

Chapitre 4

A propos du groupe des rotations

Dans ce chapitre, nous empruntons les notations standards de la Mécanique Quantique, notamment celle des “bras” et des “kets” de Dirac¹. Il n’est cependant pas nécessaire de connaître cette théorie pour suivre l’exposé. Comme d’habitude, toutes les opérations mathématiques envisagées seront considérées comme justifiées uniquement par leur cohérence et leur utilité.

4.1 Opérateurs de création de d’annihilation

4.1.1 Cas d’un seul degré de liberté

Soit a un opérateur linéaire agissant dans un espace de Hilbert, et a^\dagger son conjugué hermitique ou adjoint². Ces deux opérateurs sont supposés vérifier la relation de commutation

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (4.1)$$

Posons $N = a^\dagger a$. Ce nouvel opérateur N est manifestement *hermitique* : $N^\dagger = N$. Il est donc diagonalisable. Soit $|\nu\rangle$ l’un de ses vecteurs propres, correspondant à la valeur propre ν . L’opérateur N est en outre *positif*, car, pour tout vecteur $|\varphi\rangle$ non nul, on a³

$$\langle \varphi | N | \varphi \rangle = \|a|\varphi\rangle\|^2 \geq 0 \quad (4.2)$$

et en particulier

$$\langle \nu | N | \nu \rangle = \nu \| |\nu\rangle \|^2 \geq 0 \quad (4.3)$$

Toute valeur propre de N est donc positive ou nulle.

De la relation (4.1) on déduit facilement par récurrence⁴ que pour tout entier $p \geq 1$ on a

$$[a, (a^\dagger)^p] = p(a^\dagger)^{p-1} \quad , \quad [a^\dagger, a^p] = -pa^{p-1} \quad (4.4)$$

d’où, pour tout entier $q \geq 0$

$$[N, a^q] = -qa^q \quad , \quad [N, (a^\dagger)^q] = q(a^\dagger)^q \quad (4.5)$$

1. Voir par exemple : http://fr.wikipedia.org/wiki/Notation_bra-ket.

2. L’espace de Hilbert envisagé est de dimension infinie. Dans un espace de Hilbert de dimension finie q , un opérateur linéaire A serait représenté par une matrice $q \times q$ et l’on aurait simplement $A^\dagger = {}^t A^*$. La relation $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ est encore applicable.

3. Rappelons que le symbole $\langle \psi | \phi \rangle$ représente le produit scalaire du bra $\langle \psi |$ avec le ket $|\phi\rangle$ et que l’on a $\langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle$.

4. Et en usant de la relation $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Il vient alors

$$Na^q|\nu\rangle = (a^qN - qa^q)|\nu\rangle = (\nu - q)a^q|\nu\rangle \quad (4.6)$$

ce qui montre que le vecteur $a^q|\nu\rangle$ est ou bien nul ou bien vecteur propre de N avec la valeur propre $\nu - q$. Comme les valeurs propres de N sont positives, on en déduit que $a^q|\nu\rangle$ est nul dès que $q > \nu$, et qu'il existe donc un entier positif n pour lequel

$$a^{n+1}|\nu\rangle = \mathbf{0} \quad , \quad \text{avec} \quad a^n|\nu\rangle \neq \mathbf{0} \quad (4.7)$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul. Mais

$$\langle \nu | (a^\dagger)^n N a^n | \nu \rangle = (\nu - n) \|a^n | \nu \rangle\|^2 = \|a^{n+1} | \nu \rangle\|^2 = 0 \quad (4.8)$$

d'où, nécessairement,

$$\nu = n \quad (4.9)$$

Les valeurs propres de N sont donc tous les nombres entiers positifs⁵. Nous admettrons que ces valeurs propres ne sont pas dégénérées, c'est-à-dire qu'à chaque entier n correspond un unique vecteur propre de N , que nous noterons $|n\rangle$ et que nous supposerons normalisé à l'unité : $\| |n\rangle \|^2 = \langle n | n \rangle = 1$. Soit alors $|0\rangle$ le vecteur propre de N de valeur propre 0⁶. Comme

$$N(a^\dagger)^n |0\rangle = [(a^\dagger)^n N + n(a^\dagger)^n] |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (4.10)$$

le vecteur $(a^\dagger)^n |0\rangle$ est certainement proportionnel au vecteur propre $|n\rangle$. Or,

$$a^n (a^\dagger)^n = a^{n-1} a (a^\dagger)^n = a^{n-1} [(a^\dagger)^n a + n(a^\dagger)^{n-1}] \quad (4.11)$$

et puisque $a|0\rangle = 0$ (et donc $\langle 0 | a^\dagger = 0$), on obtient

$$\| (a^\dagger)^n |0\rangle \|^2 = \langle 0 | a^n (a^\dagger)^n |0\rangle = n \langle 0 | a^{n-1} (a^\dagger)^{n-1} |0\rangle \quad (4.12)$$

D'où, par récurrence,

$$\| (a^\dagger)^n |0\rangle \|^2 = n! \langle 0 | 0 \rangle = n! \quad (4.13)$$

Nous admettrons alors que les phases des vecteurs sont choisies de telle sorte que l'on ait exactement

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (4.14)$$

Les opérateurs a et a^\dagger ont la propriété de, respectivement, diminuer ou augmenter d'une unité le nombre n . En effet

$$a|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a (a^\dagger)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} [(a^\dagger)^n a + n(a^\dagger)^{n-1}] |0\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (4.15)$$

et

$$a^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (4.16)$$

Ces relations justifient les appellations *d'opérateur d'annihilation* pour a et *d'opérateur de création* pour a^\dagger ⁷.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que par application successive de la relation

5. Ce qui justifie l'appellation d'opérateur "nombre" pour N .

6. A ne pas confondre avec le vecteur nul ici noté $\mathbf{0}$!!

7. Il est de notoriété que ce type d'opérateur est d'une utilité majeure en Mécanique Quantique, notamment dans le traitement quantique de l'oscillateur harmonique.

$$a^r (a^\dagger)^s = a^{r-1} [(a^\dagger)^s a + s(a^\dagger)^{s-1}] \quad (4.17)$$

on retrouve la relation d'ortho-normalité des vecteurs propres de N ⁸ :

$$\langle r | s \rangle = \delta_{rs} \quad (4.18)$$

Ces vecteurs constituent une base de l'espace de Hilbert : tout vecteur $|\varphi\rangle$ de cet espace admet la décomposition

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad \text{avec } c_n = \langle n | \varphi \rangle \quad (4.19)$$

d'où l'on déduit la relation dite de *fermeture*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (4.20)$$

où le symbole "1" représente l'opérateur "identité" dans l'espace de Hilbert.

4.1.2 Cas de deux degrés de liberté

Dans un autre espace de Hilbert, envisageons maintenant deux opérateurs a_1 et a_2 et leurs adjoints a_1^\dagger et a_2^\dagger vérifiant

$$\begin{aligned} [a_1, a_1^\dagger] &= [a_2, a_2^\dagger] = 1 \\ [a_1, a_2] &= [a_1^\dagger, a_2^\dagger] = 0 \\ [a_1, a_2^\dagger] &= [a_1^\dagger, a_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ici encore, introduisons deux opérateurs "nombres" $N_1 = a_1^\dagger a_1$, $N_2 = a_2^\dagger a_2$. Ces deux opérateurs hermitiques commutent et admettent donc des vecteurs propres communs. D'après ce qui précède, il s'agira de façon évidente des vecteurs

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \quad (4.22)$$

où n_1 et n_2 sont deux entiers positifs ou nuls, respectivement valeur propre de N_1 et valeur propre de N_2 . Le vecteur noté $|0\rangle$ correspond à la valeur propre 0, à la fois pour N_1 et pour N_2 ⁹.

Soit maintenant les opérateurs

$$J_1 = \frac{1}{2} [a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1], \quad J_2 = \frac{i}{2} [a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2], \quad J_3 = \frac{1}{2} [a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2] \quad (4.23)$$

Ce sont des opérateurs hermitiques vérifiant les relations de commutation

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2 \quad (4.24)$$

qui sont précisément celles définissant l'algèbre de Lie du groupe des rotations dans l'espace ordinaire. Précisons ce point. Dans une rotation d'angle φ autour de l'axe des z , un point P_0 de coordonnées cartésiennes $x = r \cos \varphi_0$, $y = r \sin \varphi_0$ et z , vient au point P de coordonnées cartésiennes $z' = z$ et

8. On rappelle que N étant hermitique, ses vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux.

9. Il représente un état de "vide".

$$x' = r \cos(\varphi_0 + \varphi) = x \cos \varphi - y \sin \varphi \quad , \quad y' = r \sin(\varphi_0 + \varphi) = y \cos \varphi + x \sin \varphi \quad (4.25)$$

Ce changement de coordonnées peut être exprimé sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Pour une transformation infinitésimale (φ petit) cette relation devient

$$V' \approx V - i\varphi \mathcal{J}_3 V \quad (4.27)$$

où l'on a posé

$$V' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

La matrice \mathcal{J}_3 représente ici le *générateur infinitésimal* des rotations autour de l'axe des z . On vérifie aisément que pour tout entier $p \geq 1$, on a

$$\mathcal{J}_3^{2p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{J}_3^{2p-1} = \mathcal{J}_3 \quad (4.29)$$

et qu'ainsi, toute matrice de rotation d'angle fini φ autour de l'axe des z peut être écrite sous une forme exponentielle :

$$\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-i\varphi \mathcal{J}_3} \quad (4.30)$$

De façon similaire, les rotations autour de l'axe des x et celles autour de l'axe des y ont pour générateurs infinitésimaux¹⁰

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

respectivement. Les trois matrices \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 et \mathcal{J}_3 sont hermitiennes et vérifient aussi les relations de commutation (4.24), ce qui met en évidence une structure unique d'algèbre de Lie : celle du groupe des rotations. D'une façon générale, on montre qu'une rotation quelconque d'angle θ autour d'une direction définie par un vecteur unitaire \vec{u} de composantes α , β et γ s'écrit sous la forme¹¹

$$\mathcal{R} = e^{-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{J}}} \quad , \quad \text{avec} \quad \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \alpha \mathcal{J}_1 + \beta \mathcal{J}_2 + \gamma \mathcal{J}_3 \quad (4.32)$$

Chacun des opérateurs (4.23) commute avec N_1 ou N_2 et donc avec l'opérateur "nombre total" $N = N_1 + N_2$. Ce dernier intervient dans la relation¹²

$$\vec{J}^2 \equiv J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \quad (4.33)$$

10. Les expressions des matrices ci-dessous sont aussi celles que l'on trouve dans la "représentation adjointe" où l'on représente sous forme matricielle l'action sur les générateurs d'un commutateur tel que, par exemple, $[\mathcal{J}_1, \cdot]$.

11. Forme qui en fait reste valable quelle que soit la représentation du groupe considérée.

12. Le lecteur vérifiera que les trois générateurs J_1 , J_2 et J_3 commutent avec J^2 .

Les valeurs propres de N étant tous les nombres entiers n positifs (y compris zéro), les valeurs propres de l'opérateur J^2 s'expriment donc sous la forme $j(j+1)$ où $j = \frac{n}{2}$ est soit entier si n est pair, soit "demi-entier", c'est-à-dire la moitié d'un nombre impair, si n est impair. Posons alors $m = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)$. Ce nombre est en fait une valeur propre de l'opérateur J_3 ¹³. Comme $n = n_1 + n_2 = 2j$, on a donc $n_1 = j + m$, $n_2 = j - m$. Les vecteurs propres (4.22) peuvent être re-paramétrisés à l'aide des valeurs propres de J^2 et J_3 et nous les écrivons donc sous la forme

$$|n_1, n_2\rangle \equiv |j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}} (a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m} |0\rangle \quad (4.34)$$

On notera qu'à une valeur donnée de j correspondent un certain nombre de vecteurs propres (4.34). Comme $m = j - n_1$ et que pour j fixé n_1 ne peut varier qu'entre 0 et $2j$, m varie alors entre $-j$ et $+j$. Il y a donc $2j + 1$ tels vecteurs propres. L'espace de Hilbert se décompose ainsi en sous-espaces disjoints E_j , chacun associé à une valeur donnée de j et dont une base, de dimension $2j + 1$, est constituée par les vecteurs (4.34) avec $-j \leq m \leq j$. Comme nous allons le voir, chaque E_j est un *espace de représentation* du groupe des rotations, dont le nombre j en constitue le *spin*.

Notons enfin ici les actions des opérateurs J_i , $i = 1, 2, 3$, sur les vecteurs de base

$$\begin{aligned} J_1 |j, m\rangle &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle \right] \\ J_2 |j, m\rangle &= \frac{i}{2} \left[\sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle - \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle \right] \\ J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

d'où l'on déduit que les opérateurs $J_+ = J_1 + iJ_2$ et $J_- = J_1 - iJ_2$ ont pour vertu de, respectivement, "faire monter" ou "faire descendre" le spin :

$$J_+ |j, m-1\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m\rangle, \quad J_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle \quad (4.36)$$

4.2 Représentations du groupe des rotations

4.2.1 Transformations linéaires sur les opérateurs a_1 et a_2

Envisageons la transformation linéaire

$$a'_1 = \alpha a_1 + \beta a_2, \quad a'_2 = \gamma a_1 + \delta a_2 \quad (4.37)$$

où α , β , γ et δ sont des nombres a priori complexes. On notera M la matrice 2x2 associée à cette transformation :

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Cherchons les conditions auxquelles elle doit satisfaire pour que les relations de commutations (4.22) soient préservées avec les nouveaux opérateurs. Il vient alors

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha^* \gamma = -\beta^* \delta \quad (4.39)$$

13. Apparenté au "nombre quantique magnétique".

On montre facilement que le déterminant $D = \det R = \alpha \delta - \beta \gamma$ de la transformation est de module unité :

$$|D|^2 = |\alpha|^2 |\delta|^2 + |\beta|^2 |\gamma|^2 - \beta \gamma \alpha^* \delta^* - \alpha \delta \beta^* \gamma^* = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(|\gamma|^2 + |\delta|^2) = 1 \quad (4.40)$$

et que

$$\alpha = \delta^* D \quad , \quad \gamma = -\beta^* D \quad , \quad \delta = \alpha^* D \quad , \quad \beta = -\gamma^* D \quad (4.41)$$

On en déduit que la matrice 2x2 de la transformation est unitaire :

$$R^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = R^\dagger \quad (4.42)$$

résultat auquel on pouvait s'attendre¹⁴. Le lecteur vérifiera que dans une telle transformation :

♣ l'opérateur N reste inchangé

$$N' = a_1'^\dagger a_1' + a_2'^\dagger a_2' = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = N \quad (4.43)$$

et donc J^2 aussi ;

♣ le vecteur $|0\rangle$ est inchangé¹⁵.

Il s'ensuit que les vecteurs transformés :

$$|j, m\rangle' = \frac{(a_1'^\dagger)^{j+m} (a_2'^\dagger)^{j-m} |0\rangle'}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} = \frac{(\alpha^* a_1^\dagger + \beta^* a_2^\dagger)^{j+m} (\gamma^* a_1^\dagger + \delta^* a_2^\dagger)^{j-m} |0\rangle}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \quad (4.44)$$

$(-j \leq m \leq +j)$ sont encore vecteurs propres de J^2 avec la même valeur propre $j(j+1)$, et forment toujours une base orthonormée. Ladite transformation laisse ainsi chaque sous-espace E_j globalement *invariant*, sur lequel elle induit une transformation *linéaire* et *unitaire*. Examinons notamment son effet dans le sous-espace E_1 ($j = 1$). Dans E_1 , chaque vecteur $|V\rangle$ admet la décomposition

$$|V\rangle = \sum_{m=-1}^1 c_m |1, m\rangle = c_1 |1, 1\rangle + c_{-1} |1, -1\rangle + c_0 |1, 0\rangle \quad (4.45)$$

On a

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle' &= \alpha^2 |1, 0\rangle + \sqrt{2} \alpha^* \beta^* |1, 0\rangle + \beta^2 |1, -1\rangle \\ |1, 0\rangle' &= \sqrt{2} \alpha^* \gamma^* |1, 1\rangle + (\alpha^* \delta^* + \beta^* \gamma^*) |1, 0\rangle + \sqrt{2} \beta^* \delta^* |1, -1\rangle \\ |1, -1\rangle' &= \gamma^2 |1, 1\rangle + \sqrt{2} \gamma^* \delta^* |1, 0\rangle + \delta^2 |1, -1\rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

La transformation étant équivalente à un changement de base, écrivons

$$|V\rangle = c'_1 |1, 1\rangle' + c'_0 |1, 0\rangle' + c'_{-1} |1, -1\rangle' \quad (4.47)$$

Sous forme matricielle, le passage des anciennes composantes aux nouvelles s'écrit

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_0 \\ c'_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2} \alpha \beta & \beta^2 \\ \sqrt{2} \alpha \gamma & \alpha \delta + \beta \gamma & \sqrt{2} \beta \delta \\ \gamma^2 & \sqrt{2} \gamma \delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \\ c_{-1} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

14. La transformation considérée ici est à rapprocher des transformations canoniques introduites au premier chapitre.

15. A un éventuel facteur de phase près, que l'on prendra égal à 1.

Introduisons la base "cartésienne"

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |1, 1\rangle) \quad , \quad |y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle + |1, -1\rangle) \quad , \quad |z\rangle = |1, 0\rangle \quad (4.49)$$

de sorte que

$$|V\rangle = x|x\rangle + y|y\rangle + z|z\rangle \quad (4.50)$$

avec

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{-1} - c_1) \quad , \quad y = \frac{-i}{\sqrt{2}}(c_1 + c_{-1}) \quad , \quad z = c_0 \quad (4.51)$$

Il vient

$$\begin{aligned} 2x' &= (\alpha^2 - \gamma^2)(x - iy) + (\delta^2 - \beta^2)(x + iy) + 2z(\gamma\delta - \alpha\beta) \\ 2iy' &= (\alpha^2 + \gamma^2)(-x + iy) + (\delta^2 + \beta^2)(x + iy) + 2z(\gamma\delta + \alpha\beta) \\ z' &= -(x - iy)\alpha\gamma + (x + iy)\beta\delta + z(\alpha\delta + \gamma\beta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Faisons maintenant le choix $D = 1$. La matrice R est alors une matrice 2×2 unitaire et *unimodulaire* (déterminant égal à 1). Elle fait partie du groupe $SU(2)$: "spécial unitaire 2×2 ". On a alors

$$\delta = \alpha^* \quad , \quad \gamma = -\beta^* \quad , \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.53)$$

et l'on est conduit à introduire la paramétrisation suivante

$$\alpha = e^{i\frac{\eta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \quad , \quad \beta = -e^{i\frac{\zeta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.54)$$

impliquant trois angles, θ , η et ζ , indiquant que $SU(2)$ est un groupe continu à trois paramètres¹⁶. En posant encore $\eta = -\psi - \varphi$ et $\zeta = \psi - \varphi$, on trouve que la matrice M se présente alors sous la forme factorisée

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Considérons tout d'abord le cas où $\theta = 0$ et $\psi = 0$ (donc $\beta = 0$). On obtient immédiatement

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \quad , \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad , \quad z' = z \quad (4.56)$$

Supposant x , y et z réels, ces grandeurs peuvent être envisagées comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace ordinaire, par rapport à un certain repère. Les formules ci-dessus montrent alors qu'une matrice telle que

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

est associée à une rotation d'angle φ autour de l'axe des z . Considérons ensuite le cas où $\theta \neq 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. On trouve

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \cos \theta - x \sin \theta \quad (4.58)$$

Il s'agit ici d'une rotation d'angle θ autour de l'axe des y .

