Chapitre 5

Le groupe de Lorentz

5.1 Groupe de Lorentz complet, groupe de Lorentz restreint

5.1.1 Les quatre nappes du groupe de Lorentz complet

Le groupe de Lorentz *complet* est l'ensemble des transformations linéaires qui laissent invariantes le produit scalaire de l'espace-temps. Mathématiquement, cette propriété peut s'exprimer par la relation

$$\boxed{{}^t\Lambda\, g\, \Lambda \,=\, g} \tag{5.1}$$

où Λ est une transformation de Lorentz agissant sur des 4-vecteurs, et g la métrique [1] de leurs produits scalaires [2]. On distingue d'emblée deux sous-ensembles disjoints : celui des transformations dites *orthochrones*, qui transforment le demi-cône futur en lui-même, et celui des transformations *antichrones* qui échangent les deux demi-cônes passé et futur. L'équation (5.1) donnant $(\det\Lambda)^2 = 1$, une transformation de Lorentz peut avoir un déterminant égal à $+1$, auquel cas elle préserve l'orientation de l'espace-temps, ou égal à -1, auquel cas elle inverse cette orientation. Il existe donc quatre classes disjointes de transformations, appelées aussi *nappes*. Il s'agit :

♣ de l'ensemble $\mathcal{L}_+^\uparrow$ des transformations orthochrones de déterminant $+1$, appelé aussi *groupe de Lorentz restreint* ;

♣ de l'ensemble $\mathcal{L}_-^\uparrow$ des transformations orthochrones de déterminant -1 ;

♣ de l'ensemble $\mathcal{L}_+^\downarrow$ des transformations antichrones de déterminant $+1$;

♣ de l'ensemble $\mathcal{L}_-^\downarrow$ des transformations antichrones de déterminant -1 ;

Bien entendu, parmi ces sous-ensembles, seule la nappe $\mathcal{L}_+^\uparrow$, qui contient l'identité, forme un groupe, encore appelé *groupe de Lorentz connexe*, car on peut passer d'un quelconque de ses éléments à un autre de façon continue. Ce groupe est aussi noté $L(3,1)$, cette notation se référant à la *signature* $(-,-,-,+)$ de la métrique g (g diagonale, avec 3 éléments égaux à -1, le dernier égal à $+1$). Les

1. Pour rappel, g est la matrice 4x4 diagonale $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.
2. Montrer qu'en termes d'éléments de matrice, la relation (5.1) prend aussi la forme $(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta = g^{\alpha\rho}\,\Lambda^\mu_\rho\, g_{\mu\beta}$. En déduire que l'on a $\mathrm{Tr}\,\Lambda^{-1} = \mathrm{Tr}\,\Lambda$, $\mathrm{Tr}\,\Lambda^{-2} = \mathrm{Tr}\,\Lambda^2$, $(\Lambda^{-1})^{\mu\nu} = \Lambda^{\nu\mu}$, et $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,(\Lambda^{-1})^{\mu\nu}\,(\Lambda^{-1})^{\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}$.

nappes orthochrones conservent le signe de la composante temporelle d'un quelconque 4-vecteur du genre temps. De la relation (5.1), on tire cette autre relation [3]

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3} \left(\Lambda^0_k\right)^2 \tag{5.2}$$

qui permet de caractériser mathématiquement chacune des nappes comme suit :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} & : \ \Lambda^0_0 \geq 1 \ , \ \det\Lambda = 1 \ , & \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} & : \ \Lambda^0_0 \geq 1 \ , \ \det\Lambda = -1 \\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} & : \ \Lambda^0_0 \leq -1 \ , \ \det\Lambda = 1 \ , & \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} & : \ \Lambda^0_0 \leq -1 \ , \ \det\Lambda = -1 \end{array} \tag{5.3}$$

Le groupe de Lorentz contient les trois sous-groupes suivants : le groupe *orthochrone* $\mathcal{L}^{\uparrow} = \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$, le groupe *propre* $\mathcal{L}_{+} = \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$ et le groupe $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$.

La matrice g satisfait elle-même la relation (5.1). On montre aisément qu'elle correspond à la *réflexion d'espace*, opération qui, dans un référentiel donné, a pour résultat le changement de signe de toutes les composantes spatiales des 4-vecteurs ($\overrightarrow{r} \to -\overrightarrow{r}$). Cette opération, appelée aussi *parité* et que l'on note Π, appartient à $\mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$. La matrice $-g$ satisfait aussi (5.1). C'est un élément de $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$ qui définit l'opération de *renversement du sens du temps*, notée $\mathcal{T}$, qui consiste, dans un référentiel donné, à changer le signe de la composante temporelle d'un 4-vecteur ($x_0 \to -x_0$). Enfin, la *réflexion totale*, définie par le produit $\Pi\mathcal{T}$ et représentée ici par la matrice -1 est un élément de $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$. Finalement, on établit les relations suivantes entre les quatre nappes :

$$\mathcal{L}^{\uparrow}_{-} = g \times \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \quad , \quad \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} = -g \times \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \quad , \quad \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} = -1 \times \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \tag{5.4}$$

On notera que comme la matrice

$$\boxed{\Lambda' = g^{-1} \ {}^t\Lambda^{-1} \, g} \tag{5.5}$$

satisfait (5.1), elle représente tout aussi bien une transformation de Lorentz.

5.1.2 Transformations de $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$

On montre qu'une transformation Λ du groupe de Lorentz restreint peut s'écrire sous la forme exponentielle

$$\Lambda = e^{A} \tag{5.6}$$

où A est un opérateur agissant sur les 4-vecteurs. Comme $g^2 = 1$, on a

$$g^{-1} \ {}^t\Lambda \, g = e^{g^{-1} \, {}^tA \, g} = \Lambda^{-1} = e^{-A} \tag{5.7}$$

On en déduit

$$g^{-1} \ {}^tA \ g = -A \tag{5.8}$$

Exprimée à l'aide des composantes covariantes $A_{\mu\,\nu} = g_{\nu\rho} \, A^{\rho}_{\mu}$, (5.8) donne

3. A démontrer.

$$A_{\mu\,\nu} = -A_{\nu\,\mu} \tag{5.9}$$

c'est-à-dire, les composantes deux fois covariantes du tenseur A d'ordre 2 sont *antisymétriques*. Au chapitre 3, nous avons vu qu'un tel tenseur est décomposable en deux tenseurs plans, ce qui conduit naturellement à envisager les transformations (5.6) pour lesquelles A est un tenseur plan. De telles transformations sont dites *planes*. Celles-ci se classent en trois catégories, selon le signe du discriminant de A.

♣ Transformations de Lorentz pures

Celles-ci correspondent au cas où le discriminant [4] $\Delta(A)$ de A est *positif*, c'est-à-dire lorsque A est du genre *électrique*. Ce tenseur peut alors s'écrire sous la forme

$$A = -\chi\, G \ , \quad \text{avec} \quad G = n \wedge z\, g = n \otimes \overline{z} - z \otimes \overline{n} \tag{5.10}$$

où n est un 4-vecteur unitaire du genre temps futur ($n^2 = 1$), z un 4-vecteur unitaire du genre espace orthogonal à n ($z^2 = -1$ et $z \cdot n = 0$), et χ un nombre réel pouvant ici être choisi positif [5]. Dans cette même formule (5.10), $\overline{n}$, par exemple, représente le dual du 4-vecteur n, élément de l'espace dual de l'espace-temps, dont l'action sur un 4-vecteur quelconque v est donnée par $\overline{n}(v) = n \cdot v$. Ainsi, l'action de G sur un 4-vecteur v est définie par

$$G(v) = n(z \cdot v) - z(n \cdot v) \tag{5.11}$$

avec notamment

$$G(n) = -z \ , \quad G(z) = -n \tag{5.12}$$

Il vient alors

$$G^2(v) = n(n \cdot v) - z(z \cdot v) \ , \quad \text{puis} \quad G^3(v) = G(v) \tag{5.13}$$

Développant Λ suivant les puissances de A, on obtient

$$\Lambda = 1 - \chi G + \frac{\chi^2}{2} G^2 - \frac{\chi^3}{3!} G^3 + \cdots = 1 - G\left(\chi + \frac{\chi^3}{3!} + \cdots\right) + G^2\left(\frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{4!} + \cdots\right)$$

soit

$$\Lambda = 1 - \sinh\chi\, G + (\cosh\chi - 1) G^2 \ , \quad \text{avec} \quad G^2 = n \otimes \overline{n} - z \otimes \overline{z} \tag{5.14}$$

Cette transformation de Lorentz pure laisse invariant le 2-plan du genre espace orthogonal au 2-plan du genre hyperbolique engendré par n et z, et l'on a

$$\Lambda(n) = n \cosh\chi + z \sinh\chi \quad , \quad \Lambda(z) = n \sinh\chi + z \cosh\chi \tag{5.15}$$

On vérifie aisément que les éléments de la matrice Λ sont donnés par

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \ - \ \sinh\chi\ (n^{\mu} z_{\nu} - z^{\mu} n_{\nu}) + (\cosh\chi - 1)\ (n^{\mu} n_{\nu} - z^{\mu} z_{\nu}) \tag{5.16}$$

On en déduit [6]

4. Voir la formule 3.79.
5. Le signe "-" devant χ dans (5.10) a été introduit pour la commodité.
6. Se rappeler que $n_k = -n^k$ et $z_k = -z^k$.

$$
\begin{aligned}
\Lambda_0^k &= \sinh\chi\ (n_0 z^k - z_0 n^k) + (\cosh\chi - 1)\ (n_0 n^k - z_0 z^k) \\
\Lambda_k^0 &= \sinh\chi\ (n_0 z^k - z_0 n^k) - (\cosh\chi - 1)\ (n_0 n^k - z_0 z^k) \\
\Lambda_k^\ell &= \delta_k^\ell + \sinh\chi\ (n^\ell z^k - n^k z^\ell) + (\cosh\chi - 1)\ (z^\ell z^k - n^\ell n^k) \\
\Lambda_0^0 &= 1 + (\cosh\chi - 1)\ (n_0^2 - z_0^2)
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

où $k = 1, 2, 3$. Manifestement, cette matrice n'est symétrique que si et seulement si

$$
n_0 n^k = z_0 z^k\ , \quad \text{et} \quad n^\ell z^k = n^k z^\ell \tag{5.18}
$$

la seconde égalité étant satisfaite dès lors que la première l'est. Comme $n_0^2 - \overrightarrow{n}^2 = 1$ on peut toujours poser

$$
n_0 = \cosh\alpha \quad , \quad \overrightarrow{n} = \sinh\alpha\ \overrightarrow{u}
$$

avec $\alpha \geq 0$ et où $\overrightarrow{u}$ est un 3-vecteur unitaire. On a ainsi

$$
z_0\ \overrightarrow{z} = \cosh\alpha\ \sinh\alpha\ \overrightarrow{u}\ , \quad \text{soit} \quad |z_0|\ |\ \overrightarrow{z}\ | = \cosh\alpha\ \sinh\alpha
$$

et comme $|\ \overrightarrow{z}\ | = \sqrt{z_0^2 + 1}$, on a nécessairement

$$
z_0 = \pm\ \sinh\alpha \quad , \quad \overrightarrow{z}\ =\ \pm\ \cosh\alpha\ \overrightarrow{u} \tag{5.19}
$$

les signes étant les mêmes devant les deux expressions. Choisissons le signe positif. Il vient alors

$$
\Lambda_0^0 = \cosh\chi \tag{5.20}
$$

$$
\Lambda_0^k = \Lambda_k^0 = u^k \sinh\chi
$$

$$
\Lambda_k^\ell = \Lambda_\ell^k = \delta_k^\ell + u^k\ u^\ell\ (\cosh\chi - 1) \tag{5.21}
$$

La matrice ainsi obtenue représente ce que nous avons appelé un *boost* au chapitre 3 (paragraphe 3.2.3, formule 3.39), et que l'on appelle aussi une transformation de Lorentz *spéciale*. Une transformation de Lorentz spéciale est donc une transformation de Lorentz pure représentée par une matrice *symétrique*. Cependant, on prendra garde au fait qu'une transformation de Lorentz pure n'est pas nécessairement représentée par une matrice symétrique.

♣ Rotations planes

Le tenseur A a dans ce cas un discriminant négatif, $\Delta(A) < 0$, et est donc du genre *magnétique*. Il peut être écrit sous la forme (voir chapitre 3)

$$
A = \theta\, G \ \ , \text{ avec} \quad G_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, n^\rho z^\sigma \tag{5.22}
$$

où n est un 4-vecteur unitaire du genre temps-futur, z un 4-vecteur du genre espace orthogonal à n, et θ un nombre réel. Introduisant alors deux vecteurs unitaires x et y du genre espace, orthogonaux à n et z et orthogonaux entre eux de sorte que l'ensemble (n, x, y, z) forme une base d'orientation directe de l'espace-temps, on obtient simplement

$$
G = x \wedge y\, g \ = \ x \otimes \overline{y} - y \otimes \overline{x} \tag{5.23}
$$

Il est alors facile de montrer que

$$R = e^A = 1 + G\sin\theta + G^2(1-\cos\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad G^2 = x\otimes\overline{x} + y\otimes\overline{y} \tag{5.24}$$

On a notamment

$$R(x) = x\cos\theta + y\sin\theta \quad , \quad R(y) = -x\sin\theta + y\cos\theta \tag{5.25}$$

ce qui montre clairement que la transformation R est une rotation dans le 2-plan du genre espace engendré par x et y, qui laisse invariant le 2-plan (n, z).

♣ Transformations intermédiaires

Le tenseur A correspondant ayant un discriminant nul, $\Delta A = 0$, est du genre *lumière*. Ses parties électrique et magnétique ont même module (voir chapitre 3). Relativement à une base (n, x, y, z), on peut l'écrire sous la forme

$$A = \lambda G \quad , \quad \text{avec} \;\; G_{\mu\nu} = n_\mu x_\nu - n_\nu x_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n^\rho y^\sigma \tag{5.26}$$

λ étant un nombre réel. Comme

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n^\rho y^\sigma = z_\mu x_\nu - z_\nu x_\mu \tag{5.27}$$

il vient

$$G = \ell\wedge x\, g \;= \ell\otimes\overline{x} - x\otimes\overline{\ell} \quad , \quad \text{avec} \;\; \ell = n + z \tag{5.28}$$

est un 4-vecteur du genre lumière. Il est alors facile de montrer que

$$G^2 = \ell\otimes\overline{\ell} \quad , \quad \text{et} \;\; G^3 = 0 \tag{5.29}$$

D'où

$$\Lambda = e^A = 1 + \lambda G + \frac{\lambda^2}{2} G^2 \tag{5.30}$$

On obtient ainsi

$$\Lambda(n) = n - \lambda x + \frac{\lambda^2}{2}\ell \quad , \quad \Lambda(z) = z + \lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\ell \quad , \quad \Lambda(x) = x - \lambda\ell \quad , \quad \Lambda(y) = y \tag{5.31}$$

Ladite transformation laisse invariants les 4-vecteurs ℓ et y. Elle s'apparente à une "transformation de jauge" pour le 4-vecteur x.

Puisque le générateur A d'une transformation de Lorentz quelconque de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ peut être écrit comme la somme de deux tenseurs plans, l'un du genre électrique, l'autre du genre magnétique, une transformation infinitésimale du même groupe apparaît donc comme le produit d'une transformation de Lorentz pure (partie électrique) et d'une rotation (partie magnétique). Cette propriété reste valable pour une transformation finie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Ceci semble bien naturel car, d'un point de vue physique, effectuer une transformation de Lorentz pure puis une rotation (ou une rotation puis une transformation de Lorentz pure) est une façon directe d'envisager le mouvement relatif le plus général de deux référentiels galiléens.

Ce résultat peut être prouvé comme suit. Soit Λ une transformation de Lorentz de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Posons

$$M = \Lambda\; {}^t\Lambda \tag{5.32}$$

En tant que matrice 4x4 agissant dans $\Re^4$, M est inversible, symétrique (${}^tM = M$) et positive. De ce fait, elle est diagonalisable, ses quatre valeurs propres m_1, m_2, m_3, m_4 (distinctes ou non) sont réelles et positives et vérifient $m_1 m_2 m_3 m_4 = \mathrm{det}M = (\mathrm{det}\Lambda)^2 = 1$. Définissons B comme la matrice 4x4 qui, dans la base des vecteurs propres de M est diagonale et a pour éléments diagonaux $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3}, \sqrt{m_4}$. Formellement, on a

$$B = +\sqrt{M} \tag{5.33}$$

Cette matrice B est elle aussi inversible, symétrique, strictement positive et telle que $\mathrm{det}B = 1$. Posons

$$R = B^{-1}\Lambda \tag{5.34}$$

On a

$${}^tRR = {}^t\Lambda\ {}^tB^{-1}B^{-1}\Lambda = {}^t\Lambda M^{-1}\Lambda = 1 \tag{5.35}$$

La matrice R est donc orthogonale et vérifie $\mathrm{det}R = 1$. On obtient ainsi le résultat qu'une transformation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ peut toujours être mise sous la forme du produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique [7]. On peut également supposer que

$$BgB = g \quad , \quad {}^tRgR = R^{-1}gR = g \tag{5.36}$$

c'est à dire que B et R sont aussi des transformations de Lorentz, ce qui n'est pas en contradiction avec (5.1). Montrons alors que B est une transformation de Lorentz pure. Soit v un vecteur propre de B, de valeur propre λ. On a

$${}^tvBgBv = \lambda^2\ {}^tvgv = {}^tvgv \tag{5.37}$$

soit

$$\lambda^2\, v \cdot v = v \cdot v \tag{5.38}$$

De

$$BgB(v) = \lambda Bg(v) = g(v) \tag{5.39}$$

on déduit aussi que si v est vecteur propre de B avec la valeur propre λ, $g(v)$ est vecteur propre de B avec la valeur propre $1/\lambda$: si λ est valeur propre, $1/\lambda$ est aussi valeur propre.

L'équation (5.38) conduit à plusieurs possibilités a priori. Supposons que $\lambda = 1$ ne soit pas valeur propre de B (la valeur $\lambda = -1$ est exclue car la matrice B a été choisie positive). Alors, tous les vecteurs propres de B sont nécessairement isotropes. Notons $\lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2, 1/\lambda_2$ les valeurs propres de B (λ_1 et λ_2 pouvant être égales), et v_1, v_2, v_3, v_4 les vecteurs propres qui leur sont respectivement associés. La matrice B étant symétrique, on sait que ces vecteurs peuvent être choisis de telle sorte à former une base orthonormale de $\Re^4$, au sens du produit scalaire euclidien.

