$

[24] Qui fait que les crochets agissent comme une dérivation.

De même

$$\{H, P(\underline{k})\} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{4\pi}\; P(\underline{k}')\; \{P(\underline{k}'), Q(\underline{k})\}$$

Pour obtenir les relations (2.154), il est donc cohérent d'imposer

$$\{P(\underline{k}'), Q(\underline{k})\} = (2\pi) 2k_0 \delta(k' - k) \tag{2.155}$$

ce qui peut être regardé comme une simple généralisation des crochets usuels $\{p, q\} = 1$. On en déduit aussi

$$\{c^\star(\underline{k}'), c(\underline{k})\} = \; -i\; (2\pi) 2k_0 \delta(k' - k) \tag{2.156}$$

2.5.1 Expression des crochets $\{u(\underline{x}'), u(\underline{x})\}$

Comme application immédiate de ces relations "canoniques", calculons les crochets $\{u(\underline{x}'), u(\underline{x})\}$. On a

$$\{u(\underline{x}'), u(\underline{x})\} = \int\int \frac{dk' dk}{16\pi^2 k'_0 k_0}\; \{\; c(\underline{k}')\; e^{-i\underline{k}'\cdot\underline{x}'} + c^\star(\underline{k}')\; e^{i\underline{k}'\cdot\underline{x}'}\;,\; c(\underline{k})\; e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} + c^\star(\underline{k})\; e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\; \}$$

$$\equiv \int\int \frac{dk' dk}{16\pi^2 k'_0 k_0}\; \left[\; \{c(\underline{k}')\;,\; c^\star(\underline{k})\} e^{-i\underline{k}'\cdot\underline{x}'} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} + \{c^\star(\underline{k}')\;,\; c(\underline{k})\} e^{i\underline{k}'\cdot\underline{x}'} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \right] = \mathcal{D}(\underline{x} - \underline{x}')$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{4\pi k_0}\; \left[e^{-i\underline{k}\cdot(\underline{x}' - \underline{x})} - e^{i\underline{k}\cdot(\underline{x}' - \underline{x})} \right] = \mathcal{D}(\underline{x} - \underline{x}')$$

Posant $\underline{y} = \underline{x}$ - $\underline{x}'$, la fonction $\mathcal{D}(\underline{y})$ se calcule ainsi :

$$\mathcal{D}(\underline{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi k_0}\; \sin(k_0 y_0)\; e^{iky} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi k_0}\; \sin(k_0 y_0) \cos(ky)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi k}\; \sin(k y_0) \cos(ky)$$

Il est clair que $\mathcal{D}(-y_0, y) = -\mathcal{D}(y_0, y)$ et que $\mathcal{D}(0, y) = 0$. Introduisant la "fonction signe" :

$$\epsilon(y_0) = +1 \;\text{ si }\; y_0 > 0 \;\;,\;\; \epsilon(y_0) = -1 \;\text{ si }\; y_0 < 0$$

on peut écrire

$$\mathcal{D}(\underline{y}) = \epsilon(y_0) \mathcal{D}(|y_0|, y)$$

Considérons donc le cas où $y_0 > 0$ et effectuons le changement de variable $z = k|y_0|$. On obtient

$$\mathcal{D}(\underline{y}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz\; \frac{\sin z}{z}\; \cos(zv)\;,\;\; \text{avec}\;\; v = \frac{y}{y_0}$$

Mais

$$\theta(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dz\; \frac{\sin z}{z}\; \cos(zv)$$

est le *facteur discontinu de Dirichlet* tel que

$$\theta(v) = +1 \ , \quad \text{si} \quad |v| < 1 \ , \quad \text{soit} \quad \underline{\mathsf{y}}^2 > 0$$

$$\theta(v) = 0 \ , \quad \text{si} \quad |v| > 1 \ , \quad \text{soit} \quad \underline{\mathsf{y}}^2 < 0$$

$$\theta(v) = \frac{1}{2} \ , \quad \text{si} \quad |v| = 1 \ , \quad \text{soit} \quad \underline{\mathsf{y}}^2 = 0$$

On appelle *fonction de Heaviside* la fonction $\Theta(X)$ telle que

$$\Theta(X) = +1 \ , \quad \text{si} \quad X > 0 \ , \quad \Theta(X) = 0 \ , \quad \text{si} \quad X < 0 \ , \quad \Theta(0) = \frac{1}{2}$$

Avec ces définitions, on obtient finalement

$$\{u(\underline{\mathsf{x}}'), u(\underline{\mathsf{x}})\} = \mathcal{D}(\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}}) = \frac{1}{2}\epsilon(x_0' - x_0)\Theta((\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2) \tag{2.157}$$

On notera que ces crochets sont non nuls uniquement si l'intervalle $(\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2$ est du genre temps[25].

2.5.2 Expression des crochets $\{\partial_0 u(\underline{\mathsf{x}}'), u(\underline{\mathsf{x}})\}$

Pour calculer ces crochets on peut procéder comme suit.

$$\{\partial_0 u(\underline{\mathsf{x}}'), u(\underline{\mathsf{x}})\} = i \int\int \frac{dk'dk}{16\pi^2 k_0} \ \{ \ -c(\underline{\mathsf{k}}') \ e^{-i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}'} + c^\star(\underline{\mathsf{k}}') \ e^{i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}'} \ , \ c(\underline{\mathsf{k}}) \ e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} + c^\star(\underline{\mathsf{k}}) \ e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} \ \}$$

$$\equiv i \int\int \frac{dk'dk}{16\pi^2 k_0} \left[\ \{c^\star(\underline{\mathsf{k}}) \ , \ c(\underline{\mathsf{k}}')\} e^{-i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}'} e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}} + \{c^\star(\underline{\mathsf{k}}') \ , \ c(\underline{\mathsf{k}})\} e^{i\underline{\mathsf{k}}'\cdot\underline{\mathsf{x}}'} e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot\underline{\mathsf{x}}}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \left[e^{-i\underline{\mathsf{k}}\cdot(\underline{\mathsf{x}}'-\underline{\mathsf{x}})} + e^{i\underline{\mathsf{k}}\cdot(\underline{\mathsf{x}}'-\underline{\mathsf{x}})}\right] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \left[e^{-i|k|(x_0'-x_0)} + e^{i|k|(x_0'-x_0)}\right] e^{ik(x'-x)}$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \left[e^{-ik(x_0'-x_0)} + e^{ik(x_0'-x_0)}\right] e^{ik(x'-x)} = \frac{1}{2}\left[\delta(x_0' - x_0 - x' + x) + \delta(x_0' - x_0 + x' - x)\right]$$

d'où

$$\{\partial_0 u(\underline{\mathsf{x}}'), u(\underline{\mathsf{x}})\} = \frac{1}{2}\left[\delta(x_0' - x_0 - x' + x) + \delta(x_0' - x_0 + x' - x)\right] \tag{2.158}$$

Mais il est hautement instructif de calculer ces crochets par une dérivation directe des crochets (2.157) par rapport à x_0'. Ecrivons $\epsilon(x_0' - x_0) = \Theta(x_0' - x_0) - \Theta(x_0 - x_0')$.

Puisque $\dfrac{\partial}{\partial x_0'}\Theta(x_0' - x_0) = \delta(x_0' - x_0)$, on a $\dfrac{\partial}{\partial x_0'}\epsilon(x_0' - x_0) = 2\delta(x_0' - x_0)$. D'un autre côté,

$$\frac{\partial}{\partial x_0'}\Theta((\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2) = 2(x_0' - x_0)\delta((\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2) = \epsilon(x_0' - x_0) \ \left[\delta(x_0' - x_0 - x' + x) + \delta(x_0' - x_0 + x' - x)\right]$$

Comme $\delta(x_0' - x_0)\Theta((\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2) = 0$, et que $\epsilon^2(x_0' - x_0) = +1$, on obtient ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0'}\left[\epsilon(x_0' - x_0)\Theta((\underline{\mathsf{x}}' - \underline{\mathsf{x}})^2)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(x_0' - x_0 - x' + x) + \delta(x_0' - x_0 + x' - x)\right]$$

[25]En termes relativistes, l'annulation des crochets pour des intervalles du genre espace serait interprétée comme traduisant le fait que deux événements séparés par un intervalle de ce genre n'ont aucune corrélation entre eux.

et l'on retrouve bien la formule (2.158). On notera que ces crochets font intervenir deux distributions de Dirac concentrées sur les "lignes de lumière", définies par $x'_0 - x_0 = \pm(x' - x)$. Par ailleurs, nous avons déjà mentionné que $\pi_0 = \partial_0 u$ représente un *champ conjugué* pour le champ $u(\underline{x})$. Cette appellation trouve ici sa pleine justification par le fait que

$$\{\pi_0(\underline{x}'), u(\underline{x})\} = \frac{1}{2}\left[\delta(x'_0 - x_0 - x' + x) + \delta(x'_0 - x_0 + x' - x)\right] \neq 0 \tag{2.159}$$

et, plus particulièrement,

$$\{\pi_0(\underline{x}'), u(\underline{x})\}_{TE} = \delta(x' - x) \tag{2.160}$$

où la notation "TE" signifie que dans cette expression on a posé $x'_0 = x_0$ (Temps Egaux).