16. On dit alors que le groupe est de dimension trois.

La matrice R est donc le produit de trois matrices représentant chacune une rotation. Le produit de rotations étant encore une rotation, M est donc elle aussi associée à une rotation. On met ainsi en évidence le lien étroit existant entre le groupe $SU(2)$ et le groupe des rotations $SO(3)$ ¹⁷. Ce lien devient encore plus explicite au regard de la remarquable relation

$$R \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

4.2.2 Représentations irréductibles de $SU(2)$

La transformation induit dans l'espace de Hilbert une opération que l'on peut définir comme suit. Nous savons déjà qu'elle laisse chaque sous-espace E_j globalement invariant. Aussi, nous examinerons uniquement son action dans un tel sous-espace E_j . Soit $|V\rangle$ un vecteur quelconque de E_j admettant la décomposition

$$|V\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m |j, m\rangle, \quad \text{avec } c_m = \langle j, m | V \rangle \quad (4.60)$$

L'opération en question sera exprimée par un opérateur linéaire U tel que

$$U|V\rangle = \sum_{m=-j}^j c'_m |j, m\rangle, \quad \text{avec } c'_m = \langle j, m | U|V\rangle \quad (4.61)$$

où les vecteurs $|j, m\rangle'$ sont donnés par (4.44). Posons

$$\mathcal{D}_{m n}^j(R) = \langle j, m | j, n \rangle \quad (4.62)$$

On a donc

$$c'_m = \sum_{n=-j}^j \langle j, m | j, n \rangle \langle j, n | V \rangle = \sum_{n=-j}^j \mathcal{D}_{m n}^j(R) c_n \quad (4.63)$$

En prenant pour $|V\rangle$ l'un des vecteurs de base $|j, p\rangle$, auquel cas $c_n = \delta_{np}$, on obtient notamment $c'_m = \mathcal{D}_{m p}^j(R)$ et par suite

$$U|j, p\rangle = \sum_{m=-j}^j \mathcal{D}_{m p}^j(R) |j, m\rangle \quad (4.64)$$

C'est cette dernière relation qui définit entièrement l'action de U sur le sous-espace E_j par son action sur ses vecteurs de base.

L'ensemble des $\mathcal{D}_{m p}^j(R)$ définit une matrice carrée \mathcal{D}^j à $2j + 1$ lignes et $2j + 1$ colonnes¹⁸. La dépendance de ses éléments vis-à-vis des éléments de la matrice R est contenue dans la formule

$$\mathcal{D}_{m p}^j(R) = \langle 0 | \frac{(\alpha a_1 + \beta a_2)^{j+m} (\gamma a_1 + \delta a_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} |j, p\rangle \quad (4.65)$$

dont le développement conduit à l'expression¹⁹

17. Plus précisément, on a la relation $SO(3) \approx SU(2)/Z_2$ montrant que les deux groupes sont *localement isomorphes*. Par ailleurs, il est bon de signaler, par égard pour les puristes, que le groupe $SO(3)$ envisagé ici est le groupe-quotient $P(3)/T(3)$ où $P(3)$ est le groupe des déplacements et $T(3)$ le groupe des translations, dans l'espace à trois dimensions : il s'agit donc du groupe des rotations autour d'un point défini à une translation près.

18. Matrice de Wigner.

19. A démontrer!

$$\mathcal{D}_{m m'}^j \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \sum_{\substack{p+q=j+m' \\ 0 \leq p \leq j+m \\ 0 \leq q \leq j-m}} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{p!(j+m-p)!q!(j-m-q)!} \alpha^p \beta^{j+m-p} \gamma^q \delta^{j-m-q} \quad (4.66)$$

La relation entre les matrices \mathcal{D}^j et les matrices 2x2 est un *homomorphisme*. On montre en effet que quelles que soient les matrices 2x2 M_1 et M_2 , on a²⁰

$$\mathcal{D}_{m m'}^j(M_2 M_1) = \sum_{n=-j}^j \mathcal{D}_{m n}^j(M_2) \mathcal{D}_{n m'}^j(M_1) \quad (4.67)$$

Une matrice telle que $\mathcal{D}^j(R)$ où R est une matrice de $SU(2)$ constitue donc une *représentation* de ce groupe dans E_j .

L'opérateur $U(R)$ induit par la rotation à laquelle est associée la matrice R et qui agit dans l'espace de Hilbert, laisse invariant chaque sous-espace E_j . Chacun de ces sous-espaces constitue ce qu'on appelle une *représentation irréductible* du groupe des rotations (plus exactement du groupe $SU(2)$)²¹. Le formalisme développé ici permet de mettre en évidence les caractéristiques de toutes les représentations irréductibles unitaires du groupe $SU(2)$ ²². On voit notamment que chacune d'elle est caractérisée par la valeur du nombre j qui est son *spin*. On appelle aussi "spin" l'opérateur-vecteur \vec{J} , dont les composantes, dites "composantes de spin", relativement à un repère d'espace cartésien de base \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont, respectivement, J_1 , J_2 et J_3 (couramment notées aussi J_x , J_y et J_z).

La relation (4.63) peut également être écrite sous forme matricielle en introduisant des vecteurs unicolonnes à $2j + 1$ composantes

$$\Psi' = \mathcal{D}^j(R)\Psi \quad , \quad \text{avec} \quad \Psi = \begin{pmatrix} c_j \\ c_{j-1} \\ \vdots \\ c_{-j+1} \\ c_{-j} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Ce vecteur Ψ , associé à un vecteur $|V\rangle$ de l'espace de Hilbert, et qui se transforme par rotation au moyen des matrices \mathcal{D}^j à $(2j + 1) \times (2j + 1)$ éléments est ce qu'on appelle un *spineur* "de spin j "²³. Les matrices $\mathcal{D}^j(R)$ étant unitaires²⁴, la norme de ce spineur définie comme

$$\Psi^\dagger \Psi = {}^t \Psi^* \Psi = \sum_{m=-j}^j |c_m|^2 \quad (4.69)$$

est invariante sous $SU(2)$.

20. Voir l'appendice I.

21. L'irréductibilité d'une représentation se définit plus précisément d'après le fameux *lemme de Schur* selon lequel une représentation est irréductible si et seulement si les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices de la représentation sont des multiples de l'unité.

22. En fait, les représentations obtenues ici sont des représentations *symétriques*, voir plus loin.

23. Les spineurs ont été introduits pour la première fois en Mathématiques par E. Cartan en 1913 dans ses recherches sur les représentations linéaires des groupes; voir : E. Cartan, Bull. Soc. Math. France, **41**, 1913, 53-96; "Leçons sur la Théorie des Spineurs. I : Les spineurs de l'espace à $i\frac{1}{2}$ trois dimensions", "Leçons sur la Théorie des Spineurs. II : Les spineurs de l'espace à $i\frac{1}{2}n \geq 3$ dimensions; les spineurs en géométrie riemannienne", Hermann et Cie Editeurs, 1938.

24. Voir l'appendice II.

4.3 Spineurs de spin 1/2

La représentation de $SU(2)$ de spin 1/2 revêt une importance toute particulière car c'est la représentation fondamentale de ce groupe, à partir de laquelle, par produits tensoriels, on peut reconstruire toutes les autres.

4.3.1 Bases de spineurs de spin 1/2

L'espace hermitien de la représentation fondamentale de $SU(2)$ (qui est celle de spin 1/2) est bien sûr de dimension 2. Nous y définirons une base de vecteurs-kets de référence $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dont les spineurs associés sont

$$\overset{\circ}{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{u}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

et constituent une base orthonormée des vecteurs unicolonne à deux composantes :

$$\overset{\circ}{u}_\lambda^\dagger \overset{\circ}{u}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\lambda, \lambda' = \pm 1) \quad (4.71)$$

De façon triviale, ces spineurs sont vecteurs propres de la matrice

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

qui, au facteur 1/2 près, n'est autre que le représentant de la composante de spin J_z . En effet, pour toute matrice A 2x2, on a :

$$\mathcal{D}^{1/2}(A) \equiv A \quad (4.73)$$

Les composantes de spin agissant sur les spineurs sont ici données par les matrices

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \tau_k$$

avec

$$(4.74)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où τ_1 , τ_2 et τ_3 sont appelées *matrices de Pauli*. Elles vérifient les relations

$$\tau_1 \tau_2 = -\tau_2 \tau_1 = i\tau_3 \quad \tau_2 \tau_3 = -\tau_3 \tau_2 = i\tau_1 \quad \tau_3 \tau_1 = -\tau_1 \tau_3 = i\tau_2$$

soit

$$(4.75)$$

$$\tau_k \tau_\ell = i \epsilon_{k\ell m} \tau_m \quad \text{avec sommation sur } m \text{ et } k \neq \ell$$

où $\epsilon_{k\ell m}$ est le tenseur complètement antisymétrique tel que $\epsilon_{123} = 1$ ($\epsilon_{\ell km} = \epsilon_{m\ell k} = -\epsilon_{k\ell m}$, etc). On en déduit les relations de commutation

$$[\sigma_k, \sigma_\ell] = i \epsilon_{k\ell m} \sigma_m \quad (\text{avec sommation sur } m) \quad (4.76)$$

qui sont celles de l'algèbre de Lie de $SU(2)$. On a donc

$$\sigma_3 \overset{\circ}{u}_\lambda = \frac{\lambda}{2} \overset{\circ}{u}_\lambda \quad (4.77)$$

On notera dès maintenant que les matrices de Pauli constituent une base pour les matrices 2x2, puisque

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = a_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3 = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \quad , \quad a_2 = \frac{i}{2}(\gamma - \beta) \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

soit encore

$$A = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{\tau} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z \quad , \quad \vec{\tau} = \tau_1 \vec{e}_x + \tau_2 \vec{e}_y + \tau_3 \vec{e}_z \quad (4.79)$$

Comme

$$\text{Tr} \tau_k \tau_\ell = 2\delta_{k\ell} \quad (4.80)$$

où "Tr" est le symbole pour la trace d'une matrice, les 4 coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 peuvent être obtenus au moyen des traces :

$$a_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} A \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \text{Tr} (A \vec{\tau}) \quad (4.81)$$

A l'aide de ces formules, on peut notamment démontrer la relation

$$(\vec{a} \cdot \vec{\tau}) (\vec{b} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\tau} \quad (4.82)$$

où \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs quelconques.

On peut construire une nouvelle base de spineurs en appliquant à la base de référence la matrice de rotation

$$R(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

on obtient ainsi les deux spineurs

$$u_+(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \overset{\circ}{u}_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad u_-(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \overset{\circ}{u}_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

La matrice $R(\theta, \varphi)$ étant unitaire, ces nouveaux spineurs forment bien une base orthonormée. Ce sont d'ailleurs les vecteurs colonnes de cette matrice. En utilisant les relations (4.52), il est facile de voir que ladite rotation transforme le point de coordonnées $x = y = 0, z = 1$ en un point de coordonnées $x' = \sin \theta \cos \varphi, y' = \sin \theta \sin \varphi, z' = \cos \theta$; ou, de façon équivalente, transforme le vecteur unitaire \vec{e}_z en vecteur unitaire

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \quad (4.85)$$

En utilisant les formules (4.59) et (4.78), on peut ainsi écrire la relation

$$R(\theta, \varphi) \tau_3 R^{-1}(\theta, \varphi) = \vec{n} \cdot \vec{\tau} \quad (4.86)$$

Il est alors clair que le nouveau spineur $u_\lambda(\theta, \varphi)$ est bien spineur propre de la composante de spin suivant le vecteur \vec{n} puisque

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} u_\lambda(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \tau_3 R^{-1}(\theta, \varphi) u_\lambda(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \tau_3 \hat{u}_\lambda = \lambda R(\theta, \varphi) \hat{u}_\lambda = \lambda u_\lambda(\theta, \varphi) \quad (4.87)$$

D'une façon générale, l'action d'une rotation \mathcal{R} sur un vecteur \vec{v} pourra être transcrite en termes de matrices 2x2 par la formule

$$R(\mathcal{R}) \vec{v} \cdot \vec{\tau} R^{-1}(\mathcal{R}) = \vec{v}' \cdot \vec{\tau} \quad (4.88)$$

où \vec{v}' est le vecteur transformé. En utilisant (4.88), le lecteur vérifiera que sous l'action de la rotation $R(\theta, \varphi)$, les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y deviennent, respectivement,

$$\vec{e}_x' = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \quad , \quad \vec{e}_y' = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad (4.89)$$

où l'on voit que, finalement, la rotation en question permet de passer de la base cartésienne de référence à la base locale des coordonnées sphériques. Il est d'usage d'introduire les vecteurs complexes

$$\vec{e}^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x' \pm i \vec{e}_y') \quad (4.90)$$

lesquels, dans un plan perpendiculaire à \vec{n} , constituent une base orthonormée, dans le sens où l'on a

$$\left(\vec{e}^{(\lambda)} \right)^* \cdot \vec{e}^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = \pm 1) \quad (4.91)$$

Une rotation supplémentaire d'angle ψ autour du vecteur \vec{n} , représentée par la matrice²⁵

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\tau} = e^{-i\psi \vec{n} \cdot \vec{\tau} / 2} \quad (4.92)$$

change ces vecteurs et les spineurs associés par de simples facteurs de phase :

$$\vec{e}^{(\lambda)} \longrightarrow e^{i\lambda\psi} \vec{e}^{(\lambda)} \quad , \quad u_\lambda(\theta, \varphi) \longrightarrow e^{-i\lambda\psi/2} u_\lambda(\theta, \varphi) \quad (4.93)$$

On remarque alors qu'une rotation de $\psi = 2\pi$ redonne les mêmes vecteurs, alors que les spineurs ont changé de signe. Plus généralement, dans une rotation de 2π autour de l'axe qui définit la composante de spin m , un spineur de spin j est multiplié par le facteur $(-1)^{2j\pi}$: les spineurs de spin demi-entier se voient alors multipliés par -1, alors que les spineurs de spin entier sont inchangés.

On retiendra qu'à chaque vecteur unitaire \vec{n} de l'espace à trois dimensions peut donc être associée une base de spineurs à deux composantes, formée des vecteurs propres de la composante du "spin 1/2" suivant ce vecteur. Ces spineurs sont définis à un facteur de phase près correspondant à une rotation dans le plan perpendiculaire à \vec{n} . En fait, cette association concerne toute la base d'espace définie à partir de \vec{n} . Ceci devient plus explicite lorsqu'on exprime les projecteurs de spineurs du type $u u^\dagger$. En effet, dans la base de référence, on a

$$\hat{u}_\lambda \hat{u}_\lambda^\dagger = \frac{1}{2} (1 + \lambda \tau_3) \quad , \quad \hat{u}_\lambda \hat{u}_{-\lambda}^\dagger = \frac{1}{2} (\tau_1 + i \lambda \tau_2) \quad (4.94)$$

En appliquant à ces projecteurs la matrice de rotation $R(\theta, \varphi)$, on obtient

$$u_\lambda(\theta, \varphi) u_\lambda^\dagger(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda \vec{n} \cdot \vec{\tau} \right) \quad , \quad u_\lambda(\theta, \varphi) u_{-\lambda}^\dagger(\theta, \varphi) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \vec{e}^{(\lambda)} \cdot \vec{\tau} \quad (4.95)$$

25. A démontrer!

soit encore, en calculant des traces

$$u_{\lambda}^{\dagger}(\theta, \varphi) \overrightarrow{\tau} u_{\lambda}(\theta, \varphi) = \lambda \overrightarrow{n} \quad , \quad u_{-\lambda}^{\dagger}(\theta, \varphi) \overrightarrow{\tau} u_{-\lambda}(\theta, \varphi) = -\lambda \sqrt{2} \overrightarrow{e}^{(\lambda)} \quad (4.96)$$

En faisant usage de la relation de fermeture $u_{\lambda} u_{\lambda}^{\dagger} + u_{-\lambda} u_{-\lambda}^{\dagger} = 1$, on obtient aussi (en notations allégées!)

$$\overrightarrow{\tau} u_{\lambda} = u_{\lambda} u_{\lambda}^{\dagger} \overrightarrow{\tau} u_{\lambda} + u_{-\lambda} u_{-\lambda}^{\dagger} \overrightarrow{\tau} u_{-\lambda}$$

d'où

$$\overrightarrow{\tau} u_{\lambda}(\mathbf{n}) = \lambda \left[u_{\lambda}(\mathbf{n}) \overrightarrow{n} - \sqrt{2} u_{-\lambda}(\mathbf{n}) \overrightarrow{e}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \right] \quad (4.97)$$

où nous avons posé $u_{\lambda}(\theta, \varphi) = u_{\lambda}(\mathbf{n})$, $\overrightarrow{e}^{(\lambda)} = \overrightarrow{e}^{(\lambda)}(\mathbf{n})$, notations que nous utiliserons dorénavant. Toutes ces formules font apparaître clairement que des composantes d'un vecteur ordinaire, élément de la représentation de spin 1, peuvent être obtenues par des produits tensoriels de composantes de spineurs de la représentation fondamentale.

Bien entendu, l'association entre une base de vecteurs et des spineurs n'est pas limitée à la représentation fondamentale, bien que cette relation s'exprime plus simplement dans ce cas. En effet, ayant défini dans E_j une base de référence $|j, m\rangle$ pour laquelle le nombre m est la valeur propre de l'opérateur J_3 , on obtient une nouvelle base $|j, m\rangle_{\mathbf{n}}$ en lui appliquant l'opérateur unitaire $U(R(\theta, \varphi))$ qui représente la rotation $R(\theta, \varphi)$. Le nombre m devient alors valeur propre de la projection $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{J}$ du spin sur le vecteur \overrightarrow{n} , vecteur qui apparaît ainsi l'élément fondamental autour duquel on construit la base de vecteurs. Cependant, Il faut noter que l'application de la rotation $R(\theta, \varphi)$ n'est pas la seule façon d'obtenir des kets $|j, m\rangle_{\mathbf{n}}$ dépendant de \overrightarrow{n} . En effet, dans le plan perpendiculaire à \overrightarrow{n} , il existe une infinité de façons de choisir une base orthonormée de deux vecteurs pour constituer un trièdre local avec ce vecteur. La rotation choisie plus haut correspond à une disposition particulière de cette base (base des coordonnées sphériques). Un autre choix consisterait à tourner cette base d'un angle ψ autour de \overrightarrow{n} . Il est facile de montrer que cela reviendrait à effectuer une rotation préalable d'angle ψ autour de l'axe des z avant d'appliquer $R(\theta, \varphi)$, c'est-à-dire, à choisir comme nouvelle matrice de rotation

$$R'(\theta, \varphi, \psi) = R(\theta, \varphi) R_z(\psi) \quad (4.98)$$

Mais l'application préalable de $R_z(\psi)$ revient à multiplier le ket $|j, m\rangle$ par le facteur de phase $e^{-im\psi}$. Ainsi, les différents choix de base dûs à la possibilité d'effectuer une rotation arbitraire autour de \overrightarrow{n} , conduisent simplement à une modification de la phase de chaque ket de base. Ce fait, qui avait déjà été observé pour la représentation de spin 1/2, indique aussi que lorsqu'on effectue une rotation quelconque R ayant pour effet de transformer le vecteur \overrightarrow{n} en \overrightarrow{n}' , le ket $|j, m\rangle_{\mathbf{n}}$ sera transformé en ket $|j, m\rangle_{\mathbf{R}(\mathbf{n})}$, à un facteur de phase $e^{-im\psi}$ près. C'est ce que révèle la formule suivante (en notant $R_{\mathbf{n}} = R(\theta, \varphi)$)

$$R_{\mathbf{n}'}^{-1} R R_{\mathbf{n}} \tau_3 R_{\mathbf{n}}^{-1} R^{-1} R_{\mathbf{n}'} = \tau_3 \quad (4.99)$$

qui montre que $\mathcal{R} = R_{\mathbf{n}'}^{-1} R R_{\mathbf{n}}$ est une rotation autour de l'axe des z , dont le résultat est de multiplier $|j, m\rangle$ par un facteur $e^{-im\psi}$ où ψ est l'angle de cette rotation. On aura ainsi

$$U(R) |j, m\rangle_{\mathbf{n}} = U(R_{\mathbf{n}'}) U(\mathcal{R}) |j, m\rangle = e^{-im\psi} |j, m\rangle_{\mathbf{n}'} \quad (4.100)$$