Comme

$$v_2 = g(v_1) \neq v_1 \quad , \quad v_4 = g(v_3) \neq v_3 \tag{5.40}$$

on aura ainsi

7. On montrerait de la même manière que $\Lambda = R'B'$ où B' est symétrique et R' orthogonale.

$$\begin{aligned} {}^t\!v_1 v_1 = 1 = {}^t\!v_1 g v_2 = v_1 \cdot v_2 \quad , \quad {}^t\!v_1 v_4 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_4 = 0 \\ {}^t\!v_1 v_3 = v_1 \cdot v_4 = v_2 \cdot v_3 = 0 \quad , \quad {}^t\!v_3 v_3 = 1 = v_3 \cdot v_4 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Mais, d'après un théorème énoncé au chapitre 3, un 4-vecteur du genre lumière orthogonal à un 4-vecteur du genre lumière est nécessairement colinéaire à ce dernier, ce qui signifie, compte-tenu de (5.41), que v_3 devrait être colinéaire à v_1 et v_4 colinéaire à v_2, en contradiction avec l'hypothèse de vecteurs propres distincts. Il faut donc admettre que $\lambda = 1$ est bien valeur propre de B, et les vecteurs propres associés ne sont pas isotropes. Il ne peut y avoir d'autre valeur propre $\lambda_3 \neq 1$ <u>et</u> $\lambda_3 \neq \lambda_2$, car sinon on aurait aussi la valeur propre $1/\lambda_3$, ce qui donnerait finalement plus de 4 valeurs propres. La valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc dégénérée deux fois. Nous noterons encore v_1 et v_2 les vecteurs propres associés. Comme

$$ {}^t\!v_1 v_4 = v_1 \cdot v_3 = 0 \quad , \quad {}^t\!v_2 v_4 = v_2 \cdot v_3 = 0 \tag{5.42}$$

les deux 4-vecteurs v_1 et v_2 étant non isotropes et orthogonaux à un 4-vecteur du genre lumière sont nécessairement du genre espace. Notons-les x et y. On peut choisir ces vecteurs de telle sorte que $g(x) = -x$, $g(y) = -y$, d'où

$$x \cdot x = {}^t\!x g x = -\,{}^t\!x x = -1 \quad , \quad y \cdot y = {}^t\!y g y = -\,{}^t\!y y = -1 \quad , \quad x \cdot y = -\,{}^t\!x y = 0 \tag{5.43}$$

Posons ensuite

$$v_3 = \frac{n+z}{\sqrt{2}} \quad , \quad v_4 = \frac{n-z}{\sqrt{2}} \tag{5.44}$$

De $v_3^2 = v_4^2 = 0$, on tire $n \cdot z = 0$, $n^2 = -z^2$. Faisons alors le choix $n^2 = 1$, $z^2 = -1$. Les 4-vecteurs n et z sont respectivement du genre temps et du genre espace. La transformation de Lorentz B agit uniquement dans le plan hyperbolique (n, z) en laissant invariant le plan (x, y) du genre espace. Il s'agit bien d'une transformation de Lorentz pure, et, puisqu'elle est symétrique, c'est une transformation de Lorentz spéciale (boost).

Montrons ensuite que R est bien une rotation. D'après (5.36), on a $gR = Rg$: les deux matrices R et g commutent. Il est donc possible de leur trouver des vecteurs propres communs. Notamment, g ayant la même structure dans toutes les bases d'espace-temps, dans une base n, x, y, z il existe un et un seul 4-vecteur n du genre temps tel que $g(n) = n$, pour lequel on aura

$$gR(n) = Rg(n) = R(n) \tag{5.45}$$

On a donc nécessairement $R(n) = \lambda n$, et ${}^t\!n\, n = {}^t\!n\, {}^t\!RR\, n = \lambda^2\, {}^t\!n\, n = \lambda^2 = 1$. Ces résultats devant être vérifiés même si $R = 1$, seule la valeur $\lambda = +1$ est à retenir. La matrice R laisse donc invariant le 4-vecteur n du genre temps. Elle représente donc une transformation orthogonale dans le sous-espace, du genre espace, orthogonal à ce 4-vecteur. Il s'agit bien d'une rotation [8].

On aboutit ainsi à ce premier résultat qu'une transformation Λ de $L(3,1)$ peut toujours être écrite comme le produit d'un boost B et d'une rotation R :

$$\Lambda = B\,R \tag{5.46}$$

et cette décomposition est unique, B étant donnée par (5.33) et R par (5.34). Comme cela s'applique aussi bien à une transformation de Lorentz pure L_p, on peut toujours trouver une rotation R_1 telle que

8. A noter qu'une rotation laisse aussi invariant un 4-vecteur du genre espace : dans la représentation usuelle, il s'agit du 3-vecteur autour duquel s'effectue ladite rotation. Une rotation est donc une transformation plane.

$$L_p = B\, R_1 \tag{5.47}$$

et (5.46) devient

$$\Lambda = L_p\, R_2\ , \quad \text{avec} \quad R_2 = R_1^{-1}\, R \tag{5.48}$$

où R_2 est une rotation puisque ${}^tR_2 = {}^tR\, R_1\, {R_1}^{-1}\, R = 1$. Le résultat annoncé est donc démontré.

Comme les rotations d'une part et les transformations de Lorentz pures d'autre part forment des ensembles connexes, la décomposition (5.48) montre que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ est aussi connexe. Des relations (5.4) on déduit que les autres nappes $\mathcal{L}_-^\uparrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow$ et $\mathcal{L}_+^\downarrow$ sont aussi connexes, mais comme ses quatre nappes sont disjointes, le groupe de Lorentz *complet* n'est pas connexe.

5.1.3 Expression générale d'une transformation de Lorentz

Une transformation de Lorentz quelconque Λ peut être définie par son action sur une base d'espace-temps (n, x, y, z). Notant $(n' = \Lambda(n),\ x' = \Lambda(x),\ y' = \Lambda(y),\ z' = \Lambda(z))$ la nouvelle base, on a

$$n'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, n^\nu \quad , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu \quad , \quad y'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, y^\nu \quad , \quad z'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, z^\nu$$

d'où

$$n'^\mu\, n^\rho - x'^\mu\, x^\rho - y'^\mu\, y^\rho - z'^\mu\, z^\rho = \Lambda^\mu_\nu\, (n^\nu\, n^\rho - x^\nu\, x^\rho - y^\nu\, y^\rho - z^\nu\, z^\rho)$$

soit, en appliquant la relation de fermeture (3.59) du chapitre 3 [9],

$$\boxed{\Lambda_{\mu\rho} = n'_\mu\, n_\rho - x'_\mu\, x_\rho - y'_\mu\, y_\rho - z'_\mu\, z_\rho} \tag{5.49}$$

ou encore, sous forme d'opérateur

$$\boxed{\Lambda = n' \otimes \overline{n} - x' \otimes \overline{x} - y' \otimes \overline{y} - z' \otimes \overline{z}} \tag{5.50}$$

Par exemple, pour une transformation de Lorentz pure dans le plan (n, z), n' et z' sont donnés par (5.15) et incorporer ces expressions dans (5.50) permet de retrouver facilement (5.14). De même, pour une rotation dans le plan (x, y), en incorporant (5.25) dans (5.50), on retrouve aisément (5.24).

5.1.4 Générateurs infinitésimaux du groupe de Lorentz restreint

Considérant une base de 4-vecteurs réels $e_\mu\ ,\ \mu = 0, 1, 2, 3,\ \ e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$, une matrice 4x4 quelconque peut être developpée sur la base constituée par les opérateurs $e_\mu \otimes \overline{e_\nu}$. En particulier, le générateur A apparaissant dans (5.6) et satisfaisant (5.8), (5.9), pourra être écrit sous la forme

$$A = \frac{1}{2}\, A^{\mu\nu}\, M_{\mu\nu} \tag{5.51}$$

où

9. Noter que $\Lambda^{\mu\rho} = \Lambda^\mu_\alpha\, g^{\alpha\rho} = (\Lambda^{-1})^\rho_\beta\, g^{\beta\mu} = (\Lambda^{-1})^{\rho\mu}$, $\Lambda_{\mu\rho} = \Lambda^\alpha_\mu\, g_{\alpha\rho} = g_{\mu\beta}\, (\Lambda^{-1})^\beta_\rho = (\Lambda^{-1})_{\rho\mu}$.

$$\boxed{M_{\mu\nu} = e_\mu \wedge \overline{e_\nu}} \tag{5.52}$$

En considérant un espace de 4-vecteurs complexifié, on introduit les opérateurs

$$\boxed{J_{\mu\nu} = i e_\mu \wedge \overline{e_\nu}} \tag{5.53}$$

avec $i^2 = -1$. Ces opérateurs ont l'avantage d'être *auto-adjoints* : l'adjoint $\overline{\mathcal{O}}$ d'un opérateur agissant dans l'espace à quatre dimensions complexifié étant défini par

$$\overline{\mathcal{O}} = g\ {}^t\mathcal{O}^\star\ g \tag{5.54}$$

on vérifie que

$$\overline{M_{\mu\nu}} = -M_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \overline{J_{\mu\nu}} = J_{\mu\nu} \tag{5.55}$$

Les opérateurs (5.53) satisfont aux relations de commutation

$$\boxed{\boxed{[\ J_{\mu\nu}\ ,\ J_{\rho\sigma}\ ] = i\,(g_{\mu\sigma}\,J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\,J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,J_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\,J_{\mu\sigma})}} \tag{5.56}$$

qui définissent, en toute généralité, *l'algèbre de Lie* du groupe de Lorentz restreint. Autrement dit, par définition, cette algèbre est constituée d'opérateurs $\{J_{\mu\nu}\}$, vérifiant les relations (5.56) et qui sont, au regard des indices d'espace-temps μ et ν, les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux, antisymétrique. Ce sont les *générateurs infinitésimaux* du groupe $L(3,1)$ qu'ils engendrent par une exponentiation telle que (5.6). Les opérateurs (5.53) notamment, sont les *représentants* de ces opérateurs pour la représentation quadri-dimensionnelle considérée ici.

Indépendamment de sa représentation, $\{J_{\mu\nu}\}$, comme tout tenseur d'ordre 2 antisymétrique, se décompose en une partie électrique et une partie magnétique relativement à une base e_0, e_1, e_2, e_3 :

$$N_\mu = -J_{\mu\nu}\,e_0^\nu \quad , \quad S_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,e_0^\nu\,J^{\rho\sigma} \tag{5.57}$$

Dans cette base, ces grandeurs n'ont que des composantes spatiales, et l'on a

$$N^k = J^{0k} \quad , \quad S^k = \frac{1}{2}\epsilon_{k\ell m}\,J^{\ell m} \;\; \text{avec} \;\; k, \ell, m = 1, 2, 3 \tag{5.58}$$

Ici, $\epsilon_{k\ell m} = \epsilon_{0k\ell m}$ est, au regard des indices spatiaux k, ℓ, m, le tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique, avec $\epsilon_{123} = 1$. L'expression de S^k contient une sommation implicite sur les indices ℓ et m. On notera qu'inversement on a

$$J_{\ell m} = \epsilon_{\ell m k}\,S^k \tag{5.59}$$

D'après l'étude du paragrape 5.1.2, la partie électrique N^k génère des transformations de Lorentz pures, tandis que la partie magnétique S^k génère des rotations. Les opérateurs (5.58) vérifient les relations de commutation [10]

10. A vérifier.

$$[\ S^\ell, S^m\ ] = i\,\epsilon_{\ell mk}\,S^k \quad , \quad [\ N^\ell, N^m\ ] = -i\,\epsilon_{\ell mk}\,S^k \quad , \quad [\ N^\ell, S^m\ ] = i\,\epsilon_{\ell mk}\,N^k \tag{5.60}$$

Ces relations peuvent être découplées en introduisant les combinaisons

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{S} - i\ \overrightarrow{N}\right) \quad , \quad \overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{S} + i\ \overrightarrow{N}\right) \tag{5.61}$$

pour lesquelles on obtient [11]

$$[\ A^\ell, B^m\ ] = 0 \quad , \quad [\ A^\ell, A^m\ ] = i\,\epsilon_{\ell mk}\,A^k \quad , \quad [\ B^\ell, B^m\ ] = i\,\epsilon_{\ell mk}\,B^k \tag{5.62}$$

L'ensemble des opérateurs A^k et l'ensemble des opérateurs B^k constituent donc, chacun de leur côté, une algèbre de Lie qui s'apparente à celle, su(2), du groupe des rotations.

Les relations de commutation (5.56), (5.60) et (5.62) sont des propriétés de l'algèbre de Lie du groupe $L(3,1)$, indépendantes de sa représentation. Comme nous le verrons, cette algèbre est aussi celle du groupe $SL(2,C)$, groupe des matrices 2x2 à coefficients complexes et de déterminant égal à 1. Les deux groupes $L(3,1)$ et $SL(2,C)$ sont donc *homomorphes*. Plus précisément, à une transformation de $L(3,1)$ peut être associée une matrice *unimodulaire* M de $SL(2,C)$, ou son opposée $-M$ et L(3,1) est isomorphe au groupe quotient $SL(2,C)/Z_2$. Le groupe $SL(2,C)$, simplement connexe, est le *revêtement universel* de $L(3,1)$ [12]. Ce sont en fait les représentations de ce groupe $SL(2,C)$ qui importent le plus en physique.

Au vu des relations (5.62), il peut sembler que l'algèbre des opérateurs A^k et B^k soit isomorphe à l'algèbre de Lie su(2) $\oplus$ su(2), qui est celle du groupe $SU(2)$ X $SU(2)$. Cependant, il n'est pas assuré que ces opérateurs soient hermitiques pour toutes les représentations. Les représentations pour lesquelles ils le sont peuvent être obtenues par *prolongement analytique* à partir des représentations analogues de $SU(2)$ X $SU(2)$.

D'après l'étude du paragraphe 3.3.2, les deux seuls invariants associés au tenseur $\{J_{\mu\nu}\}$ sont [13]

$$\Delta(J) = \overrightarrow{N}^2 - \overrightarrow{S}^2 = -2(\overrightarrow{A}^2 + \overrightarrow{B}^2) \quad , \quad \Phi(J) = 2\ \overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{S} = 2i(\overrightarrow{A}^2 - \overrightarrow{B}^2) \tag{5.63}$$

En utilisant les relations (5.62), on vérifie facilement que ces deux opérateurs commutent. Il s'ensuit que les opérateurs $\overrightarrow{A}^2$ et $\overrightarrow{B}^2$ sont aussi invariants. Dès lors, une représentation irréducible de $SL(2,C)$ pourra être caractérisée par la donnée des valeurs, uniques, prises par ces deux opérateurs dans cette représentation.

Nous poserons

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{S}^2 - \overrightarrow{N}^2\right) = \overrightarrow{A}^2 + \overrightarrow{B}^2 \quad , \quad C_2 = -i\ \overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A}^2 - \overrightarrow{B}^2 \tag{5.64}$$

Le groupe des rotations étant un sous-groupe du groupe de Lorentz restreint, toute représentation de ce dernier est aussi une représentation du groupe des rotations. Or, ce dernier étant un groupe de Lie *compact*, ses représentations sont équivalentes à des représentations *unitaires* [14]. Cela signifie qu'une

11. Dans la représentation *quadri-vectorielle* des 4-vecteurs, ces opérateurs sont adjoints l'un de l'autre : $\overline{A^k} = B^k$.

12. Le groupe $L(3,1)$, quant à lui, est un groupe *simple*, c'est-à-dire, qui ne contient pas de sous-groupe invariant, et *doublement connexe*.

13. A noter que $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{N}$.

14. C'est un résultat général concernant les groupes de Lie compacts.

rotation quelconque peut être représentée par un opérateur U agissant dans un espace de Hilbert (espace de représentation) et vérifiant la relation d'unitarité

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{5.65}$$

En conséquence, les générateurs infinitésimaux S^k peuvent toujours être représentés par des opérateurs *hermitiques* : $(S^k)^\dagger = S^k$. Il n'en va pas de même pour les opérateurs N^k, ce qui fait que, a priori, les invariants C_1 et C_2 peuvent prendre des valeurs complexes dans certaines représentations.

Considérons le cas important où les opérateurs A^k et B^k sont hermitiques. Les opérateurs N^k sont alors *anti-hermitiques*

$$(N^k)^\dagger = -N^k \tag{5.66}$$

et par conséquent, les représentations correspondantes de $SL(2,C)$ *ne sont pas unitaires*. Cependant, la représentation de l'algèbre de Lie des opérateurs A^k et B^k est bien isomorphe à su(2) $\oplus$ su(2), et notamment, les opérateurs $\overrightarrow{A}^2$ et $\overrightarrow{B}^2$ y sont bien hermitiques, définis et positifs. Dans une telle représentation, ils prennent les valeurs respectives [15]

$$\overrightarrow{A}^2 = j_a(j_a+1) \quad , \quad \overrightarrow{B}^2 = j_b(j_b+1) \tag{5.67}$$

où j_a et j_b sont des nombres entiers ou demi-entiers positifs. Comme

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \tag{5.68}$$

$\overrightarrow{S}$ apparaît comme la somme de deux vrais "spins" $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, et pour trouver les valeurs possibles de $\overrightarrow{S}^2$, il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe 4.4. Posant $j(j+1) = \overrightarrow{S}^2$, on trouve donc que les valeurs possibles de j sont en nombre *fini* :

$$j = |j_a - j_b|,\, |j_a - j_b| + 1, \cdots, j_a + j_b - 1,\, j_a + j_b \tag{5.69}$$

En conclusion, les représentations pour lesquelles les opérateurs N^k sont anti-hermitiques ne sont pas unitaires et leurs espaces de représentation respectifs ont des dimensions finies. Pour celles-ci, C_1 est un réel positif, C_2 est aussi réel, positif ou négatif.