Par le même procédé, on obtient les crochets

$$\{\partial_1 u(\underline{x}'), u(\underline{x})\} = \frac{1}{2}\left[\delta(x'_0 - x_0 + x' - x) - \delta(x'_0 - x_0 - x' + x)\right] \tag{2.161}$$

et

$$\{\partial_1 u(\underline{x}'), u(\underline{x})\}_{TE} = 0 \tag{2.162}$$

Enfin, nous admettrons sans démonstration que l'on a

$$\{\pi_0(\underline{x}'), \pi_0(\underline{x})\}_{TE} = 0 \tag{2.163}$$

2.5.3 Génération des transformations d'espace-temps par les crochets de Poisson

♣ Translation temporelle

Le générateur de cette transformation est P_0. Ceci se concrétise par les crochets suivants[26]

$$\{P_0, u(\underline{x})\} \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ \{(\pi_0)^2 + (\partial_1 u)^2, u(\underline{x})\}_{TE} \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ \pi_0(\underline{x}')\{\pi_0(\underline{x}'), u(\underline{x})\}_{TE}$$

soit, compte-tenu de (2.160),

$$\{P_0, u(\underline{x})\} = \pi_0(\underline{x}) = \partial_0 u(\underline{x}) \tag{2.164}$$

et

$$\{\delta x_0 P_0, u(\underline{x})\} = \delta x_0 \ \partial_0 u(\underline{x}) = -\delta_0 u \tag{2.165}$$

♣ Translation spatiale

On a ici

$$\{P_1, u(\underline{x})\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ \{\pi_0 \partial_1 u, u(\underline{x})\}_{TE} \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ \partial_1 u(\underline{x}')\{\pi_0(\underline{x}'), u(\underline{x})\}_{TE}$$

[26]Se rappeler que P_0 est indépendant de x_0, ce qui fait que les crochets peuvent être pris à temps égaux.

d'où

$$\{P_1, u(\underline{x})\} = \partial_1 u(\underline{x}) \tag{2.166}$$

et

$$\{\delta x P_1, u(\underline{x})\} = \delta x\ \partial_1 u(\underline{x}) = -\delta_0 u \tag{2.167}$$

ce qui justifie que P_1 représente bien le générateur de cette transformation.

♣ **Transformations de** $L(1,1)$

Le générateur de ces transformations est censé être représenté par (2.140). Vérifions-le. On a

$$\begin{aligned}\{\mathcal{R}, u(\underline{x})\} &= x_0\{P_1, u(\underline{x})\} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\ x'\ \{T_{00}, u(\underline{x})\}_{TE} \\ &= \ x_0\ \partial_1 u(\underline{x}) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\ x'\ \pi_0(\underline{x}')\{\pi_0(\underline{x}'), u(\underline{x})\}_{TE}\end{aligned}$$

d'où

$$\{\mathcal{R}, u(\underline{x})\} = x_0\ \partial_1 u(\underline{x}) + x\ \partial_0 u(\underline{x}) \tag{2.168}$$

et, pour $\delta x_0 = \delta\chi\ x$ et $\delta x = \delta\chi\ x_0$ [27],

$$\{\delta\chi\mathcal{R}, u(\underline{x})\} = \delta\chi\,[\ x_0\ \partial_1 u(\underline{x}) + x\ \partial_0 u(\underline{x})\ ] = -\delta_0 u \tag{2.169}$$

Pour compléter, calculons aussi les crochets de $\mathcal{R}$ avec P_0 et P_1. Il vient

$$\begin{aligned}\{\mathcal{R}, P_0\} \ &= \ -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ \{P_0, T_{00}\} \ = \ -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ \partial_0 T_{00} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ \left[\partial_0 u\ \partial_0^2 u + \partial_1 u\ \partial_0\partial_1 u\right]\end{aligned}$$

et comme $\partial_0^2 u = \partial_1^2 u$ (équation d'onde), on a

$$\begin{aligned}x\ \left[\partial_0 u\ \partial_0^2 u + \partial_1 u\ \partial_0\partial_1 u\right] &= x\ \left[\partial_0 u\ \partial_1^2 u + \partial_1 u\ \partial_0\partial_1 u\right] \\ &= x\partial_1\left(\partial_1 u\ \partial_0 u\right) = \partial_1\left(x\ \partial_1 u\ \partial_0 u\right) - \partial_1 u\ \partial_0 u\end{aligned}$$

L'intégration du premier terme de la dernière expression donne une contribution nulle. Il reste

$$\{\mathcal{R}, P_0\} \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \partial_0 u\ \partial_1 u = P_1 \tag{2.170}$$

et (toujours pour $\delta x_0 = \delta\chi\ x$ et $\delta x = \delta\chi\ x_0$)

$$\{\delta\chi\ \mathcal{R}, P_0\} \ = \ \delta\chi\ P_1 = -\delta P_0 \tag{2.171}$$

De même

$$\{\mathcal{R}, P_1\} \ = \ -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ \{P_1, T_{00}\} \ = \ -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ \partial_1 T_{00} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left[\ \partial_1\left(x\ T_{00}\right) - T_{00}\right]$$

[27] On remarquera qu'un changement de repère $(n_0, n_1) \to (n'_0, n'_1)$ tel que $n'_0 = \cosh\chi\ n_0 + \sinh\chi\ n_1$, $n'_1 = \cosh\chi\ n_1 + \sinh\chi\ n_0$, induit sur les coordonnées la transformation "inverse" $x'_0 = x_0\cosh\chi - x\sinh\chi$, $x' = x\cosh\chi - x_0\sinh\chi$.

Par suite

$$\{\mathcal{R}, P_1\} \;=\; P_0 \tag{2.172}$$

et

$$\{\delta\chi\ \mathcal{R}, P_1\} \;=\; \delta\chi\ P_0 = -\delta P_1 \tag{2.173}$$

Toutes ces relations confirment donc le rôle de $\mathcal{T}$ comme générateur de $L(1,1)$, via l'opération des crochets de Poisson, et justifient aussi l'introduction même de ces crochets.

♣ Dilatations

Considérons le courant

$$D_\alpha = T_{\alpha\beta}\ x^\beta \tag{2.174}$$

Compte-tenu du fait que le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ est conservé ($\partial^\alpha\ T_{\alpha\beta} = 0$), la 2-divergence de ce courant est donnée par

$$\partial^\alpha D_\alpha = T^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\alpha} \tag{2.175}$$

c'est-à-dire, égale à la *trace* du tenseur énergie-impulsion. Or, ici, cette trace vaut

$$T^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\alpha} = T^{0\,\cdot}_{\cdot\,0} + T^{1\,\cdot}_{\cdot\,1} = T_{00} - T_{11} = 0 \tag{2.176}$$

Le courant (2.174) est donc *conservé*, et l'intégrale

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} dx D_0 \;=\; x_0 P_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ T_{01} \tag{2.177}$$

est une constante du mouvement. On peut envisager cette grandeur comme le générateur d'un groupe continu à un paramètre. Une transformation infinitésimale de ce groupe sera telle que

$$\{D, u(\underline{x})\} = -\delta_0 u(\underline{x})$$

Or, on a

$$\{D, u(\underline{x})\} \equiv \{D, u(\underline{x})\}_{TE} = x_0\ \partial_0 u(\underline{x}) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\ x'\ \{\partial_0 u\ \partial_1 u, u(\underline{x})\}_{TE}$$

soit

$$\{D, u(\underline{x})\} = x_0\ \partial_0 u(\underline{x}) + x\ \partial_1 u(\underline{x}) \tag{2.178}$$

La transformation est donc une nouvelle transformation sur les coordonnées dans $\mathcal{E}_2$, telle que

$$\delta_0 u = -\delta\lambda\,[\ x_0\ \partial_0 u + x\ \partial_1 u\ ] = -\delta x^\alpha \partial_\alpha u$$

On en déduit

$$\delta x_0 = \delta\lambda\ x_0\ ,\quad \delta x = \delta\lambda\ x \tag{2.179}$$

Il s'agit donc d'une *dilatation* des coordonnées. En supposant que le champ u ne change pas intrinsèquement dans l'opération $x'_0 = \lambda x_0\ ,\ x' = \lambda\ x$, on vérifie facilement que l'intégrale d'Action reste effectivement invariante sous celle-ci : d'une part, les carrés des dérivées partielles premières de u se voient multipliés par le facteur $1/\lambda^2$ et, d'autre part, l'élément de volume $dx_0 dx$ est multiplié par le facteur inverse λ^2 qui compense le précédent. Cette propriété d'invariance mérite d'être commentée.