Au ket de référence $|j, m\rangle$ correspond un spineur de référence $\overset{\circ}{\Psi}_m^j$ dont seule la composante occupant la $(j + m + 1)$ ème place est non nulle et égale à 1 : $\left[\overset{\circ}{\Psi}_m^j \right]_p = \delta_{mp}$. Effectuant sur ces spineurs la rotation $R_{\mathbf{n}} (= R(\theta, \varphi))$, on obtient une base orthonormée de spineurs $\Psi_m^j(\mathbf{n})$ tels que

$$[\Psi_m^j(\mathbf{n})]_n = \mathcal{D}_{nm}^j(\mathbf{n}) \quad (4.101)$$

où l'on a posé $\mathcal{D}^j(\mathbf{n}) = \mathcal{D}^j(R(\theta, \varphi))$. Les propriétés d'orthonormalisation et de projection de ces spineurs sont étroitement liées à celles des matrices \mathcal{D}^j . On vérifie notamment que l'on a

$$\sum_{m=-j}^j [\Psi_m^j(\mathbf{n})]^\dagger \Psi_m^j(\mathbf{n}) = 1 \quad (4.102)$$

où "1" est la matrice identité $(2j+1) \times (2j+1)$. Les équivalents des opérateurs J_3 , J_+ et J_- seront donnés par

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{m=-j}^j m [\overset{\circ}{\Psi}_m^j]^\dagger \overset{\circ}{\Psi}_m^j \\ J_+ &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \overset{\circ}{\Psi}_{m+1}^j [\overset{\circ}{\Psi}_m^j]^\dagger \\ J_- &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \overset{\circ}{\Psi}_{m-1}^j [\overset{\circ}{\Psi}_m^j]^\dagger \end{aligned} \quad (4.103)$$

(les coefficients sous les signes sommes étant nuls soit pour $m = j$ soit pour $m = -j$, on peut sans inconvénient étendre ces sommes de $m = -j$ à $m = j$). Le lecteur vérifiera que ces opérateurs satisfont aux relations de commutation usuelles (4.24). On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{J} &= \sum_{m=-j}^j m [\Psi_m^j(\mathbf{n})]^\dagger \Psi_m^j(\mathbf{n}) \\ \vec{e}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \cdot \vec{J} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j-\lambda m)(j+\lambda m+1)} \Psi_{m+\lambda}^j(\mathbf{n}) [\Psi_m^j]^\dagger(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.104)$$

4.3.2 Un peu de géométrie spinorielle

Considérons plus particulièrement une rotation d'angle π autour du vecteur unitaire \vec{n} . La matrice qui la représente a pour expression

$$R_{\vec{n}}(\pi) = -i \vec{n} \cdot \vec{\tau} \quad \text{et} \quad R_{\vec{n}}^{-1}(\pi) = +i \vec{n} \cdot \vec{\tau} \quad (4.105)$$

Dans cette opération, un vecteur quelconque \vec{a} est transformé en un vecteur \vec{a}' tel que

$$R_{\vec{n}}(\pi) (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) R_{\vec{n}}^{-1}(\pi) = (\vec{n} \cdot \vec{\tau}) (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) (\vec{n} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a}' \cdot \vec{\tau} \quad (4.106)$$

Appliquons deux fois la relation (4.82) :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\tau}) (\vec{n} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a} \cdot \vec{n} + i (\vec{a} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{\tau}$$

puis

$$(\vec{n} \cdot \vec{\tau}) (\vec{a} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{\tau} = \vec{n} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{n}) + i (\vec{n} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{n})) \cdot \vec{\tau}$$

d'où

$$\vec{a}' \cdot \vec{\tau} = (\vec{n} \cdot \vec{a}) (\vec{n} \cdot \vec{\tau}) - (\vec{n} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{n})) \cdot \vec{\tau}$$

En effectuant le double produit vectoriel et en tenant compte de l'indépendance des matrices de Pauli, on trouve finalement

$$\vec{a}' = 2(\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} - \vec{a} \quad (4.107)$$

Ce nouveau vecteur est dans le plan formé par \vec{n} et \vec{a} . Il a la même projection orthogonale sur \vec{n} que celle du vecteur \vec{a} , mais sa composante orthogonale à \vec{n} est opposée à celle de \vec{a} . Ceci est normal puisque la rotation envisagée revient en fait à effectuer une symétrie par rapport à une droite de même direction que \vec{n} .

On est ainsi conduit à interpréter²⁶ la matrice

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

comme une *symétrie* par rapport à une droite de même direction que \vec{n} . Or, on sait que le produit de deux symétrie planes est une rotation. L'angle de la rotation est le double de l'angle formé par les deux droites coplanaires par rapport auxquelles on effectue ces symétries. De ce point de vue, la relation (4.82) ne fait qu'exprimer ce fait : considérant un couple ordonné de deux vecteurs unitaires \vec{a} et \vec{b} faisant un angle ϕ entre eux, la rotation d'angle 2ϕ sera effectuée dans un sens conforme à la règle du tire-bouchon, au regard du sens du produit vectoriel (ordonné) $\vec{a} \wedge \vec{b}$. La matrice 2x2 qui décrit cette rotation est

$$R = \cos 2\frac{\phi}{2} - i \sin 2\frac{\phi}{2} \vec{N} \cdot \vec{\tau} \quad \text{avec} \quad \vec{N} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

soit (la symétrie par rapport à \vec{a} est effectuée avant celle par rapport à \vec{b})

$$R = \vec{a} \cdot \vec{b} - i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\tau} = (\vec{b} \cdot \vec{\tau})(\vec{a} \cdot \vec{\tau})$$

Comme indiqué au paragraphe précédent, la matrice $\mathcal{R} = R^{-1}(\mathbf{a}')R_{\vec{n}}(\pi)R(\mathbf{a})$ doit représenter une rotation autour de l'axe des z . On peut le prouver ici directement. Supposons que \vec{a} soit unitaire. On a

$$R(\mathbf{a}') \tau_3 R^{-1}(\mathbf{a}') = \vec{a}' \cdot \vec{\tau}, \quad R(\mathbf{a}) \tau_3 R^{-1}(\mathbf{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\tau}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{a}'}{2(\vec{n} \cdot \vec{a})}$$

d'où

$$\mathcal{R} = \frac{-i}{2(\vec{n} \cdot \vec{a})} [\tau_3 R^{-1}(\mathbf{a}')R(\mathbf{a}) + R^{-1}(\mathbf{a}')R(\mathbf{a})\tau_3]$$

Ecrivait

$$R^{-1}(\mathbf{a}')R(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \delta = \alpha^*, \gamma = -\beta^*)$$

on trouve

26. Les aspects géométriques de la représentation fondamentale de spin 1/2 ont été largement développés par Max Morand dans "Géométrie Spinorielle", Masson et Cie Editeurs, Paris, 1973. Le lecteur intéressé pourra également faire le lien entre l'algèbre développée ici et la célèbre algèbre des quaternions de Hamilton, voir par ex <http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion>.

$$\mathcal{R} = \frac{-i}{(\vec{n} \cdot \vec{a})} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^* \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha = \cos \frac{\theta'_a}{2} \cos \frac{\theta_a}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi'_a - \varphi_a)} + \sin \frac{\theta'_a}{2} \sin \frac{\theta_a}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_a - \varphi_a)}$$

θ'_a, φ'_a , étant les angles orbital et azimutal définissant \vec{a}' , θ_a, φ_a ceux définissant \vec{a} . Or, on vérifie facilement que $|\alpha| = |(\vec{n} \cdot \vec{a})|$, et l'on peut donc poser

$$\alpha = i(\vec{n} \cdot \vec{a})e^{-i\psi/2}$$

d'où, comme attendu,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{\cos(\frac{\theta'_a - \theta_a}{2})}{\cos(\frac{\theta'_a + \theta_a}{2})} \cot(\frac{\varphi'_a - \varphi_a}{2})$$

4.3.3 Représentation contragrédiente, représentation conjuguée

Considérons un groupe ayant des représentations linéaires irréductibles de dimensions finies. Soit \mathcal{D} l'une de ces représentations matricielles, agissant dans un espace \mathcal{E} . La représentation *contragrédiente* s'obtient en prenant les inverses des transposées, soit ${}^t\mathcal{D}^{-1}$. La représentation dite *conjuguée* s'obtient en prenant les conjuguées complexes des matrices, soit \mathcal{D}^* . On obtient ainsi des représentations du groupe qui peuvent ne pas être équivalentes entre elles ni équivalentes à \mathcal{D} . L'équivalence de deux représentations $\mathcal{D}(g)$ et $\mathcal{D}'(g)$ d'un même élément g du groupe, cette dernière agissant dans un espace \mathcal{E}' , implique qu'il existe un opérateur régulier U permettant de passer de l'une à l'autre :

$$\mathcal{D}'(g) = U\mathcal{D}(g)U^{-1} \quad (4.109)$$

Si les deux espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont identiques, la relation (4.109) exprime un simple changement de base dans l'espace. Comme

$$\text{Tr } \mathcal{D}'(g) = \text{Tr } U\mathcal{D}(g)U^{-1} = \text{Tr } U^{-1}U\mathcal{D}(g) = \text{Tr } \mathcal{D}(g) \quad (4.110)$$

la trace de $\chi(g) = \mathcal{D}(g)$, appelée *caractère* de g dans la représentation \mathcal{D} , est aussi le caractère de g dans une représentation équivalente : deux représentations équivalentes ont même ensemble de caractères. L'élément neutre e du groupe étant représenté par des matrices unités, son caractère $\chi(e)$ est égal à la dimension de la représentation. Deux représentations équivalentes ont donc bien la même dimension, et deux représentations ayant des dimensions différentes ne peuvent être équivalentes.

Les groupes *finis* et les groupes de Lie *compacts* ont *toutes* leurs représentations irréductibles équivalentes à des représentations unitaires de dimensions finies²⁷. Pour ces groupes²⁸, les représentations contragrédiente et conjuguée sont équivalentes puisqu'alors

$$\mathcal{D}^\dagger = {}^t\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{-1}, \quad \text{soit } {}^t\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^* \quad (4.111)$$

D'autres groupes non-compacts, tels $SL(n, C)$, groupe des matrices $n \times n$ à coefficients complexes et de déterminant égal à 1, ont néanmoins des représentations de dimensions finies, et ont la propriété

27. Ce résultat s'applique au groupe des rotations qui est compact, mais pas au groupe de Lorentz qui est non compact.

28. Au premier chef, $SU(n)$, le groupe des matrices $n \times n$ unitaires de déterminant égal à 1.

que la représentation conjuguée \mathcal{D}^* est soit équivalente à la contragrédiente ${}^t\mathcal{D}^{-1}$ (cas de $SU(n)$ et de $SU(p, n-p)$), soit à la représentation \mathcal{D} elle-même (cas de $SL(n, R)$). Pour $SL(n, C)$ notamment, on montre que les représentations contragrédientes peuvent se construire par tensorialisation de la représentation fondamentale²⁹.

Considérons le cas $n = 2$ qui nous intéresse plus particulièrement ici. Soit la matrice

$$C = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$C^* = C, \quad C^{-1} = {}^tC = -C \quad (4.113)$$

Pour toute matrice 2×2 notée A , on a³⁰

$$AC{}^tA = (\det A)C \quad (4.114)$$

Le groupe $SL(2, C)$ est défini par la relation : $\det A = 1$. Pour ce groupe (dont $SU(2)$ est sous-groupe), on a donc

$$CAC^{-1} = {}^tA^{-1} \quad \text{ou} \quad CA^*C^{-1} = A^{\dagger^{-1}} \quad (4.115)$$

La représentation A et sa contragrédiente sont équivalentes, ou encore, la représentation conjuguée A^* est équivalente à $A^{\dagger^{-1}}$. Explicitement, les composantes ξ^α d'un spineur de la représentation contragrédiente se transforment comme

$$\xi'^\alpha = ({}^tA^{-1})^\alpha_\beta \xi^\beta \equiv (C^{-1}AC)^\alpha_\beta \xi^\beta \quad (C^{-1} = -C) \quad (4.116)$$

et les combinaisons

$$\omega^\alpha = C^\alpha_\beta \xi^\beta \quad (4.117)$$

se transforment bien selon la représentation A . Etant donné un spineur κ associé à la représentation A , l'expression

$${}^t\xi\kappa = {}^t(C^{-1}\omega)\kappa = {}^t\omega C\kappa = (\omega, \kappa) = \omega^1\kappa^2 - \omega^2\kappa^1 \quad (4.118)$$

est donc invariante sous les transformations de $SL(2, C)$. Ceci suggère de définir un nouveau produit scalaire dans l'espace des spineurs à deux composantes, en se servant de la matrice C comme d'un tenseur métrique :

$$g_{\alpha\beta} \equiv C^\alpha_\beta = -g_{\beta\alpha} \quad (g_{12} = -g_{21} = 1) \quad (4.119)$$

à partir duquel on définira les composantes covariantes d'un spineur comme

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \omega^\beta \quad \text{soit} \quad \omega_1 = \omega^2, \quad \omega_2 = -\omega^1 \quad (4.120)$$

Il est clair que ces composantes covariantes se transforment selon la matrice inverse A^{-1} . Exprimé avec celles-ci, le produit scalaire ainsi défini s'écrit sous la forme manifestement invariante $\omega_\alpha \kappa^\alpha = \omega^\beta \kappa_\beta$ (avec la convention de sommation d'Einstein). Le tenseur métrique étant antisymétrique, le produit scalaire d'un spineur par lui-même est *nul* : tout spineur est isotrope vis-à-vis de cette métrique. On notera que du point de vue de $SU(2)$, ce produit scalaire invariant correspond à un spin zéro et se présente comme un produit tensoriel de composantes de spineurs de spin $1/2$.

29. Voir, par exemple, "Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Élémentaires", H. Bacry, Gordon & Breach ed. (distribué par Dunod ed.), 1967.

30. A démontrer.

Les diverses représentations finies du groupe peuvent être construites par tensorialisation multiple de la représentation fondamentale. On obtient ainsi des tenseurs $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q} = a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} \dots c^{\alpha_q}$ à indices “contravariants”, se transformant selon la matrice $A_{\beta_1}^{\alpha_1} A_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots A_{\beta_q}^{\alpha_q}$. Mais, à l’aide du tenseur métrique invariant, on peut faire “baisser” les indices et obtenir ainsi, par exemple, des tenseurs $T_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = a_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots c_{\alpha_q}$ à composantes complètement “covariantes”, lesquelles se transforment selon la matrice

$$({}^t A^{-1})_{\beta_1}^{\alpha_1} ({}^t A^{-1})_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots ({}^t A^{-1})_{\beta_q}^{\alpha_q} = (A^{-1})_{\alpha_1}^{\beta_1} (A^{-1})_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots (A^{-1})_{\alpha_q}^{\beta_q}$$

De façon élégante, on met ainsi en relation n’importe quelle représentation contragrédiente avec une représentation “normale”, et l’on peut de surcroît construire des grandeurs de représentation “mixte”, dont les composantes contiennent à la fois des indices contravariants et des indices covariants (tenseurs mixtes). A partir de cette algèbre tensorielle, on peut retrouver toutes les représentations irréductibles du groupe $SU(2)$. En fait, il existe un lien évident entre les tenseurs de rang $N = 2j$ et les spineurs de base introduits précédemment. En effet, les spineurs de base attachés à une rotation

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\beta = -\gamma^* \text{ , } \delta = \alpha^*)$$

sont

$$\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \kappa = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

et un spineur de base de spin j a pour composantes les éléments de matrice $\mathcal{D}_{nm}(R)$, combinaisons linéaires de produits $\alpha^p \beta^{j+m-p} \gamma^q \delta^{j-m-q}$ s’écrivant aussi sous la forme

$$\underbrace{\omega^1 \omega^1 \dots \omega^1}_p \text{ fois} \quad \underbrace{\kappa^1 \kappa^1 \dots \kappa^1}_{j+m-p} \text{ fois} \quad \underbrace{\omega^2 \omega^2 \dots \omega^2}_q \text{ fois} \quad \underbrace{\kappa^2 \kappa^2 \dots \kappa^2}_{j-m-q} \text{ fois}$$

Il s’agit bien de produits tensoriels de composantes des deux spineurs ω et κ . Dans l’espace de Hilbert, considérons le ket

$$|c\rangle = \sum_j \sum_{m=-j}^j \frac{(c^1)^{j+m} (c^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |j, m\rangle \quad (4.121)$$

c^1 et c^2 étant les composantes d’un 2-spineur c . Les composantes

$$\langle j, m | c \rangle = \frac{(c^1)^{j+m} (c^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} \quad (4.122)$$

définissent un spineur de spin j , et aussi bien un tenseur contravariant de rang $N = 2j$, soit

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} c^{\alpha_1} c^{\alpha_2} \dots c^{\alpha_N} \quad (4.123)$$

qui est symétrique par rapport à tous ses indices α_i (qui prennent les valeurs 1 ou 2). La composante

$$\frac{1}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} \underbrace{c^1 c^1 \dots c^1}_{j+m \text{ fois}} \underbrace{c^2 c^2 \dots c^2}_{j-m \text{ fois}}$$

correspond à la valeur m de la composante du spin suivant l’axe des z . On montre qu’à l’aide de ces tenseurs symétriques on retrouve toute la classification des représentations irréductibles de $SU(2)$ ³¹.

31. Voir par exemple : L.Landau, E. Lifchitz, Mécanique Quantique, Théorie non Relativiste (Physique Théorique, Tome III), § 55 à 58, 2ème édition, Ed. Mir, Moscou, 1967 ; H. Bacry, loc. cit.

Les composantes du tenseur relativement à la base spinorielle $\Psi_{m_1}^j(R)$ sont données par

$${}_{R\langle j, m_1 | c \rangle} = \sum_{m_2=-j}^j \frac{(c^1)^{j+m_2} (c^2)^{j-m_2}}{\sqrt{(j+m_2)!(j-m_2)!}} \mathcal{D}_{m_1 m_2}^j(R) = \frac{(c'^1)^{j+m_2} (c'^2)^{j-m_2}}{\sqrt{(j+m_2)!(j-m_2)!}}$$

avec

$$c'^1 = \alpha c^1 + \beta c^2 \quad , \quad c'^2 = \gamma c^1 + \delta c^2$$

ce qui établit le lien entre les composantes dudit tenseur symétrique et les composantes $\Psi_{m_1}^j(R)$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que le ket $|c\rangle$ est en fait un vecteur propre des opérateurs d'annihilation a_1 et a_2 , avec les valeurs propres c^1 et c^2 respectivement. Un tel vecteur propre est appelé *état cohérent*³².

Nous avons déjà signalé que, pour ce qui concerne le sous-groupe $SU(2)$, ses trois représentations A , A^* et ${}^t A^{-1}$ sont équivalentes. Il doit donc exister une relation entre un spineur ω et son spineur conjugué ω^* . On peut mettre en évidence cette relation en observant que puisque le produit scalaire hermitien "normal" $\omega^\dagger \kappa$ est invariant sous $SU(2)$ et que le produit scalaire (ω, κ) l'est aussi, les composantes conjuguées $(\omega^\alpha)^*$ doivent se transformer sous $SU(2)$ comme les composantes covariantes du spineur. Plus précisément, $(\omega^1)^*$ et $(\omega^2)^*$ doivent se transformer respectivement comme $\omega_1 = \omega^2$ et $\omega_2 = -\omega^1$. Or, considérant les spineurs attachés à la rotation R , on trouve

$$\tilde{\omega} = C\omega = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^* \\ -\delta^* \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que des conjuguées de composantes contravariantes de spineurs se transforment bien sous $SU(2)$ comme des composantes covariantes. On définit le *spineur conjugué* ω_c de ω par

$$\omega_c = C\omega^* \tag{4.124}$$

On a donc ici

$$\omega_c = -\kappa = - \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \tilde{\omega}^* \quad \text{et} \quad u_\lambda^c(\mathbf{n}) = -u_{-\lambda}(\mathbf{n}) \tag{4.125}$$

On note que la conjugaison ainsi définie change le signe de la composante de spin.