Dans le cas des représentations *unitaires* où non seulement les S^k sont hermitiques mais aussi tous les N^k, C_1 est réel, mais C_2 est imaginaire pur. Les opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ ne peuvent plus être considérés comme des "spins", leurs "carrés" $\overrightarrow{A}^2$ et $\overrightarrow{B}^2$ n'étant plus définis positifs mais prenant les valeurs complexes [16]

$$\overrightarrow{A}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \quad , \quad \overrightarrow{B}^2 = \frac{1}{2}(C_1 - C_2) \quad , \quad \text{avec} \;\; C_2 = i\,\rho \tag{5.70}$$

ρ étant un réel. Les valeurs propres $j(j+1)$ de $\overrightarrow{S}^2$ ne sont alors plus restreintes par l'obligation de positivité des opérateurs $\overrightarrow{A}^2$ et $\overrightarrow{B}^2$. Il s'ensuit que les valeurs possibles de j sont en nombre illimité, ce qui laisse prévoir que les espaces de représentations unitaires sont de dimension infinie.

15. Voir le chapitre 4.

16. A noter que pour ces représentations, $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont adjoints l'un de l'autre.

5.2 Représentations (linéaires) irréductibles du groupe de Lorentz restreint

5.2.1 Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie su(2)

Le groupe des rotations SO(3) est doublement connexe. On montre qu'il est isomorphe au groupe quotient $SU(2)/Z_2$: ainsi, $SU(2)$, groupe de Lie simplement connexe et compact, est le groupe de revêtement universel de SO(3). Ici encore, ce sont les représentations de ce groupe de revêtement $SU(2)$ qui importent le plus en physique. Nous avons étudié ces représentations au chapitre 4. Elles sont unitaires et de dimensions finies. Chaque espace de représentation, noté ici $\mathcal{H}_j$, correspond à une valeur propre donnée $j(j+1)$ de l'opérateur $\overrightarrow{S}^2$, seul opérateur invariant de l'algèbre de Lie su(2), où j est un entier ou un demi-entier positif. La dimension de $\mathcal{H}_j$ est $2j+1$. Au chapitre 4, ce résultat a été obtenu au moyen d'un formalisme particulier utilisant des opérateurs de création et d'annihilation. On peut cependant l'établir de façon directe comme suit. Comme les opérateurs (hermitiques) $\overrightarrow{S}^2$ et S^3 commutent [17], on peut leur trouver des vecteurs propres communs formant une base orthonormée (relativement au produit scalaire hermitien) de $\mathcal{H}_j$. Notons $|j,m>$ le vecteur correspondant à la valeur propre $j(j+1)$ de $\overrightarrow{S}^2$ (qui est positive puisque cet opérateur est positif) et à la valeur propre m de S^3. Posons

$$S_+ = S^1 + i\,S^2 \quad , \quad S_- = S^1 - i\,S^2 = (S_+)^\dagger \tag{5.71}$$

On a les relations de commutation

$$[\,S^3, S_+\,] = S_+ \quad , \quad [\,S^3, S_-\,] = -S_- \quad , \quad [\,S_+, S_-\,] = 2S^3 \tag{5.72}$$

et

$$\overrightarrow{S}^2 = (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2 = S^3(S^3+1) + S_-S_+ = S^3(S^3-1) + S_+S_- \tag{5.73}$$

De (5.72) on déduit

$$\begin{aligned} S^3S_+|j,m> &= S_+(S^3+1)|j,m> = (m+1)S_+|j,m> \\ S^3S_-|j,m> &= S_-(S^3-1)|j,m> = (m-1)S_-|j,m> \end{aligned} \tag{5.74}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} S^3S_+^q|j,m> &= S_+^q(S^3+q)|j,m> = (m+q)S_+^q|j,m> \\ S^3S_-^q|j,m> &= S_-^q(S^3-q)|j,m> = (m-q)S_-^q|j,m> \end{aligned} \tag{5.75}$$

où q est un entier supérieur ou égal à 1. Ainsi, si m est valeur propre de S^3, $m \pm q$ avec $q = 1, 2, \cdots$ sont aussi valeurs propres de S^3. Cependant, le spectre de S^3 est limité. En effet, d'après (5.73), on a [18]

$$\begin{aligned} ||S_+|j,m>||^2 = <j,m|S_-S_+|j,m> = <j,m|\ \overrightarrow{S}^2 - S^3(S^3+1)|j,m> = j(j+1) - m(m+1) \\ = j(j+1) - m(m+1) \geq 0 \end{aligned}$$

17. Ceci peut être vérifié en utilisant les premières relations dans (5.60).

18. Rappelons que les vecteurs propres $|j,m>$ satisfont les relations d'orthonormalité $<j',m'|j,m> = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$.

$$||S_-|j,m>||^2 =< j,m|S_+S_-|j,m>=< j,m|\ \overrightarrow{S}^2\ -S^3(S^3-1)|j,m>= j(j+1)-m(m-1)$$
$$= j(j+1)-m(m-1) \geq 0 \tag{5.76}$$

les inégalités dans (5.76) n'étant vérifiées que si et seulement si $S_+|j,m>$ ou $S_-|j,m>$ sont nuls. Des deux inégalités $m(m+1) \leq j(j+1)$ et $m(m-1) \leq j(j+1)$ on déduit

$$-j \leq m \leq j \tag{5.77}$$

Mais, si m est valeur propre, $m+1$, $m+2$, etc, sont aussi valeurs propres. Comme m ne peut être supérieur à j, il existe un entier positif p tel que $S_+|j,m+p>=0$. D'après (5.76), ceci implique nécessairement que l'on ait $m+p=j$. De même, puisque $m-1$, $m-2$, etc, sont aussi valeurs propres, toujours d'après (5.76), il doit nécessairement exister un entier positif q tel que $m-q=-j$. On en déduit, d'une part, qu'il doit exister deux entiers positifs p et q tels que $p+q=2j$ et que, par conséquent, j est soit un entier soit un demi-entier (positif), et, d'autre part, que m doit être égal à l'une des valeurs

$$-j, -j+1, -j+2, \cdots, j-2, j-1, j \tag{5.78}$$

La dimension de l'espace de représentation $\mathcal{H}_j$ est donc bien $2j+1$. D'après (5.74), $S_+|j,m>$ est vecteur propre de S^3 avec la valeur propre $m+1$ et $S_-|j,m>$ est vecteur propre de S^3 avec la valeur propre $m-1$. En admettant ici que les valeurs propres de S^3 soient non-dégénérées, ces vecteurs doivent être proportionnels à $|j,m+1>$ et à $|j,m-1>$, respectivement. Compte-tenu de (5.76), et en choisissant convenablement les phases des vecteurs propres $|j,m>$, on peut écrire

$$S_+|j,m>= \alpha^j_{m+1}\,|j,m+1> \quad , \quad S_-|j,m>= \alpha^j_m\,|j,m-1>$$
$$\text{avec} \quad \alpha^j_m = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \tag{5.79}$$

5.2.2 Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie de $L(3,1)$

La relation

$$[\ \overrightarrow{S}^2\ , N^r] = -i\,\epsilon_{rst}(S^sN^t + N^tS^s) \tag{5.80}$$

montre que les opérateurs de boosts N^k ne commutent généralement pas avec l'opérateur $\overrightarrow{S}^2$. Autrement dit, ce dernier n'est pas conservé sous les transformations engendrées par les premiers (boosts). De ce fait, l'espace $\mathcal{H}$ d'une représentation irréductible de $L(3,1)$ se présente comme une somme directe d'un certain nombre de sous-espace propres $\mathcal{H}_j$ de l'opérateur $\overrightarrow{S}^2$, les opérateurs N^k opérant des transitions entre ces divers sous-espaces :

$$\mathcal{H} = \oplus\mathcal{H}_j \tag{5.81}$$

Notre but maintenant est de trouver comment s'effectuent ces transitions [19]. Définissons

$$N_+ = N^1 + iN^2 \quad , \quad N_- = N^1 - iN^2 \tag{5.82}$$

19. Le développement qui suit est celui de M. A. Naimark dans son ouvrage "Linear representations of the Lorentz group", Pergamon Press, 1964, §8. Voir aussi l'ouvrage de E.M. Corson, "Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave-equations (Relation Structure), Hafner Pub. Comp., New York, 1953.

On prendra garde au fait que ces deux opérateurs ne sont généralement pas adjoints l'un de l'autre. On a les relations de commutation

$$[\, S^3, N_+\,] = N_+ \quad , \quad [\, S^3, N^3\,] = 0 \quad , \quad [\, S^3, N_-\,] = -N_- \tag{5.83}$$

De la première des relations (5.83) on déduit aisément que $N_+|j,m>$ est vecteur propre de S^3 avec la valeur propre $m+1$. Cependant, comme N_+ ne commute pas avec $\overrightarrow{S}^2$, ce vecteur ne peut être vecteur propre $\overrightarrow{S}^2$ avec la valeur propre $j(j+1)$. Il appartient à un sous-espace propre de S^3 correspondant à la valeur propre $m+1$, mais ayant une intersection non nulle avec des sous-espaces $\mathcal{H}_j$ correspondant à diverses valeurs de j.

Etablissons tout d'abord le théorème suivant.

♣ *Soit $|\phi>$ un vecteur propre de S^3, de valeur propre M. Si $S_+^q|\phi>= 0$, alors ce vecteur est combinaison linéaire des vecteurs propres $|j,M>$ pour lesquels l'inégalité $M \leq j \leq M+q-1$ est vérifiée.*

On peut admettre ici que l'ensemble des vecteurs propres $|j,m>$ constitue une base complète de l'espace de représentation. Le vecteur $|\phi>$ admet donc le développement

$$|\phi>= \sum_j \sum_{m=-j}^{j} |j,m><j,m|\phi> \tag{5.84}$$

Mais comme $|\phi>$ est vecteur propre de S^3 de valeur propre M, on a $<j,M|\phi> \propto \delta_{m\,M}$ et le développement précédent se réduit à

$$|\phi>= \sum_{j\geq M} |j,M><j,M|\phi> \tag{5.85}$$

D'après (5.79), on a

$$\begin{aligned} S_+^q|j,m>= {} & \alpha^j_{m+1}\,\alpha^j_{m+2}\cdots\alpha^j_{m+q}\,|j,m+q> \quad \text{si} \quad j\geq m+q \\ & = 0 \quad \text{si} \quad j \leq m+q-1 \end{aligned} \tag{5.86}$$

D'où la relation

$$S_+^q|\phi> \;=\; 0 \;=\; \sum_{j\geq M+q} \alpha^j_{M+1}\,\alpha^j_{M+2}\cdots\alpha^j_{M+q}\,|j,M+q><j,M|\phi> \tag{5.87}$$

Usant de l'indépendance des vecteurs $|j,m>$, on en déduit $<j,M|\phi>= 0$ pour $j\geq M+q$, puis le développement

$$|\phi>= \sum_{j\geq M}^{M+q-1} |j,M><j,M|\phi> \tag{5.88}$$

ce qui démontre le théorème.

Le vecteur $|\psi>= N_+|J,M>$ est vecteur propre de S^3, de valeur propre $M+1$. Il est facile de vérifier que S_+ et N_+ commutent et de ce fait on peut écrire

$$S_+^q N_+|J,M>= N_+ S_+^q\,|J,M> \tag{5.89}$$

Si l'on choisit $q = J+1-M$, alors, d'après (5.86), on a bien $S_+^q\,|J,M>= 0$ et par suite $S_+^q|\psi>= 0$. En vertu du théorème précédent, on a donc le développement ($M+1+q-1 = J+1$)

$$N_+|J,M>= \sum_{j=M+1}^{J+1} |j,M+1> \beta^J_{M+1,j} \quad \text{avec} \quad \beta^J_{M+1,j} \;=\; <j,M+1|N_+|J,M> \tag{5.90}$$

A partir de ce développement [20], on peut obtenir facilement ceux de $N^3|J,M>$ et $N_-|J,M>$ en utilisant les relations de commutation [21]

$$[\,N_+,S_-\,] = 2N^3 \quad , \quad [\,S_-,N^3\,] = N_- \tag{5.91}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
&2N^3|J,M>= N_+S_-|J,M> -S_-N_+|J,M> \\
&= \alpha^J_M N_+|J,M-1> -S_- \sum_{j=M+1}^{J+1} |j,M+1> \beta^J_{M+1,j} \\
&= \alpha^J_M \sum_{j=M}^{J+1} |j,M> \beta^J_{M,j} - \sum_{j=M+1}^{J+1} |J,M> \alpha^j_{M+1}\beta^J_{M+1,j}
\end{aligned} \tag{5.92}$$

soit, compte-tenu de $\alpha^M_{M+1} = 0$:

$$\begin{aligned}
&N^3|J,M> = \sum_{j=M}^{J+1} \gamma^J_{M,j}\;|j,M> \\
\text{avec} \quad &\gamma^j_{M,j} = \frac{1}{2}\left(\alpha^J_M\,\beta^J_{M,j} - \alpha^j_{M+1}\beta^J_{M+1,j}\right) \quad , \quad M \leq j \leq J+1 \quad , \quad M \leq J
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Puis

$$\begin{aligned}
&N_-|J,M> = \;(S_-N^3 - N^3S_-)|J,M> \\
&= \sum_{M}^{J+1} |j,M-1> \alpha^j_M\;\gamma^J_{M,j} \;-\; \alpha^J_M \sum_{M-1}^{J+1} |j,M-1> \gamma^J_{M-1,j}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

soit, compte-tenu de $\alpha^{M-1}_M = 0$,

$$\begin{aligned}
&N_-|J,M> = \sum_{M-1}^{J+1} |j,M-1>\;\delta^J_{M-1,j} \\
\text{avec} \quad &\delta^J_{M-1,j} = \alpha^j_M\gamma^J_{M,j} - \alpha^J_M\gamma^J_{M-1,j} \quad , \quad M-1 \leq j \leq J+1 \quad , \quad M \leq J
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Les coefficients β, γ et δ sont sujets à certaines contraintes dûes aux relations de commutation entre les opérateurs S et N. Notamment, utilisant la relation $[\,N_+,S_+\,] = 0$ on obtient

20. Bien entendu, j étant toujours positif, la limite inférieure $M+1$ n'est effective que si elle est bien positive. Si elle est négative, la limite inférieure effective de j doit être choisie comme sa plus petite valeur possible entre 0 et $J+1$.

21. A démontrer !

$$
\begin{aligned}
N_+S_+|J,M-1> = \ \alpha^J_M \ N_+|J,M> = \ \alpha^J_M \sum_{j=M+1}^{J+1} |j,M+1> \beta^J_{M+1,j} \\
= S_+N_+|J,M-1> = \ \sum_{j=M}^{J+1} \alpha^j_{M+1} \ |j,M+1> \ \beta^J_{M,j} \\
= \ \sum_{j=M+1}^{J+1} \alpha^j_{M+1} \ |j,M+1> \ \beta^J_{M,j}
\end{aligned} \tag{5.96}
$$

où, dans la derniere ligne, on a tenu compte de $\alpha^M_{M+1} = 0$. On en déduit la relation

$$
\alpha^j_{M+1} \ \beta^J_{M,j} \ = \ \alpha^J_M \ \beta^J_{M+1,j} \quad , \quad M+1 \leq j \leq J+1 \quad , \quad M-1 \leq J \tag{5.97}
$$

Puis, la relation $[\, S_-, N_- \,] = 0$ donne

$$
\begin{aligned}
N_-S_-|J,M+1> = \ \alpha^J_{M+1} \ N_-|J,M> = \ \alpha^J_{M+1} \sum_{j=M-1}^{J+1} |j,M-1> \ \delta^J_{M-1,j} \\
= S_-N_-|J,M+1> = \ \sum_{j=M}^{J+1} |j,M-1> \ \alpha^j_M \ \delta^J_{M,j}
\end{aligned} \tag{5.98}
$$

Ici, $M+1 \leq J$ et $\alpha^J_{M+1} = \sqrt{(J+M+1)(J-M)}$ est alors différent de zéro. On en déduit

$$
\begin{aligned}
\delta^J_{M-1,M-1} = 0 \\
\alpha^j_M \ \delta^J_{M,j} \ = \ \alpha^J_{M+1} \ \delta^J_{M-1,j} \quad , \quad j = M, M+1, \cdots, J+1 \quad , \quad M \leq J-1
\end{aligned} \tag{5.99}
$$

La première équation de (5.99) est équivalente à

$$
\delta^J_{M,M} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-2 \tag{5.100}
$$

D'où, en prenant $j = M \leq J-2$ dans la seconde équation de (5.99) et tenant compte du fait qu'alors $\alpha^J_{M+1} \neq 0$, on obtient

$$
\delta^J_{M-1,M} \ = \ 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-2 \tag{5.101}
$$

Considérons alors le développement de $N_-|J,J-1>$ donné par (5.95). On a $\delta^J_{J-2,J-2} = 0$ d'après (5.100) et $\delta^J_{J-2,J-1} = 0$ d'après (5.101). D'où

$$
\begin{aligned}
N_-|J,J-1 >= \delta^J_{J-2,J-1}|J-1,J-2> + \delta^J_{J-2,J}|J,J-2> \\
+\delta^J_{J-2,J+1}|J+1,J-2>
\end{aligned} \tag{5.102}
$$

Ce vecteur se projette donc sur des états de spin $j = J-1$, $j = J$ et $j = J+1$ uniquement. Ce résultat se généralise aux autres valeurs permises de M. En effet, prenons $M \leq J-p$ où p est un entier supérieur ou égal à 1. On a montré que $\delta^J_{M-1,M-1} = 0$ pour $p = 1$, et que $\delta^J_{M-1,M} = 0$ pour $p = 2$, donc que

$$\delta^J_{M-1,M-1+k-p} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J+p-k-1 \quad \text{avec} \quad k=2 \;\; \text{et} \;\; p=1,2 \tag{5.103}$$

Supposons que la suite de relations ci-dessus soit satisfaite pour un certain entier k. Posons $q = k-p$. On a $q = 0, 1, \cdots, k-1$. La relation $\delta^J_{M-1,M-1+q} = 0$ pour $M \leq J-q-1$ est équivalente à $\delta^J_{M,M+q} = 0$ pour $M \leq J-1-(q+1)$. En prenant $j = M+q$ dans la deuxième équation (5.99) il vient

$$\alpha_M^{M+q}\delta^J_{M,M+q} = \alpha^J_M \delta^J_{M-1,M+q} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-1-(q+1) \tag{5.104}$$

soit, puisqu'alors $\alpha^J_M \neq 0$,

$$\delta^J_{M-1,M-1+(k+1)-p} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-1+p-(k+1) \quad \text{avec} \quad p = 1, 2, \cdots, k \tag{5.105}$$