Une fonction $F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de n variables $z_1, z_2, \cdots, z_n$ est dite homogène de degré r si, lorsqu'on multiplie chaque variable par un même facteur λ, la valeur de la fonction se voit multipliée par λ^r. Un théorème dû à Euler montre qu'une telle fonction doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles[28]

$$\sum_{s=1}^{n} z_s \frac{\partial F}{\partial z_s} \;=\; r\,F \tag{2.180}$$

Supposons que les n variables aient la même dimension, par exemple celle d'une longueur. Alors le degré d'homogénéité r donne la *dimension* de la fonction F par rapport à cette dimension caractéristique. Si $F = \sum z_s^2$, F est homogène au carré d'une longueur ($r = 2$)) ; si $F = z_1 z_2 \cdots z_n$, F est homogène à la puissance n d'une longueur ($r = n$), etc.

Dans la transformation $z_s \to z'_s = (1+\epsilon) z_s$, où ϵ est infinitésimal, on a

$$F'(z'_1, z'_2, \cdots, z'_n) = (1+\epsilon)^r\, F(z_1, z_2, \cdots, z_n) \approx (1 + r\epsilon)\, F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

et

$$\Delta F = F'(z'_1, z'_2, \cdots, z'_n) - F(z_1, z_2, \cdots, z_n) = r\epsilon\, F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

La quantité

$$\frac{1}{F} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Delta F}{\epsilon} = r \tag{2.181}$$

donne alors la *dimension* de la fonction. On peut étendre cette définition à une fonction quelconque et appeler *dimension* r de la fonction la limite d'un tel rapport[29]. Si cette limite existe bien, on obtient ensuite

$$\delta_0 F = F'(z_1, z_2, \cdots, z_n) - F(z_1, z_2, \cdots, z_n) = rF - \sum_{s=1}^{n} z_s \frac{\partial F}{\partial z_s} \tag{2.182}$$

quantité qui est nulle si la fonction est homogène de degré r.

Si l'on donne la dimension L d'une longueur aux variables x_0 et x, alors, en toute cohérence, le champ u envisagé ici doit être considéré comme étant *sans dimension* ($r = 0$)[30]. Ceci fait que l'intégrale d'Action est elle aussi sans dimension. La densité lagrangienne a pour dimension -2, etc.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les relations

$$\{D, P_0\} = P_0 \ , \quad \{D, P_1\} = P_1 \ , \quad \{D, T\} = 0 \tag{2.183}$$

qui montrent notamment que P_0 et P_1 ont pour dimension -1.

♣ Transformations conformes spéciales

On appelle ainsi les transformations provoquant le changement de coordonnées :

$$x^\alpha \to x'^\alpha = \frac{x^\alpha - c^\alpha\, \underline{x}^2}{\sigma(\underline{x})} \ , \quad \text{avec} \ \ \sigma(\underline{x}) = 1 - 2\underline{c}\cdot\underline{x} + \underline{c}^2 \underline{x}^2 \tag{2.184}$$

où $\underline{c}$, de composantes contravariantes c^α, est un 2-vecteur constant[31]. Il s'agit en fait du produit d'une première inversion

[28] Démontrer ce théorème.
[29] Limite qui peut ne pas exister.
[30] On rappelle qu'il ne s'agit plus ici de l'étude de la chaîne infinie de ressorts...
[31] Noter que ce 2-vecteur a pour dimension l'inverse de celle des coordonnées

$$x^\alpha \to y^\alpha = \frac{x^\alpha}{\underline{\mathsf{x}}^2} \tag{2.185}$$

suivie d'une translation

$$y^\alpha \to z^\alpha = y^\alpha - c^\alpha \tag{2.186}$$

elle-même suivie d'une nouvelle inversion

$$z^\alpha \to x'^\alpha = \frac{z^\alpha}{\underline{\mathsf{z}}^2} \tag{2.187}$$

Elles forment un groupe à deux paramètres[32], ceux-ci étant les deux composantes du 2-vecteur $\underline{\mathsf{c}}$ [33]. A noter la relation

$$\underline{\mathsf{x}}'^2 = \frac{\underline{\mathsf{x}}^2}{\sigma(\underline{\mathsf{x}})} \tag{2.188}$$

d'où l'on conclut que, selon le signe de $\sigma(\underline{\mathsf{x}})$, la transformation peut changer ou non le genre d'un intervalle. En revanche, les lignes de lumière restent globalement invariantes. Ceci se voit plus clairement dans la transformation des variables $x_+ = x_0 + x$ et $x_- = x_0 - x$ pour lesquelles on a

$$x'_+ = \frac{x_+}{1 - x_+\,(c_0 - c)} \;\; , \;\; x'_- = \frac{x_-}{1 + x_-\,(c_0 + c)} \tag{2.189}$$

Ces formules présentent une similitude évidente avec celle définissant, dans le plan complexe, une transformation *homographique*[34] de la variable complexe z :

$$z \to z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

A, B, C et D étant ici des nombres complexes tels que $AD - BC \neq 0$ (ici, cette condition revient à $\underline{\mathsf{c}}^2 \neq 0$). Il s'agit d'une transformation conforme[35] dont une propriété est la conservation du *birapport*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} / \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \tag{2.190}$$

de quatre nombres complexes *distincts* z_1, z_2, z_3 et z_4. On peut d'ailleurs vérifier directement l'invariance des birapports $(x_{1+}, x_{2+}, x_{3+}, x_{4+})$ et $(x_{1-}, x_{2-}, x_{3-}, x_{4-})$, et comme $x_+ x_- = \underline{\mathsf{x}}^2$ pour tout 2-vecteur, on en déduit qu'une transformation conforme spéciale laisse invariant le "birapport"

$$B(\underline{\mathsf{x}}_1, \underline{\mathsf{x}}_2, \underline{\mathsf{x}}_3, \underline{\mathsf{x}}_4) = \frac{(\underline{\mathsf{x}}_1 - \underline{\mathsf{x}}_2)^2\,(\underline{\mathsf{x}}_3 - \underline{\mathsf{x}}_4)^2}{(\underline{\mathsf{x}}_1 - \underline{\mathsf{x}}_4)^2\,(\underline{\mathsf{x}}_3 - \underline{\mathsf{x}}_2)^2} \tag{2.191}$$

de quatre 2-vecteurs $\underline{\mathsf{x}}_1$, $\underline{\mathsf{x}}_2$, $\underline{\mathsf{x}}_3$ et $\underline{\mathsf{x}}_4$ distincts.

Pour une transformation infinitésimale de paramètres δc^α, le changement de coordonnées est

$$\delta x_\alpha = \delta c^\beta \left(2 x_\alpha x_\beta - g_{\alpha\beta}\,\underline{\mathsf{x}}^2\right) \tag{2.192}$$

donnant une variation de volume égale à

$$\delta(dx_0 dx) = \partial^\alpha \delta x_\alpha\,(dx_0 dx) = 4\,\delta\underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{x}}\,(dx_0 dx) \tag{2.193}$$

[32] Pour l'espace-temps de la Relativité, le groupe correspondant est à 4 paramètres.

[33] Vérifier qu'il s'agit bien d'un groupe de transformations et identifier l'opération inverse.

[34] Ou *transformation de Möbius*.

[35] Une transformation conforme dans le plan transforme un domaine du plan dans un plan tout en conservant les angles entre deux courbes orientées. Dans le plan complexe, une telle transformation est définie par une fonction *analytique* $z' = f(z)$ de la variable complexe z. La transformation homographique transforme ou un cercle ou une droite en un cercle ou une droite.