4.4 Addition de deux spins

4.4.1 Règles générales

Nous utiliserons ici une extension du formalisme utilisé jusqu'à présent au cas d'un ensemble de quatre opérateurs d'annihilation notés a_+ , a_- , b_+ , b_- et de leurs conjugués hermitiques, satisfaisant les relations de commutation

$$[a_+, a_+^\dagger] = 1 \quad , \quad [a_-, a_-^\dagger] = 1 \quad , \quad [b_+, b_+^\dagger] = 1 \quad , \quad [b_-, b_-^\dagger] = 1$$

tous les autres commutateurs nuls (4.126)

A partir des a-opérateurs (opérateurs a , a^\dagger) d'une part et des b-opérateurs (opérateurs b , b^\dagger) d'autre part, on forme les opérateurs de spin

³². En fait, l'état cohérent normalisé doit comporter le facteur supplémentaire $e^{-(|c_1|^2 + |c_2|^2)/2}$, voir le complément I

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} [a^\dagger_+ a_- + a^\dagger_- a_+] , & A_2 &= \frac{i}{2} [a^\dagger_+ a_- - a^\dagger_- a_+] , & A_3 &= \frac{1}{2} [a^\dagger_+ a_+ - a^\dagger_- a_-] \\ B_1 &= \frac{1}{2} [b^\dagger_+ b_- + b^\dagger_- b_+] , & B_2 &= \frac{i}{2} [b^\dagger_+ b_- - b^\dagger_- b_+] , & B_3 &= \frac{1}{2} [b^\dagger_+ b_+ - b^\dagger_- b_-] \end{aligned} \quad (4.127)$$

Les a-opérateurs commutant avec les b-opérateurs, on peut trouver dans l'espace de Hilbert sous-jacent une base de vecteurs propres communs aux deux types de spin. Ces vecteurs propres seront indexés par les valeurs propres des opérateurs $\mathbf{A}^2 \equiv \overrightarrow{A}^2 = j_a(j_a + 1)$ (soit j_a), $A_3 (m_a)$, $\mathbf{B}^2 \equiv \overrightarrow{B}^2 = j_b(j_b + 1)$ (soit j_b), $B_3 (m_b)$, et seront notés

$$|j_a, m_a; j_b, m_b \rangle \quad (4.128)$$

Un sous-espace de représentation irréductible commune sera indexé par les deux spins j_a et j_b et sera donc noté $E_{j_a j_b}$. Ce sous-espace est engendré par les vecteurs (4.128) où m_a va de $-j_a$ à j_a et m_b de $-j_b$ à j_b , et ce, par additions successives de l'unité. Le problème de l'addition de deux spins est le suivant. Etant donné le spin *total*

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \quad (4.129)$$

Comment trouver, dans chaque sous-espace $E_{j_a j_b}$ une base de vecteurs propres communs à $\mathbf{J}^2 \equiv \overrightarrow{J}^2$ et $J_3 = A_3 + B_3$? La réponse n'est pas triviale car, bien que les opérateurs \mathbf{J}^2 , \mathbf{A}^2 et \mathbf{B}^2 commutent entre eux, et que l'on peut donc trouver dans $E_{j_a j_b}$ une base de vecteurs propres communs à ces opérateurs, il n'y a cependant aucune raison pour que \mathbf{J}^2 ait une valeur propre unique dans ce sous-espace. Autrement dit, bien qu'il constitue une représentation irréductible pour chacun des deux spins \overrightarrow{A} et \overrightarrow{B} simultanément, $E_{j_a j_b}$ est *réductible* par rapport au spin composite \overrightarrow{J} . Le problème consiste donc à rechercher quelles représentations irréductibles du spin composite peuvent être trouvées dans ce sous-espace. Un premier élément est fourni en remarquant que la composante J_3 a pour valeurs propres $M = m_a + m_b$ et que, dans $E_{j_a j_b}$, m_a et m_b ont pour valeurs maximum respectives j_a et j_b . La valeur maximum de M y est donc égale à $j_a + j_b$. D'un autre côté, notant $J(J + 1)$ les valeurs propres de \overrightarrow{J}^2 , pour une valeur donnée de J , la valeur maximum de M est J . On en déduit que la valeur maximum de J dans ledit sous-espace est $J_{\max} = j_a + j_b$. D'autre part, M ne peut différer de cette valeur maximum que par un entier. On en conclut que les valeurs successives de J sont J_{\max} , $J_{\max} - 1$, $J_{\max} - 2$, etc, jusqu'à une certaine valeur *minimum* J_{\min} , nécessairement *positive*.

Une façon simple d'évaluer J_{\min} fait appel à une contrainte liée à la dimension de $E_{j_a j_b}$. En effet, la dimension de ce sous-espace est à l'évidence égale au produit $(2j_a + 1)(2j_b + 1)$. D'un autre côté, la dimension d'un espace de représentation E_J de spin J est $2J + 1$. Sommant ces dimensions, on doit trouver

$$\sum_{J=J_{\min}}^{J=J_{\max}} (2J + 1) = (2j_a + 1)(2j_b + 1) \quad (4.130)$$

Posant $J = J_{\min} + p$ où p est un entier courant de 0 à $J_{\max} - J_{\min}$ et effectuant la somme sur p , on obtient facilement

$$J_{\min} = |j_a - j_b| \quad (4.131)$$

En conclusion, les seules valeurs possibles du spin total J dans le sous-espace $E_{j_a j_b}$ sont telles que

$$\begin{aligned} |j_a - j_b| \leq J \leq j_a + j_b , \text{ soit} \\ J = |j_a - j_b| , |j_a - j_b| + 1 , |j_a - j_b| + 2 , \dots , j_a + j_b - 1 , j_a + j_b \end{aligned} \quad (4.132)$$

où l'on remarque que la valeur J du spin total satisfait finalement une *inégalité triangulaire*, que l'on déduirait de façon classique en imaginant deux vecteurs de longueurs respectives j_a et j_b , dont on fait la somme vectorielle. Comme on sait, la longueur J du vecteur somme est nécessairement comprise entre $|j_a - j_b|$ et $j_a + j_b$.

La règle générale d'addition de deux spins est donnée par (4.132). Elle montre que la représentation $E_{j_a j_b}$ est *réductible* par rapport au spin total, c'est-à-dire, elle se présente comme la somme directe de représentations irréductibles E_J selon la formule

$$E_{j_a j_b} = \bigoplus_{J=|j_a-j_b|}^{J=j_a+j_b} E_J \quad (4.133)$$

Notons $|J, M; j_a, j_b\rangle$ les vecteurs propres communs à \mathbf{J}^2 , \mathbf{A}^2 , \mathbf{B}^2 et $J_3 = A_3 + B_3$, dans $E_{j_a j_b}$, supposés de norme unité. Ils vérifient donc les équations aux valeurs propres

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |J, M; j_a, j_b\rangle &= J(J+1) |J, M; j_a, j_b\rangle \\ \mathbf{A}^2 |J, M; j_a, j_b\rangle &= j_a(j_a+1) |J, M; j_a, j_b\rangle \\ \mathbf{B}^2 |J, M; j_a, j_b\rangle &= j_b(j_b+1) |J, M; j_a, j_b\rangle \\ J_3 |J, M; j_a, j_b\rangle &= M |J, M; j_a, j_b\rangle \end{aligned} \quad (4.134)$$

et constituent une nouvelle base orthonormée dans $E_{j_a j_b}$. Le changement de base depuis les vecteurs (4.128) à ces nouveaux vecteurs de base s'effectue au moyen d'une matrice unitaire dont les éléments sont les produits scalaires

$$|J, M; j_a, j_b\rangle = \sum_{m_a, m_b=M-m_a} \langle j_a, m_a; j_b, m_b | J, M; j_a, j_b\rangle \text{ tels que} \quad (4.135)$$

et que l'on appelle *coefficients de Clebsch-Gordan* (CG), ou parfois *coefficients de Wigner*.

En faisant des choix appropriés pour les phases des vecteurs de base, ces coefficients peuvent être rendus réels. On montre qu'ils ont pour expression générale

$$\begin{aligned} \langle j_a, m_a; j_b, m_b | J, M; j_a, j_b\rangle &= \delta_{M, m_a+m_b} \sqrt{\frac{(2J+1)(J-j_a+j_b)!(J-j_b+j_a)!(j_a+j_b-J)!}{j_a+j_b+J+1}} \times \\ &\sqrt{(j_a+m_a)!(j_a-m_a)!(j_b+m_b)!(j_b-m_b)!(J+M)!(J-M)!} \times \\ &\sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_a+j_b-J-k)!(j_a-m_a-k)!(j_b+m_b-k)!(J-j_b+m_a+k)!(J-j_a-m_b+k)!} \end{aligned} \quad (4.136)$$

où la dernière somme doit être effectuée sur toutes les valeurs entières de k pour lesquelles les arguments des factorielles sont *non-négatifs*.

Les coefficients de CG possèdent les propriétés de symétrie énumérées ci-dessous.

Le *symbole 3j* de Wigner est défini par

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_a-j_b+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_a, m_a; j_b, m_b | J, M; j_a, j_b\rangle \quad (4.137)$$

Il est

- invariant dans une permutation circulaire des colonnes ;
- multiplié par $(-1)^{j_a+j_b+J}$ lorsqu'on permute deux colonnes ;

- multiplié par $(-1)^{j_a+j_b+J}$ lorsqu'on change les signes de m_a , m_b et M .

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
 \langle j_a, m_a; j_b, m_b | J, M; j_a, j_b \rangle &= (-1)^{j_a+j_b-J} \langle j_b, m_b; j_a, m_a | J, M; j_b, j_a \rangle \\
 &= (-1)^{j_a-J+m_b} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_a+1}} \langle J, M; j_b, -m_b | j_a, m_a; J, j_b \rangle \\
 &= (-1)^{j_b-J-m_a} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_b+1}} \langle j_a, -m_a; J, M | j_b, m_b; j_a, J \rangle \\
 &= (-1)^{j_a+j_b-J} \langle j_a, -m_a; j_b, -m_b | J, -M; j_a, j_b \rangle \quad (4.138)
 \end{aligned}$$

4.4.2 Exemple I : $\vec{\frac{1}{2}} + \vec{\frac{1}{2}}$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$\begin{aligned}
 |j_a, m_a; j_b, m_b \rangle &\equiv |m_a; m_b \rangle \\
 |J, M; j_a, j_b \rangle &\equiv ||J, M \rangle
 \end{aligned}$$

Pour l'exemple concerné, on a ($j_a = j_b = 1/2$)

$$\begin{aligned}
 A_1 |1/2; 1/2 \rangle &= \frac{1}{2} | -1/2; 1/2 \rangle, \quad A_1 | -1/2; 1/2 \rangle = \frac{1}{2} |1/2; 1/2 \rangle \\
 A_2 |1/2; 1/2 \rangle &= \frac{i}{2} | -1/2; 1/2 \rangle, \quad A_1 | -1/2; 1/2 \rangle = -\frac{i}{2} |1/2; 1/2 \rangle \\
 A_3 |1/2; 1/2 \rangle &= \frac{1}{2} |1/2; 1/2 \rangle, \quad A_3 | -1/2; 1/2 \rangle = -\frac{1}{2} | -1/2; 1/2 \rangle
 \end{aligned}$$

et des relations similaires pour les B_k , touchant le deuxième argument m_b . Il est alors facile de déduire les relations

$$\begin{aligned}
 J_1 |1/2; 1/2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ | -1/2; 1/2 \rangle + |1/2; -1/2 \rangle \} \\
 J_1 |1/2; -1/2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ | -1/2; -1/2 \rangle + |1/2; 1/2 \rangle \} \\
 J_1 | -1/2; 1/2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ |1/2; 1/2 \rangle + | -1/2; -1/2 \rangle \} \\
 J_1 | -1/2; -1/2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ |1/2; -1/2 \rangle + | -1/2; 1/2 \rangle \}
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 J_2 |1/2; 1/2 \rangle &= \frac{i}{2} \{ | -1/2; 1/2 \rangle + |1/2; -1/2 \rangle \} \\
 J_2 |1/2; -1/2 \rangle &= \frac{i}{2} \{ | -1/2; -1/2 \rangle - |1/2; 1/2 \rangle \} \\
 J_2 | -1/2; 1/2 \rangle &= \frac{i}{2} \{ -|1/2; 1/2 \rangle + | -1/2; -1/2 \rangle \} \\
 J_2 | -1/2; -1/2 \rangle &= \frac{-i}{2} \{ |1/2; -1/2 \rangle + | -1/2; 1/2 \rangle \}
 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} J_3 |1/2; 1/2\rangle &= |1/2; 1/2\rangle \\ J_3 |1/2; -1/2\rangle &= \mathbf{0} \\ J_3 |-1/2; 1/2\rangle &= \mathbf{0} \\ J_3 |-1/2; -1/2\rangle &= -|-1/2; -1/2\rangle \end{aligned}$$

Il est équivalent d'introduire les notations matricielles

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et d'en déduire

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{J}^2 n'est pas entièrement diagonale. On a en effet

$$\mathbf{J}^2 |1/2; -1/2\rangle = \mathbf{J}^2 |-1/2; 1/2\rangle = |1/2; -1/2\rangle + |-1/2; 1/2\rangle$$

Il est évident que la diagonalisation de ces relations sera réalisée par les vecteurs (normalisés)

$$||1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1/2; -1/2\rangle + |-1/2; 1/2\rangle\} \quad (4.139)$$

$$||0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1/2; -1/2\rangle - |-1/2; 1/2\rangle\} \quad (4.140)$$

Les vecteurs

$$\begin{aligned} ||1, +1\rangle &= |1/2; 1/2\rangle \\ ||1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1/2; -1/2\rangle + |-1/2; 1/2\rangle\} \\ ||1, -1\rangle &= |-1/2; -1/2\rangle \end{aligned} \quad (4.141)$$

diagonalisent ainsi \mathbf{J}^2 avec la valeur du spin $J = 1$. On remarquera qu'ils sont *symétriques* vis-à-vis des arguments (j_a, m_a) et (j_b, m_b) . Quant au vecteur (4.140), il représente un *scalaire* de spin $J = 0$ et est *antisymétrique* dans l'échange $(j_a, m_a) \leftrightarrow (j_b, m_b)$. Le lecteur déduira des formules précédentes les coefficients de CG, et qu'ils correspondent bien à ceux donnés dans le tableau I pour l'exemple considéré, exemple à propos duquel on vérifie ainsi la règle générale de décomposition en représentations irréductible du spin total :

$$E_{1/2, 1/2} = E_0 \oplus E_1 \quad (4.142)$$

Prenant les vecteurs dans l'ordre $||1, +1\rangle, ||1, 0\rangle, ||1, -1\rangle, ||0, 0\rangle$, on obtient dans le sous-espace engendré par ces vecteurs

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.143)$$

Il est utile de donner les expressions des *projecteurs* respectifs P_1 et P_0 des sous-espaces E_1 (spin 1) et E_0 (spin 0), en termes de matrices de Pauli. On a ici

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\tau}_a, \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \vec{\tau}_b$$

où $\vec{\tau}_a$ et $\vec{\tau}_b$ sont des matrices de Pauli de même forme que (4.75), mais agissant chacune uniquement sur l'argument (j, m) qui lui correspond (donc (j_a, m_a) et (j_b, m_b) , respectivement). On doit avoir

$$\mathbf{J}^2 = 0P_0 + 2P_1 = (\vec{A} + \vec{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b$$

soit

$$P_1 = \frac{1}{4} \left\{ 3 + \vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b \right\} \quad (4.144)$$

D'un autre côté, la somme des projecteurs devant donner la matrice unité, on a $P_0 + P_1 = 1$, d'où

$$P_0 = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b \right\} \quad (4.145)$$

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$. Notation:

J	J	...
M	M	...

m_1	m_2	Coefficients
m_1	m_2	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle$$

$$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

Tableau I : Quelques coefficients de Clebsch-Gordan

4.4.3 Exemple II : $\vec{\frac{1}{2}} + \vec{1}$

Nous procéderons comme au paragraphe précédent avec maintenant $j_a = 1/2$, $j_b = 1$. On obtient cette fois

♣

$$\begin{aligned}
 J_1 |1/2; 1\rangle &= \frac{1}{2}|-1/2; 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2; 0\rangle \\
 J_1 |-1/2; 1\rangle &= \frac{1}{2}|1/2; 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2; 0\rangle \\
 J_1 |1/2; 0\rangle &= \frac{1}{2}|-1/2; 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2; 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2; -1\rangle \\
 J_1 |-1/2; 0\rangle &= \frac{1}{2}|1/2; 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2; 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2; -1\rangle \\
 J_1 |1/2; -1\rangle &= \frac{1}{2}|-1/2; -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2; 0\rangle \\
 J_1 |-1/2; -1\rangle &= \frac{1}{2}|1/2; -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2; 0\rangle
 \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned}
 J_2 |1/2; 1\rangle &= \frac{i}{2}|-1/2; 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1/2; 0\rangle \\
 J_2 |-1/2; 1\rangle &= -\frac{i}{2}|1/2; 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-1/2; 0\rangle \\
 J_2 |1/2; 0\rangle &= \frac{i}{2}|-1/2; 0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1/2; 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1/2; -1\rangle \\
 J_2 |-1/2; 0\rangle &= -\frac{i}{2}|1/2; 0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-1/2; 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-1/2; -1\rangle \\
 J_2 |1/2; -1\rangle &= \frac{i}{2}|-1/2; -1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1/2; 0\rangle \\
 J_2 |-1/2; -1\rangle &= -\frac{i}{2}|1/2; -1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-1/2; 0\rangle
 \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned}
 J_3 |1/2; 1\rangle &= \frac{3}{2}|1/2; 1\rangle \\
 J_3 |-1/2; 1\rangle &= \frac{1}{2}|-1/2; 1\rangle \\
 J_3 |1/2; 0\rangle &= \frac{1}{2}|1/2; 0\rangle \\
 J_3 |-1/2; 0\rangle &= -\frac{1}{2}|-1/2; 0\rangle \\
 J_3 |1/2; -1\rangle &= -\frac{1}{2}|1/2; -1\rangle \\
 J_3 |-1/2; -1\rangle &= -\frac{3}{2}|-1/2; -1\rangle
 \end{aligned}$$

avec la représentation matricielle (6x6!!)