Pour $p = k+1$, on retrouve la première équation de (5.99). Les relations (5.103) sont donc vraies pour tout k avec $p = 1, 2, \cdots, k$. On trouve donc

$$\delta^J_{M-1,M-1+q} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq M+q \leq J-1 \tag{5.106}$$

c'est-à-dire que pour tout M, toutes les composantes $\delta^J_{M-1,j}$ avec $j = M-1, M, \cdots, J-2$ sont nulles. Pour tout M (compatible), on peut donc écrire

$$\begin{aligned} N_-|J,M> = {} & \delta^J_{M-1,J-1}|J-1,M-1> + \delta^J_{M-1,J}|J,M-1> \\ & + \delta^J_{M-1,J+1}|J+1,M-1> \end{aligned} \tag{5.107}$$

Exploitons ensuite la relation de définition des coefficients δ dans (5.95). Prenons $j = M-1$. On a alors $\alpha_M^{M-1} = 0$, d'où

$$\delta^J_{M-1,M-1} = -\alpha^J_M\,\gamma^J_{M-1,M-1} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-1 \tag{5.108}$$

soit, puisque $\alpha^J_M \neq 0$ et en faisant le changement $M-1 \to M$

$$\gamma^J_{M,M} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-2 \tag{5.109}$$

Puis, pour $M \leq J-2$

$$\delta^J_{M-1,M} = 0 = \alpha^M_M \gamma^J_{M,M} - \alpha^J_M \gamma^J_{M-1,M} = -\alpha^J_M \gamma^J_{M-1,M} \tag{5.110}$$

soit

$$\gamma^J_{M-1,M} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-2 \tag{5.111}$$

ou, de façon équivalente

$$\gamma^J_{M,M+1} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-3 \tag{5.112}$$

Les relations

$$\gamma^J_{M,M+p} = 0 \quad \text{pour} \quad M \leq J-2-p \quad \text{avec} \quad p = 0, 1, \cdots, q \tag{5.113}$$

est donc vraie pour $q=0$ et $q=1$. Comme $\delta^J_{M-1,M+q}=0$ pour $M\leq J-2+q$, on a

$$\delta^J_{M-1,M+q}=\alpha^{M+q}_M\gamma^J_{M,M+q}-\alpha^J_M\gamma^J_{M-1,M+q}=-\alpha^J_M\gamma^J_{M-1,M+q}=0 \tag{5.114}$$

d'où

$$\gamma^J_{M,M+(q+1)}=0 \quad \text{pour} \quad M\leq J-2-(q+1) \tag{5.115}$$

La propriété (5.113) est aussi vraie pour $q+1$. Elle est donc vraie pour tout q. Comme $M\leq M+q\leq J-2$, les coefficients $\gamma^J_{M,j}$ pour $j=M,M+1,\cdots,J-2$ sont donc tous nuls. On en déduit que pour tout M (compatible), le vecteur $N^3|J,M>$ (5.93) ne se projette lui aussi que sur les états de spin $j=J-1$, $j=J$ et $j=J+1$:

$$\begin{aligned}N^3|J,M>=\gamma^J_{M,J-1}|J-1,M>+\gamma^J_{M,J}|J,M>\\ +\gamma^J_{M,J+1}|J+1,M>\end{aligned} \tag{5.116}$$

Venons-en enfin à l'exploitation de la relation (5.93) définissant les coefficients γ. Prenant $j=M$, et $M\leq J-2$, on a

$$2\gamma^J_{M,M}=\alpha^J_M\beta^J_{M,M}-\alpha^M_{M+1}\beta^J_{M+1,M}=\alpha^J_M\beta^J_{M,M}=0 \tag{5.117}$$

d'où l'on déduit

$$\beta^J_{M+1,M+1}=0 \quad \text{pour} \quad M\leq J-3 \tag{5.118}$$

Puis $\gamma^J_{M,M+1}=0$ pour $M\leq J-3$ implique

$$2\gamma^J_{M,M+1}=\alpha^J_{M-2}\beta^J_{M,M+1}-\alpha^{M+1}_{M+1}\beta^J_{M+1,M+1}=0=\alpha^J_{M-2}\beta^J_{M,M+1} \tag{5.119}$$

d'où

$$\beta^J_{M+1,M+2}=0 \quad \text{pour} \quad M\leq J-4 \tag{5.120}$$

Par un nouveau raisonnement par récurrence s'appuyant sur (5.93) on démontre aisément que la propriété

$$\beta^J_{M+1,M+p}=0 \quad \text{pour} \quad M\leq J-2-p \quad \text{avec} \quad p=1,2,\cdots,q \tag{5.121}$$

est vraie pour tout q (sous la condition $M+q\leq J-2$). En prenant $M+q=J-2$, on voit que tous les coefficients $\beta^J_{M+1,j}$ pour $j=M+1,M+2,\cdots,J-2$ sont nuls et que, par conséquent, d'après (5.90), on a

$$\begin{aligned}N_+|J,M>=\beta^J_{M+1,J-1}|J-1,M+1>+\beta^J_{M+1,J}|J,M+1>\\ +\beta^J_{M+1,J+1}|J+1,M>\end{aligned} \tag{5.122}$$

On notera que le coefficient $\beta^J_{M+1,j}$ n'est défini que pour $M\leq J$ et $M\leq j-1$. Aussi, on doit poser $\beta^J_{J+1,J-1}=0$, $\beta^J_{J+1,J}=0$ pour $M=J$, et $\beta^J_{J,J-1}=0$ pour $M=J-1$, $j=J-1$. De même, $\gamma^J_{M,j}$ n'est défini que pour $M\leq j$ et $M\leq J$. On doit donc poser $\gamma^J_{J,J-1}=0$.

Considérons maintenant la relation (5.97). Son application répétée pour $j=J+1$ donne

$$\begin{aligned}
\beta^J_{M,J+1} &= \frac{\alpha^J_M\,\alpha^J_{M+1}\cdots\alpha^J_J}{\alpha^J_{M+1}\,\alpha^J_{M+2}\cdots\alpha^J_{J+1}}\;\beta^J_{J+1,J+1} \\
&= \sqrt{\frac{(J+M)(J+M+1)}{(2J+1)(2J+2)}}\;\beta^J_{J+1,J+1}
\end{aligned} \tag{5.123}$$

Procédant de même pour $j = J$ et $j = J-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\beta^J_{M,J} &= \sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{2J}}\;\beta^J_{J,J} \\
\beta^J_{M,J-1} &= \sqrt{\frac{(J-M)(J-M+1)}{2}}\;\beta^J_{J-1,J-1}
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Utilisant ensuite les relations de définition des coefficients γ (5.93) et des coefficients δ (5.95), il est alors facile de montrer que

$$\begin{aligned}
\gamma^J_{M,J+1} &= -\sqrt{\frac{(J+M+1)(J-M+1)}{(2J+1)(2J+2)}}\;\beta^J_{J+1,J+1} \\
\gamma^J_{M,J} &= \frac{M}{\sqrt{2J}}\;\beta^J_{J,J} \\
\gamma^J_{M,J-1} &= \sqrt{\frac{(J-M)(J+M)}{2}}\;\beta^J_{J-1,J-1}
\end{aligned} \tag{5.125}$$

et

$$\begin{aligned}
\delta^J_{M-1,J+1} &= -\sqrt{\frac{(J-M+1)(J-M+2)}{(2J+1)(2J+2)}}\;\beta^J_{J+1,J+1} \\
\delta^J_{M-1,J} &= \sqrt{\frac{(J+M)(J-M+1)}{2J}}\;\beta^J_{J,J} \\
\delta^J_{M-1,J-1} &= -\sqrt{\frac{(J+M)(J+M-1)}{2}}\;\beta^J_{J-1,J-1}
\end{aligned} \tag{5.126}$$

Posons alors

$$A_J = -\frac{\beta^J_{J,J}}{\sqrt{2J}} \quad , \quad C_J = \frac{\beta^J_{J-1,J-1}}{\sqrt{2}} \quad , \quad D_{J+1} = \frac{\beta^J_{J+1,J+1}}{\sqrt{(2J+1)(2J+2)}} \tag{5.127}$$

Les développements des vecteurs dans (5.90), (5.93) et (5.95) prennent respectivement les formes

$$\begin{aligned}
N_+|J,M> = &\ \sqrt{(J-M)(J-M-1)}\;C_J\;|J-1,M+1> \\
&-\sqrt{(J-M)(J+M+1)}\;A_J\;|J,M+1> \\
&+\sqrt{(J+M+1)(J+M+2)}\;D_{J+1}\;|J+1,M+1>
\end{aligned} \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned}
N^3|J,M> = &\ \sqrt{(J-M)(J+M)}\;C_J\;|J-1,M> \\
&-M\;A_J\;|J,M> \\
&-\sqrt{(J+M+1)(J-M+1)}\;D_{J+1}\;|J+1,M>
\end{aligned} \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned} N_-|J,M> = & -\sqrt{(J+M)(J+M-1)}\; C_J\; |J-1,M-1> \\ & -\sqrt{(J+M)(J-M+1)}\; A_J\; |J,M-1> \\ & -\sqrt{(J-M+1)(J-M+2)}\; D_{J+1}\; |J+1,M-1> \end{aligned} \tag{5.130}$$

Certains des commutateurs de l'algèbre sont d'emblée vérifiés par ces expressions. Cependant, pour les satisfaire tous, des contraintes supplémentaires doivent être imposées aux coefficients C_J, A_J et D_J. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la relation

$$[\,N_+, N_-\,]|J,M> = -2S^3|J,M>$$

ne peut être satisfaite que si l'on impose les contraintes

$$\begin{gathered} C_J\;[(J+1)A_J-(J-1)A_{J-1}]=0 \quad , \quad D_{J+1}\;[(J+2)A_{J+1}-JA_J]=0 \\ (2J-1)C_JD_J-C_{J+1}D_{J+1}(2J+3)-A_J^2=1 \end{gathered} \tag{5.131}$$

En outre, ces coefficients doivent être tels que les invariants (5.64) soient bien indépendants de J. En utilisant

$$\overrightarrow{S}^2 - \overrightarrow{N}^2 = S_+S_- - N_-N_+ + (S^3)^2 - (N^3)^2 \quad , \quad \overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{N} = \frac{1}{2}\,(S_+N_- + S_-N_+) + S^3N^3$$

et compte-tenu des contraintes ci-dessus, on trouve

$$\begin{gathered} C_1 = 2J(J+1) - J^2(2J-1)C_JD_J + (J+1)^2(2J+3)C_{J+1}D_{J+1} \\ C_2 = i\,J(J+1)A_J \end{gathered} \tag{5.132}$$

Supposons $C_2 \neq 0$. Alors J ne peut prendre la valeur zéro, et l'on a

$$A_J = \frac{a}{J(J+1)} \quad \text{avec} \quad a = -i\,C_2 \tag{5.133}$$

Comme

$$(J+1)A_J - (J-1)A_{J-1} = \frac{a}{J} - \frac{a}{J} = 0 \;\;,\;\; (J+2)A_{J+1} - JA_J = \frac{a}{J+1} - \frac{a}{J+1} = 0$$

les deux premières contraintes de (5.131) sont d'emblée satisfaites par cette expression de A_J, indépendamment de C_J et de D_{J+1}. Posons

$$u_J = (2J+1)(2J-1)C_JD_J \tag{5.134}$$

La deuxième contrainte dans (5.131) conduit alors à la relation de récurrence

$$u_J - u_{J+1} = (2J+1)\left[1 + A_J^2\right] = 2J+1+a^2\left(\frac{1}{J^2} - \frac{1}{(J+1)^2}\right) \tag{5.135}$$

Notons alors J_0 la plus petite valeur de J pour la représentation étudiée. On obtient (par addition des différences $u_j - u_{j+1}$)

$$u_{J_0} - u_J = \sum_{j=J_0}^{J-1} (2j+1) + a^2(\frac{1}{J_0^2} - \frac{1}{J^2}) = \frac{1}{J^2}\left(J^2 - J_0^2\right)\left(J^2 + \frac{a^2}{J_0^2}\right) \tag{5.136}$$

Puisque J_0 est la plus petite valeur de J dans la représentation, l'application des opérateurs N sur $|J_0, M>$ ne peut donner un vecteur ayant une composante sur un hypothétique vecteur $|J_0-1, M'>$. On doit donc avoir $C_{J_0} = 0$, et par suite $u_{J_0} = 0$. Par ailleurs, on peut imposer que même pour $J_0 = 0$, le coefficient A_{J_0} garde une valeur finie, ce qui conduit à poser

$$a = wJ_0 \tag{5.137}$$

On en déduit

$$u_J = -\frac{1}{J^2}\left(J^2 - J_0^2\right)\left(J^2 + w^2\right) = (4J^2 - 1)C_J D_J \tag{5.138}$$

puis

$$\begin{gathered} C_1 = J_0^2 - w^2 - 1 \quad , \quad C_2 = i\,wJ_0 \\ \overrightarrow{A}^2 = \frac{1}{4}\left((J_0 + iw)^2 - 1\right) \quad , \quad \overrightarrow{B}^2 = \frac{1}{4}\left((J_0 - iw)^2 - 1\right) \end{gathered} \tag{5.139}$$

On aboutit ici à la conclusion que toute représentation irréductible de l'algèbre est caractérisée par la donnée d'une paire de nombres (J_0, w) où J_0 est un entier ou un demi-entier positif, et w un nombre *complexe*.

On remarquera que la relation (5.138) ne fait intervenir les coefficients C_J et D_J que par l'intermédiaire de leur *produit*. Ce résultat est imputable au fait que l'on dispose encore d'une liberté dans le choix des vecteurs de base $|J, M>$. Si, par exemple, on décide de changer $|J, M>$ en $\omega(J)\,|J, M>$, où $\omega(J)$ est un complexe ne dépendant que de J, les relations (5.129), (5.130) et (5.131) gardent les mêmes formes à condition de faire les changements

$$A_J \to A'_J = A_J \quad , \quad C_J \to C'_J = C_J \frac{\omega(J)}{\omega(J-1)} \quad , \quad D_{J+1} \to D'_{J+1} = D_{J+1}\frac{\omega(J)}{\omega(J+1)} \tag{5.140}$$

Dans cette opération, le produit $C_J D_J$ ne change pas. On notera aussi que les coefficients C_J et D_J donnés par

$$C_J = \frac{< J-1, M|N^3|J, M >}{\sqrt{(J+M)(J-M)}} \quad , \quad D_J = -\frac{< J, M|N^3|J-1, M >}{\sqrt{(J+M)(J-M)}} \tag{5.141}$$

sont liés par la relation

$$C_J^\star = -D_J \tag{5.142}$$

si la représentation est unitaire, et qu'alors $|C_J| = |D_J|$. Nous admettrons [22] qu'il est toujours possible de redéfinir la base des vecteurs $|J, M>$ de sorte que l'on ait toujours

$$C_J = D_J \tag{5.143}$$

22. Voir M.A. Naimark, loc. cit., p112.

Cherchons maintenant quelles conditions doivent être réalisées pour qu'une représentation irréductible soit unitaire. D'une part, on devra avoir

$$-M\,A_J^\star = < J, M|N^3|J, M >^\star = < J, M|(N^3)^\dagger|J, M > = < J, M|N^3|J, M > = -M A_J$$
$$\text{soit} \quad A_J^\star = A_J \quad \text{et} \quad J_0 w^\star = J_0 w \tag{5.144}$$

Deux possibilités se présentent alors.

♣ Ou bien $J_0 \neq 0$ et donc $J_0 \geq 1/2$; w est alors un nombre réel. Dans ce cas, comme $C_J^\star = -D_J$ ($= C_J$, et C_J est imaginaire pur), on a

$$u_J = -(4J^2-1)|C_J|^2 = -\left(\frac{J^2-J_0^2}{J^2}\right)(J^2+w^2)$$
$$\text{soit} \quad (4J^2-1)|C_J|^2 = \left(\frac{J^2-J_0^2}{J^2}\right)(J^2+w^2) \geq 0 \tag{5.145}$$

La condition de positivité ci-dessus est réalisée pour tout w réel, puisqu'alors $J^2+w^2>0$ et que $J \geq J_0$. Le coefficient C_J ne s'annule donc que pour $J = J_0$. L'opérateur $\overrightarrow{N}$ permet dans ce cas des transitions d'un spin J au spin $J+1$. Autrement dit, il n'y a aucune restriction de limite supérieure pour J : J prend les valeurs J_0+n, n étant un entier ≥ 0, et la dimension de l'espace de représentation ne peut qu'être infinie.

♣ Ou bien $J_0 = 0$, A_J est dans ce cas nul. On a ici

$$(4J^2-1)|C_J|^2 = J^2+w^2 \geq 0 \quad \text{pour} \quad J \geq 1 \tag{5.146}$$

et la seule restriction sur w est

$$w^2 \geq -1 \geq -J^2 \tag{5.147}$$

Si w est réel, la condition est bien sûr satisfaite. Mais on a aussi la possibilité d'un w imaginaire pur tel que $|w| \leq 1$. Le spin J prend toutes les valeurs entières ≥ 0, et la dimension de la représentation est ici encore infinie.

Supposons maintenant que le facteur J^2+w^2 s'annulle pour $J = J_1+1 \geq J_0$. Cela ne peut se produire que si J_1 et J_0 diffèrent d'un entier. Les relations (5.129), (5.130) et (5.131) montrent alors qu'il ne peut plus y avoir de transition de spin au-delà de $J = J_1$: la représentation est dans ce cas de dimension finie, J prenant les valeurs $J_0, J_0+1, \cdots, J_1$. On a maintenant

$$w = \pm i(J_1+1)$$
$$C_J = \pm i\frac{1}{J}\sqrt{\frac{(J^2-J_0^2)((J_1+1)^2-J^2)}{4J^2-1}} \tag{5.148}$$

où les deux symboles $\pm$ ci-dessus sont indépendants, celui de C_J pouvant être absorbé dans une redéfinition adéquate des vecteurs de base. L'opérateur $\overrightarrow{N}$ est maintenant anti-hermitique, et la représentation n'est pas unitaire. En revanche, les opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont maintenant hermitiques et représentent des vrais spins. En prenant par exemple $w = i(J_1+1)$ et en posant $2j_a = J_1 - J_0$, $2j_b = J_1 + J_0$, on retrouve les valeurs propres de $\overrightarrow{A}^2$ et $\overrightarrow{B}^2$ données en (5.67). La représentation correspondante, que nous noterons ici $D(j_a, j_b)$, est dite *spinorielle*. Sa dimension est $(2j_a+1)(2j_b+1)$.