On aura ici

$$\delta_0 u = -\delta x^\alpha\, \partial_\alpha u = -\delta c^\beta\, m_{\beta\gamma}\, \partial^\gamma u \quad , \quad \text{avec} \quad m_{\beta\gamma} = 2x_\beta\, x_\gamma - g_{\beta\gamma}\, \underline{x}^2 \tag{2.194}$$

D'où le courant (tenseur) associé

$$C^{\gamma}_{\cdot\,\alpha} = m^{\beta\gamma}\, T_{\alpha\beta} \tag{2.195}$$

Comme

$$\partial^\alpha C^{\gamma}_{\cdot\,\alpha} = x^\gamma\, T^{\alpha}_{\cdot\,\alpha} = 0 \tag{2.196}$$

ce courant est conservé, ce qui montre que le groupe des transformations envisagées est aussi un groupe de symétrie du système[36]. Les deux générateurs du groupe

$$\begin{aligned} C^0 = C_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx C_{00} = 2x_0\, D - x_0^2 P_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, T_{00} \\ C^1 = -C_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, C_{10} = x_0^2 P_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, T_{01} + 2x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, T_{00} \end{aligned} \tag{2.197}$$

sont donc aussi des constantes du mouvement. Ce sont en outre les composantes d'un 2-vecteur. On vérifie aisément que l'on a bien

$$\{\delta c_\gamma C^\gamma, u(\underline{x})\} = \delta c_\gamma\, m^{\alpha\gamma}\, \partial_\alpha u(\underline{x}) = -\delta_0 u(\underline{x}) \tag{2.198}$$

♣ Algèbre de Lie des transformations ponctuelles

L'action sur le champ $u(\underline{x})$ de chacune des transformations ponctuelles infinitésimales considérées précédemment peut être représentée par un opérateur différentiel, identifiable au moyen de la variation de forme correspondante $\delta_0 u(\underline{x})$ du champ. Nous poserons ainsi

$$P_\alpha = -\partial_\alpha \tag{2.199}$$

pour les translations d'espace et de temps ;

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = -\left(x_\alpha\, \partial_\beta - x_\beta\, \partial_\alpha\right) \quad , \quad \text{et} \\ R = R_{01} = -R_{10} = -\left(x_0\, \partial_0 + x\, \partial_1\right) \end{aligned} \tag{2.200}$$

pour les transformations de $L(1,1)$;

$$D = -x^\alpha \partial_\alpha = -\left(x_0\, \partial_0 + x\, \partial_1\right) \tag{2.201}$$

pour les dilatations ; et

$$\begin{aligned} C^\alpha = -\left(2x^\alpha\, x^\beta - g^{\alpha\beta}\right) \quad , \quad \text{soit} \\ C^0 = -\left((x_0^2 + x^2)\partial_0 + 2x_0\, x\, \partial_1\right) \quad , \quad \text{et} \quad C^1 = -\left((x_0^2 + x^2)\partial_1 + 2x_0\, x\, \partial_0\right) \end{aligned} \tag{2.202}$$

pour les transformations conformes spéciales. Il est alors facile d'établir les *relations de commutation* suivantes ($[A, B] = AB - BA$)

[36] Via le calcul des dérivées partielles $\dfrac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$, le lecteur est invité à déterminer le Jacobien de la transformation et à montrer explicitement que $dx_0 dx \mathcal{L}$ est bien invariant.

$$\begin{gathered}
[P_0, P_1] = 0 \ , \quad [D, P_0] = P_0 \ , \quad [D, P_1] = P_1 \\
[R, P_0] = P_1 \ , \quad [R, P_1] = P_0 \ , \quad [R, D] = 0 \ , \quad [R, C_0] = C_1 \ , \quad [R, C_1] = C_0 \\
[C^0, P_0] = 2D \ , \quad [C^0, P_1] = 2R \ , \quad [C^0, D] = C^0 \\
[C^1, P_0] = 2R \ , \quad [C^1, P_1] = 2D \ , \quad [C^1, D] = C^1 \ , \quad [C^0, C^1] = 0
\end{gathered} \tag{2.203}$$

L'ensemble de ces opérateurs constituent donc une représentation d'une algèbre de Lie, les *crochets de Lie* étant ici les commutateurs. On peut vérifier que les constantes de mouvement P_0, P_1, $\mathcal{R}$, D, C^α introduites précédemment vérifient les mêmes relations, où les crochets de Lie sont cette fois les crochets de Poisson définis plus haut pour le champ. Ceci conforte, d'une part, l'interprétation de ces grandeurs comme générateurs de transformations, et, d'autre part, le bien-fondé de la définition des crochets de Poisson pour le champ.

2.6 Crochets de Poisson et dérivation fonctionnelle

On peut donner des crochets de Poisson du champ une définition qui apparaît comme une extension naturelle des crochets de Poisson introduits dans la formulation hamiltonienne de la Mécanique Analytique, et qui plus est, leur apporte une assise mathématique.

2.6.1 Espace vectoriel de fonctions

Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle x, que nous supposerons définies sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Muni de la multiplication par un complexe et de l'addition usuelle, cet ensemble a la structure d'un espace vectoriel sur le corps des complexes. On peut aussi le doter d'une norme en définissant le produit scalaire de deux fonctions f et g par

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)^\star\, g(x) \tag{2.204}$$

Lorsqu'elle peut être définie [37], l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = ||f||^2 \tag{2.205}$$

représente le carré de la norme $||f||$ de la fonction f. Même lorsque cette norme ne peut être définie parce que l'intégrale est divergente, nous supposerons que le produit scalaire (2.204) pour deux fonctions f et g distinctes l'est toujours. Cela nécessite d'élargir l'ensemble des fonctions considérées aux *distributions*. Deux fonctions sont dites orthogonales si leur produit scalaire (2.204) est nul.

Dans cet espace de fonctions, on peut toujours trouver des *bases* de fonctions. On connait déjà un exemple, un peu spécial, avec la transformée de Fourier. En effet, les formules de cette transformation :

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.206}$$

s'interprètent ainsi. La transformée de Fourier $\hat{f}(k)$ est un produit scalaire et représente la *composante* du "vecteur" f selon le "vecteur de base" ξ_k tel que $\xi_k(x) = \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. C'est une projection "orthogonale", car les fonctions $\xi_k(x)$ sont orthogonales :

$$(\xi_k, \xi_{k'}) = \delta(k - k') = 0 \ , \quad \text{si} \quad k \neq k' \tag{2.207}$$

[37] On dit alors que la fonction f est de *carré sommable*.

La seconde formule montre que la fonction f admet un développement *continu*, au moyen d'une intégrale, sur l'ensemble des fonctions ξ_k qui constitue ainsi une "base" dans l'espace des fonctions. La particularité de ce développement est que les vecteurs ξ_k de cette base sont indexés par un "indice" continu k qui varie dans l'intervalle $]-\infty,+\infty[$. Il s'agit donc ici d'une base *non dénombrale*. Le fait que les vecteurs de base soient en nombre infini montre clairement que l'espace des fonctions considéré est de dimension infinie. A noter qu'ici, la *normalisation* des vecteurs de la base est faite de telle sorte qu'on obtienne la distribution de Dirac comme produit scalaire de deux vecteurs de cette base.

Il existe cependant des bases *discrètes* dont les vecteurs sont indexés par un entier. Il en va ainsi des *polynômes d'Hermite*, ou des *pôlynomes de Laguerre*, qui sont des fonctions à valeurs réelles, en nombre infini. Nous supposerons donc que l'on a défini une telle base, dite *dénombrable*, de fonctions f_n *orthonormées*, c'est-à-dire, qui satisfont

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm} \tag{2.208}$$

et telles que pour toute fonction ϕ à valeurs réelles, on puisse écrire pour tout x

$$\phi(x) = \sum_n q_n\, f_n(x) \quad , \quad \text{avec} \quad q_n = (f_n, \phi) \tag{2.209}$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_n f_n(x') f_n(x) \phi(x) = \sum_n f_n(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_n(x)\, \phi(x)$$

$$= \sum_n f_n(x')\, q_n = \phi(x')$$

on en déduit que la suite de fonctions f_n satisfait aussi à la relation dite *relation de fermeture*

$$\sum_n f_n(x')\, f_n(x) = \delta(x' - x) \tag{2.210}$$

2.6.2 Fonctionnelles, dérivée fonctionnelle

Pour faire simple, on appelle *fonctionnelle* et l'on note $F[\phi]$ toute grandeur à valeurs réelles ou complexes dépendant d'une "fonction" $\phi(x)$. Un exemple est donné par l'intégrale

$$F[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, K(x)\, \phi(x)$$

où $K(x)$ est une fonction réelle ou complexe indépendante de ϕ. Supposons $\phi(x)$ réel. Développant $\phi(x)$ sur la base des $f_n(x)$, il est équivalent de dire que la fonctionnelle F dépend de la suite des coefficients q_n, indépendants et en nombre infini, qui caractérise complètement la fonction $\phi(x)$. Bien entendu, cette dépendance incite immédiatement à rechercher pour les fonctionnelles l'équivalent de la dérivée usuelle d'une fonction.