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

La matrice J^2 est non-diagonale dans deux secteurs. On a, par exemple,

$$J^2 |-\frac{1}{2}; 1\rangle = \frac{7}{4} |-\frac{1}{2}; 1\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}; 0\rangle$$

$$J^2 |\frac{1}{2}; 0\rangle = \sqrt{2} |-\frac{1}{2}; 1\rangle + \frac{11}{4} |\frac{1}{2}; 0\rangle$$

Le lecteur vérifiera que les combinaisons normées

$$\|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |-\frac{1}{2}; 1\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}; 0\rangle \right\}, \quad \|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2} |-\frac{1}{2}; 1\rangle - |\frac{1}{2}; 0\rangle \right\} \quad (4.146)$$

réalisent la diagonalisation dans le premier secteur, et correspondent, respectivement, aux valeurs propres $J = 3/2$, $M = 1/2$ et $J = 1/2$, $M = 1/2$. De façon similaire, on trouve que les vecteurs

$$\|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2} |-\frac{1}{2}; 0\rangle + |\frac{1}{2}; -1\rangle \right\}, \quad \|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |-\frac{1}{2}; 0\rangle - \sqrt{2} |\frac{1}{2}; -1\rangle \right\} \quad (4.147)$$

diagonalisent J^2 dans le second secteur, avec les valeurs propres $J = 3/2$, $M = -1/2$ pour le premier, $J = 1/2$, $M = -1/2$ pour le second. On vérifie donc la décomposition

$$E_{1/2, 1} = E_{1/2} \oplus E_{3/2} \quad (4.148)$$

avec les vecteurs de base suivants :

♣ pour $J = 3/2$

$$\begin{aligned} \|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle &= |\frac{1}{2}; 1\rangle, \quad \|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |-\frac{1}{2}; 1\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}; 0\rangle \right\} \\ \|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2} |-\frac{1}{2}; 0\rangle + |\frac{1}{2}; -1\rangle \right\}, \quad \|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}; -1\rangle \end{aligned}$$

♣ pour $J = 1/2$

$$\|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2} |-\frac{1}{2}; 1\rangle - |\frac{1}{2}; 0\rangle \right\}, \quad \|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |-\frac{1}{2}; 0\rangle - \sqrt{2} |\frac{1}{2}; -1\rangle \right\}$$

4.5 Appendices

4.5.1 Appendice I : démonstration de la formule (4.67)

Il est clair que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a

$$\mathcal{D}_{m_2 m_1}^j(M) = \frac{\langle 0 | (\alpha a_1 + \beta a_2)^{j+m_2} (\gamma a_1 + \delta a_2)^{j-m_2} | j, m_1 \rangle}{\sqrt{(j+m_2)!} \sqrt{(j-m_2)!}} \quad (4.149)$$

où les $\mathcal{D}_{m_1 m_2}^j$ sont donnés explicitement par (4.66). Prenons pour M un produit de deux matrices M_1 et M_2 :

$$M = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \gamma_1 & \alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \delta_1 \\ \gamma_2 \alpha_1 + \delta_2 \gamma_1 & \gamma_2 \beta_1 + \delta_2 \delta_1 \end{pmatrix}$$

Posons $a'_1 = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2$, $a'_2 = \gamma_1 a_1 + \delta_1 a_2$. Comme

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \gamma_1) a_1 + (\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \delta_1) a_2 &= \alpha_2 a'_1 + \beta_2 a'_2 \\ \text{et} \\ (\gamma_2 \alpha_1 + \delta_2 \gamma_1) a_1 + (\gamma_2 \beta_1 + \delta_2 \delta_1) a_2 &= \gamma_2 a'_1 + \delta_2 a'_2 \end{aligned}$$

on a ³³

$$\mathcal{D}_{m_2 m_1}^j(M) = \sum_{p=0}^{j+m_2} \sum_{q=0}^{j-m_2} C_p^{j+m_2} \alpha_2^p \beta_2^{j+m_2-p} C_q^{j-m_2} \gamma_2^q \delta_2^{j-m_2-q} \frac{\langle 0 | (a'_1)^{p+q} (a'_2)^{2j-p-q} | j, m_1 \rangle}{\sqrt{(j+m_2)!} \sqrt{(j-m_2)!}}$$

Un second développement donne

$$\begin{aligned} \langle 0 | (a'_1)^{p+q} (a'_2)^{2j-p-q} | j, m_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{p+q} \sum_{\ell=0}^{2j-p-q} C_k^{p+q} \alpha_1^k \beta_1^{p+q-k} C_\ell^{2j-p-q} \gamma_1^\ell \delta_1^{2j-p-q-\ell} \times \\ &< 0 | a_1^{k+\ell} a_2^{2j-k-\ell} | j, m_1 \rangle \end{aligned}$$

Posant encore $k + \ell = j + n$, on a

$$\langle 0 | a_1^{k+\ell} a_2^{2j-k-\ell} | j, m_1 \rangle = \langle 0 | a_1^{j+n} a_2^{j-n} | j, m_1 \rangle = \delta_{n, m_1} \sqrt{(j+m_1)!} \sqrt{(j-m_1)!}$$

d'où, en définissant $r = p + q - j$, nombre qui prend les valeurs $-j, -j+1, \dots, j-1, j$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m_2 m_1}^j(M) &= \sum_{r=-j}^j \sqrt{(j+m_2)!} \sqrt{(j-m_2)!} \sqrt{(j+r)!} \sqrt{(j-r)!} \times \\ &\sum_{\substack{p+q=j+r \\ 0 \leq p \leq j+m_2 \\ 0 \leq q \leq j-m_2}} \frac{\alpha_2^p \beta_2^{j+m_2-p} \gamma_2^q \delta_2^{j-m_2-q}}{p! (j+m_2-p)! q! (j-m_2-q)!} \times \\ &\sqrt{(j+m_1)!} \sqrt{(j-m_1)!} \sqrt{(j+r)!} \sqrt{(j-r)!} \sum_{\substack{k+\ell=j+m_1 \\ 0 \leq k \leq j+r \\ 0 \leq \ell \leq j-r}} \frac{\alpha_1^k \beta_1^{j+m_1-k} \gamma_1^\ell \delta_1^{j-m_1-\ell}}{k! (j+m_1-k)! \ell! (j-m_1-\ell)!} \end{aligned}$$

Compte-tenu de (4.66), on en déduit la relation attendue

$$\mathcal{D}_{m_2 m_1}^j(M_2 M_1) = \sum_{r=-j}^j \mathcal{D}_{m_2 r}^j(M_2) \mathcal{D}_{r m_1}^j(M_1) \quad (4.150)$$

33. On utilise ici la notation $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

4.5.2 Appendice II : quelques propriétés des matrices \mathcal{D}^j

Comme nous l'avons vu, l'ensemble des vecteurs $|j, m \rangle_R = U(R)|j, m \rangle$ constitue une nouvelle base orthonormée dans l'espace de Hilbert et l'on a³⁴

$${}_R \langle j_1, m_1 | j_2, m_2 \rangle_R = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} |j, m \rangle_R \langle j, m|_R = 1 \quad (4.151)$$

Le passage de la base des $|j, m \rangle$ à celle des $|j, m \rangle_R$ se fait au moyen des éléments de matrice

$$\mathcal{D}_{m m'}^j(R) = {}_R \langle j, m | j, m' \rangle = \frac{{}_R \langle 0 | (\alpha_R a_1 + \beta_R a_2)^{j+m} (\gamma_R a_1 + \delta_R a_2)^{j-m} | j, m' \rangle}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} \quad (4.152)$$

De l'orthogonalité des vecteurs transformés, on déduit :

$$\begin{aligned} {}_R \langle j, m_1 | j, m_2 \rangle_R &= \sum_{m=-j}^j {}_R \langle j, m | j, m \rangle \langle j, m | j, m_2 \rangle_R \\ &= \sum_{m=-j}^j \mathcal{D}_{m_1 m}^j(R) [\mathcal{D}_{m_2 m}^j(R)]^* = \delta_{m_1 m_2} \end{aligned} \quad (4.153)$$

D'après l'expression explicite (4.66) des éléments des matrices de Wigner, on a, pour la matrice R (dont la transposée est aussi un élément de $SU(2)$)

$$\mathcal{D}_{m m'}^j({}^t R) = \sum_{\substack{p+q=j+m' \\ 0 \leq p \leq j+m \\ 0 \leq q \leq j-m}} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{p!(j+m-p)!q!(j-m-q)!} \alpha_R^p \gamma_R^{j+m-p} \beta_R^q \delta_R^{j-m-q} \quad (4.154)$$

En posant $j - m - q = j - m' - q'$ qui conduit à $p + q' = j + m$, cette expression se transforme en

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+q'=j+m \\ 0 \leq p \leq j+m \\ 0 \leq q' \leq j-m'}} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{p!(j+m-p)!q'!(j-m'-q')!} \alpha_R^p \beta_R^{j+m-p} \gamma_R^{q'} \delta_R^{j-m'-q'} &= \mathcal{D}_{m', m}^j(R) \\ \text{soit } \mathcal{D}_{m m'}^j({}^t R) &= \mathcal{D}_{m', m}^j(R) \end{aligned} \quad (4.155)$$

Mais comme $R^\dagger = {}^t R^* = R^{-1}$, il vient

$$[\mathcal{D}_{m_2 m}^j(R)]^* = \mathcal{D}_{m_2 m}^j(R^*) = \mathcal{D}_{m_2 m}^j({}^t R^\dagger) = \mathcal{D}_{m m_2}^j(R^\dagger) = \mathcal{D}_{m m_2}^j(R^{-1}) \quad (4.156)$$

et la relation (4.153) devient

$$\sum_{m=-j}^j \mathcal{D}_{m_1 m}^j(R) \mathcal{D}_{m m_2}^j(R^{-1}) = \delta_{m_1 m_2} \quad (4.157)$$

ce qui montre que les $\mathcal{D}_{m m_2}^j(R^{-1})$ sont les éléments de la matrice inverse de $\mathcal{D}^j(R)$, et que $\mathcal{D}^j(R)$ est une matrice unitaire puisque

$$[\mathcal{D}^j(R)]_{m_1 m_2}^\dagger = [\mathcal{D}_{m_2 m_1}^j(R)]^* = \mathcal{D}_{m_1 m_2}^j(R^{-1}) = [\mathcal{D}^j(R)]_{m_1 m_2}^{-1} \quad (4.158)$$

34. La somme sur j doit être effectuée sur toutes les valeurs possibles de j , entières comme demi-entières.

Nous avons déjà signalé que $SU(2)$ est un groupe *continu* à trois paramètres réels³⁵. Ses éléments peuvent être paramétrisés au moyen de trois angles φ , θ et ψ (angles d'Euler) selon la formule

$$R(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i(\varphi+\psi)/2} & -\sin \theta/2 e^{-i(\varphi-\psi)/2} \\ \sin \theta/2 e^{i(\varphi-\psi)/2} & \cos \theta/2 e^{i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix} = R_z(\varphi) R_y(\theta) R_z(\psi) \quad \text{avec}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} = e^{-i\varphi \tau_3/2}, \quad R_z(\psi) = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} = e^{-i\psi \tau_3/2}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} = e^{-i\theta \tau_2/2} \quad (4.159)$$

Cette paramétrisation permet de recouvrir tous les éléments de $SU(2)$ si l'on fait varier les angles dans les limites suivantes :

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 4\pi \quad (4.160)$$

En passant de l'élément $R = R(\varphi, \theta, \psi)$ à l'élément infiniment voisin $R' = R(\varphi + d\varphi, \theta + d\theta, \psi + d\psi)$, où $d\varphi$, $d\theta$ et $d\psi$ sont des variations infinitésimales des angles, les relations de définition du groupe : $RR^\dagger = R^\dagger R = 1$ et $\det R = 1$ sont bien entendu préservées. Posant

$$R' = R + dR + \frac{1}{2}d^{(2)}R + \dots, \quad R'^\dagger = R^\dagger + dR^\dagger + \frac{1}{2}d^{(2)}R^\dagger + \dots$$

il vient

$$R'^\dagger R' = 1 = 1 + R dR^\dagger + dR R^\dagger + dR dR^\dagger + \frac{1}{2}R d^{(2)}R^\dagger + \frac{1}{2}d^{(2)}R R^\dagger + \dots$$

d'où, par identification ordre par ordre suivant les puissances des variations des angles :

$$R dR^\dagger + dR R^\dagger = 0, \quad dR dR^\dagger + \frac{1}{2}R d^{(2)}R^\dagger + \frac{1}{2}d^{(2)}R R^\dagger = 0, \quad \text{etc}$$

Chacune de ces équations est bien sûr invariante sous les opérations du groupe. Celle du second ordre présente un intérêt particulier. On trouve en effet

$$dR dR^\dagger = \frac{1}{4} \{ (d\varphi)^2 + (d\theta)^2 + (d\psi)^2 + 2 \cos \theta d\varphi d\psi \} \quad (4.161)$$

qui est un scalaire, invariant sous les opérations du groupe³⁶. On peut profiter de ce fait pour munir $SU(2)$ d'une *métrique* définie par

$$ds^2 = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2 + (d\psi)^2 + 2 \cos \theta d\varphi d\psi \quad (4.162)$$

associée à un *tenseur métrique* de composantes

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= g_{\theta\theta} = g_{\psi\psi} = 1 \\ g_{\varphi\theta} &= g_{\theta\varphi} = g_{\theta\psi} = g_{\psi\theta} = 0 \\ g_{\varphi\psi} &= g_{\psi\varphi} = \cos \theta \end{aligned} \quad (4.163)$$

On en déduit un élément de volume invariant

35. Une matrice 2×2 à éléments complexes dépend de 8 quantités réelles. Si elle est unitaire, elle ne dépend plus que de 4 réels indépendants. Si de plus son déterminant vaut 1, le nombre de réels indépendants tombe à trois.

36. On peut retrouver directement ce résultat en utilisant la forme générique $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, des matrices de $SU(2)$. On trouve $dR dR^\dagger = dR^\dagger dR = d\alpha d\alpha^* + d\beta d\beta^*$.

$$d\mathcal{V} = \sqrt{\det g_{ij}} d\varphi d\theta d\psi = \sin\theta d\varphi d\theta d\psi \equiv d\varphi d\psi d\cos\theta \quad (4.164)$$

dont l'intégration sur tout le domaine de variation des angles conduit au résultat

$$\int d\mathcal{V} = 16\pi^2 \quad (4.165)$$

c'est-à-dire un résultat *fini*, ce qui exprime le fait que le groupe $SU(2)$ est *compact*.

♣ Les éléments de matrices $\mathcal{D}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(R)$ des représentations irréductibles de $SU(2)$ satisfont les relations d'orthogonalité

$$\mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = \int \frac{d\mathcal{V}(R)}{16\pi^2} \mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1}(R) [\mathcal{D}_{m_2 n_2}^{j_2}(R)]^* = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1 n_2} \quad (4.166)$$

Démontrons ce théorème. D'une part, comme $\mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1}(R) = [\mathcal{D}_{n_1 m_1}^{j_1}(R^\dagger)]^*$, et que $d\mathcal{V}(R) = d\mathcal{V}(R^\dagger)$, on peut écrire

$$\mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = \int \frac{d\mathcal{V}(R^\dagger)}{16\pi^2} \mathcal{D}_{n_2 m_2}^{j_2}(R^\dagger) [\mathcal{D}_{n_1 m_1}^{j_1}(R^\dagger)]^* \equiv \mathcal{T}_{n_2 m_2; n_1 m_1}^{j_2 j_1} \quad (4.167)$$

puisque R^\dagger est aussi bien un élément courant du groupe. D'autre part, utilisant l'invariance de l'élément de volume, on peut écrire

$$\mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = \int \frac{d\mathcal{V}(RU^{-1})}{16\pi^2} \mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1}(R) [\mathcal{D}_{m_2 n_2}^{j_2}(R)]^*$$

U étant un élément du groupe. D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} &= \int \frac{d\mathcal{V}(R')}{16\pi^2} \mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1}(R'U) [\mathcal{D}_{m_2 n_2}^{j_2}(R'U)]^* = \\ &= \int \frac{d\mathcal{V}(R')}{16\pi^2} \sum_{p_1, p_2} \mathcal{D}_{m_1 p_1}^{j_1}(R') \mathcal{D}_{p_1 n_1}^{j_1}(U) [\mathcal{D}_{m_2 p_2}^{j_2}(R')]^* [\mathcal{D}_{p_2 n_2}^{j_2}(U)]^* \\ &\equiv \sum_{p_1, p_2} \mathcal{D}_{p_1 n_1}^{j_1}(U) \mathcal{T}_{m_1 p_1; m_2 p_2}^{j_1 j_2} [\mathcal{D}_{p_2 n_2}^{j_2}(U)]^* = \sum_{p_1, p_2} \mathcal{D}_{p_1 n_1}^{j_1}(U) \mathcal{T}_{m_1 p_1; m_2 p_2}^{j_1 j_2} \mathcal{D}_{n_2 p_2}^{j_2}(U^{-1}) \end{aligned}$$

On peut récrire cette relation comme suit

$$\sum_{n_2} \mathcal{D}_{q_2 n_2}^{j_2}(U) \mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = \sum_{p_1} \mathcal{D}_{p_1 n_1}^{j_1}(U) \mathcal{T}_{m_1 p_1; m_2 q_2}^{j_1 j_2}$$

soit encore, en posant $C_{n_2 n_1} = \mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2}$

$$\sum_{n_2} \mathcal{D}_{q_2 n_2}^{j_2}(U) C_{n_2 n_1} = \sum_{p_1} C_{q_2 p_1} \mathcal{D}_{p_1 n_1}^{j_1}(U) \quad (4.168)$$

égalité vraie quel que soit l'élément U du groupe, qui montre que la matrice C_{ab} connecte les deux représentations irréductibles \mathcal{D}^{j_1} et \mathcal{D}^{j_2} . D'après le *lemme de Schur*³⁷, cette ne peut qu'être nulle si $j_1 \neq j_2$ et multiple de l'unité si $j_1 = j_2$. On a donc

$$\mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = F(j_1) \delta_{j_1 j_2} \delta_{n_1 n_2}$$

37. La démonstration de ce lemme est donnée dans le livre de H. Bacry, loc. cit., p59.

Compte-tenu de la symétrie (4.167), on en déduit

$$\mathcal{T}_{m_1 n_1; m_2 n_2}^{j_1 j_2} = F(j_1) \delta_{j_1 j_2} \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (4.169)$$

Pour déterminer $F(j_1)$, on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_n \mathcal{T}_{m_1 n; m_2 n}^{j_1 j_1} &= (2j_1 + 1) F(j_1) \delta_{m_1 m_2} = \int \frac{d\mathcal{V}(R)}{16\pi^2} \sum_n \mathcal{D}_{m_1 n}^{j_1}(R) \mathcal{D}_{n m_2}^{j_1}(R^{-1}) = \\ &= \int \frac{d\mathcal{V}(R)}{16\pi^2} \delta_{m_1 m_2} = \delta_{m_1 m_2} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$F(j) = \frac{1}{2j + 1}$$

d'où la relation d'orthogonalité (4.166).

♠ On démontre³⁸ que les fonctions $\frac{\sqrt{2j+1}}{4\pi} \mathcal{D}_{mn}^j(R)$ où j , m et n prennent toutes les valeurs entières et demi-entières possibles, forment une base orthonormée complète de l'espace des fonctions $f(\varphi, \theta, \psi)$ de carré sommable dans le domaine (4.160). Elles satisfont la relation de fermeture

$$\sum_{jmn} \frac{2j+1}{16\pi^2} [\mathcal{D}_{mn}^j(R)]^* \mathcal{D}_{mn}^j(R') = \delta_3(R - R') \quad (4.170)$$

où

$$\delta_3(R - R') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\psi - \psi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (4.171)$$

est la distribution de Dirac associée au domaine (4.160). Notant qu'avec la paramétrisation utilisée on a

$$\mathcal{D}_{mn}^j(R) = e^{-im\varphi} d_{mn}^j(\theta) e^{-in\psi} \quad (4.172)$$

et multipliant les deux membres de (4.170) par $e^{-ir(\psi - \psi')}$ où r est une valeur possible, entière ou demi-entière du nombre magnétique, puis intégrant sur ψ entre 0 et 4π , on obtient

$$\sum_{jmn} \frac{2j+1}{4\pi} [\mathcal{D}_{mr}^j(\varphi, \theta, 0)]^* \mathcal{D}_{mr}^j(\varphi', \theta', 0) = \delta_2(R - R') \quad (4.173)$$

où

$$\delta_2(R - R') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (4.174)$$

est la distribution de Dirac sur la sphère de rayon 1 dans l'espace à trois dimensions.

On peut encore transformer (4.173) en remarquant que la rotation

$$\Omega_{\mathbf{n}} = R(\varphi, \theta, -\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (4.175)$$

transforme, dans l'espace à trois dimensions, le vecteur unitaire \vec{e}_z en vecteur unitaire

³⁸. H. Weyl, "The Classical Groups", p 116.