En prenant $w = -i(J_1+1)$, on trouve $\overrightarrow{A}^2 = j_b(j_b+1)$, $\overrightarrow{B}^2 = j_a(j_a+1)$. La représentation spinorielle correspondante $D(j_b, j_a)$ est *différente* de la précédente si $j_a \neq j_b$.

Plus généralement, posons [23]

$$\gamma_1^2 = (J_0 + iw)^2 \quad , \quad \gamma_1 = 2\kappa_1 + 1 \quad , \quad \gamma_2^2 = (J_0 - iw)^2 \quad , \quad \gamma_2 = 2\kappa_2 + 1 \tag{5.149}$$

et supposons que l'on veuille étiquetter les représentations irréductibles par les valeurs de γ_1 et γ_2, ou, de façon équivalente, par celles de κ_1 et de κ_2, plutôt que par J_0 et w. On a

$$J_0 + iw = \epsilon_1 \gamma_1 \quad , \quad J_0 - iw = \epsilon_2 \gamma_2 \tag{5.150}$$

où ϵ_1 et ϵ_2 prennent, indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $+1$ ou -1. On obtient

$$2J_0 = \epsilon_1 \gamma_1 + \epsilon_2 \gamma_2 \quad , \quad 2\,i\,w = \epsilon_1 \gamma_1 - \epsilon_2 \gamma_2 \tag{5.151}$$

soit les quatre combinaisons possibles

$$\begin{array}{rcl} 2J_0 = \gamma_1 + \gamma_2 & , & 2iw = \gamma_1 - \gamma_2 \\ 2J_0 = \gamma_1 - \gamma_2 & , & 2iw = \gamma_1 + \gamma_2 \\ 2J_0 = -\gamma_1 + \gamma_2 & , & 2iw = -\gamma_1 - \gamma_2 \\ 2J_0 = -\gamma_1 - \gamma_2 & , & 2iw = -\gamma_1 + \gamma_2 \end{array} \tag{5.152}$$

Dans tous les cas, puisque $2J_0$ est nécessairement un entier, l'une au moins des deux combinaisons $\gamma_1 \pm \gamma_2$ doit être un entier relatif. Si l'une seulement de ces quantités est entière, alors J_0, ϵ_1, ϵ_2 et par suite w sont complètement déterminés. Par contre, si les deux quantités sont entières, on a une indétermination sur J_0, puisqu'alors deux valeurs, J_+ et J_-, peuvent être attribuées à cette grandeur. Dans ce cas, κ_1 et κ_2 sont de la forme $\dfrac{n}{4}$ où n est un entier relatif. Selon la valeur attribuée à J_0, on trouve deux représentations possibles $D_+(\kappa_1, \kappa_2)$ (pour $J_0 = J_+$) et $D_-(\kappa_1, \kappa_2)$ (pour $J_0 = J_-$). En supposant $J_+ > J_-$, la représentation D_+ est nécessairement de dimension infinie car pour celle-ci il n'y a aucune limite supérieure sur J. La représentation D_- n'est finie que si J_+ et J_- diffèrent par un entier. En dehors de ce cas, on peut dire que la donnée de κ_1 et κ_2 détermine entièrement la représentation.

Notons qu'un changement de signe de γ_1 et/ou de γ_2 conduit à la même représentation. Il en résulte que les quatre doublets (κ_1, κ_2), $(-\kappa_1 - 1, \kappa_2)$, $(\kappa_1, -\kappa_2 - 1)$ et $(-\kappa_1 - 1, -\kappa_2 - 1)$ correspondent à la même représentation. L'un des deux nombres $(\gamma_1 - \gamma_2)/2 = \kappa_1 - \kappa_2$ et $(\gamma_1 + \gamma_2)/2 = \kappa_1 + \kappa_2 + 1$ étant forcément de la forme $n/2$, où n est un entier relatif, pour restreindre le choix, on peut imposer que κ_1 et κ_2 soient tels que $\kappa_1 - \kappa_2 = \pm J_0$.

La méthode utilisée dans les pages précédentes pour déterminer les représentations irréductibles de $L(3,1)$ (en fait, celles de $SL(2,C)$) repose sur leurs décompositions en représentations irréductibles du sous-groupe des rotations (en fait, celles de $SU(2)$). Par exemple, pour la représentation (finie) spinorielle $D(j_a, j_b)$, on a

$$D(j_a, j_b) = \bigoplus_{j=|j_a - j_b|}^{j=j_a+j_b} D(j) \tag{5.153}$$

où $D(j)$ est la représentation irréductible de $SU(2)$ dont le spin j prend dans cette somme directe les valeurs $|j_a - j_b|$, $|j_a - j_b| + 1$, $\cdots$, $j_a + j_b - 1$, $j_a + j_b$. A cet égard, on notera que la forme générale

23. Voir E. M. Corson, loc. cit., p. 57.

des éléments de matrice apparaissant dans (5.129), (5.130) et (5.131) ne fait que traduire la nature *vectorielle* de $\overrightarrow{N}$ vis-à-vis du groupe des rotations [24].

Nous donnerons ici sans démonstration la règle de décomposition d'un produit tensoriel de deux représentations spinorielles irréductibles $D(j_1, j_2)$ et $D(j_3, j_4)$ en représentations spinorielles irréductibles $D(j, j')$:

$$D(j_1, j_2) \otimes D(j_3, j_4) = \bigoplus_{j=|j_1-j_3|}^{j=j_1+j_3} \bigoplus_{j'=|j_2-j_4|}^{j'=j_2+j_4} D(j, j') \tag{5.154}$$

A titre d'exemple, on a

$$\left\{D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})\right\} \otimes \left\{D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})\right\} = D(1, 0) \oplus 2\, D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus D(0, 1) \oplus 2\, D(0, 0) \tag{5.155}$$

D'après la relation de commutation [25]

$$\left[\, \overrightarrow{S}^2 \,,\, \overrightarrow{N} \,\right] = -4\, \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} \tag{5.156}$$

on voit que dans une repésentation donnée, pour que $\overrightarrow{S}^2$ soit invariant il faut ou bien que les représentations de $\overrightarrow{A}$ et de $\overrightarrow{B}$ soient colinéaires, ou que l'un de ces deux vecteurs soit nul. Il est facile de montrer que l'invariance n'est réalisée que par la seconde éventualité pour laquelle on a $\overrightarrow{N} = \pm i\, \overrightarrow{S}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{N}$ est alors anti-hermitique. Comme on pouvait le prévoir, les seules représentations pour lesquelles le spin est conservé sont les représentations (finies) spinorielles du type $D(j, 0)$ ou $D(0, j)$.

5.3 Le groupe $SL(2, C)$

5.3.1 L'homomorphisme $L(3, 1) \leftrightarrow SL(2, C)$

L'ensemble des matrices A carrées 2x2, à coefficients complexes, et *unimodulaires*, c'est-à-dire de déterminant égal à 1 :

$$\boxed{\det A = 1} \tag{5.157}$$

forment un groupe [26] : le groupe $SL(2, C)$.

Notons qu'une matice 2x2 quelconque

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

peut être développée suivant la base des *matrices de Pauli*

24. Finalement, il ne s'agit là que d'une simple affaire de coefficients de Clebsh-Gordan...
25. A démontrer.
26. A démontrer.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.158}$$

On a en effet [27]

$$\begin{gathered} X = x^0 + x^1\tau_1 + x^2\tau_2 + x^3\tau_3 \\ \text{avec} \\ x^1 = \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\tau_1 X) \quad , \quad x^2 = i\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\tau_2 X) \\ x^3 = \frac{\alpha-\delta}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\tau_3 X) \quad , \quad x^0 = \frac{\alpha+\delta}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, X \end{gathered} \tag{5.159}$$

Il est opportun de rappeler ici les propriétés suivantes des matrices de Pauli (les indices latins prennent les valeurs 1, 2 ou 3) :

$$\mathrm{Tr}\,\tau_k = 0 \quad , \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\tau_k\tau_\ell) = \delta_{k\ell} \quad , \quad \tau_k\,\tau_\ell = \delta_{k\ell} + i\,\epsilon_{k\ell m}\tau_m \tag{5.160}$$

Toute matrice X peut donc être récrite sous la forme

$$X = x^0 + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{5.161}$$

où $\overrightarrow{x}$ est le 3-vecteur de composantes cartésiennes x^1, x^2, x^3 et $\overrightarrow{\tau}$ le 3-vecteur dont les composantes cartésiennes sont les trois matrices de Pauli. On prendra garde au fait que, pour une matrice X quelconque, les quatre coefficients x^0, x^1, x^2 et x^3 sont généralement *complexes*. La forme (5.161) suggère de façon évidente l'association de la matrice X à un 4-vecteur d'espace-temps dont les composantes contravariantes seraient précisément les coefficients x^0, x^1, x^2 et x^3. Le lien entre les deux grandeurs devient encore plus manifeste au regard de la relation

$$\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^2 \tag{5.162}$$

qui représente le "carré scalaire" x^2 (pseudo-norme) dudit 4-vecteur. Ceci ouvre la possibilité de représenter les transformations de Lorentz par des matrices 2x2. Nous poserons désormais

$$\underset{\sim}{x} = x^0 + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\tau} \quad , \quad \widetilde{x} = x^0 - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\tau} \tag{5.163}$$

Entre ces deux types de matrices, on a les relations

$$\begin{gathered} \underset{\sim}{x}\,\widetilde{y} + \underset{\sim}{y}\,\widetilde{x} = \widetilde{x}\,\underset{\sim}{y} + \widetilde{y}\,\underset{\sim}{x} = 2\,(x^0y^0 - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}) = 2\,x \cdot y \\ \underset{\sim}{x}\,\widetilde{x} = \widetilde{x}\,\underset{\sim}{x} = x^2 \end{gathered} \tag{5.164}$$

x et y étant deux 4-vecteurs. Si x n'est pas isotrope, la matrice $\underset{\sim}{x}$ qui lui est associée est inversible et l'on a

$$\underset{\sim}{x}^{-1} = \frac{1}{x^2}\,\widetilde{x} \tag{5.165}$$

Au chapitre 4, nous avons vu qu'on peut aussi représenter une rotation $\mathcal{R}$ par une matrice 2x2, unitaire, $R(\mathcal{R})$, l'opération de rotation étant exprimée au moyen de la relation

27. Pour éviter une surcharge d'écriture dans les relations matricielles à venir, le plus souvent, l'identité ne sera pas écrite sous la forme d'une matrice 2x2 comme il se devrait, mais sera simplement représentée par le nombre 1.

$$R(\mathcal{R}) \ \vec{v} \cdot \vec{\tau} \ R^{-1}(\mathcal{R}) = \vec{v}' \cdot \vec{\tau} \tag{5.166}$$

$\vec{v}$ étant un 3-vecteur et $\vec{v'}$ son transformé par la rotation. On généralise cette relation aux transformations de Lorentz en associant à chaque élément Λ de $L(3,1)$ une matrice $A(\Lambda)$ de $SL(2,C)$, la transformation de Lorentz se réalisant au moyen de l'opération

$$\boxed{A(\Lambda) \underset{\sim}{x} A(\Lambda)^\dagger \ = \ \underset{\sim}{x}'} \tag{5.167}$$

où x' est le 4-vecteur transformé de x par cette transformation de Lorentz, et $A^\dagger = {}^t A^\star$. Cette opération représente bien une transformation de Lorentz car elle conserve la pseudo-norme [28]. En effet, puisque $\det A = \det A^\dagger = 1$, on a

$$\det \underset{\sim}{x}' = \ (x')^2 \ = \ \det A \det \underset{\sim}{x} \det A^\dagger \ = \ \det \underset{\sim}{x} \ = \ x^2 \tag{5.168}$$

Lorsque Λ est une rotation, la matrice A associée est *unitaire* ($A^\dagger = A^{-1}$), et puisqu'alors $x_0' = x_0$, on retrouve (5.166) [29].

La relation (5.167) établit le lien entre les groupes $L(3,1)$ et $SL(2,C)$. Cependant, ce lien n'est pas un isomorphisme, car, d'après (5.167), si une matrice A représente une transformation de Lorentz Λ, son opposée $-A$ peut tout aussi bien la représenter. Il n'y a donc pas isomorphisme entre $L(3,1)$ et $SL(2,C)$, mais plutôt entre $L(3,1)$ et le groupe quotient $SL(2,C)/\mathsf{Z}_2$.

5.3.2 L'algèbre de Lie de $SL(2,C)$

Le groupe $SL(2,C)$ est un groupe de Lie simplement connexe. Tout élément A de ce groupe peut être écrit sous une forme exponentielle

$$A = e^G \tag{5.169}$$

où la matrice G est le générateur de la transformation induite par A. Comme $\det A \ = \ e^{\mathrm{Tr}\, G} = 1$, on a nécessairement $\mathrm{Tr}\, G = 0$. Il s'ensuit que G doit être de la forme [30]

$$G = i \ \vec{g} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \tag{5.170}$$

où $\vec{g}$ est un 3-vecteur de composantes a priori complexes, que nous écrirons sous la forme

$$\vec{g} = \vec{s} + i \ \vec{n} \tag{5.171}$$

$\vec{s}$ et $\vec{n}$ étant cette fois des 3-vecteurs *réels*. On constate ainsi que $SL(2,C)$ est un groupe continu à 6 paramètres réels. Si $\vec{g}$ est réel ($\vec{g} = \vec{s}$), les matrices A correspondantes sont unitaires, les matrices τ_k étant hermitiques. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, elles représentent des rotations. Les générateurs infinitésimaux associés sont les matrices $\tau_k/2$. Si $\vec{g}$ est imaginaire pur, ($\vec{g} = i \ \vec{n}$), les matrices A correspondantes sont simplement hermitiques (les matrices $i\tau_k$ étant anti-hermitiques) et représentent des transformations de Lorentz pures [31]. Les générateurs infinitésimaux associés sont les matrices $+i\tau_k/2$. Posons alors ($k = 1, 2, 3$)

28. Et donc aussi le pseudo-produit scalaire.
29. Le lecteur vérifiera que (5.167) définit bien une structure de groupe.
30. Le facteur $i/2$ est introduit pour la commodité.
31. Voir plus loin.

$$S^k = \frac{\tau_k}{2} \quad , \quad N^k = +i\,\frac{\tau_k}{2} \tag{5.172}$$

Il est facile de vérifier que ces matrices, qui constituent l'algèbre de Lie de $SL(2,C)$, vérifient les relations de commutation (5.60) : les algèbres de Lie de $L(3,1)$ et de $SL(2,C)$ ont la même structure. Notons que si nous avions fait le choix

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{s} - i\ \overrightarrow{n} \tag{5.173}$$

nous aurions plutôt introduit les opérateurs

$$S^k = \frac{\tau_k}{2} \quad , \quad N^k = -i\,\frac{\tau_k}{2} \tag{5.174}$$

qui vérifient tout aussi bien les relations de commutation (5.60). Dans le premier cas, on a

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{S} - i\ \overrightarrow{N}) = \frac{\overrightarrow{\tau}}{2} \quad , \quad \overrightarrow{B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{S} + i\ \overrightarrow{N}) = \overrightarrow{0} \tag{5.175}$$

et dans le second

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{\tau}}{2} \tag{5.176}$$

Ces deux possibilités correspondent donc aux représentations spinorielles fondamentales $D(\frac{1}{2},0)$ et $D(0,\frac{1}{2})$, respectivement, dont les multiples tensorialisation permettent d'obtenir toutes les représentations spinorielles irréductibles de $SL(2,C)$, à l'instar de ce qui se fait pour le groupe $SU(2)$ (voir section 4.3).

5.3.3 Expressions des matrices $A(\Lambda)$

Montrons comment la relation (5.167) permet d'exprimer une matrice $A(\Lambda)$ à l'aide des éléments de la matrice Λ à laquelle elle est associée. Introduisons tout d'abord la notation τ_0 pour la matrice 2x2 identité, et la notation τ_μ pour désigner l'une des quatre matrices τ_0, τ_1, τ_2 et τ_3 pour $\mu = 0, 1, 2, 3$, respectivement. Utilisant la relation

$$\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\,\tau_\nu) \;=\; 2\,\delta_{\mu\nu} \tag{5.177}$$

où $\delta_{\mu\nu}$ est un symbole de Kronecker, et puisque $\underset{\sim}{x'} = (x')^\mu\,\tau_\mu$, il vient

$$(x')^\mu \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\,A\,\underset{\sim}{x}\;A^\dagger)$$

et comme $(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu\,x^\nu$, on obtient, par identification,

$$\boxed{\Lambda^\mu_\nu \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\,A\,\tau_\nu\,A^\dagger)} \tag{5.178}$$

A partir de cette formule, on établit aisément les corrélations suivantes entre matrice A et matrice Λ [32].

♣ On a [33]

32. Vérifier aussi que (5.178) conduit bien à des éléments de matrice Λ^μ_ν *réels*.

33. On rappelle que pour toutes matrices carrées A, B et C, on a $\mathrm{Tr}\,A\,B\,C = \mathrm{Tr}\,C\,A\,B = \mathrm{Tr}\,B\,C\,A$, $\mathrm{Tr}\;A\,B = \mathrm{Tr}\;{}^t(A\,B) = \mathrm{Tr}\;{}^tB\,{}^tA = \mathrm{Tr}\;{}^tA\,{}^tB$.

$$\Lambda^\mu_\nu(A^\dagger) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\, A^\dagger\, \tau_\nu\, A) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\nu\, A\, \tau_\mu\, A^\dagger) \;=\; ({}^t\Lambda)^\mu_\nu(A) \tag{5.179}$$

l'avant-dernière égalité étant obtenue par permutation circulaire des matrices dans la trace. Par conséquent, si A est hermitique, Λ est symétrique. A une matrice hermitique de $SL(2,C)$ est donc associée une matrice symétrique de $L(3,1)$, correspondant à une transformation de Lorentz spéciale (boost).