Cette dérivée s'appelle la *dérivée fonctionnelle*. La notation courante est $\dfrac{\delta F}{\delta \phi(x)}$. Pour commencer, nous la définirons comme

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n}\, f_n(x) \tag{2.211}$$

Il est clair que cette grandeur a toutes les propriétés d'une dérivée. Cependant, sa définition apparaissant liée au choix de la base f_n, on peut se poser à juste titre la question de sa valeur intrinsèque. Faisons alors choix d'une seconde base orthonormée dénombrable de fonctions g_n, et écrivons

$$\phi(x) = \sum_m Q_m \, g_m(x) \ , \quad \text{avec} \ \ Q_m = (g_m, \phi)$$

$$\text{et} \quad g_m(x) = \sum_n G_{mn} \, f_n(x) \quad , \quad \text{avec} \ \ G_{mn} = (f_n, g_m)$$

On a

$$\sum_n G_{mn} \, G_{m'n} = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g_m(x) \, f_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, g_m(x') \, f_n(x') \ =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g_m(x) \, g_{m'}(x') \sum_n f_n(x) \, f_n(x') =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g_m(x) \, g_{m'}(x') \, \delta(x' - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g_m(x) \, g_{m'}(x) = \delta_{mm'}$$

Le passage de la base f_n à la base g_m s'effectue donc au moyen des éléments G_{mn} d'une matrice G à une infinité de lignes et une infinité de colonnes, et qui présente la propriété d'être orthogonale, puisque

$$\sum_n G_{mn} \, G_{m'n} = \left(G^t G\right)_{mm'} = \delta_{mm'}$$

Les nouveaux coefficients, Q_m, sont reliés aux anciens, q_n, par cette matrice :

$$Q_m = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \phi(x) \, g_m(x) = \sum_n G_{mn} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \phi(x) \, f_n(x) = \sum_n G_{mn} \, q_n$$

Il vient alors

$$\sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n} \, f_n(x) = \sum_n f_n(x) \sum_m \frac{\partial F}{\partial Q_m} \, \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} \ = \sum_n f_n(x) \sum_m \frac{\partial F}{\partial Q_m} \, G_{mn}$$

$$= \sum_m \frac{\partial F}{\partial Q_m} \sum_n G_{mn} \, f_n(x) = \sum_m \frac{\partial F}{\partial Q_m} \, g_m(x)$$

La dérivée fonctionnelle ainsi définie a donc une expression indépendante de la base choisie. Ce résultat appelle à son tour à une définition intrinsèque de cette dérivée. Voyons alors comment exprimer une variation de la fonctionnelle lorsque, pour chaque x, $\phi(x)$ varie de $\delta\phi(x)$. Celle-ci peut être exprimée comme due à une variation δq_n des composantes q_n de $\phi(x)$. On a ainsi

$$\delta F = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n} \, \delta q_n \quad , \quad \text{et} \quad \delta\phi(x) = \sum_n f_n(x) \, \delta q_n$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \, \delta\phi(x) = \sum_n \sum_r \frac{\partial F}{\partial q_n} \, \delta q_r \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f_n(x) \, f_r(x)$$

$$= \sum_n \sum_r \frac{\partial F}{\partial q_n} \, \delta q_r \, \delta_{nr} = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n} \, \delta q_n = \delta F$$

En divisant formellement par $\delta\phi(x')$, on est ainsi conduit à la relation

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x')} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \, \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')} \tag{2.212}$$

qui, pour la cohérence de la construction, oblige à poser

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')} = \delta(x' - x) \tag{2.213}$$

En fait, cette dernière relation était incontournable, étant donné que l'on a

$$\delta\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \delta(x - x') \, \delta\phi(x') \tag{2.214}$$

D'un autre côté, si dans la relation

$$\delta F = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \, \delta\phi(x) \tag{2.215}$$

on prend $\delta\phi(x) = \epsilon \, \delta(x' - x)$ où ϵ est un réel infinitésimal, on trouve

$$\delta F = \epsilon \frac{\delta F}{\delta\phi(x')} \tag{2.216}$$

Aussi, est-il d'usage de définir la dérivée fonctionnelle par la formule :

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}[\phi] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[\phi(x') + \epsilon \, \delta(x' - x)] - F[\phi(x')]}{\epsilon} \tag{2.217}$$

C'est la définition intrinsèque recherchée.

2.6.3 Crochets de Poisson et dérivée fonctionnelle

Considérons maintenant une autre fonction ψ à valeurs $\psi(x)$ réelles et développons-la sur la base des fonctions f_n :

$$\psi(x) = \sum_n p_n \, f_n(x) \tag{2.218}$$

Soient maintenant $F[\psi, \phi]$ et $G[\psi, \phi]$ deux fonctionnelles de ψ et de la fonction ϕ supposée indépendante de ψ. Ces deux fonctionnelles peuvent aussi bien être considérées comme fonctions des deux suites formées respectivement par les composantes p_n de ψ et les composantes q_r de ϕ. Nous définirons les crochets de Poisson de ces deux fonctionnelles par

$$\{F, G\} = \sum_n \left(\frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q_n} - \frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} \right) \tag{2.219}$$

Bien entendu, ces crochets sont liés au choix des deux fonctions ψ et ϕ auxquelles se rapportent les dérivations. Dans ce contexte, comme

$$\frac{\partial\psi(x')}{\partial p_n} = f_n(x') \ , \quad \frac{\partial\phi(x)}{\partial q_n} = f_n(x)$$

et puisque l'indépendance des deux fonctions fait que

$$\frac{\partial\psi(x')}{\partial q_n} = 0 \ , \quad \frac{\partial\phi(x)}{\partial p_n} = 0$$

on a obligatoirement

$$\{\psi(x'), \phi(x)\} = \sum_n f_n(x')\, f_n(x) = \delta(x' - x) \tag{2.220}$$

On peut évidemment considérer p_n et q_m comme des fonctionnelles de ψ et ϕ. La formule de définition des crochets conduit alors aux relations

$$\{p_n, p_m\} = 0 \ , \quad \{q_n, q_m\} = 0 \ , \quad \{p_n, q_m\} = \delta_{nm} \tag{2.221}$$

Les coefficients p_n et q_m apparaissent de la sorte comme des variables conjuguées, au sens de la mécanique hamiltonienne, les q_n jouant le rôle des variables fondamentales, les p_n celui de leurs impulsions, ici en nombre infini[38]. En associant à chaque q_n l'idée de degré de liberté, on retrouve ici le fait que le "champ" $\phi(x)$ décrit un système à une infinité de degrés de liberté.

On peut récrire les crochets (2.219) au moyen de dérivées fonctionnelles. En effet, comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\, \frac{\delta G}{\delta\phi(x)} = \sum_n \sum_m \frac{\partial F}{\partial p_n}\, \frac{\partial G}{\partial q_m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_n(x) f_m(x) = \sum_n \sum_m \frac{\partial F}{\partial p_n}\, \frac{\partial G}{\partial q_m}\, \delta_{nm}$$

$$= \sum_n \frac{\partial F}{\partial p_n}\, \frac{\partial G}{\partial q_n}$$

on a

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left(\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\, \frac{\delta G}{\delta\phi(x)} - \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\, \frac{\delta G}{\delta\psi(x)} \right) \tag{2.222}$$

formule qui apparaît comme une extension "naturelle", aux systèmes à une infinité de degrés de liberté, des crochets de Poisson de la mécanique analytique.

Dans la théorie du champ $u(\underline{x})$ exposée plus haut, nous avons défini des crochets de Poisson pour ce champ et montré que les crochets, à temps égaux, de $\pi_0 = \partial_0 u$ et u ont la forme canonique (2.220). Pour cette théorie, nous sommes donc conduits à faire l'identification[39]

$$\{F, G\}_{TE} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left(\frac{\delta F}{\delta\pi_0(\underline{x})}\, \frac{\delta G}{\delta u(\underline{x})} - \frac{\delta F}{\delta u(\underline{x})}\, \frac{\delta G}{\delta\pi_0(\underline{x})} \right) \tag{2.223}$$

qui valide définitivement l'idée que le champ π_0 représente bien le champ *conjugué* de u.

En guise d'application-vérification, recalculons à l'aide de cette formule les crochets des coefficients de Fourier $c(\underline{k})$ et $c^\star(\underline{k})$ du champ u. On a

$$c(\underline{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left[k_0 u(\underline{x}) + i\pi_0(\underline{x})\right]\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

d'où

$$\frac{\delta c(\underline{k})}{\delta u(\underline{x})} = k_0\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \ , \quad \frac{\delta c(\underline{k})}{\delta\pi_0(\underline{x})} = i\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

$$\frac{\delta c^\star(\underline{k})}{\delta u(\underline{x})} = k_0\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} \ , \quad \frac{\delta c^\star(\underline{k})}{\delta\pi_0(\underline{x})} = -i\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

[38]Montrer qu'un changement de base $f_n \to g_m$ équivaut à une transformation canonique.
[39]Ici, $\underline{x} = (x_0, x)$.

On notera bien que la règle du jeu ici est de considérer les deux champs π_0 et u comme indépendants, en toute analogie avec la mécanique hamiltonienne.