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \left[\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \right] \quad (4.176)$$

La relation (4.173) donne

$$\sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} [\mathcal{D}_{mr}^j(\varphi, \theta, -\varphi)]^* \mathcal{D}_{mr}^j(\varphi', \theta', -\varphi') e^{ir(\varphi-\varphi')} = \delta_2(R - R')$$

Mais, du fait de la présence de la distribution de Dirac, le facteur $e^{ir(\varphi-\varphi')}$ peut être remplacé par 1, ce qui donne

$$\sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} [\mathcal{D}_{mr}^j(\Omega_{\mathbf{n}})]^* \mathcal{D}_{mr}^j(\Omega_{\mathbf{n}'}) = \delta_2(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (4.177)$$

Il s'agit là d'une relation de fermeture sur la sphère de rayon 1, qui montre que les fonctions $\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{mr}^j(\Omega_{\mathbf{n}})$ constituent une base orthomormée pour les fonctions de carré sommable sur cette sphère. Si l'on prend $r = 0$, alors seules interviennent les valeurs entières de j . On a dans ce cas

$$Y_m^j(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{m0}^j(\Omega_{\mathbf{n}}) \quad (4.178)$$

où $Y_m^j(\mathbf{n}) \equiv Y_m^j(\theta, \varphi)$ est une harmonique sphérique. La relation de fermeture devient alors celle concernant les harmoniques sphériques :

$$\sum_{\ell m} [Y_m^\ell(\mathbf{n})]^* Y_m^\ell(\mathbf{n}') = \delta_2(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = \delta(\varphi - \varphi') \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \quad (4.179)$$

4.6 Complément I : Etats cohérents, opérateurs Q et P , polynômes d’Hermite, relation d’incertitude de Heisenberg

4.6.1 Etats cohérents

D’une façon générale, un état cohérent est un vecteur propre d’un opérateur d’annihilation. Ils ont été décrits pour la première fois en Mécanique Quantique par E. Schrödinger, en 1926³⁹. Nous nous limitons ici au cas d’un seul tel opérateur a . Celui-ci n’étant pas hermitique, ses valeurs propres sont en général complexes. Soit $|c\rangle$ un vecteur propre de a , de valeur propre c :

$$a|c\rangle = c|c\rangle \quad (4.180)$$

Sa projection sur un vecteur propre $|n\rangle$ de $N = a^\dagger a$ est donnée par

$$\langle n|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^n|c\rangle = \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|c\rangle \quad (4.181)$$

d’où

$$\| |c\rangle \|^2 = \langle c|c\rangle = |\langle 0|c\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c|^{2n}}{n!} = e^{|c|^2} |\langle 0|c\rangle|^2 \quad (4.182)$$

Le vecteur propre sera normalisé à l’unité en prenant

$$\langle 0|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \quad (4.183)$$

Le développement de $|c\rangle$ sur la base des $|n\rangle$ s’écrit donc

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4.184)$$

Notons en passant qu’en Mécanique Quantique, la valeur moyenne de N dans cet état cohérent serait définie comme $\langle N \rangle = \langle c|N|c\rangle$. On obtient simplement

$$\langle N \rangle = |c|^2 \quad (4.185)$$

La distribution correspondante des nombres n serait ainsi

$$P_n = |\langle n|c\rangle|^2 = \frac{\langle N \rangle^n}{n!} e^{-\langle N \rangle} \quad (4.186)$$

c’est-à-dire, donnée par une loi de *Poisson*.

Les différents états cohérents ne sont pas orthogonaux, ce que l’on pouvait pressentir puisque l’opérateur a n’est pas hermitique. De fait, on a

$$\langle c'|c\rangle = e^{-|c-c'|^2/2} e^{(cc'^* - c^*c')/2} \quad \text{et donc} \quad |\langle c'|c\rangle| = e^{-|c-c'|^2/2} \quad (4.187)$$

39. Schrödinger, E. 1926 *Naturwissenschaften* **14**, 644. Du point de vue de cette mécanique, la propriété remarquable des états cohérents est que les fluctuations quantiques y sont *minimales*, dans le sens où l’inégalité de Heisenberg devient pour eux une égalité. C’est pourquoi on les considère comme des correspondants quantiques naturels d’états classiques. Ils ont été et sont encore à la base de nombreuses études tant théoriques qu’expérimentales en Physique, notamment pour étudier la cohérence en optique quantique (R. Glauber) et actuellement dans la recherche d’états de la matière dits “comprimés”, où les fluctuations quantiques sont minimales, ce qui, théoriquement, permettrait d’effectuer des mesures plus précises. A noter que le formalisme des opérateurs de création et d’annihilation est à la base de ce qui a été appelé la *seconde quantification*, qui a conduit à la théorie quantique des champs.

On peut montrer qu'en revanche, ils satisfont une relation de fermeture. Posons $c = r e^{i\theta}$, $d^2c = r dr d\theta$, et calculons

$$I = \int \frac{d^2c}{\pi} |c\rangle\langle c| \equiv \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} |c\rangle\langle c|$$

Utilisant le développement (4.184), il vient

$$I = \sum_n \sum_r |n\rangle\langle r| \int_0^\infty r dr \frac{r^{n+m}}{\sqrt{n!r!}} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} e^{i\theta(n-r)} = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^\infty du u^n e^{-u}$$

et comme

$$\int_0^\infty du u^n e^{-u} = n!$$

on obtient

$$\int \frac{d^2c}{\pi} |c\rangle\langle c| = 1 \quad (4.188)$$

De cette relation, on déduit que bien qu'ils ne soient pas orthogonaux, les états cohérents forment néanmoins une base de l'espace de Hilbert. On dit qu'ils forment une base *surcomplète*. Il est notamment permis d'écrire

$$|n\rangle = \int \frac{d^2c}{\pi} |c\rangle\langle c| n\rangle = \int \frac{d^2c}{\pi} |c\rangle \frac{(c^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{-|c|^2/2} \quad (4.189)$$

Il est important de remarquer ici qu'une superposition linéaire de deux états cohérents *différents* n'est *jamais* un état cohérent⁴⁰.

Un ket quelconque $|\psi\rangle$ peut être écrit sous la forme

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| \psi\rangle \quad (4.190)$$

Le nombre complexe z peut varier dans tout le plan complexe. Moyennant la multiplication par $e^{|z|^2}$, la composante $\langle z|\psi\rangle$ peut servir à définir une fonction $\psi(z)$ de cette variable complexe. En effet, on a

$$e^{|z|^2} \langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^\infty \langle z|n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n = \psi(z) \quad \text{avec} \quad \psi_n = \langle n|\psi\rangle \quad (4.191)$$

Le développement (4.184) peut aussi s'écrire

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{c^n (a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-|c|^2/2} e^{c a^\dagger} |0\rangle \quad (4.192)$$

Cette expression peut être encore transformée en tenant compte de la formule de *Glauber*, selon laquelle :

♣ si le commutateur $C = [A, B]$ de deux opérateurs A et B commute avec ceux-ci, on a la relation

40. Le terme de "chat de Schrödinger quantique" est utilisé pour définir une superposition d'états cohérents $|c_1\rangle$ et $|c_2\rangle$ quasi-discernables, c'est à dire tels que l'amplitude $|\langle c_1|c_2\rangle| = \exp(-|c_1 - c_2|^2/2)$ de leur produit scalaire, qui caractérise leur recouvrement, soit suffisamment petite. La "taille" du chat est alors définie comme $|c_1 - c_2|^2$. Ces états sont abondamment étudiés en information quantique.

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{C/2} \quad (4.193)$$

Donnons-en ici la démonstration. Considérons tout d'abord l'opérateur

$$L(t) = e^{tA} B e^{-tA}$$

où t est un paramètre réel. On a

$$\frac{dL}{dt} = e^{tA} [A, B] e^{-tA} \quad \text{et} \quad \frac{dL}{dt}(0) = [A, B]$$

et l'on déduit aisément que

$$\frac{d^n L}{dt^n}(0) = \overbrace{[A, [A, [A, \dots [A, B]] \dots]}^{n \text{ fois}}$$

Le développement de $L(t)$ en série de puissances de t conduit alors à l'expression

$$L(t) = e^{tD_A}(B) \quad \text{avec} \quad D_A \equiv [A, \cdot] \quad (D_A(X) = [A, X], \quad D_A^2(X) = [A, [A, X]], \text{ etc})$$

Dans le cas où le commutateur $[A, B]$ commute avec A et B , elle se réduit à

$$L(t) = B + t[A, B]$$

Considérons ensuite l'opérateur

$$M(t) = e^{tA} e^{tB}$$

Sa dérivée par rapport à t est

$$\frac{dM}{dt} = e^{tA} A e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = [A + L(t)] M(t) = [A + B + tC] M(t)$$

où la dernière expression est obtenue sous l'hypothèse que $C = [A, B]$ commute avec A et B . Un réarrangement de cette relation conduit à

$$e^{-t^2 C/2} \left[\frac{dM}{dt} - tCM \right] = \frac{d}{dt} \left(e^{-t^2 C/2} M \right) = (A + B) e^{-t^2 C/2} M$$

Il devient alors évident que

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2 C/2} M \right) = (A + B)^n e^{-t^2 C/2} M \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2 C/2} M \right) (0) = (A + B)^n$$

avec pour résultat

$$e^{-t^2 C/2} M = \sum_{n=0}^{\infty} (A + B)^n \frac{t^n}{n!} = e^{t(A+B)}$$

et l'identité annoncée

$$e^{t(A+B)} = e^{-t^2 C/2} e^{tA} e^{tB} \quad \text{soit} \quad e^{A+B} = e^{-C/2} e^A e^B \quad \text{pour} \quad t = 1 \quad (4.194)$$

Comme $[ca^\dagger, -c^*a] = |c|^2$, commute avec a et a^\dagger , cette identité de Glauber permet d'écrire

$$e^{-|c|^2/2} e^{ca^\dagger} e^{c^*a} = e^{ca^\dagger - c^*a} = D(c)$$

d'où

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} e^{c a^\dagger} |0\rangle = e^{-|c|^2/2} e^{c a^\dagger} e^{c^* a} |0\rangle = D(c) |0\rangle \quad (4.195)$$

L'état cohérent $|c\rangle$ se déduit donc de l'état de vide $|0\rangle$ ⁴¹ par l'opérateur $D(c)$ qui est manifestement unitaire et qui, d'après la relation⁴²

$$D^{-1}(c) a D(c) = a + c \quad (4.196)$$

opère sur a une translation de c , ce qui justifie qu'il soit appelé "opérateur de déplacement". En utilisant encore (4.193), on montre que les opérateurs de déplacement satisfont la relation

$$D(\alpha) D(\beta) = e^{\alpha \beta^* - \alpha^* \beta} D(\alpha + \beta) \quad (4.197)$$

qui ressemble à une relation de groupe, sauf que la multiplication fait intervenir le facteur $e^{\alpha \beta^* - \alpha^* \beta}$, qui est en fait un facteur de phase $e^{i\varphi}$, puisque $\varphi = \alpha \beta^* - \alpha^* \beta$ est imaginaire pur. On dit qu'on a affaire à une *représentation projective d'un groupe* (qui, ici, est l'ensemble des complexes formant un groupe vis-à-vis de l'addition).

On appelle "opérateurs de quadrature" les opérateurs hermitiques Q et P définis par⁴³

$$Q = \frac{1}{2} [a + a^\dagger] \quad , \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}} [a^\dagger - a] \quad (4.198)$$

Ils satisfont la relation de commutation

$$[Q, P] = i \quad (4.199)$$

Exprimant l'opérateur "nombre" $N = a^\dagger a$ à l'aide de ces opérateurs, on obtient la relation

$$\frac{1}{2} [Q^2 + P^2] = N + \frac{1}{2} \quad (4.200)$$

où l'on retrouve une expression $H = \frac{1}{2} [Q^2 + P^2]$, analogue à l'énergie d'un oscillateur harmonique. En Mécanique Quantique, cette énergie est donc quantifiée, avec des niveaux d'énergie proportionnels à $n + 1/2$ où n est un entier positif ou nul.

4.6.2 L'opérateur Q

a) Vecteurs propres de Q

L'opérateur Q étant hermitique, on peut prévoir que l'on peut trouver une base de l'espace de Hilbert formée de ses vecteurs propres. Soit $|q\rangle$ l'un de ces vecteurs propres, associé à la valeur propre (réelle) q , qui est a priori une variable continue :

$$Q |q\rangle = q |q\rangle \quad (4.201)$$

Pour caractériser ces vecteurs, il est utile d'en étudier les projections sur la base discrète $|n\rangle$ des vecteurs propres de N . Nous poserons

$$Q_n = Q_n(q) = \langle q | n \rangle \quad (4.202)$$

On a

41. Lequel, de toute évidence, est lui aussi un état cohérent...

42. A démontrer.

43. Pour l'oscillateur quantique, Q et P représentent, respectivement et à des facteurs près, sa position et son impulsion qui sont alors des opérateurs non commutants.

$$\langle q|Q|n\rangle = q \langle q|n\rangle = qQ_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle q|(a+a^\dagger)|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{n}Q_{n-1} + \sqrt{n+1}Q_{n+1}]$$

soit

$$\sqrt{2}qQ_n = \sqrt{n}Q_{n-1} + \sqrt{n+1}Q_{n+1} \quad (4.203)$$

On obtient donc une relation de récurrence sur les composantes Q_n . Voyons ce que donnent les premiers termes. On trouve

$$Q_1 = \sqrt{2}qQ_0$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Q_0(2q^2 - 1)$$

$$Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_0q(2q^2 - 3)$$

Posons alors

$$H_n = H_n(q) = (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} \quad (4.204)$$

Manifestement, $H_n(q)$ est un polynôme en q , d'ordre n , à valeurs réelles. On l'appelle *polynôme d'Hermite*. On trouve

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2q, \quad H_2 = 2(2q^2 - 1), \quad H_3 = 4q(2q^2 - 3)$$

de sorte que

$$Q_1 = \frac{Q_0}{\sqrt{2}}H_1, \quad Q_2 = \frac{Q_0}{2\sqrt{2}}H_2, \quad Q_3 = \frac{Q_0}{4\sqrt{3}}H_3$$

Pour les premiers termes, la relation

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} Q_0 H_n \quad (4.205)$$

est donc *vérifiée*. Supposons-la vraie jusque l'ordre n . La relation de récurrence impose alors que soit satisfaite la relation

$$2qH_n = 2nH_{n-1} + H_{n+1} \quad (4.206)$$

Or

$$H_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{q^2} \frac{d^{n+1}}{dq^{n+1}} e^{-q^2} = (-1)^{n+1} e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} (-2qe^{-q^2})$$

et comme

$$\frac{d^n}{dq^n} (-2qe^{-q^2}) = q \frac{d^n}{dq^n} (e^{-q^2}) + n \frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}} (e^{-q^2})$$

il vient

$$H_{n+1} = 2(-1)^n \left[q \frac{d^n}{dq^n} (e^{-q^2}) + n \frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}} (e^{-q^2}) \right] = 2qH_n - 2nH_{n-1}$$

ce qui vérifie bien (4.206), et permet de confirmer (4.205) pour tout n .

Notons aussi que

$$\frac{dH_n}{dq} = (-1)^n \left[2q e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} + e^{q^2} \frac{d^{n+1}}{dq^{n+1}} e^{-q^2} \right] = 2qH_n - H_{n+1}$$

soit

$$\frac{dH_n}{dq} = 2nH_{n-1} \quad (4.207)$$

De cette relation et de (4.206), on tire

$$\frac{d^2 H_n}{dq^2} - 2q \frac{dH_n}{dq} = 4n(n-1)H_{n-2} - 4qnH_{n-1} = 2n[2(n-1)H_{n-2} - 2qH_{n-1}] = -2nH_n$$

d'où l'on déduit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 H_n}{dq^2} - 2q \frac{dH_n}{dq} + 2nH_n = 0 \quad (4.208)$$

b) Transformée de Fourier de $e^{-q^2/2} H_n(q)$

La transformée de Fourier d'une fonction $f(q)$ sera définie ici comme

$$\mathcal{F}(f(q)) = \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipq} f(q) dq \quad (4.209)$$

Appliquons aux fonctions $e^{-q^2/2} H_n(q)$ l'identité

$$\mathcal{F}(q^r f(q)) = \left(i \frac{d}{dp} \right)^r \hat{f} \quad (4.210)$$

On obtient⁴⁴

$$n = 0 \quad : \quad \mathcal{F}(H_0 e^{-q^2/2}) = e^{-p^2/2}$$

$$n = 1 \quad : \quad \mathcal{F}(H_1 e^{-q^2/2}) = 2i \frac{d}{dp} e^{-p^2/2} = -2ip e^{-p^2/2} = -iH_1(p) e^{-p^2/2}$$

$$\begin{aligned} n = 2 \quad : \quad \mathcal{F}(H_2 e^{-q^2/2}) &= \mathcal{F}((4q^2 - 2) e^{-q^2/2}) \\ &= -2e^{-p^2/2} - 4 \frac{d^2}{dp^2} e^{-p^2/2} = 2(2p^2 - 2) e^{-p^2/2} = (-i)^2 H_2(p) e^{-p^2/2} \end{aligned}$$

La propriété

$$\mathcal{F}(H_n e^{-q^2/2}) = (-i)^n H_n(p) e^{-p^2/2} \quad (4.211)$$

est vraie pour les premiers termes de la suite. Supposons-la vraie jusque l'ordre n . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H_{n+1} e^{-q^2/2}) &= \mathcal{F}((2qH_n - 2nH_{n-1}) e^{-q^2/2}) \\ &= -2n(-i)^{n-1} H_{n-1} e^{-p^2/2} + 2i \frac{d}{dp} \left((-i)^n H_n(p) e^{-p^2/2} \right) \\ &= (-i)^{n+1} 2nH_{n-1}(p) e^{-p^2/2} + e^{-p^2/2} \left[\frac{dH_n}{dp}(p) - pH_n(p) \right] \end{aligned}$$

44. On rappelle que la transformée de Fourier de $e^{-q^2/2}$ est $e^{-p^2/2}$.

$$= (-i)^{n+1} e^{-p^2/2} [2nH_{n-1}(p) - 4nH_{n-1}(p) + 2pH_n(p)] = (-i)^{n+1} H_{n+1}(p) e^{-p^2/2}$$

et la propriété annoncée est donc vraie pour tout n . Elle va nous permettre de déduire d'importants résultats. Tout d'abord, calculons⁴⁵

$$\int dp H_n(p) H_m(p) e^{-p^2} = \frac{i^{n+m}}{2\pi} \int dp \int dq \int dq' e^{-ip(q+q')} H_n(q) H_m(q') e^{-q^2/2} e^{-q'^2/2}$$

et puisque

$$\int dp e^{-ip(q+q')} = 2\pi\delta(q+q') \quad (\text{distribution de Dirac})$$

il vient

$$\int dp H_n(p) H_m(p) e^{-p^2} = i^{n-m} \int dq H_n(q) H_m(q) e^{-q^2}$$

où l'on a tenu compte de la propriété⁴⁶ $H_m(-q) = (-1)^m H_m(q)$. Il s'ensuit que si $m \neq n$, l'intégrale ci-dessus est nulle. Les polynômes d'Hermite sont donc orthogonaux, selon la mesure $dq e^{-q^2}$. Examinons alors le cas où $m = n$. En utilisant (4.207), on a

$$b_n = \int dp H_n^2(p) e^{-p^2} = \frac{1}{2(n+1)} \int dp e^{-p^2} H_n(p) \frac{dH_{n+1}}{dp}(p)$$

soit, en intégrant par parties, et en tenant compte du fait que les contributions aux infinis sont nulles grâce au facteur exponentiel,

$$2(n+1)b_n = - \int dp e^{-p^2} H_{n+1} [-H_{n+1} + 2nH_{n-1}]$$

Les polynômes d'indice différents étant orthogonaux, on obtient finalement la relation

$$b_{n+1} = 2(n+1)b_n \quad \text{et donc} \quad b_n = 2^n n! b_0$$

où

$$b_0 = \int dp e^{-p^2} = \sqrt{\pi}$$

La relation d'orthogonalité des polynômes d'Hermite prend ainsi la forme

$$\int dp H_n(p) H_m(p) e^{-p^2} = \delta_{mn} 2^n n! \quad (4.212)$$

La suite de fonctions

$$\varphi_n(q) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-q^2/2} \quad (4.213)$$

est donc orthonormée. Nous admettrons qu'elle est *totale*, ce qui signifie que toute fonction ou distribution $f(q)$ admet le développement

$$f(q) = \sum_n f_n \varphi_n(q) \quad \text{avec} \quad f_n = \int dq f(q) \varphi_n(q) \quad (4.214)$$

En particulier, on peut écrire

45. Pour alléger l'écriture, nous omettons les bornes d'intégrations infinies.

46. A vérifier!

$$\frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_n i^n \varphi(p) \varphi(q) \quad (4.215)$$

Ecrivons alors

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ip(q-q')} dp = \delta(q - q') = \sum_n \sum_r \frac{i^n}{i^r} \int \varphi_n(p) \varphi_n(q) \varphi_r(p) \varphi_r(q')$$

ce qui, toute intégration effectuée, donne

$$\sum_n \varphi_n(q) \varphi_n(q') = \delta(q - q') \quad (4.216)$$

C'est cette relation de *fermeture* qui exprime que la suite des $\varphi_n(q)$ constitue une *base complète* (orthonormée) pour toute fonction ou distribution $f(q)$.