♣ D'après (5.1), pour toute matrice Λ de $L(3,1)$ on a (voir note 1 en première page de ce chapitre)

$$(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta = g^{\alpha\rho}\,\Lambda^\mu_\rho\, g_{\mu\beta}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{c} (\Lambda^{-1})^0_0 \;=\; \Lambda^0_0 \quad,\quad (\Lambda^{-1})^0_k \;=\; -\Lambda^k_0 \;=\; -({}^t\Lambda)^0_k \\ (\Lambda^{-1})^k_0 \;=\; -\Lambda^0_k \;=\; -({}^t\Lambda)^k_0 \quad,\quad (\Lambda^{-1})^\ell_k \;=\; \Lambda^k_\ell \;=\; ({}^t\Lambda)^\ell_k \end{array} \tag{5.180}$$

Posons alors

$$\Gamma^\mu_\nu \;=\; \Lambda^\mu_\nu(A^{-1}) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\, A^{-1}\, \tau_\nu\, A^{\dagger -1})$$

Or, le polynôme caractéristique de toute matrice (2x2) M étant

$$M^2 - M\,\mathrm{Tr}\,M + \det M = 0 \tag{5.181}$$

on déduit que si M est inversible, on a

$$M - \mathrm{Tr}\,M \;+ (\det M)\, M^{-1} = 0$$

et que par conséquent

$$\mathrm{Tr}\,M^{-1} \;=\; \frac{\mathrm{Tr}\,M}{\det M} \tag{5.182}$$

Il vient ainsi

$$\Gamma^\mu_\nu \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Tr}(\tau_\nu\, A\, \tau_\mu\, A^\dagger)}{\det(\tau_\mu\, \tau_\nu)}$$

d'où

$$\Gamma^0_0 = \Lambda^0_0 = (\Lambda^{-1})^0_0 \quad,\quad \Gamma^0_k = -\Lambda^k_0 = (\Lambda^{-1})^0_k \quad,\quad \Gamma^k_0 = -\Lambda^0_k = (\Lambda^{-1})^k_0 \quad,\quad \Gamma^k_\ell = \Lambda^\ell_k = (\Lambda^{-1})^k_\ell$$

(k, $\ell = 1$, 2, 3). On en conclut que l'on a bien

$$\Lambda^\mu_\nu(A^{-1}) \;=\; (\Lambda^{-1})^\mu_\nu(A) \tag{5.183}$$

Compte-tenu de ce qui précède, une conséquence de ce résultat est que si A est unitaire, la matrice Λ est orthogonale, car

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\, A^{-1}\, \tau_\nu\, A^{\dagger -1}) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_\mu\, A^\dagger\, \tau_\nu\, A) \;=\; \Lambda^\nu_\mu = ({}^t\Lambda)^\mu_\nu$$

A une matrice unitaire de $SL(2,C)$ est donc bien associée une matrice orthogonale de $L(3,1)$, correspondant à une rotation. La réciproque de ces résultats est établie plus loin. Posons maintenant

$$A = a^\mu \, \tau_\mu \;=\; a_0 + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\tau} \quad , \quad A^\dagger = a_0^\star + \overrightarrow{a^\star} \cdot \overrightarrow{\tau}$$

Utilisant les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\tau_k \, \tau_\ell) \;&=\; 2\,\delta_{k\ell} \quad , \quad \mathrm{Tr}(\tau_k \, \tau_\ell \, \tau_m) \;=\; 2\,i\,\epsilon_{k\ell m} \\ \mathrm{Tr}(\tau_k \, \tau_\ell \, \tau_m \, \tau_n) \;&=\; 2(\delta_{k\ell}\delta_{mn} - \delta_{km}\delta_{\ell n} + \delta_{kn}\delta_{\ell m}) \end{aligned} \tag{5.184}$$

où les indices latins k, ℓ, m, n prennent l'une des valeurs 1, 2 ou 3, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 \;&=\; |a_0|^2 + |\overrightarrow{a}|^2 \\ \Lambda_k^0 \;=\; a_0(a^k)^\star + a_0^\star a^k + i\,\epsilon_{kmn} a^m (a^n)^\star \quad &, \quad \Lambda_0^k \;=\; a_0(a^k)^\star + a_0^\star a^k - i\,\epsilon_{kmn} a^m (a^n)^\star \\ \Lambda_\ell^k = \delta_{k\ell}\,(|a_0|^2 - |\overrightarrow{a}|^2) &+ a^k (a^\ell)^\star + a^\ell (a^k)^\star + i\,\epsilon_{k\ell m}(a_0^\star a^m - a_0 (a^m)^\star) \end{aligned} \tag{5.185}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Tr}\Lambda = 4|a_0|^2 \quad , \quad \Lambda_0^k + \Lambda_k^0 + i\,\epsilon_{kmn}\,\Lambda_n^m \;=\; 4 a_0^\star \, a^k \tag{5.186}$$

avec sommation sur les indices m et n. A la matrice Λ^2 est associée la matrice

$$A^2 = a_0^2 + \overrightarrow{a}^2 + 2a_0 \, \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\tau}$$

Comme $\det A = a_0^2 - \overrightarrow{a}^2 = 1$, on déduit du calcul précédent que

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda^2 \;=\; 4\,|2a_0^2 - 1|^2 = 16|a_0|^4 - 8(a_0^2 + (a_0^\star)^2) + 4 \tag{5.187}$$

Calculons ensuite

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = 2\epsilon^{0klm}\,(\Lambda_{0k} - \Lambda_{k0})\Lambda_{\ell m} = -2\epsilon_{k\ell m}\,(\Lambda_k^0 + \Lambda_0^k)\,\Lambda_\ell^m \;=\; 8\,i\,(a_0^2 - (a_0^\star)^2) \tag{5.188}$$

Combinant tous ces résultats, on obtient

$$\begin{aligned} 16(a_0^\star)^2 &= 4 + (\mathrm{Tr}\Lambda)^2 - \mathrm{Tr}(\Lambda^2) + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} \quad , \quad \text{soit} \\ 4a_0^\star &= \pm\sqrt{4 + (\mathrm{Tr}\Lambda)^2 - \mathrm{Tr}(\Lambda^2) + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma}} \end{aligned} \tag{5.189}$$

De l'expression

$$A = \frac{1}{4a_0^\star}\left(4|a_0|^2 + 4a_0^\star \, \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\tau}\right)$$

on déduit ainsi la formule

$$\boxed{A = \pm \frac{\mathrm{Tr}\Lambda + \sum_k \left(\Lambda_0^k + \Lambda_k^0 + i\,\epsilon_{kmn}\,\Lambda_n^m\right)\,\tau_k}{\sqrt{4 + (\mathrm{Tr}\Lambda)^2 - \mathrm{Tr}(\Lambda^2) + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma}}}} \tag{5.190}$$

qui permet d'exprimer la matrice A en fonction des éléments de la matrice Λ à laquelle elle est associée. Vérifions-la pour le cas, déjà rencontré au chapitre 4 (section 4.2), d'une rotation d'angle φ autour de l'axe $z'z$. On a alors

$$\Lambda_0^0 = \Lambda_3^3 = 1 \quad , \quad \Lambda_3^0 = \Lambda_0^3 = \Lambda_k^0 = \Lambda_0^k = \Lambda_k^3 = \Lambda_3^k = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2$$

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_2^2 = \cos\varphi \quad , \quad \Lambda_2^1 = -\Lambda_1^2 = -\sin\varphi$$

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda = 4\,\cos^2\frac{\varphi}{2} \quad , \quad \mathrm{Tr}\,\Lambda^2 = 4\,\cos^2\varphi \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = 0 \quad , \quad \epsilon_{kmn}\Lambda_n^m = -2\,\delta_{k3}\,\sin\varphi$$

D'où, finalement

$$A = \pm\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\,\tau_3\,\sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{5.191}$$

qui correspond bien, au signe près, à la matrice $R_z(\varphi)$ considérée au paragraphe 4.2.1. Cette matrice est bien unitaire.

Dans le cas d'une transformation de Lorentz spéciale (boost) de rapidité α le long de l'axe $z'z$, on a

$$\Lambda_0^0 = \Lambda_3^3 = \cosh\alpha \quad , \quad \Lambda_3^0 = \Lambda_0^3 = \sinh\alpha \quad , \quad \Lambda_1^1 = \Lambda_2^2 = 1$$

$$\Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = \Lambda_2^0 = \Lambda_0^2 = \Lambda_1^3 = \Lambda_3^1 = \Lambda_2^3 = \Lambda_3^2 = \Lambda_2^1 = \Lambda_1^2 = 0$$

$$\mathrm{Tr}\Lambda = 4\,\cosh^2\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \mathrm{Tr}\Lambda^2 = 4\,\cosh^2\alpha \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = 0 \quad , \quad \epsilon_{kmn}\Lambda_n^m = 0$$

On obtient alors

$$A = \pm\left(\cosh\frac{\alpha}{2} + \tau_3\,\sinh\frac{\alpha}{2}\right) \tag{5.192}$$

et cette matrice est bien hermitique.

Le lecteur est invité à vérifier à l'aide de (5.190) que la matrice de boost (symétrique) rencontrée au chapitre 3 (paragraphe 3.2.3, formule 3.39) est associée à la matrice hermitique

$$B = \pm\left(\,\cosh\frac{\chi}{2} - \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\tau}\,\sinh\frac{\chi}{2}\,\right) \tag{5.193}$$

où $\overrightarrow{n}$ est un 3-vecteur unitaire.

Plus généralement, la formule (5.178) permet d'établir les résultats réciproques suivants.

♣ Tout d'abord, en tenant compte de la note 1 en bas de la première page de ce chapitre, on peut vérifier à partir de (5.190) que si une matrice A de $SL(2, C)$ est associée à l'élément Λ de $L(3, 1)$, la matrice A^{-1} est associée à Λ^{-1}.

♣ On vérifie aussi l'association ${}^t\Lambda \leftrightarrow A^\dagger$. En particulier, si Λ est symétrique, A est hermitique. En effet, on a dans ce cas

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = -2\epsilon_{k\ell m}\,(\Lambda_k^0 + \Lambda_0^k)\,\Lambda_\ell^m = 0 \quad \text{car} \quad \Lambda_n^m = \Lambda_m^n$$

Tous les termes imaginaires dans l'expression (5.190) disparaissent et la matrice A correspondante est bien hermitique et représente alors une transformation de Lorentz spéciale (boost).

♣ Si Λ est orthogonale, A est unitaire. Comme $\mathrm{Tr}\ {}^t\Lambda = \mathrm{Tr}\ \Lambda$ et que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,({}^t\Lambda)_{\mu\nu}\,({}^t\Lambda)_{\rho\sigma} = -2\epsilon_{k\ell m}\,(\Lambda_k^0 + \Lambda_0^k)\,({}^t\Lambda)_\ell^m = -\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} \quad \text{car} \quad ({}^t\Lambda)_\ell^m = \Lambda_m^\ell$$

tous les termes imaginaires dans (5.190) changent de signe. On obtient donc

$$A({}^t\Lambda) = A^\dagger(\Lambda) = A(\Lambda^{-1}) = A^{-1}$$

La matrice A correspondante est bien unitaire et est donc associée à une rotation.

Il existe une façon bien plus élégante que (5.190) d'exprimer les matrices $A(\Lambda)$. Mais avant de l'établir, nous allons démontrer d'autres propriétés des matrices de Pauli.

Soit $e_0 = (1,0,0,0)$, $e_x = (0,1,0,0)$, $e_y = (0,0,1,0)$ et $e_z = (0,0,0,1)$ les 4-vecteurs d'une base standard d'espace-temps et t, x, y, z une base quelconque de cet espace. Un 4-vecteur u quelconque peut être écrit sous la forme

$$u = (u\cdot t)\,t - (u\cdot x)\,x - (u\cdot y)\,y - (u\cdot z)\,z \tag{5.194}$$

d'où, notamment,

$$\begin{aligned} e_0 &= t_0\,t - x_0\,x - y_0\,y - z_0\,z \\ -e_x &= t_x\,t - x_x\,x - y_x\,y - z_x\,z \quad , \quad \text{etc...} \end{aligned} \tag{5.195}$$

On en déduit les développements

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{u} &= (u\cdot t)\,\underset{\sim}{t} - (u\cdot x)\,\underset{\sim}{x} - (u\cdot y)\,\underset{\sim}{y} - (u\cdot z)\,\underset{\sim}{z} \\ \widetilde{u} &= (u\cdot t)\,\widetilde{t} - (u\cdot x)\,\widetilde{x} - (u\cdot y)\,\widetilde{y} - (u\cdot z)\,\widetilde{z} \end{aligned} \tag{5.196}$$

d'où l'on tire, en prenant $u = e_0$ puis $u = e_x$, etc,

$$\begin{aligned} \tau_0 &= t_0\,\underset{\sim}{t} - x_0\,\underset{\sim}{x} - y_0\,\underset{\sim}{y} - z_0\,\underset{\sim}{z} \\ -\tau_1 &= t_x\,\underset{\sim}{t} - x_x\,\underset{\sim}{x} - y_x\,\underset{\sim}{y} - z_x\,\underset{\sim}{z} \quad , \quad \text{etc...} \end{aligned} \tag{5.197}$$

Or,

$$\underset{\sim}{u} \;+\; \widetilde{u} \;=\; 2\,u_0 \tag{5.198}$$

et comme $\underset{\sim}{t}\,\widetilde{t} = 1$, $\underset{\sim}{x}\,\widetilde{x} = -1$, etc, il vient

$$(\underset{\sim}{t})^2 + 1 = 2\,t_0\,\underset{\sim}{t} \quad , \quad (\underset{\sim}{x})^2 - 1 = 2\,x_0\,\underset{\sim}{x} \quad , \quad \text{etc...} \tag{5.199}$$

puis

$$(\underset{\sim}{t})^2 - (\underset{\sim}{x})^2 - (\underset{\sim}{y})^2 - (\underset{\sim}{z})^2 + 4 = 2\left(t_0\,\underset{\sim}{t} - x_0\,\underset{\sim}{x} - y_0\,\underset{\sim}{y} - z_0\,\underset{\sim}{z}\right) = 2\,\tau_0$$

soit

$$\boxed{(\underset{\sim}{t})^2 - (\underset{\sim}{x})^2 - (\underset{\sim}{y})^2 - (\underset{\sim}{z})^2 \;=\; -2} \tag{5.200}$$

On a de même

$$\boxed{(\widetilde{t}\,)^2 - (\,\widetilde{x}\,)^2 - (\,\widetilde{y}\,)^2 - (\,\widetilde{z}\,)^2 \;=\; -2} \tag{5.201}$$

Or, toute matrice 2x2 peut être écrite sous la forme $\underset{\sim}{a}$ et d'après (5.164) on a

$$\underset{\sim}{t}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{t} = -(\,\underset{\sim}{t}\,)^2\;\widetilde{a} + 2(a\cdot t)\,\underset{\sim}{t} \quad , \quad \underset{\sim}{x}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{x} = -(\,\underset{\sim}{x}\,)^2\;\widetilde{a} + 2(a\cdot x)\;\underset{\sim}{x} \quad , \text{ etc...}$$

D'où

$$\underset{\sim}{t}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{t} \,-\, \underset{\sim}{x}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{x} \,-\, \underset{\sim}{y}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{y} \,-\, \underset{\sim}{z}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{z} = -((\,\underset{\sim}{t}\,)^2 - (\,\underset{\sim}{x}\,)^2 - (\,\underset{\sim}{y}\,)^2 - (\,\underset{\sim}{z}\,)^2)\;\widetilde{a} + 2\;\underset{\sim}{a}$$

$$= 2\;(\widetilde{a} + \underset{\sim}{a})$$

soit

$$\underset{\sim}{t}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{t} \,-\, \underset{\sim}{x}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{x} \,-\, \underset{\sim}{y}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{y} \,-\, \underset{\sim}{z}\;\underset{\sim}{a}\;\;\widetilde{z} \;=\; 2\;\mathrm{Tr}\;\underset{\sim}{a} \tag{5.202}$$

On en conclut que pour toute matrice (2x2) M et pour toute base d'espace-temps t, x, y, z, on a

$$\boxed{\underset{\sim}{t}\;\;M\,\widetilde{t} \,-\, \underset{\sim}{x}\;\;M\;\widetilde{x} \,-\, \underset{\sim}{y}\;\;M\;\widetilde{y} \,-\, \underset{\sim}{z}\;\;M\;\widetilde{z} \;=\; 2\;\mathrm{Tr}\;M} \tag{5.203}$$

Soit alors A la matrice 2x2 représentant la transformation de Lorentz Λ de $L(3,1)$ permettant de passer de la base t, x, y, z à la base T, X, Y, Z. On a

$$2\;A\;\mathrm{Tr}\;A^\dagger = A\left(\underset{\sim}{t}A^\dagger\;\widetilde{t} \,-\, \underset{\sim}{x}A^\dagger\;\widetilde{x} \,-\, \underset{\sim}{y}A^\dagger\;\widetilde{y} \,-\, \underset{\sim}{z}A^\dagger\;\widetilde{z}\right)$$

et comme

$$A\,\underset{\sim}{t}\,A^\dagger = \underset{\sim}{T} \quad , \quad A\;\underset{\sim}{x}\;A^\dagger = \underset{\sim}{X} \quad , \quad \text{etc...}$$

on obtient finalement le résultat remarquable :

$$\boxed{\boxed{A = \frac{1}{2\;(\mathrm{Tr}\;A)^\star}\left(\underset{\sim}{T}\;\;\widetilde{t} - \underset{\sim}{X}\;\;\widetilde{x} - \underset{\sim}{Y}\;\;\widetilde{y} - \underset{\sim}{Z}\;\;\widetilde{z}\right)}} \tag{5.204}$$

et, d'après (5.49) et (5.164), on a

$$\boxed{|(\mathrm{Tr}\;A)|^2 = \mathrm{Tr}\;\Lambda} \tag{5.205}$$

Une façon plus directe de démontrer (5.203) est la suivante. Tout d'abord, on vérifie aisément que pour toute matrice $\underset{\sim}{a}$, on a

$$\tau_0 \underset{\sim}{a} \tau_0 + \tau_1 \underset{\sim}{a} \tau_1 + \tau_2 \underset{\sim}{a} \tau_2 + \tau_3 \underset{\sim}{a} \tau_3 = 4a_0 = 2 \text{ Tr } \underset{\sim}{a}$$

Or, si P est la matrice de $SL(2,C)$ permettant de passer de la base standard e_0, e_x, e_y, e_z à la base t, x, y, z, on a

$$4a_0 = 4a_0 PP^{-1} = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} P\ \tau_\mu\ P^\dagger\ (P^\dagger)^{-1}\ \underset{\sim}{a}\ P^\dagger\ (P^\dagger)^{-1}\ \tau_\mu\ P^{-1}$$

Mais

$$P\ \tau_0\ P^\dagger = P\ \underset{\sim}{e_0}\ P^\dagger = \underset{\sim}{t} \quad , \quad P\ \tau_1\ P^\dagger = P\ \underset{\sim}{e_x}\ P^\dagger = \underset{\sim}{x} \quad , \quad \text{etc..}$$

et, en prenant les inverses,

$$(P^\dagger)^{-1}\ \tau_0\ P^{-1} = \ \widetilde{t}\ \ (\text{car} \ \ \det \underset{\sim}{t} \ \ = 1) \ \ , \ \ (P^\dagger)^{-1}\ \tau_x\ P^{-1} = -\ \widetilde{x}\ \ (\text{car} \ \ \det \underset{\sim}{x} \ \ = -1) \ \ , \ \ \text{etc...}$$

Il en résulte que

$$4a_0 = \underset{\sim}{t}\ M\ \widetilde{t}\ -\ \underset{\sim}{x}\ M\ \widetilde{x}\ -\ \underset{\sim}{y}\ M\ \widetilde{y}\ -\ \underset{\sim}{z}\ M\ \widetilde{z}$$

où l'on a posé $M = (P^\dagger)^{-1}\ \underset{\sim}{a}\ P^\dagger$, matrice 2x2 que l'on doit considérer aussi bien quelconque, puisque $\underset{\sim}{a}$ l'est. Pour finir, en remarquant que

$$4a_0 = 2 \text{ Tr } \underset{\sim}{a} \ \ = \ 2 \text{ Tr } [(P^\dagger)^{-1}\ \underset{\sim}{a}\ P^\dagger] = 2 \text{ Tr } M$$

on déduit immédiatement (5.203).