Il vient alors

$$\{c^\star(\underline{k}), c(\underline{k'})\}_{TE} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ (k_0 + k_0')e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, e^{-i\underline{k'}\cdot\underline{x}}$$

et l'on a bien

$$\{c^\star(\underline{k}), c(\underline{k'})\}_{TE} = -2i(2\pi)k_0\delta(k - k')$$

Les relations

$$\{\pi_0(\underline{x}), F\}_{TE} = \frac{\delta F}{\delta u(\underline{x})}\ ,\quad \{u(\underline{x}), F\}_{TE} = -\frac{\delta F}{\delta \pi_0(\underline{x})} \tag{2.224}$$

tout à fait analogues aux relations du même type de la mécanique de Hamilton, montrent le rôle de dérivation des champs u et π_0 l'un par rapport à l'autre. On obtient ainsi

$$\{u(\underline{x}), P_1\}_{TE} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(x' - x)\, \partial_1 u(\underline{x'}) = -\partial_1 u(\underline{x})$$

ou encore

$$\{\pi_0(\underline{x}), P_1\}_{TE} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \pi_0(\underline{x'})\, \frac{\delta \partial_1 u(\underline{x'})}{\delta u(\underline{x})} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \pi_0(\underline{x'})\, \partial_1' \delta(x' - x) = -\partial_1 \pi_0(\underline{x})$$

Le lecteur est invité à reprendre et vérifier toutes les relations établies précédemment avec les crochets de Poisson, en utilisant la dérivation fonctionnelle.

2.7 Complément : digression sur les tenseurs

2.7.1 Qu'est-ce qu'un vecteur, un tenseur, etc ?

Soit un ensemble de n variables à valeurs continues, notées x^α avec $\alpha = 1, 2, \cdots, n$, et que nous supposerons réelles pour simplifier, bien que le formalisme puisse s'adapter à des objets plus compliqués. Bien que cela ne soit pas indispensable, nous supposerons néanmoins, pour la simplicité, que toutes ces variables sont de même dimension. On peut éventuellement les considérer comme les coordonnées d'un point M dans un espace ponctuel à n dimensions.

La notion de *vecteur* apparaît dès lors qu'on envisage des transformations des variables, qui peuvent être considérées comme des applications de $\mathcal{R}^n$ dans $\mathcal{R}^n$:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

Il s'ensuit que les différentielles des variables subissent la transformation

$$dx^\alpha \to dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, dx^\beta \tag{2.225}$$

où la convention de sommation d'Einstein a été utilisée.

Nous dirons, par définition, que les différentielles dx^α sont les *composantes contravariantes* d'un vecteur. Le critère utilisé pour les qualifier ainsi est que dans ladite transformation elles se transforment selon la matrice nxn dont les éléments sont les dérivées partielles $\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$.

Par extension, nous dirons que n grandeurs $V^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ sont les composantes contravariantes d'un champ de vecteur, si dans la même transformation, les nouvelles grandeurs $V'^\alpha(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n)$ sont liées aux anciennes par cette même matrice

$$V'^\alpha(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, V^\beta(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{2.226}$$

Un *scalaire* est une grandeur invariante sous les transformations considérées :

$$\Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n) \ \text{ scalaire } \ \Leftrightarrow \ \Phi'(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{2.227}$$

De même, des grandeurs à plusieurs indices $T^{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_p}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ seront qualifiées de composantes contravariantes d'un *champ de tenseur* d'ordre p si et seulement si elles se transforment selon[40]

$$T'^{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_p}(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}}\,\frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\beta_p}}\, T^{\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_p}(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{2.228}$$

On notera que ces définitions de vecteur, scalaire ou tenseur sont liées au type de transformations envisagées. Dès lors, on peut concevoir qu'un ensemble donné de certaines grandeurs puisse ne pas être catalogué de la même manière selon le groupe de transformations considéré. On généralise ainsi la notion commune de vecteur qui est attachée au groupe des rotations dans l'espace usuel à trois dimensions.

Si la transformation est *linéaire*, alors les variables x^α constituent elles-mêmes, par rapport à cette transformation, les composantes contravariantes d'un vecteur. En effet, puisque

$$x'^\alpha = \omega^\alpha_\beta\, x^\beta$$

[40] C'est-à-dire comme un produit de p composantes contravariantes d'un vecteur.

où les éléments ω^α_β sont supposés indépendants des variables, on a

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \omega^\alpha_\beta \ , \quad \text{et} \quad x'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\, x^\gamma$$

Cependant, pour des transformations plus compliquées, les variables ne constituent pas a priori des composantes de vecteur[41].

Comme la différentielle d'un scalaire $\Phi(x) \equiv \Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ est aussi invariante, on obtient

$$d\Phi'(x') = dx'^\alpha\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha} = dx^\beta\, \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha} = d\Phi(x) = dx^\beta\, \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta}$$

d'où, par identification,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha}$$

Bien entendu, il sera toujours supposé qu'une transformation possède une transformation inverse. La matrice $\left\{\partial x'^\alpha / \partial x^\beta\right\}$ aura ainsi pour inverse la matrice $\left\{\partial x^\gamma / \partial x'^\lambda\right\}$. Il vient alors

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \tag{2.229}$$

Autrement dit, le gradient de Φ se transforme *selon la matrice inverse* $\left\{\partial x^\gamma / \partial x'^\lambda\right\}$. On dit qu'il se transforme comme des composantes *covariantes* d'un vecteur. Plus généralement, des objets $T_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_q}$ à q indices "en bas" constitueront, relativement aux transformations considérées, des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre q si et seulement si leur loi de transformation est

$$T'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_q}(x') = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}}\, \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\alpha_q}}\, T_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q}(x) \tag{2.230}$$

Certaines grandeurs indexées peuvent posséder une partie de leurs indices "en haut" et l'autre partie "en bas". Si leurs lois de transformation sont conformes aux définitions de *contravariance* et de *covariance*, on parlera alors de tenseurs *mixtes*.

2.7.2 Conséquences de l'existence d'une métrique

Supposons définie une forme quadratique réelle notée ds^2 (sans présager de son signe)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{2.231}$$

où les grandeurs à deux indices $g_{\alpha\beta}$ dépendent a priori des variables et vérifient $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Considérant ces grandeurs comme les éléments d'une matrice (symétrique), on suppose que cette dernière est inversible, son inverse ayant des éléments notés $g^{\gamma\lambda}$, tels que

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\gamma\beta} = \delta^\gamma_\alpha \ , \quad \text{et} \quad g^{\gamma\beta} = g^{\beta\gamma} \tag{2.232}$$

Effectuant une transformation des variables $x^\alpha \to x'^\alpha$, la forme quadratique est réexprimée comme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\, dx'^\gamma\, dx'^\lambda \tag{2.233}$$

On constate alors que la forme quadratique ne pourra être considérée comme invariante sous la transformation que si et seulement si les quantités

$$g'_{\gamma\lambda} = g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \tag{2.234}$$

[41] Considérer l'exemple des transformations homographiques dans l'espace euclidien à deux dimensions.

représentent bien ce que doivent devenir les grandeurs $g_{\alpha\beta}$ sous l'effet de cette transformation, auquel cas elles représentent des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2, que l'on appelle couramment *tenseur métrique*. La forme ds^2 sert alors à définir des distances ou des intervalles. En fait, la classe de transformations envisagée est le plus souvent caractérisée comme celle qui laisse invariante une certaine forme quadratique du type de ds^2. Elles forment alors un groupe de transformations.

Inversement, on peut *définir* par (2.234) ce que doit être la loi de transformation de $g_{\alpha\beta}$, en en faisant ainsi un tenseur, ce qui permet d'introduire des éléments de géométrie propres au type de transformations considéré.

Supposons donc que soit défini un tenseur métrique de composantes covariantes $g_{\alpha\beta}$ et de composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$. Si certaines grandeurs indexées telles que $T^{\alpha_1\cdots}$ se sont révélées de nature contravariante, une contraction

$$T^{\alpha_1\cdots}\, g_{\alpha_1\beta_1} = T_{\beta_1}^{\cdot\ \cdots}$$

avec le tenseur $g_{\alpha_1\beta_1}$ permet de leur associer un tenseur $T_{\beta_1}^{\cdot\ \cdots}$ présentant une nature covariante relativement à l'indice β_1. Par des contractions de ce type, soit avec le tenseur $g_{\alpha\beta}$ soit avec son inverse $g^{\alpha\beta}$, il est ainsi possible d'associer des composantes covariantes à des composantes contravariantes et vice-versa. La contraction

$$V \cdot W = V^\alpha\, W_\alpha = V_\alpha\, W^\alpha = g_{\alpha\beta}\, V^\alpha\, W^\beta \tag{2.235}$$

des composantes contravariantes d'un vecteur avec les composantes covariantes d'un autre conduit à un invariant pouvant définir un produit scalaire, puis une norme ou une pseudo-norme. A cet égard, signalons que puisque le tenseur métrique est symétrique, il peut être *localement* diagonalisé. Comme il est inversible, il n'a aucune valeur propre nulle. Si toutes les valeurs propres sont positives, le produit scalaire prend la forme d'un produit scalaire euclidien. Si certaines valeurs propres sont négatives, il prendra une forme *pseudo-euclidienne*.