En termes de polynômes d'Hermite, la relation prend la forme

$$\frac{e^{-q^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{H_n(q) H_n(q')}{2^n n!} = \delta(q - q') \quad (4.217)$$

c) Base des vecteurs propres de Q

Revenons à la relation (4.205). Ecrivons

$$\sum_n \langle q | n \rangle \langle n | q' \rangle = \langle q | q' \rangle = |Q_0|^2 \sum_n \frac{H_n(q) H_n(q')}{2^n n!} = |Q_0|^2 e^{q^2} \sqrt{\pi} \delta(q - q')$$

En choisissant de normaliser les états propres de Q de sorte que

$$\langle q | q' \rangle = \delta(q - q') \quad (4.218)$$

on est conduit à prendre $|Q_0| = \frac{e^{-q^2/2}}{\pi^{1/4}}$. Nous ferons le choix

$$Q_0 = \langle 0 | q \rangle = \frac{e^{-q^2/2}}{\pi^{1/4}} \quad (4.219)$$

ce qui revient finalement à faire l'identification

$$Q_n(q) = \langle n | q \rangle \equiv \varphi_n(q) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-q^2/2} \quad (4.220)$$

La relation de fermeture des fonctions φ_n se traduit en termes de kets $|q\rangle$ par

$$\int |q\rangle dq \langle q| = 1 \quad (4.221)$$

L'action de l'opérateur P sur les vecteurs propres de Q peut être élucidée en étudiant les produits scalaires suivants

$$\begin{aligned} \langle q | P | n \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle q | a^\dagger - a | n \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} [\sqrt{n+1} Q_{n+1} - \sqrt{n} Q_{n-1}] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} q Q_{n+1} - 2\sqrt{n} Q_{n-1}] = \frac{i e^{-q^2/2}}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} [q H_n - 2n H_{n-1}] \end{aligned}$$

Or,

$$q H_n - 2n H_{n-1} = q H_n - \frac{dH_n}{dq}$$

d'où

$$e^{-q^2/2} \left[q H_n - \frac{dH_n}{dq} \right] = -\frac{d}{dq} \left(e^{-q^2/2} H_n \right)$$

et par suite

$$\langle q | P | n \rangle = -i \frac{dQ_n}{dq} = -i \frac{d}{dq} \langle q | n \rangle$$

La suite des vecteurs $|n\rangle$ étant complète, on en déduit que pour tout ket $|\psi\rangle$, on a la relation

$$\langle q | P | \psi \rangle = -i \frac{d}{dq} \langle q | \psi \rangle \quad (4.222)$$

Autrement dit, l'opérateur P agit comme une *dérivation* par rapport à la valeur propre continue q de l'opérateur Q .

4.6.3 Vecteurs propres de l'opérateur P

L'opérateur P est lui aussi hermitique et l'on doit pouvoir construire avec ses vecteurs propres une base de l'espace de Hilbert. Soit $|p\rangle$ l'un de ces vecteurs, de valeur propre réelle et a priori continue p :

$$P | p \rangle = p | p \rangle \quad (4.223)$$

Les calculs des paragraphes précédents nous permettent de représenter facilement ces vecteurs dans la base des $|n\rangle$ ou dans celle des $|q\rangle$. En effet, posons $P_n(p) = \langle n | p \rangle$ et calculons $\langle n | P | p \rangle$. On obtient la relation de récurrence

$$p P_n = \frac{i}{\sqrt{2}} [\sqrt{n+1} P_{n+1} - \sqrt{n} P_{n-1}]$$

similaire à celle étudiée pour les vecteurs propres de Q . On trouve finalement⁴⁷

$$P_n(p) = (-i)^n \varphi_n(p) \quad (4.224)$$

Avec ce résultat, il n'est pas difficile de montrer que

$$\langle q | p \rangle = \sum_n \langle q | n \rangle \langle n | p \rangle = \sum_n i^n \varphi_n(q) \varphi_n(p) = \frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.225)$$

la conclusion étant que le passage des vecteurs propres de Q à ceux de P et inversement est juste une affaire de transformation de Fourier. Pour cette raison, ces deux opérateurs sont dits *conjugués* l'un de l'autre. Les vecteurs propres de P constituent une base de l'espace de Hilbert, ce qui se traduit par les relations

$$\int |p\rangle dp \langle p| = 1 \quad , \quad \langle p | p' \rangle = \delta(p - p') \quad (4.226)$$

et l'action de Q dans la base de ces vecteurs revient de son côté à une dérivation par rapport à la valeur propre continue p , puisque pour tout ket $|\psi\rangle$, on a⁴⁸

47. Faire le calcul explicitement !

48. A vérifier.

$$\langle p|Q|\psi\rangle = +i \frac{d}{dp} \langle p|\psi\rangle \quad (4.227)$$

4.6.4 Note sur la relation d'incertitude de Heisenberg

a) Inégalité de Schwarz

Soient $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ deux kets non nuls. Formons le ket

$$|\theta\rangle = |\varphi\rangle - \frac{\langle\psi|\varphi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} |\psi\rangle$$

Il est clair que ce ket est orthogonal à $|\psi\rangle$ et est nul *si et seulement si* les deux kets $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ sont *proportionnels*⁴⁹. Le carré de sa norme est

$$\langle\theta|\theta\rangle \equiv \langle\varphi|\theta\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle - \frac{|\langle\psi|\varphi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Cette quantité étant positive, on en déduit *l'inégalité de Schwarz*

$$|\langle\psi|\varphi\rangle| \leq \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle \langle\psi|\psi\rangle} \quad (4.228)$$

qui devient une égalité si et seulement si les deux kets considérés sont proportionnels.

Appliquons (4.228) aux deux kets

$$|\varphi_a\rangle = A|\varphi\rangle, \quad |\varphi_b\rangle = B|\varphi\rangle$$

où A et B sont deux opérateurs *hermitiques*. Faisant une décomposition en partie symétrique et partie antisymétrique, on a

$$\langle\varphi_a|\varphi_b\rangle = \langle\varphi|AB|\varphi\rangle = \frac{1}{2} \langle\varphi|AB+BA|\varphi\rangle + \frac{1}{2} \langle\varphi|[A,B]|\varphi\rangle$$

Comme A et B sont hermitiques, la partie symétrique est réelle et la partie antisymétrique est imaginaire pure. On en déduit

$$|\langle\varphi_a|\varphi_b\rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle\varphi|AB+BA|\varphi\rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle\varphi|[A,B]|\varphi\rangle|^2$$

L'inégalité de Schwarz donne alors

$$\langle\varphi|A^2|\varphi\rangle \langle\varphi|B^2|\varphi\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle\varphi|AB+BA|\varphi\rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle\varphi|[A,B]|\varphi\rangle|^2 \quad (4.229)$$

Supposons $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$, et notons $\langle A \rangle = \langle\varphi|A|\varphi\rangle$ et $\langle B \rangle = \langle\varphi|B|\varphi\rangle$ les *moyennes* respectives des opérateurs A et B dans l'état $|\varphi\rangle$. Posons encore

$$\hat{A} = A - \langle A \rangle \quad \text{et} \quad \hat{B} = B - \langle B \rangle$$

et appliquons (4.229) à ces nouveaux opérateurs. Les quantités

$$\Delta A = \sqrt{\langle\varphi|\hat{A}^2|\varphi\rangle} = \sqrt{\langle\varphi|(A - \langle A \rangle)^2|\varphi\rangle} = \sqrt{\langle\varphi|A^2|\varphi\rangle - \langle A \rangle^2}$$

49. C'est-à-dire s'il existe un complexe λ tel que $|\varphi\rangle = \lambda|\psi\rangle$.

$$\Delta B = \sqrt{\langle \varphi | B^2 | \varphi \rangle - \langle B \rangle^2}$$

représentent des *écart quadratiques moyens* des “valeurs” prises par les opérateurs dans l'état $|\varphi\rangle$. On a donc l'inégalité

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \varphi | \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} | \varphi \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \varphi | [A, B] | \varphi \rangle|^2 \quad (4.230)$$

l'égalité n'étant réalisée que si et seulement si $\hat{A}|\varphi\rangle$ et $\hat{B}|\varphi\rangle$ sont proportionnels.

b) Relation d'incertitude de Heisenberg

La célèbre *relation d'incertitude de Heisenberg* résulte de l'application de (4.230) aux opérateurs conjugués Q et P pour lesquels on a

$$|\langle \varphi | [Q, P] | \varphi \rangle|^2 = 1$$

pour tout ket $|\varphi\rangle$ normalisé à l'unité. Le second terme du second membre de l'inéquation (4.230) vaut alors $1/4$, quel que soit l'état considéré et en représente le minimum *minimorum*. On en déduit

$$(\Delta Q)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \quad (4.231)$$

C'est la relation d'incertitude de Heisenberg, qui traduit le fait mathématique que l'extension d'une fonction $f(q)$ et celle de sa transformée de Fourier $\hat{f}(p)$ ne peuvent être rendues simultanément arbitrairement petites⁵⁰. D'un point de vue physique, elle montre que deux grandeurs conjuguées telles que Q et P ne peuvent être mesurées simultanément toutes deux avec une précision infinie : plus grande est la précision de la mesure sur l'une des grandeurs, plus grande est l'incertitude sur la mesure de l'autre.

Pour que (4.231) devienne une égalité, les deux conditions suivantes doivent être *simultanément* remplies :

$$\hat{P}|\varphi\rangle \propto \hat{Q}|\varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi | \hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q} | \varphi \rangle = 0 \quad (4.232)$$

Or, pour un état cohérent $|z\rangle$, on a

$$\langle a \rangle = z = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle Q \rangle + i \langle P \rangle]$$

et

$$(a - z)|z\rangle = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{Q} + i\hat{P}] |z\rangle$$

Pour un état cohérent, la première condition dans (4.232) est remplie. La seconde est également vérifiée car

$$\langle z | \hat{Q}\hat{P} | z \rangle = i \langle z | (\hat{Q})^2 | z \rangle \quad \text{et} \quad \langle z | \hat{P}\hat{Q} | z \rangle = \langle z | \hat{Q}\hat{P} | z \rangle^* = -i \langle z | (\hat{Q})^2 | z \rangle$$

Un état cohérent réalise donc le minimum de la relation d'incertitude, et l'on a pour cet état

$$\Delta Q = \Delta P = \frac{1}{2} \quad (4.233)$$

50. Par “extension” d'une fonction, on entend le domaine dans lequel elle prend des valeurs appréciables.

Comme nous allons voir au paragraphe suivant, les états cohérents ne sont cependant pas les seuls à réaliser le minimum d'incertitude de Heisenberg.

c) Etats à minimum d'incertitude

Envisageons l'opérateur⁵¹

$$S = e^A \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2} [\alpha (a^\dagger)^2 - \alpha^* a^2] \quad (4.234)$$

Comme $A^\dagger = -A$, il s'agit d'un opérateur unitaire. Il induit sur l'opérateur a la transformation

$$a \rightarrow S a S^{-1} = e^{DA}(a) = a + [A, a] + \frac{1}{2} [A, [A, a]] + \dots$$

Calculons les divers commutateurs impliqués. On a

$$[A, a] = -\alpha a^\dagger \quad , \quad [A, a^\dagger] = -\alpha^* a$$

$$[A, [A, a]] = |\alpha|^2 a \quad , \quad [A, [A, [A, a]]] = -\alpha |\alpha|^2 a^\dagger \quad \text{etc}$$

Posant $\chi = |\alpha|^2$, on en déduit

$$\begin{aligned} S a S^{-1} &= a \cosh \chi - \frac{\alpha}{\sqrt{\chi}} a^\dagger \sinh \chi \\ S a^\dagger S^{-1} &= a^\dagger \cosh \chi - \frac{\alpha^*}{\sqrt{\chi}} a \sinh \chi \end{aligned} \quad (4.235)$$

puis

$$\begin{aligned} Q' = S Q S^{-1} &= Q \left[\cosh \chi - \frac{x}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \right] - P \frac{y}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \\ P' = S P S^{-1} &= P \left[\cosh \chi + \frac{x}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \right] - Q \frac{y}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \end{aligned} \quad (4.236)$$

où $x = \Re(\alpha)$, $y = \Im(\alpha)$. On peut écrire ces dernières relations sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \quad (4.237)$$

où

$$r = \cosh \chi - \frac{x}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \quad , \quad u = \cosh \chi + \frac{x}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \quad , \quad s = t = -\frac{y}{\sqrt{\chi}} \sinh \chi \quad (4.238)$$

On vérifie sans peine que la matrice M est unimodulaire : $\det M = 1$. Posons

$$|\xi\rangle = S^{-1} |z\rangle \quad (4.239)$$

où $|z\rangle$ est un état cohérent. Notons tout de suite qu'il ne s'agit pas d'un nouvel état cohérent. Notons $\langle Q \rangle_z$, $\langle P \rangle_z$, les valeurs moyennes respectives de Q et P dans l'état cohérent et $\langle Q \rangle_\xi$, $\langle P \rangle_\xi$ leurs valeurs moyennes dans l'état (4.252). On a

$$\langle Q \rangle_\xi = r \langle Q \rangle_z + s \langle P \rangle_z \quad , \quad \langle P \rangle_\xi = t \langle Q \rangle_z + u \langle P \rangle_z \quad (4.240)$$

51. Appelé "squeezer" en Optique Quantique.

Puis

$$\begin{aligned} Q|\xi\rangle &= S^{-1} Q' |z\rangle = S^{-1} [rQ + sP] |z\rangle \\ &= [r\langle Q \rangle_z + s\langle P \rangle_z] |\xi\rangle + S^{-1} [r\hat{Q} + s\hat{P}] |z\rangle \\ &= \langle Q \rangle_\xi |\xi\rangle + (r + is)S^{-1} \hat{Q} |z\rangle \end{aligned}$$

Soit, en posant $\hat{Q}_\xi = Q - \langle Q \rangle_\xi$,

$$\hat{Q}_\xi |\xi\rangle = (r + is)S^{-1} \hat{Q} |z\rangle$$

De même, en posant $\hat{P}_\xi = P - \langle P \rangle_\xi$, on trouve

$$\hat{P}_\xi |\xi\rangle = (t + iu)S^{-1} \hat{Q} |z\rangle$$

On a donc

$$\hat{P}_\xi |\xi\rangle = \frac{t + iu}{r + is} \hat{Q}_\xi |\xi\rangle$$

et la première condition dans (4.232) est satisfaite. Comme

$$\langle \xi | \hat{Q}_\xi \hat{P}_\xi + \hat{P}_\xi \hat{Q}_\xi | \xi \rangle = \langle \xi | (\hat{Q}_\xi)^2 | \xi \rangle \left[\frac{t + iu}{r + is} + \frac{t - iu}{r - is} \right]$$

et que

$$\frac{t + iu}{r + is} + \frac{t - iu}{r - is} = 2s \frac{r + u}{r^2 + s^2}$$

on voit que la seconde condition de (4.232) peut être satisfaite en prenant $y = 0$, c'est-à-dire en prenant le coefficient α de la transformation *réel*. Cependant, ici, les écarts quadratiques moyens de Q et P ne sont pas égaux. Prenons $\alpha = \sqrt{\xi}$. On trouve maintenant

$$\frac{\Delta P}{\Delta Q} = e^{2\chi} \quad (4.241)$$

et la matrice M devient

$$M = \begin{pmatrix} e^{-\chi} & 0 \\ 0 & e^{\chi} \end{pmatrix} \quad (4.242)$$

Les états tels que $|\xi\rangle$ (et leur généralisation) ont été introduits en Mécanique Quantique dans les années 1970⁵². Satisfaisant le minimum d'incertitude quantique, ils possèdent, tout comme les états cohérents, des propriétés qui les apparentent à des états classiques, autant qu'il soit possible pour des états quantiques. Ils apparaissent notamment dans des processus d'amplification paramétrique optique⁵³.

52. Voir les travaux de E.Y.C. Lu, *Lett. Nuovo Cimento*, **2**, 1241 (1971); *Lett. Nuovo Cimento*, **3**, 585 (1972); *Lett Nuovo Cimento*, **8**, 630 (1973).

53. Voir Wikipedia, et la thèse de doctorat de A. Ourjountsev, "Etude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d'états intriqués non-gaussiens de la lumière", Université Paris-Sud XI, 2007, disponible sur http://pastel.paristech.org/3929/01/TheseAO_Main.pdf.

4.7 Complément II : Etats de polarisation de la lumière et états cohérents

4.7.1 Etats de polarisation d'une onde électromagnétique monochromatique, plane et progressive

On sait que le champ électrique d'une telle onde se propageant dans le vide selon la direction $z'z$ est perpendiculaire à cette direction. Ses composantes réelles E_x et E_y s'expriment au moyen de quatre paramètres réels $E_{0x} \geq 0$, $E_{0y} \geq 0$, φ_x et φ_y :

$$E_x = E_{0x} \cos(\Theta - \varphi_x) , \quad E_y = E_{0y} \cos(\Theta - \varphi_y) \quad (4.243)$$

où $\Theta = \omega(t - z/c)$, ω étant la pulsation de l'onde et c la vitesse de la lumière dans le vide. En notation complexe, le champ électrique s'écrit ainsi

$$\vec{E} = e^{-i\Theta} \left[E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{e}_y \right] \quad (4.244)$$

♣ Considérons le cas $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \pi/2$. On a alors

$$E_x = E_0 \cos \Theta , \quad E_y = E_0 \sin \Theta , \quad \vec{E} = e^{-i\Theta} E_0 \left[\vec{e}_x + i \vec{e}_y \right]$$

Au cours de la propagation, l'extrémité du vecteur champ électrique décrit alors une hélice s'inscrivant sur un cylindre d'axe $z'z$ et de rayon E_0 , et ce, dans le sens trigonométrique : il s'agit d'une hélice *droite*. On dit alors que l'onde est polarisée circulairement dans le sens droit, et que son *hélécité* est droite. Nous exprimerons ce fait en disant que l'onde est dans un état d'hélécité définie, et nous attribuerons dans ce cas la valeur $\lambda = +1$ à cette hélécité. Le champ électrique complexe est alors proportionnel au vecteur

$$\vec{e}^{(+)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\vec{e}_x + i \vec{e}_y \right] \quad (4.245)$$

♣ Considérons ensuite le cas $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = -\pi/2$. On a maintenant

$$E_x = E_0 \cos \Theta , \quad E_y = -E_0 \sin \Theta , \quad \vec{E} = e^{-i\Theta} E_0 \left[\vec{e}_x - i \vec{e}_y \right]$$

L'extrémité du vecteur champ électrique décrit encore une hélice s'inscrivant sur un cylindre d'axe $z'z$ et de rayon E_0 , mais cette fois dans le sens inverse du sens trigonométrique. L'onde est encore polarisée circulairement, mais dans le sens *gauche* : son *hélécité* est gauche, ce que nous exprimerons en disant que l'hélécité de l'onde est $\lambda = -1$. Le vecteur champ électrique complexe est dans ce cas proportionnel au vecteur

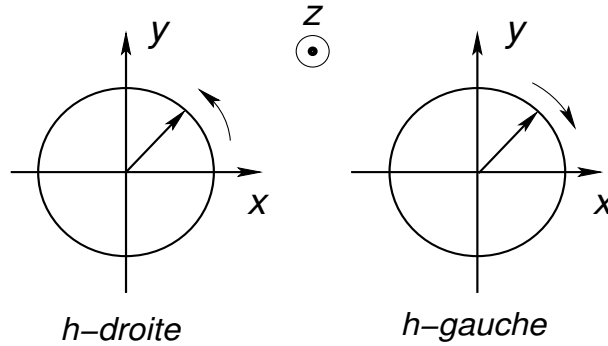
$$\vec{e}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\vec{e}_x - i \vec{e}_y \right] \quad (4.246)$$