Au paragraphe 5.1.2, nous avons vu qu'une transformation de Lorentz peut s'envisager comme le produit d'une transformation de Lorentz spéciale (boost) et d'une rotation. Un résultat analogue s'applique aux matrices de $SL(2,C)$. En effet, A étant une matrice de $SL(2,C)$, posons [34]

$$H = \sqrt{A\,A^\dagger}$$

Cette matrice (définie, positive) a pour déterminant $+1$. C'est donc une matrice de $SL(2,C)$. Comme elle est hermitique, elle représente une transformation de Lorentz spéciale (boost). Considérons ensuite la matrice

$$R = H^{-1}\ A$$

Comme

$$R^\dagger\ R\ =\ A^\dagger\ H^{-2}\ A\ =\ A^\dagger\ A^{\dagger -1}\ A^{-1}\ A\ =\ 1$$

celle-ci est unitaire et représente donc une rotation. On aurait pu tout aussi bien considérer la matrice

$$R' = A\ H^{-1}$$

qui est elle aussi unitaire et représente une autre rotation. Dans un cas comme dans l'autre, la matrice A se présente bien comme le produit d'une matrice hermitique et d'une matrice unitaire, ce qui est

34. La matrice $AA^\dagger$ est définie et positive.

la traduction dans $SL(2,C)$ de la propriété, rappelée plus haut, des transformations de Lorentz de $L(3,1)$. Cette décomposition est ici encore unique. On peut d'ailleurs exprimer plus précisément les matrices H et R. Utilisant (5.181), on obtient

$$H = \frac{1 + A\,A^\dagger}{\mathrm{Tr}\,H} \;, \quad \text{avec} \quad (\mathrm{Tr}\,H)^2 = 2 + \mathrm{Tr}\,A\,A^\dagger \;, \quad \text{et} \quad R = \frac{A + A^{\dagger -1}}{\mathrm{Tr}\,H} \tag{5.206}$$

La formule (5.204) paraît de loin plus utile que (5.190) dans la situation courante où, connaissant les bases d'espace-temps de départ et d'arrivée dans une transformation, on désire déterminer une matrice A qui les relie.

Considérons par exemple le cas d'une transformation de Lorentz pure laissant le plan (x,y) invariant. Utilisant (5.15) et (5.164), on obtient, tous calculs faits [35],

$$\underset{\sim}{T}\ \widetilde{t} - \underset{\sim}{X}\ \widetilde{x} - \underset{\sim}{Y}\ \widetilde{y} - \underset{\sim}{Z}\ \widetilde{z} \;=\; 4\cosh\frac{\chi}{2}\left(\cosh\frac{\chi}{2} + \sinh\frac{\chi}{2}\ \underset{\sim}{z}\ \widetilde{t}\right)$$

La matrice A correspondante est telle que $|\mathrm{Tr}\ A|^2 = 4\ \cosh^2\frac{\chi}{2}$. Choisissons $\mathrm{Tr}\ A \;=\; 2\ \cosh\frac{\chi}{2}$. Il vient alors

$$A \;=\; \cosh\frac{\chi}{2} + \sinh\frac{\chi}{2}\ \underset{\sim}{z}\ \widetilde{t} \tag{5.207}$$

La transformation de Lorentz spéciale (boost) correspond au cas où

$$\begin{array}{l} t = \cosh\alpha\, e_0 \;+\; \sinh\alpha\, u \quad , \quad z = \cosh\alpha\ u \;+\; \sinh\alpha\ e_0 \\ \text{avec} \quad e_0 \cdot u = 0 \;, \quad u^2 = -1 \quad (u = u_x\, e_x + u_y\, e_y + u_z\, e_z) \end{array} \tag{5.208}$$

donnant

$$A = \cosh\frac{\chi}{2} + \sinh\frac{\chi}{2}\ \ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau} \tag{5.209}$$

5.3.4 Les tétrades, rotation de Wigner

Un ensemble de quatre 4-vecteurs formant une base orthonormée (au sens de la métrique $g_{\mu\nu}$) de l'espace-temps constitue ce qu'on appelle une *tétrade*. Comme précédemment, soit

$$\mathcal{B}(e_0)\ :\ e_0 = (1,0,0,0)\ ,\ e_x = (0,1,0,0)\ ,\ e_y = (0,0,1,0)\ ,\ e_z = (0,0,0,1)$$

la tétrade de référence, et $\mathcal{B}(t)$: t,x,y,z une tétrade quelconque. Nous appellerons aussi *tétrade* et noterons $[\,t\,]$ la transformation de Lorentz permettant de passer de $\mathcal{B}(e_0)$ à $\mathcal{B}(t)$:

$$[\,t\,]\,\underset{\sim}{e_0}\,[\,t\,]^\dagger = \underset{\sim}{t} \quad , \quad [\,t\,]\,\underset{\sim}{e_x}\,[\,t\,]^\dagger = \underset{\sim}{x} \quad , \quad [\,t\,]\,\underset{\sim}{e_y}\,[\,t\,]^\dagger = \underset{\sim}{y} \quad , \quad [\,t\,]\,\underset{\sim}{e_z}\,[\,t\,]^\dagger = \underset{\sim}{z} \tag{5.210}$$

Au 4-vecteur t, on peut associer une infinité de triades de 4-vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux x,y,z, tous situés dans l'hyperplan orthogonal à t, pour former des tétrades dont t est le 4-vecteur unitaire du genre temps-futur. Il est évident que ces tétrades ne diffèrent entre elles que par des rotations dans l'hyperplan orthogonal à t. Soit $[\,t\,]'$ la tétrade telle que

$$[\,t\,]'\,\underset{\sim}{e_0}\,[\,t\,]'^\dagger = \underset{\sim}{t} \quad , \quad [\,t\,]'\,\underset{\sim}{e_x}\,[\,t\,]'^\dagger = \underset{\sim}{x'} \quad , \quad [\,t\,]'\,\underset{\sim}{e_y}\,[\,t\,]'^\dagger = \underset{\sim}{y'} \quad , \quad [\,t\,]'\,\underset{\sim}{e_z}\,[\,t\,]'^\dagger = \underset{\sim}{z'} \tag{5.211}$$

35. A vérifier !

Comme

$$\underset{\sim}{e_0} \;=\; [\,t\,]'^{\,-1}\,\underset{\sim}{t}\,[\,t\,]'^{\,\dagger\,-1} \;=\; [\,t\,]'^{\,-1}\,[\,t\,]\,\underset{\sim}{e_0}\,[\,t\,]^{\dagger}\,[\,t\,]'^{\,\dagger\,-1} \tag{5.212}$$

il est manifeste que la transformation

$$R = [\,t\,]'^{\,-1}\,[\,t\,] \tag{5.213}$$

qui laisse invariant le 4-vecteur du genre temps e_0 représente une rotation dans l'espace ordinaire. On a donc

$$[\,t\,]' \;=\; [\,t\,]\,R^{-1} \tag{5.214}$$

où R^{-1} est un élément de $SU(2)$.

Introduisons maintenant les vecteurs propres de l'opérateur $S^3([\,e_0\,]) = \dfrac{\tau_3}{2}$. Ce sont

$$\overset{\circ}{u}_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{u}_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.215}$$

satisfaisant $S^3([\,e_0\,])\;\overset{\circ}{u}_{\sigma} = \sigma\;\overset{\circ}{u}_{\sigma}$. Posons

$$u_\sigma([\,t\,]) = [\,t\,]\;\overset{\circ}{u}_{\sigma} \tag{5.216}$$

On a

$$2\,\sigma\,u_\sigma([\,t\,]) \;=\; [\,t\,]\,\tau_3\;\overset{\circ}{u}_{\sigma} \;=\; [\,t\,]\,\tau_3\,[\,t\,]^{\dagger}\,[\,t\,]^{\dagger -1}\,[\,t\,]^{-1}\,u_\sigma([\,t\,]) \;=\; \underset{\sim}{z}\,\widetilde{t}\,u_\sigma([\,t\,])$$

Les vecteurs $u_\sigma([\,t\,])$ sont donc vecteurs propres de l'opérateur

$$S^3([\,t\,]) = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{z}\,\widetilde{t} \;=\; [\,t\,]\,\frac{\tau_3}{2}\,[\,t\,]^{-1} \tag{5.217}$$

Définissons alors les opérateurs

$$S^1([\,t\,]) = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{x}\,\widetilde{t} \;\;,\;\; S^2([\,t\,]) = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{y}\,\widetilde{t} \tag{5.218}$$

Compte-tenu de l'identité [36]

$$\boxed{\underset{\sim}{t}\,\widetilde{x}\,\underset{\sim}{y}\,\widetilde{z} \;=\; i} \tag{5.219}$$

on montre que

$$S^1([\,t\,]) = \frac{i}{2}\,\underset{\sim}{y}\,\widetilde{z} \;\;,\;\; S^2([\,t\,]) = \frac{i}{2}\,\underset{\sim}{z}\,\widetilde{x} \;\;,\;\; S^3([\,t\,]) = \frac{i}{2}\,\underset{\sim}{x}\,\widetilde{y} \tag{5.220}$$

et que ces opérateurs satisfont l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Ils jouent donc le rôle d'opérateurs de spin. Il faut cependant prendre garde au fait qu'ils ne sont pas hermitiques et qu'en conséquence les vecteurs propres $u_\sigma([\,t\,])$ ne sont pas orthogonaux entre eux au sens de la métrique hermitienne [37]. Ce sont ces opérateurs qui engendrent des rotations dans l'hyperplan orthogonal à t. Considérons par exemple une rotation d'angle φ dans le 2-plan orthogonal au 2-plan (t, z) :

$$x' = \cos\varphi\;x \;+\; \sin\varphi\;y \;\;,\;\; y' = -\sin\varphi\;x \;+\; \cos\varphi\;y$$

36. A démontrer !

37. Bien que l'on ait $\overset{\circ}{u}{}^{\dagger}_{\sigma}\;\overset{\circ}{u}_{\sigma'} \;=\; \delta_{\sigma\sigma'}$.

Utilisant (5.204), il est facile de montrer que cette rotation est représentable par la matrice

$$R = \cos\frac{\varphi}{2} \;+\; \sin\frac{\varphi}{2}\,\underset{\sim}{x}\,\widetilde{y} \tag{5.221}$$

dont l'expression, pour une transformation infinitésimale d'angle $\delta\varphi$, est

$$R = 1 \;-\; \delta\,\varphi\, i\,\frac{i}{2}\,\underset{\sim}{x}\,\widetilde{y} \;=\; 1 - i\delta\,\varphi\, S^3([\,t\,])$$

d'où l'expression de $S^3([\,t\,])$ et son interprétation comme générateur de rotation.

Appliquant une transformation A sur une tétrade t, x, y, z, qui transforme t en T, la tétrade obtenue ne coïncide pas nécessairement avec celle, $\mathcal{B}(T)$: T, X, Y, Z, que l'on initialement associée à T et obtenue à partir de $\mathcal{B}_0$ à l'aide de $[\,T\,]$: on a

$$A\,\underset{\sim}{t}\,A^\dagger = \underset{\sim}{T} \quad , \quad A\,\underset{\sim}{x}\,A^\dagger = \underset{\sim}{X}' \quad , \quad A\,\underset{\sim}{y}\,A^\dagger = \underset{\sim}{Y}' \quad , \quad A\,\underset{\sim}{z}\,A^\dagger = \underset{\sim}{Z}'$$

avec $X' \neq X$, $Y' \neq Y$, $Z' \neq Z$. Ici encore, les deux triades X, Y, Z et X', Y', Z' ne diffèrent entre elles que par une rotation dans l'hyperplan orthogonal à T, laissant ce 4-vecteur invariant. De

$$A\,\underset{\sim}{t}\,A^\dagger = \; A\,[\,t\,]\;\underset{\sim}{e_0}\,[\,t\,]^\dagger\,A^\dagger \;=\; \underset{\sim}{T} \;\; = [\,T\,]\;\underset{\sim}{e_0}\,[\,T\,]^\dagger \tag{5.222}$$

on déduit que la transformation

$$R_W = [\,T\,]^{-1}\;A\;[\,t\,] \;=\; [\,At\,]^{-1}\;A\;[\,t\,] \tag{5.223}$$

laissant e_0 invariant est une rotation dans l'espace ordinaire. Cette rotation est appelée *rotation de Wigner*. On a donc

$$A\;[\,t\,] \;=\; [\,T\,]\,R_W \tag{5.224}$$

La rotation de Wigner joue notamment un rôle important dans la transformation des vecteurs propres de spin $u_\sigma([\,t\,])$. Sous l'opération A, ceux-ci deviennent

$$A\;u_\sigma([\,t\,]) \;=\; A\;[\,t\,]\;\;\overset{\circ}{u}_\sigma \;=\; [\,T\,]\;R_W\;\;\overset{\circ}{u}_\sigma$$

et, puisque R_W est une rotation laissant e_0 invariant, on a, d'après le chapitre 4,

$$R_W\;\;\overset{\circ}{u}_\sigma \;=\; \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma'\sigma}(R_W)\;\;\overset{\circ}{u}_{\sigma'} \tag{5.225}$$

et par suite

$$\boxed{A\;u_\sigma([\,t\,]) \;=\; \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma'\sigma}(R_W)\;u_\sigma([\,T\,])} \tag{5.226}$$

Cette formule révèle le fait que l'indice σ, qui représente une composante de spin, ne peut être un invariant relativiste que si les rotations de Wigner impliquées se réduisent à des rotations d'angles φ quelconques autour de l'axe des z, puisqu'alors $\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma'\sigma}(R_W) = \delta_{\sigma\sigma'}\,e^{-i\sigma\varphi}$ et que la transformation se réduit dans ce cas à une simple multiplication des vecteurs propres par un facteur de phase, et au changement de t en T. Ceci s'observe aussi bien pour des spineurs d'ordres plus élévés (spin quelconque). Explicitons ce fait.

Les opérateurs (5.58) correspondent à la décomposition du tenseur $J^{\mu\nu}$ en partie électrique et partie magnétique, selon (5.57), relativement à la base de référence $\mathcal{B}(e_0)$. Relativement à la base $\mathcal{B}(t)$, ils deviennent

$$N_\mu(t) = -J_{\mu\nu}\, t^\nu \quad , \quad S_\mu(t) = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\nu\, J^{\rho\sigma} \tag{5.227}$$

On vérifie aisément que dans cette base, les composantes de $S(t)$ pour le spin $1/2$ sont bien données par (5.220)[38]. L'application de la transformation $\Lambda(A)$ faisant passer de la base $\mathcal{B}(t)$ à la base (T, X', Y', Z') équivaut à la transformation $e_\mu \to e'_\mu = \Lambda(A)^\nu_\mu\, e_\nu$, ce qui conduit à transformer $J^{\rho\sigma}$ en

$$J'^{\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha\, (\Lambda^{-1})^\sigma_\beta\, J^{\alpha\beta}$$

Comme[39]

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha\, (\Lambda^{-1})^\sigma_\beta \;=\; \epsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}\, \Lambda^\lambda_\mu\, \Lambda^\theta_\nu$$

on trouve la loi de transformation

$$S_\mu(t) \to\; {}^\Lambda S_\mu(t) \;=\; \Lambda^\nu_\mu\; S_\nu(T) \tag{5.228}$$

Il s'ensuit que

$$S^3(t) = -z^\mu S_\mu(t) \to -z^\mu\, \Lambda^\nu_\mu\, S_\nu(T) = -\Lambda(z)\cdot S(T) \tag{5.229}$$

Mais comme

$$Z' = \Lambda(z) = -X\cdot\Lambda(z)\; X - Y\cdot\Lambda(z)\; Y - Z\cdot\Lambda(z)\; Z$$

ne coïncide généralement pas avec Z, la projection (5.229) n'est pas, dans la base $\mathcal{B}(T)$, la composante du spin suivant le troisième axe Z de cette base. Plus précisément, on a

$$\Lambda(z) \equiv \Lambda([\,T\,])\, \Lambda(R_W)\, e_z \;=\; \Lambda([\,T\,])\, D^1_{\lambda 0}(R_W) e^{(\lambda)}$$

$$\text{avec} \quad e^{(0)} = e_z\ , \quad e^{(\pm)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y)$$

$$\text{soit} \quad \Lambda(z) = D^1_{00}(R_W)\, Z - D^1_{10}(R_W)\, \left(\frac{X+iY}{\sqrt{2}}\right) + D^1_{-10}(R_W)\, \left(\frac{X-iY}{\sqrt{2}}\right)$$

D'où, de façon générale, la non-invariance des composantes S^3 dans un changement de référentiel. En fait, l'invariance relativiste de cette composante ne peut être réalisée que par des choix appropriés des tétrades réalisant la condition

$$\Lambda(z(t)) = Z(\Lambda(t)) \tag{5.230}$$

conférant aux 4-vecteurs z des diverses tétrades une certaine “covariance” [40].