2.7.3 Dérivation covariante

Nous avons vu qu'en dérivant une fonction scalaire, on obtient des composantes covariantes d'un vecteur, son gradient. Par ce même procédé, est-il possible qu'à partir de composantes identifiées d'un tenseur on obtienne un nouveau tenseur ? Considérons tout d'abord la dérivation des composantes covariantes A_β d'un vecteur. Par transformation $x^\alpha \to x'^\alpha$ des variables, on a

$$A'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda(x)$$

d'où

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda(x)\right)$$

soit

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta}\,\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\, A_\lambda(x) \tag{2.236}$$

La présence du second terme de cette dernière expression montre que ces dérivées ne peuvent constituer des composantes de tenseur que si et seulement si la matrice de transformation $\partial x^\lambda/\partial x'^\alpha$ est une constante, autrement dit si les transformations sont purement *linéaires*. En revanche, on vérifie aisément que, *quelle que soit la transformation*, la combinaison *antisymétrique*

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2.237}$$

se comporte toujours comme une composante de tenseur deux fois covariante. Ce tenseur est la généralisation de ce qui est le rotationnel à trois dimensions.

A part cette possibilité d'antisymétrisation, peut-on néanmoins construire à partir d'un tenseur un autre tenseur qui s'apparenterait à sa dérivée ? La réponse est positive et le procédé mis en oeuvre consiste à effectuer une *dérivation covariante*. Pour un vecteur, on cherche une sorte de différentielle DA_α se transformant comme un vecteur (covariant) :

$$DA'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\, DA_\lambda(x) \tag{2.238}$$

Cette "différentielle" doit bien sûr contenir la vraie différentielle dA_α et un second terme dont la fonction sera de compenser la contribution des dérivées des éléments de la matrice de transformation. D'après (2.236), cette contribution fait intervenir les composantes A_β. On tentera donc une expression de la forme

$$DA_\alpha = dA_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, A_\lambda\, dx^\delta \tag{2.239}$$

On écrira de même

$$DA'_\alpha = dA'_\alpha - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, A'_\lambda\, dx'^\delta$$

Il vient alors

$$DA'_\alpha = d\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda\right) - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} dA_\lambda + A_\lambda\,\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta$$

$$= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,(DA_\lambda + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, A_\mu\, dx^\nu) + A_\mu\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta$$

En tenant compte de la loi de transformation (2.238), il vient

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, A_\mu\, dx^\nu + A_\mu\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta = 0$$

Et comme cette identité doit être vraie pour tout vecteur et quelles que soient les variations des variables, on en déduit

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta} - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} = 0$$

soit encore

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\delta} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta}\,\Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta} \tag{2.240}$$

Cette relation est la condition pour que DA_α se comporte comme une composante covariante. Les grandeurs $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ introduites de façon ad hoc pour qu'il en soit ainsi s'appellent les *symboles de Christoffel*. Leur loi de transformation (2.240) montre que ce ne sont pas des composantes de tenseur. La grandeur DA_α quant à elle est la *différentielle covariante* du champ de vecteur A_α, et

$$\frac{DA_\alpha}{Dx^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, A_\lambda \tag{2.241}$$

est une *dérivée partielle covariante*.

Pour faire du symbole D une véritable différentiation, nous lui attribuerons la propriété de Leibnitz

$$D(AB) = (DA)B + A(DB) \tag{2.242}$$

pour toutes fonctions A et B des variables. En outre, pour toute fonction scalaire $\Phi(x)$, nous ferons l'identification

$$D\Phi \equiv d\Phi \tag{2.243}$$

D'après (2.241), on a

$$\frac{DA_\alpha}{Dx^\beta} - \frac{DA_\beta}{Dx^\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \left[\,\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\,\right]\, A_\lambda$$

Or, lorsque A_α est le gradient d'une fonction scalaire Φ, le premier terme de cette expression est nulle :

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$$

Afin de préserver cette propriété dans la dérivation covariante, on voit que l'on doit imposer aux symboles de Christoffel d'être *symétriques* selon leurs deux "indices en bas" :

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \tag{2.244}$$

Envisageons maintenant la dérivation covariante des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2. Un tel tenseur doit se comporter de la même manière qu'un produit $A_\alpha B_\beta$ des composantes covariantes de deux vecteurs. On doit avoir

$$D(A_\alpha B_\beta) = A_\alpha (DB_\beta) + (DA_\alpha) B_\beta =$$

$$d(A_\alpha B_\beta) - A_\alpha\, \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\, B_\lambda\, dx^\delta - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, A_\lambda\, B_\beta\, dx^\delta$$

Pour tout tenseur $T_{\alpha\beta}$, on imposera donc la définition

$$DT_{\alpha\beta} = dT_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\, T_{\alpha\lambda}\, dx^\delta - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, T_{\lambda\beta}\, dx^\delta \tag{2.245}$$

et

$$\frac{DT_{\alpha\beta}}{Dx^\delta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\, T_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, T_{\lambda\beta} \tag{2.246}$$

En considérant des produits tensoriels tels que $A_{\alpha_1}\, A_{\alpha_2}\, \cdots A_{\alpha_p}$ on déduit de la même manière ce que doit être l'expression de la différentielle covariante d'un tenseur plus général d'ordre p.

La différentielle covariante DA_α d'une composante covariante A_α est donc elle-même une composante covariante d'un vecteur. Les composantes contravariantes associées doivent s'en déduire par contraction avec le tenseur métrique $g^{\alpha\beta}$. Imposons alors que ces composantes contravariantes se déduisent aussi par différentiation covariante des composantes contravariantes A^α. On aura ainsi

$$DA^\alpha = g^{\alpha\beta} DA_\beta$$

Mais

$$DA^\alpha = D(g^{\alpha\beta}\, A_\beta) = (Dg^{\alpha\beta})\, A_\beta + g^{\alpha\beta}\, DA_\beta$$

On en déduit

$$Dg^{\alpha\beta} = 0\ , \quad \text{ainsi que} \quad Dg_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.247}$$

De la sorte, la différentielle covariante du tenseur métrique est *nulle*. Ce résultat impose bien sûr une corrélation étroite entre le tenseur métrique et les symboles de Christoffel. Comme

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{Dx^\delta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\, g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, g_{\lambda\beta} = 0$$

Il vient

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} = \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\, g_{\alpha\lambda} \, + \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, g_{\lambda\beta} \ , \quad \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, g_{\delta\lambda} \, + \Gamma^\lambda_{\delta\beta}\, g_{\lambda\alpha} \ ,$$

$$\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\lambda_{\delta\alpha}\, g_{\beta\lambda} \, + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\, g_{\lambda\delta}$$

d'où

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} = (\Gamma^\lambda_{\beta\delta} + \Gamma^\lambda_{\delta\beta})\, g_{\lambda\alpha} + (\Gamma^\lambda_{\alpha\delta} - \Gamma^\lambda_{\delta\alpha})\, g_{\lambda\beta} + (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\, g_{\lambda\delta}$$

soit (du fait des symétries des symboles de Christoffel)

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right) \tag{2.248}$$

Il vient ensuite

$$DA^\alpha = g^{\alpha\rho} DA_\rho = g^{\alpha\rho} \left[dA_\rho - \Gamma^\lambda_{\rho\delta}\, A_\lambda\, dx^\delta \right]$$

Or

$$dA_\rho = d(g_{\rho\gamma} A^\gamma) = g_{\rho\gamma} dA^\gamma + A^\gamma dg_{\rho\gamma} = g_{\rho\gamma} dA^\gamma + A^\gamma \left[\Gamma^\lambda_{\rho\delta}\, g_{\lambda\gamma} + \Gamma^\lambda_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda} \right] \, dx^\delta =$$

$$g_{\rho\gamma} dA^\gamma + \left[\Gamma^\lambda_{\rho\delta}\, A_\lambda + A^\gamma\, \Gamma^\lambda_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda} \right] \, dx^\delta$$

On trouve finalement

$$DA^\alpha = g^{\alpha\rho} \left[g_{\rho\gamma} dA^\gamma + A^\gamma\, \Gamma^\lambda_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda}\, dx^\delta \right]$$

soit

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\, A^\gamma\, dx^\delta \tag{2.249}$$

On peut expliquer de la manière suivante ce qui distingue la différentielle covariante de la différentielle usuelle. Imaginons que les variables soient les coordonnées d'un point dans un espace ponctuel à n dimensions. A tout point M est attaché un repère local dont chaque axe est partenaire de l'un des n indices α_i permettant d'indexer, notamment, les composantes d'un vecteur. Notons $e_\alpha(M)$ les vecteurs définissant ce repère local. Relativement à cette base, un champ de vecteur donné $\mathcal{A}(M)$ sera exprimé au moyen de ses composantes contravariantes comme

$$\mathcal{A}(M) = A^\alpha(M)\, e_\alpha(M)$$

Un changement infinitésimal des coordonnées s'interprète comme un déplacement $M \to M'$ du point dans l'espace ponctuel, à la suite duquel non seulement les coordonnées du point ont changé, mais également l'orientation du repère local qui lui est attaché[42]. Le champ de vecteur $\mathcal{A}(M)$ est devenu $\mathcal{A}(M')$. La différence entre ces deux valeurs du champ peut être exprimée dans la base initiale $e_\alpha(M)$, ce qui nécessite de ramener $\mathcal{A}(M')$ vers cette base, c'est-à-dire de le *transporter parallèlement à lui-même* de M' vers M. On écrira alors

$$\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = (DA^\alpha)\, e_\alpha(M)$$

[42]Ce point de vue permet de comprendre pourquoi le formalisme présenté ici constitue un outil de base en Relativité Générale qui vise à exprimer l'équivalence des référentiels.