Les deux vecteurs $\vec{e}^{(\pm)}$ représentent chacun un état de polarisation particulier d'une onde électromagnétique, correspondant à une hélécité définie, égale à ± 1 . Comme

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\vec{e}^{(-)} - \vec{e}^{(+)} \right] , \quad \vec{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\vec{e}^{(-)} + \vec{e}^{(+)} \right] \quad (4.247)$$

ils peuvent servir de base de vecteurs dans le plan xOy perpendiculaire à la direction de propagation $z'z$. Cette base est orthonormée dans le sens où

$$\left[\vec{e}^{(\pm)} \right]^* \cdot \vec{e}^{(\pm)} = 1, \quad \left[\vec{e}^{(\pm)} \right]^* \cdot \vec{e}^{(\mp)} = 0 \quad (4.248)$$



Etats de polarisation circulaire

Pour un état de polarisation quelconque de l'onde, tel que celui représenté par (4.244), on montre que, pour un z fixé, l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une ellipse dans le plan perpendiculaire à $z'z$. Mais ce mouvement peut en fait être considéré comme une superposition de deux mouvements circulaires. En effet, posons

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp E_{0x} e^{i\varphi_x} + i E_{0y} e^{i\varphi_y}] \quad (4.249)$$

L'expression (4.244) devient alors

$$\vec{E} = e^{-i\Theta} \vec{\mathcal{E}}, \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{E}} = \xi_+ \vec{e}^{(+)} + \xi_- \vec{e}^{(-)} \quad (4.250)$$

où l'on voit clairement qu'un état général de polarisation dite *elliptique*, qui peut éventuellement se réduire à un état de polarisation *rectiligne*⁵⁴, est une superposition des deux états fondamentaux de polarisation circulaire, droite ou gauche. Chacune des composantes complexes ξ_+ et ξ_- caractérise la proportion et la phase selon lesquelles l'état d'hélicité correspondant intervient dans la composition du champ. L'étude de la polarisation d'une onde nécessite donc l'utilisation de vecteurs à composantes complexes. Une façon équivalente de procéder consiste à utiliser un formalisme matriciel avec des vecteurs à deux composantes complexes. Dans la base

$$e^{(+)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (4.251)$$

l'état de polarisation de l'onde sera ainsi représenté par le vecteur

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix} = \xi_+ e^{(+)} + \xi_- e^{(-)} \quad (4.252)$$

La norme de ce vecteur est

$$\xi^\dagger \xi = |\xi_+|^2 + |\xi_-|^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = S_0 \quad (4.253)$$

A des facteurs près, c'est la puissance électromagnétique, par unité de surface, transportée par l'onde. Les proportions, interprétables en termes de probabilités, selon lesquelles interviennent les polarisations circulaires seront définis comme

54. Pour lequel le champ garde une orientation fixe.

$$P_{\pm} = \frac{|\xi_{\pm}|^2}{|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \right] \quad (4.254)$$

Les deux vecteurs $e^{(\pm)}$ sont vecteurs propres d'un opérateur d'hélicité h dont la représentation matricielle dans la base de ces mêmes vecteurs est simplement

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \tau_3 \quad (4.255)$$

Il constitue en fait l'équivalent d'un spin pour la particule associée à l'onde électromagnétique, le *photon*. Cependant, alors qu'en règle générale une composante de spin n'est jamais invariante par changement de référentiel galiléen, l'hélicité du photon est un invariant relativiste. La raison simple est que cette particule se déplace constamment à la vitesse c , ce qu'aucun objet matériel ne peut réaliser. Par conséquent, un photon d'hélicité donnée sera vu avec cette même hélicité par tous les observateurs galiléens. Il en serait autrement si le photon se déplaçait à une vitesse moindre : un observateur se déplaçant moins vite verrait le champ électrique tourner dans un certain sens, alors qu'un autre observateur se déplaçant plus vite (ce qui serait permis!) le verrait tourner dans l'autre sens. Cette invariance relativiste de l'hélicité est directement liée au fait que le photon est sans masse.

La *moyenne* de l'opérateur d'hélicité dans l'état ξ est

$$\langle h \rangle = \frac{\xi^\dagger h \xi}{\xi^\dagger \xi} = P_+ - P_- = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \quad (4.256)$$

On sait qu'à côté de la matrice τ_3 existent deux autres matrices τ_1 et τ_2 (matrices de Pauli) et que l'ensemble des matrices $\frac{1}{2}\tau_k$ ($k = 1, 2, 3$) constitue l'algèbre de Lie de $SU(2)$. On est alors amené à évaluer les valeurs moyennes suivantes

$$\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{\xi^\dagger \xi} (\xi_+^*, \xi_-^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix} = \frac{\xi_+^* \xi_- + \xi_-^* \xi_+}{|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2} = \frac{E_{0y}^2 - E_{0x}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad (4.257)$$

et

$$\langle \tau_2 \rangle = \frac{1}{\xi^\dagger \xi} (\xi_+^*, \xi_-^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix} = -i \frac{\xi_+^* \xi_- - \xi_-^* \xi_+}{|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2} = -\frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \cos(\varphi_y - \varphi_x) \quad (4.258)$$

Les trois quantités

$$\begin{aligned} s_1 &= -\langle \tau_1 \rangle = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \\ s_2 &= -\langle \tau_2 \rangle = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \cos(\varphi_y - \varphi_x) \\ s_3 &= \langle h \rangle = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \end{aligned} \quad (4.259)$$

ne sont pas indépendantes car

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \quad (4.260)$$

Elles sont reliées aux fameux *paramètres de Stokes*⁵⁵ S_0, S_1, S_2 et S_3 :

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2, & S_1 &= s_1 S_0 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ S_2 &= s_2 S_0 = 2E_{0x}E_{0y} \cos(\varphi_y - \varphi_x), & S_3 &= s_3 S_0 = 2E_{0x}E_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \end{aligned} \quad (4.261)$$

Ces grandeurs sont *quadratiques* suivant les amplitudes des composantes du champ et des mesures d'intensité, effectuées à l'aide de dispositifs expérimentaux appropriés⁵⁶, doivent, en principe, permettre de les mesurer, et ainsi de déterminer complètement l'état de polarisation de l'onde, car ils représentent les paramètres de l'ellipse décrit par le champ électrique de l'onde. On montre en effet que, d'une part, le grand axe de l'ellipse fait avec l'axe portant \vec{e}_x l'angle θ tel que

$$\tan 2\theta = \frac{s_2}{s_1} \quad (4.262)$$

et que, d'autre part, le rapport entre la longueur B de l'axe suivant \vec{e}_y et celle, A , de l'axe suivant \vec{e}_x est

$$\tan \psi = \frac{B}{A}, \quad \text{avec} \quad \tan 2\psi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \quad (4.263)$$

Dans les applications techniques (systèmes optiques, télédétection radar, etc..), on utilise un formalisme matriciel 4x4 où l'objet de base est la matrice unicolonne de Stokes

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (4.264)$$

sur lequel agissent des matrices 4x4 (matrices de Mueller⁵⁷), représentant les milieux traversés par l'onde électromagnétique.

Il est à noter que les paramètres s_1, s_2 et s_3 qui représentent des moyennes et sont caractéristiques de l'onde, sont des *invariants relativistes*⁵⁸. Ceci donne encore plus d'intérêt à la représentation due à Poincaré⁵⁹, fondée sur la relation (4.260). Selon cette relation, on peut en effet représenter un état de polarisation définie, mais quelconque, d'une onde, par un point P de coordonnées s_1, s_2 et s_3 , situé sur une sphère de rayon unité; et l'on a

$$s_1 = \cos 2\psi \cos 2\theta, \quad s_2 = \cos 2\psi \sin 2\theta, \quad s_3 = \sin 2\psi \quad (4.265)$$

Les angles 2θ et 2ψ représentent, respectivement, la longitude et la latitude du point sur la sphère. L'angle θ (compris entre 0 et π) définit l'orientation de l'ellipse dans le plan transversal à la direction de propagation. L'angle ψ (compris entre $-\pi/4$ et $+\pi/4$) caractérise l'*ellipticité* et le sens suivant lequel l'ellipse est décrite. On notera que les points au-dessus du plan équatorial x_1x_2 ($s_3 \geq 0$) sont tels que $\langle h \rangle \geq 0$, et correspondent donc à des polarisations droites. Aux polarisations gauches correspondent des points au-dessous du plan équatorial. Le "pôle nord" de la sphère représente une

55. G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.* **9** (1852), p. 233. Nous adoptons ici la définition qu'en donnent M. Born et E. Wolf dans "Principles of Optics", 7ème édition, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1999. § 1.4.2.

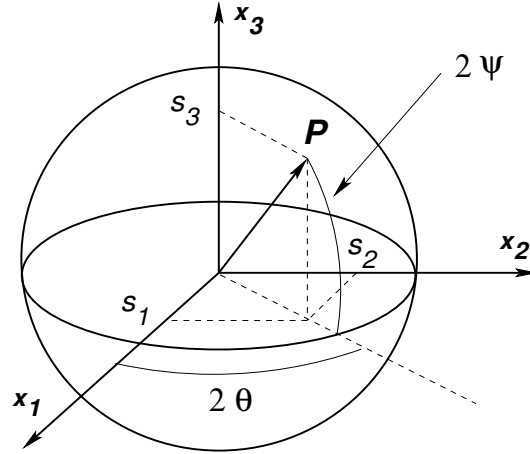
56. Voir par exemple, François Bréhat et Bruneau Wyncke, "Représentation des états de polarisation des ondes lumineuses" Editions Publibook, 2003.

57. Un grand nombre d'articles sur le sujet sont accessibles par internet.

58. Faire la vérification directe de cette assertion est un exercice très joli! Voir aussi : L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique II : "Théorie des Champs"*, Ed Mir, Moscou 1970, § 50, p166.

59. H. Poincaré, "Théorie Mathématique de la Lumière II" G. Carré ed, Paris, 1892, chap.12.

onde de polarisation circulaire droite ($s_1 = s_2 = 0, s_3 = 1$). Le “pôle sud” correspond à une onde de polarisation circulaire gauche ($s_3 = -1$). Les points situés sur l'équateur sont associés à des polarisations *rectilignes*. Enfin, deux points diamétralement opposés sur un grand cercle de la sphère correspondent à deux états $|\xi\rangle$ et $|\xi'\rangle$ *orthogonaux*.



Sphère de Poincaré

L'onde que nous avons considérée est dans un état de polarisation “pur”. La *matrice densité de spin* correspondante, à partir de laquelle on évalue des moyennes, a pour expression

$$\rho = \frac{\xi \xi^\dagger}{\xi^\dagger \xi} = \frac{1}{|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2} \begin{pmatrix} |\xi_+|^2 & \xi_+ \xi_-^* \\ \xi_+^* \xi_- & |\xi_-|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & -s_1 + i s_2 \\ -s_1 - i s_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix} \quad (4.266)$$

ce que l'on peut récrire sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2} \left[1 + \vec{\eta} \cdot \vec{\tau} \right], \quad \text{avec} \quad \vec{\eta} = (-s_1, -s_2, s_3) \quad (4.267)$$

La lumière naturelle, émise par les sources usuelles (lampes à incandescence, soleil), n'est pas polarisée. Ceci est dû à la nature même des processus d'émission de lumière par les centres émetteurs microscopiques, atomes, ions ou molécules, constituant ces sources. A la suite d'un apport d'énergie, qui peut provenir d'une décharge électrique ou de l'agitation thermique pour des températures suffisamment élevées, chaque centre émetteur peut céder spontanément un surplus d'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. En règle générale, ces émissions de lumière sont *désordonnés*. Les émissions successives d'un centre lumineux se font absolument au hasard et ne présentent aucun espacement régulier au cours du temps. Elles constituent ce qu'on appelle des *trains d'ondes*, dont la durée de vie moyenne est estimée de l'ordre de 10^{-9} à 10^{-8} s. Il s'ensuit que la forme et l'orientation de la vibration lumineuse changent de façon aléatoire au cours du temps : les amplitudes E_{0x} , E_{0y} et les phases φ_x et φ_y varient de façon complètement irrégulière d'un train d'onde à un autre. Au cours du temps il n'y a aucune relation d'amplitude et de phase entre E_x et E_y . Or, les temps d'intégration des détecteurs optiques sont beaucoup plus longs que la durée des trains d'onde (1/20 à 1/10 de seconde pour l'oeil). Ceci fait que bien que chaque train d'ondes puisse être dans un état de polarisation particulier, les détecteurs ne peuvent enregistrer que des moyennes temporelles et verront pas de polarisation particulière pour la lumière observée. Le résultat est que la lumière naturelle apparaît comme constituée par deux vibrations perpendiculaires, de même intensité et *incohérentes* entre elles. Pour cette lumière, la matrice densité vaut simplement 1/2. Il lui correspond le centre de la sphère de Poincaré.

Il existe aussi des ondes *partiellement polarisée*. Il s'agit d'ondes comportant, à côté d'une onde polarisée, une composante aléatoire. On montre que la matrice densité correspondante est de la même forme que (4.267), mais cette fois avec $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq 1$. Le point représentatif de ce type de lumière se trouve à l'intérieur de la sphère de Poincaré.

4.7.2 Etat cohérent associé

A l'onde considérée dans le paragraphe précédent, on peut faire correspondre un état cohérent tel que celui esquissé au paragraphe 4.3.3, en identifiant les nombres complexes ξ_+ et ξ_- aux valeurs propres d'opérateurs d'annihilation a_+ et a_- commutants :

$$a_+ |\xi\rangle = \xi_+ |\xi\rangle, \quad a_- |\xi\rangle = \xi_- |\xi\rangle \quad (4.268)$$

Sur une base complète de vecteurs propres $|n_+, n_-\rangle$ des opérateurs "nombres" $N_+ = a_+^\dagger a_+$ et $N_- = a_-^\dagger a_-$, cet état cohérent a pour développement

$$|\xi\rangle = e^{-(|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2)/2} \sum_{n_+=0}^{\infty} \sum_{n_-=0}^{\infty} \frac{\xi_+^{n_+} \xi_-^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |n_+, n_-\rangle \quad (4.269)$$

Les opérateurs a_+^\dagger et a_-^\dagger sont la représentation mathématique de la création d'un photon, d'hélicité $\lambda = +1$ et d'hélicité $\lambda = -1$, respectivement. Un état tel que $|n_+, n_-\rangle$ décrit un état physique où sont présents n_+ photons d'hélicité $+1$ et n_- photons d'hélicité -1 . L'état $|0\rangle$ est "vide" de photon. L'état cohérent est donc une superposition d'états comportant un nombre de photons pouvant aller de zéro à l'infini. Le nombre *moyen* de photons est cependant fini. On trouve en effet

$$\langle N_+ \rangle = |\xi_+|^2, \quad \langle N_- \rangle = |\xi_-|^2, \quad \langle N \rangle = |\xi_+|^2 + |\xi_-|^2 \quad (4.270)$$

et la loi de distribution des photons est donnée par

$$P(n_\pm) = \frac{\langle N_\pm \rangle^{n_\pm}}{n_\pm!} e^{-\langle N_\pm \rangle} \quad (4.271)$$

et

$$P(N) = \sum_{n_+, n_- = N - n_+} P(n_+) P(n_-) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle} \quad (4.272)$$

Nous avons précédemment introduit les trois opérateurs

$$J_1 = \frac{1}{2} [a_+^\dagger a_- + a_-^\dagger a_+] , \quad J_2 = \frac{i}{2} [a_-^\dagger a_+ - a_+^\dagger a_-] , \quad J_3 = \frac{1}{2} [a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-] \quad (4.273)$$

Leurs moyennes respectives dans l'état cohérent sont

$$\langle J_1 \rangle = \frac{\xi_+^* \xi_- + \xi_-^* \xi_+}{2} , \quad \langle J_2 \rangle = i \frac{\xi_-^* \xi_+ - \xi_+^* \xi_-}{2} , \quad \langle J_3 \rangle = \frac{|\xi_+|^2 - |\xi_-|^2}{2} \quad (4.274)$$

et sont directement liés aux paramètres de Stokes définis plus haut. Les opérateurs J_i jouent donc bien le rôle d'opérateurs de spin (ou plutôt, d'hélicité) pour ce système à une infinité d'états multi-photons. Du fait de ces propriétés et du fait qu'il minimise la relation d'incertitude, l'état cohérent apparaît donc comme l'état quantique qui se rapproche le mieux de l'état d'une onde électromagnétique classique polarisée. Cependant, à la considération des dimensions, on voit que l'identification des complexes ξ_\pm

aux valeurs propres des opérateurs d'annihilation ne peut s'appliquer telle quelle. En effet, la somme $|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2$ égale, pour l'état cohérent, à la moyenne $\langle N \rangle$ qui est un nombre sans dimension, représente, pour le champ électromagnétique, sa densité d'énergie moyenne par unité de volume. A l'occasion de cette comparaison, on peut d'ailleurs retrouver la loi de transformation des amplitudes E_{0x} et E_{0y} lors d'un changement de référentiel galiléen. D'une part, étant indépendantes, ces amplitudes doivent subir la même transformation. D'autre part, comme rappelé ci-dessus, $|\xi_+|^2 + |\xi_-|^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$ est pour l'onde la moyenne temporelle de sa densité volumique d'énergie. Comme le 4-volume est un invariant relativiste, cette grandeur doit donc se transformer comme le carré d'une composante temporelle d'un 4-vecteur, telle l'énergie. Or, l'énergie moyenne de l'onde peut aussi s'interpréter comme l'énergie moyenne de l'ensemble des photons qui lui sont associés. Celle-ci s'exprime donc comme le produit du nombre moyen de photons $\langle N \rangle$, par l'énergie E transportée par chaque photon, qui, la même pour tous les photons, est égale à $E = \hbar\omega$, où ω est la pulsation de l'onde et \hbar la constante de Planck divisée par 2π . Le nombre moyen de photons $\langle N \rangle$ est bien entendu un invariant relativiste (la disparition ou l'apparition de photons sont enregistrées de la même manière par tous les observateurs). Aussi, en comparant les deux expressions de l'énergie, on en déduit que dans un changement de référentiel une amplitude telle que E_{0x} doit se transformer comme l'énergie d'un photon, c'est à dire, se voir multipliée par le facteur $\cosh \chi - \cos \beta \sinh \chi$ où χ est la rapidité de la transformation et β l'angle entre la direction de propagation de l'onde et l'axe selon lequel s'effectue la transformation. Il s'ensuit que dans les expressions des paramètres s_i , les rapports entre formes quadratiques des amplitudes sont invariants. Enfin, les phases ϕ_x et ϕ_y sont aussi invariantes, car l'annulation du champ électrique $\vec{E}(t, z)$ en un point donné d'espace-temps est perçue de la même manière par tous les observateurs galiléens, lesquels, dès lors, ne peuvent qu'attribuer la même phase à l'onde (au "2 π près", qui est inessentiel). Au final, tout ceci contribue bien à l'invariance relativiste des paramètres s_i ⁶⁰.

Le schéma quantique présenté ici à titre de comparaison n'est qu'une simplification extrême de ce que doit être la description quantique du champ électromagnétique. Pourtant, il donne un premier aperçu de cette description qui s'appuie sur la machinerie des opérateurs de création et d'annihilation, dont la pertinence se révèle pleinement lorsqu'il s'agit de rendre compte de processus d'émission ou d'absorption de photons dans l'interaction du champ électromagnétique avec la matière. Cette technique ne se limite d'ailleurs pas au seul champ électromagnétique. Elle se trouve au coeur de la théorie quantique des champs, théorie où s'exprime de façon très naturelle la dualité onde-corpuscule, et qui fournit le cadre le plus logique pour décrire les interactions entre particules, y compris lorsqu'il s'agit de calculer explicitement les probabilités d'occurrence de processus au niveau élémentaire.

60. Ceci est vrai sous la condition que les axes suivant lesquels on définit les composantes du champ dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation soient pris selon une même disposition dans tous les référentiels. Une rotation supplémentaire dans ce plan changerait bien sûr les composantes suivant les formules usuelles de rotation.