Il est clair que les grandeurs DA^α introduites ici sont bien des composantes contravariantes d'un vecteur. Or, écrivant

$$\mathcal{A}(M') = A^\alpha(M')\, e_\alpha(M')$$

on voit explicitement que la différence des valeurs du champ rapportée à la base initiale fait intervenir non seulement les variations des composantes du champ mais aussi celle des vecteurs de base. Ces dernières seront exprimées comme

$$e_\alpha(M') - e_\alpha(M) = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, e_\beta(M)\, dx^\gamma \tag{2.250}$$

d'où

$$\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = [A^\alpha + dA^\alpha]\, \left[e_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, e_\beta\, dx^\gamma\right] - A^\alpha\, e_\alpha \approx \left[dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta\, dx^\gamma\right]\, e_\alpha$$

On retrouve ainsi la formule (2.249)

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta\, dx^\gamma$$

2.7.4 Géodésiques

La notion de *géodésique* est liée à celle de *métrique* qui permet de définir une *distance* entre deux éléments d'un ensemble. Au sens de cette métrique, une géodésique est le *plus court*, ou, s'il y en a plusieurs, l'un des plus courts chemins joignant deux éléments donnés. Cette notion se rencontre surtout en géométrie (à 3 dimensions comme à n dimensions), en mécanique non relativiste et en mécanique relativiste (notoirement en relativité générale). Dans chaque cas, le *carré* de l'élément de longueur ds est exprimé comme en (2.231)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Dans le cas de la mécanique relativiste, on sait que cette quantité, appelée intervalle, peut être négative si elle se rapporte à deux événements pour lesquels il n'existe aucun moyen physique qui aurait pu les relier (intervalle du genre espace). La notion de géodésique perd alors son sens. C'est pourquoi on ne considèrera que des situations pour lesquelles ds^2 est positif, ce qui correspondra à des évolutions matériellement réalisables, par déplacement d'un objet matériel notamment.

Plaçons-nous donc dans le cas d'une géométrie dans un espace à n dimensions. L'élément ds est la distance séparant deux points infiniment proches. La distance finie entre deux points donnés M_1 et M_2 dépend bien sûr de la courbe $\mathcal{C}$ joignant ces deux points. Elle est donnée par l'intégrale

$$S_\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds \tag{2.251}$$

effectuée le long de cette courbe $\mathcal{C}$. Le problème consiste alors à trouver l'équation de la courbe, ou des courbes, rendant cette distance extrémale. Ici encore, il s'agit d'effectuer un calcul des variations. La variation première de $S_\mathcal{C}$ est donnée par

$$\delta S_\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} \delta(ds)$$

Pour calculer $\delta(ds)$ on procède de la façon suivante. On a

$$\delta ds^2 = 2ds\, \delta(ds) = 2g_{\rho\lambda} dx^\rho\, \delta(dx^\lambda) + \delta(g_{\rho\lambda})\, dx^\rho\, dx^\lambda$$

Or, d'une part,

$$\delta(g_{\rho\lambda}) = \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma}\,\delta x^\gamma$$

et, d'autre part,

$$g_{\rho\gamma} dx^\rho\,\delta(dx^\gamma) = ds\,g_{\rho\gamma}\,u^\rho\,\delta(dx^\gamma) = ds\,g_{\rho\gamma}\,u^\rho\,d(\delta x^\gamma) = ds\,d\left(g_{\rho\gamma}\,u^\rho\,\delta x^\gamma - ds\,\delta x^\gamma\,d(g_{\rho\gamma}\,u^\rho)\right)$$

$$= ds\,d\left(g_{\rho\gamma}\,u^\rho\,\delta x^\gamma\right) - ds\,\delta x^\gamma\,\left[u^\rho\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda}dx^\lambda + g_{\rho\gamma}du^\rho\right]$$

où les grandeurs

$$u^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} \tag{2.252}$$

sont les composantes contravariantes du vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$. Il s'agit bien de composantes de vecteur pour des transformations laissant ds invariant, car les variations infinitésimales dx^ρ sont toujours des composantes de vecteur. Comme par hypothèse $\delta x^\gamma = 0$ aux points extrêmes M_1 et M_2, il vient (après avoir divisé $\delta(ds^2)$ par $2ds$)

$$\delta S_{\mathcal{C}} = -\int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds\,\delta x^\gamma\,\left[g_{\rho\gamma}\frac{du^\rho}{ds} + u^\rho\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda}u^\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma}u^\rho\,u^\lambda\right]$$

Puisque

$$u^\rho\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda}u^\lambda = \frac{1}{2}\,u^\rho\,u^\lambda\,\left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho}\right]$$

le terme entre crochets dans l'intégrale peut être récrit comme

$$g_{\rho\gamma}\frac{du^\rho}{ds} + \frac{1}{2}\,u^\rho\,u^\lambda\,\left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma}\right]$$

Or, on a

$$g_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\rho\lambda} = \frac{1}{2}\,\left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma}\right]$$

d'où

$$\delta S_{\mathcal{C}} = -\int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds\,\delta x^\gamma\,g_{\beta\gamma}\,\left[\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\,u^\rho u^\lambda\right] \tag{2.253}$$

D'après le lemme du calcul des variations, $\delta S_{\mathcal{C}}$ est nul, et donc la courbe $\mathcal{C}$ rend $S_{\mathcal{C}}$ extremum si et seulement si en tout point de cette courbe on a

$$\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\,u^\rho u^\lambda = 0 \tag{2.254}$$

C'est l'équation des *géodésiques*. Comme sur la courbe $dx^\mu = u^\mu ds$, on peut réexprimer cette équation comme

$$\frac{1}{ds}\,\left[du^\beta + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\,u^\rho\,dx^\lambda\right] = 0\ ,\quad \text{soit}\quad \frac{Du^\beta}{Ds} = 0 \tag{2.255}$$

c'est-à-dire que, sur une courbe géodésique, la dérivée covariante du vecteur tangent doit être nulle.

2.7.5 Exemple d'application : géodésiques d'une sphère

Considérons une sphère de centre O et de rayon unité. En fonction des angles orbital θ et azimuthal φ et de leurs variations infinitésimales $d\theta$ et $d\varphi$, le carré de l'élément de longueur ds séparant deux points de la sphère infiniment proches s'exprime comme

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{2.256}$$

Considérant θ et φ comme les variables fondamentales, on a ici un tenseur métrique dont les composantes covariantes sont

$$g_{\theta\theta} = 1\ ,\quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0\ ,\quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \tag{2.257}$$

On en déduit les composantes contravariantes

$$g^{\theta\theta} = 1\ ,\quad g^{\theta\varphi} = g^{\varphi\theta} = 0\ ,\quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta} \tag{2.258}$$

puis les symboles de Christoffel

$$\begin{gathered}\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = \Gamma^\theta_{\varphi\theta} = 0\ ,\quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta \\ \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0\ ,\quad \Gamma^{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{gathered} \tag{2.259}$$

D'où les équations des géodésiques

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0\ ,\quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = 0 \tag{2.260}$$

La seconde de ces équations conduit à

$$\sin^2\theta\,\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0$$

soit

$$\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{ds} = \text{constante} = K$$

Or, d'une part, M_1 étant le point de départ de la courbe, il est toujours possible de choisir l'axe $z'z$, qui est l'axe de référence des angles orbitaux, selon $\overrightarrow{OM_1}$. Autrement dit, avec cette construction, en M_1 on a $\theta = 0$. D'autre part, la relation (2.256) qui peut être récrite comme

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1$$

montre que $\sin\theta\,|\frac{d\varphi}{ds}|$ ne peut que rester fini lorsque θ tend vers zéro. On en déduit que la constante K ne peut qu'être nulle. Il en résulte que pour des valeurs non nulles de θ, $d\varphi/ds = 0$, d'où $\varphi =$ constante. Il n'existe donc qu'une seule courbe géodésique joignant M_1 à un point M_2 : étant située dans le demi-plan contenant les trois points O, M_1 et M_2, il s'agit de l'arc de grand cercle de la sphère ayant pour centre O et pour extrémités M_1 et M_2.