38. Montrer que les composantes de $N(t)$ dans la base $\mathcal{B}(t)$ sont $\frac{i}{2}\,\underset{\sim}{x}\,\widetilde{t}\,,\ \frac{i}{2}\,\underset{\sim}{y}\,\widetilde{t}\,,\ \frac{i}{2}\,\underset{\sim}{z}\,\widetilde{t}$.

39. A démontrer !

40. Les rotations de Wigner R_W sont alors des rotations autour de e_z et l'on parle dans ce cas de “couplage d'hélicité”.

5.4 Les petits groupes

On appelle ainsi les sous-groupes de $L(3,1)$ laissant invariant un 4-vecteur réel η. Trois types de petits groupes sont à distinguer selon que le 4-vecteur qu'ils laissent invariant est du genre temps, du genre espace ou du genre lumière. Tous les petits groupes d'un type donné sont isomorphes entre eux.

Si $\Lambda = e^G$ appartient au petit groupe associé à η, on a $\Lambda(\eta) = \eta$ et par conséquent $G(\eta) = 0$. Or, G s'écrit $G = i\,\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu}\,/2$, où $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique, et comme

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i(g^{\mu\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\,\delta^{\mu}_{\beta}) \tag{5.231}$$

on a simplement

$$G^{\alpha}_{\beta} = -\omega^{\alpha}_{\beta} \quad , \quad \text{avec} \;\; \omega^{\alpha\beta}\,\eta_{\beta} = 0 \tag{5.232}$$

D'après un résultat du paragraphe 3.3.2 du chapitre 3, étant orthogonal à η, le tenseur antisymétrique $\omega_{\mu\nu}$ est plan et est de la forme

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,p^{\rho}\,\eta^{\sigma} \tag{5.233}$$

où p est un 4-vecteur du genre temps. En fait, dans cette expression, le 4-vecteur p peut toujours être remplacé par un 4-vecteur de la forme $\xi = p + a\eta$. Si η n'est pas du genre lumière, le scalaire a peut être déterminé de telle sorte que ξ soit orthogonal à η. Dans ce cas, on a

$$\xi^{\alpha} = \frac{1}{2\eta^2}\,\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\,\omega_{\mu\nu}\,\eta_{\beta} \tag{5.234}$$

En toute circonstance, on peut écrire

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\xi^{\rho}\,\eta^{\sigma} \tag{5.235}$$

et, *quelle que soit sa représentation*, le générateur G de la transformation est donc de la forme

$$G = i\,\xi^{\mu}\,W_{\mu}(\eta) \tag{5.236}$$

où

$$W_{\mu}(\eta) = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\eta^{\nu}\,J^{\rho\sigma} \tag{5.237}$$

est appelé *opérateur de Pauli-Lubanski*[41] associé au 4-vecteur η.

5.4.1 Cas où η est du genre temps : $\eta^2 > 0$

Posons $M = \sqrt{\eta^2}$ et définissons le 4-vecteur unitaire du genre temps $t = \pm\eta/M$, le signe étant choisi de telle sorte que t pointe vers le futur. Associons à ce 4-vecteur une triade x, y, z de 4-vecteurs du genre espace et orthogonaux entre eux se trouvant dans l'hyperplan orthogonal à t, pour former avec t une base d'orientation directe $\mathcal{B}(t)$. Le 4-vecteur ξ, orthogonal à t, appartient à cet hyperplan :

$$\xi = \xi^1\,x + \xi^2\,y + \xi^3\,z$$

et le générateur des transformations du petit groupe de η s'écrit

41. W. Pauli, Review of Modern Physics 13, p. 203, (1941) ; Lubanski, Physica IX, p. 310, (1942).

$$
\begin{aligned}
&G = \mp i\, M \left(\xi^1\, W^1(t) + \xi^2\, W^2(t) + \xi^3\, W^3(t)\right) \\
\text{avec} \quad & W^1(t) = -x \cdot W(t) \ , \quad W^2(t) = -y \cdot W(t) \ , \quad W^3(t) = -z \cdot W(t)
\end{aligned}
\tag{5.238}
$$

Les trois opérateurs $W^1(t)$, $W^2(t)$ et $W^3(t)$ sont les générateurs infinitésimaux du petit groupe. On vérifie aisément qu'ils constituent une algèbre de Lie isomorphe à su(2) [42]. Ce n'est pas étonnant car, le 4-vecteur η étant du genre temps, les opérations du petit groupe sont des rotations dans l'hyperplan orthogonal à η. Le petit groupe associé à η est donc isomorphe à $SO(3)$ (dont le groupe de revêtement $SU(2)$ a été étudié au chapitre 4).

5.4.2 Cas où η est du genre espace : $\eta^2 < 0$

Nous poserons ici $M = \sqrt{-\eta^2}$, puis $z = \eta/M$. Le 4-vecteur z est du genre espace et unitaire. Nous lui associerons une triade de 4-vecteurs comprenant un 4-vecteur du genre temps futur et unitaire t et deux vecteurs du genre espace et unitaires x et y de sorte à former une base orthonormée d'espace-temps $\mathcal{B}(z) : t,\, x,\, y,\, z$. Le 4-vecteur ξ, orthogonal à z, appartient à l'hyperplan engendré par t, x et y :

$$
\xi = \xi^0\, t + \xi^1\, x + \xi^2\, y
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
&G = i\, M \left(\xi^0\, W^0(z) - \xi^1\, W^1(z) - \xi^2\, W^2(z)\right) \\
\text{avec} \quad & W^0(z) = t \cdot W(z) \ , \quad W^1(t) = -x \cdot W(z) \ , \quad W^2(z) = -y \cdot W(z)
\end{aligned}
\tag{5.239}
$$

Les opérateurs $W^0(z)$, $W^1(z)$ et $W^2(z)$, générateurs infinitésimaux du petit groupe de z, satisfont aux relations de commutation [43]

$$
[\,W^1, W^2\,] \ = \ -i\, W^0 \quad , \quad [\,W^0, W^1\,] \ = \ i\, W^2 \quad , \quad [\,W^0, W^2\,] \ = \ -i\, W^1
\tag{5.240}
$$

qui définissent l'algèbre de Lie du groupe $L(2,1)$, groupe de Lorentz pour un espace-temps ne comportant que deux dimensions spatiales. L'opérateur W^0 engendre des rotations dans le 2-plan (x, y), tandis que W^1 et W^2 engendrent des transformations de Lorentz, dans les 2-plans (t, y) et (t, x), respectivement. Ce résultat était prévisible puisque les transformations du petit groupe de z agissent dans le 3-espace de Minkowsky ayant une dimension temporelle et deux dimensions spatiales. Le petit groupe associé à z est donc isomorphe à $L(2,1)$.

Déduisons directement la forme générale des matrices M_s du petit groupe du 4-vecteur de référence (du genre espace) $\mathring{z} = (0,0,0,1)$, à partir de la relation

$$
M_s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {M_s}^{\dagger -1}
$$

Posant $M_s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve les conditions $\delta = \alpha^\star$, $\gamma = \beta^\star$. Le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ de M_s étant égal à 1, on doit avoir de plus $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. On peut alors poser

$$
\alpha = \cosh \frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1 + \theta_2)/2} \ , \quad \beta = -\sinh \frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1 - \theta_2)/2)}
$$

ξ, θ_1 et θ_2 étant des réels quelconque. La forme générale cherchée est donc

42. Ce sont alors des opérateurs de spin, pas nécessairement hermitiques.
43. Montrer que $W^0(z) = x_\mu y_\nu J^{\mu\nu}$, $W^1(z) = t_\mu y_\nu J^{\mu\nu}$, $W^2(z) = -t_\mu x_\nu J^{\mu\nu}$ et se servir des relations (5.56).

$$M_s = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1+\theta_2)/2} & -\sinh\frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1-\theta_2)/2)} \\ -\sinh\frac{\xi}{2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)/2)} & \cosh\frac{\xi}{2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \end{pmatrix} \tag{5.241}$$

expression qui peut aussi se mettre sous la forme d'un produit :

$$M_s = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\xi}{2} & \sinh\frac{\xi}{2} \\ \sinh\frac{\xi}{2} & \cosh\frac{\xi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_2/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2/2} \end{pmatrix}$$

Soit $[\,z\,]$ une matrice de $SL(2,C)$ transformant $\overset{\circ}{z}$ en z, appelée aussi *tétrade* associée au 4-vecteur du genre espace z. Si ce dernier est paramétrisé comme

$$z = (\sinh\chi,\ \cosh\chi\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ \cosh\chi\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ \cosh\chi\ \cos\theta)$$

un exemple d'une telle *tétrade* est [44]

$$[\,z\,] = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\chi/2} \end{pmatrix} \tag{5.242}$$

et toute autre tétrade $[\,z\,]'$ que l'on pourrait associer au même 4-vecteur z diffère de celle-ci par une matrice $[\,z\,]^{-1}\ [\,z\,]'$ faisant partie du petit groupe de $\overset{\circ}{z}$ et qui a donc la forme (5.241). De même, une "transformation de Wigner" $[\,Az\,]^{-1}\ A\ [\,z\,]$, où A représente une transformation de Lorentz quelconque, n'est plus ici une rotation mais une matrice de la forme (5.241).

5.4.3 Cas où η est du genre lumière : $\eta^2 = 0$

Il est toujours possible de trouver une base $\mathcal{B}(t)$ ayant un vecteur z convenablement orienté, de telle sorte que η prenne la forme $\eta = \kappa(t+z)$, avec $\kappa = t\cdot\eta$. Relativement à cette base, les composantes de l'opérateur de Pauli-Lubanski $W(t+z)$ sont [45]

$$\begin{gathered} W^1 = -x\cdot W = -(t+z)_\mu\, y_\nu\, J^{\mu\nu} \quad , \quad W^2 = -y\cdot W = (t+z)_\mu\, x_\nu\, J^{\mu\nu} \\ W^0 = t\cdot W = W^3 = x_\mu\, y_\nu\, J^{\mu\nu} \end{gathered} \tag{5.243}$$

Elles satisfont aux relations de commutation

$$[\,W^1\,,\,W^2\,] = 0 \quad , \quad [\,W^0\,,\,W^1\,] = i\,W^2 \quad , \quad [\,W^0\,,\,W^2\,] = -i\,W^1 \tag{5.244}$$

Comme on peut le vérifier facilement, cette algèbre est celle du groupe $P(2)$ des déplacements dans un 2-plan euclidien, l'opérateur W^1 jouant le rôle de $-i\partial_x$, générateur de translation suivant l'axe des x de ce plan, W^2 celui de $-i\partial_y$, générateur de translation suivant l'axe des y, et W^0 celui de $-i(x\partial_y - y\partial_x)$, générateur de rotations dans ledit plan.

L'opérateur W^0 est encore le générateur infinitésimal des rotations dans le 2-plan physique (x,y). Dans la représentation *quadri-vectorielle* usuelle par des matrices 4x4, les opérateurs $J^{\mu\nu}$ sont définis par (5.231), et compte-tenu des relations

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ x^\mu\ (t+z)^\nu = (t+z)_\rho\ y_\sigma - y_\rho\ (t+z)_\sigma \quad , \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ y^\mu\ (t+z)^\nu = x_\rho\ (t+z)_\sigma - (t+z)_\rho\ x_\sigma \tag{5.245}$$

on a

44. A vérifier, et vérifier aussi que le 4-vecteur du genre temps donné par cette tétrade est $t = (\cosh\chi, \sinh\chi\ \sin\theta\ \cos\varphi, \sinh\chi\ \sin\theta\ \sin\varphi, \sinh\chi\ \cos\theta)$.

45. Comme $(t+z)\cdot W(t+z) = 0$, on a $W^3 = W^0$.

$$(W^1)^\alpha_\beta = -i\,[(t+z)^\alpha\ y_\beta - y^\alpha\ (t+z)_\beta] \quad , \quad (W^2)^\alpha_\beta = i\,[(t+z)^\alpha\ x_\beta - x^\alpha\ (t+z)_\beta] \tag{5.246}$$

d'où l'on déduit l'action de l'opérateur $T = e^{i(a\,W^1 + b\,W^2)}$ sur la base $\mathcal{B}(t)$

$$\begin{array}{ccc} T(t) = t + bx - ay + \dfrac{a^2+b^2}{2}\ (t+z) & , & T(z) = z - bx + ay - \dfrac{a^2+b^2}{2}\ (t+z) \\ T(x) = x + b(t+z) & , & T(y) = y - a(t+z) \end{array} \tag{5.247}$$

Les 4-vecteurs u appartenant à l'hyperplan orthogonal à η sont nécessairement de la forme $u = u^1 x + u^2 y + u^0 (t+z)$, $(u^0 = u^3)$. Pour ces 4-vecteurs, on a

$$T(u) = u + (t+z)(bu^1 - au^2) \tag{5.248}$$

et l'effet sur ces 4-vecteurs du sous-groupe abélien engendré par W^1 et W^2 est de les translater parallèlement à η [46]. C'est pourquoi on l'appelle *groupe de jauge* de η.

Etablissons la forme des matrices M_ℓ de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe du 4-vecteur du genre lumière de référence $\mathring{\eta} = (1,0,0,1)$. Elles doivent satisfaire la relation

$M_\ell\ (\tau_0 + \tau_3)\ {M_\ell}^\dagger =\ 2\ M_\ell\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {M_\ell}^\dagger = \tau_0 + \tau_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posant $M_\ell = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve les conditions $|\alpha| = 1$, soit $\alpha = e^{-i\psi/2}$ où ψ est un réel quelconque, et $\gamma = 0$. Comme $\det A = \alpha\,\delta - \gamma\,\beta = \alpha\,\delta = 1$, on doit avoir $\delta = 1/\alpha = e^{i\psi/2}$, et β est un nombre complexe quelconque. Les matrices cherchées s'écrivent donc [47]

$$M_\ell = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & \beta \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} = M_\ell(\zeta, e^{i\psi/2}) \tag{5.249}$$

où $\zeta = \beta e^{-i\psi/2}$ est un nombre complexe quelconque. Le lecteur vérifiera qu'en fonction des paramètres a et b précédemment introduits, on a $\zeta = b + ia$. On notera la loi de composition

$$M_\ell(\zeta, e^{i\psi/2})\ M_\ell(\zeta', e^{i\psi'/2}) = M_\ell(\zeta + \zeta' e^{i\psi}, e^{i[\psi+\psi']/2}) \tag{5.250}$$

qui est bien celle des déplacements dans le plan, assimilé au plan complexe (addition du complexe ζ, représentant une translation, suivie d'une multiplication par $e^{i\psi}$, représentant une rotation.).

Notons $\mathring{\ell} = \kappa\,(1,0,0,1)$ (κ étant réel) un 4-vecteur de référence du genre lumière, et $[\,\ell\,]$ une matrice de $SL(2,C)$ permettant de passer de $\mathring{\ell}$ à un autre 4-vecteur du genre lumière ℓ, et qui est encore appelée *tétrade* associée à ℓ. Si l'on utilise la paramétrisation

$$\ell = \kappa(1,\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ \cos\theta)$$

un exemple de telle tétrade est donné par

$$[\,\ell\,] = \sqrt{\kappa}\ \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{5.251}$$

46. Et notamment $e^{(-)} = \dfrac{x-iy}{\sqrt{2}} \to e^{(-)} + \dfrac{b+ia}{\sqrt{2}}\ (t+z)$.

47. A noter que l'on a aussi bien $M_\ell = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\zeta' = \zeta\ e^{-i\psi}$.

conduisant à la base d'espace-temps associée :

$$t(\ell) = (1,0,0,0) \ , \quad x(\ell) = (0, \cos\theta \ \cos\varphi, \cos\theta \ \sin\varphi, -\sin\theta)$$
$$y(\ell) = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \ , \quad z(\ell) = (0, \sin\theta \ \cos\varphi, \sin\theta \ \sin\varphi, \cos\theta)$$

Toute autre tétrade $[\,\ell\,]'$ associée au même 4-vecteur ℓ diffère de (5.251) d'une matrice $[\,\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]'$ qui, appartenant au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$, est nécessairement de la forme (5.250). Ici aussi, une transformation de Wigner $[\,A\ell\,]^{-1}\ A\,[\,\ell\,]$ n'est pas une rotation, mais une matrice M_ℓ du petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$, donc de la forme (5.250). Sous l'action de cette opération, les 4-vecteurs $e^{(\pm)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) = \mp(0,1,\pm i,0)$ deviennent

$$E^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) = e^{i\lambda\psi}\ e^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) + c_\lambda\ \ \overset{\circ}{\ell} \qquad (\lambda = \pm 1) \tag{5.252}$$

avec $c_+ = \frac{\zeta^\star}{\sqrt{2}\kappa}$ et $c_- = -\frac{\zeta}{\sqrt{2}\kappa}$. Il s'ensuit que dans la transformation de Lorentz représentée par A, le 4-vecteur

$$e^{(\lambda)}([\,\ell\,]) = \Lambda([\,\ell\,])\ e^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) \tag{5.253}$$

qui est vecteur propre de l'opérateur W^0 avec la valeur propre λ a pour équivalent dans la tétrade $[\,A\ell\,]$

$$\begin{aligned} e^{(\lambda)}([\,A\ell\,]) &= \Lambda([\,A\ell\,])\,e^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) = \Lambda(A\,[\,\ell\,]\,M^{-1})\,e^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) \\ &= \Lambda(A\,[\,\ell\,])\left\{e^{i\lambda\psi}\ e^{(\lambda)}([\,\overset{\circ}{\ell}\,]) + c_\lambda\ \ \overset{\circ}{\ell}\right\} = e^{i\lambda\psi}\,\Lambda(A)\ e^{(\lambda)}([\,\ell\,]) + c_\lambda\,(A\ell) \end{aligned} \tag{5.254}$$

Les interactions électromagnétiques offrent l'exemple d'une particule dépourvue de masse, le photon, lequel, en indissociable compagnon des ondes électromagnétiques, est le médiateur de ces interactions. S'agissant d'ondes planes, l'état du photon est décrit, pour ce qui concerne sa direction de propagation et l'énergie transportée, par son 4-vecteur énergie-quantité de mouvement k qui est du genre lumière, et, pour ce qui concerne l'état de polarisation de l'onde, au moyen de deux 4-vecteurs $e^{(+)}$ et $e^{(-)}$, tels que $e^{(\pm)} \cdot k = 0$, lesquels représentent des ondes polarisées circulairement, a droite et à gauche, respectivement (voir chapitre 4, paragraphe 4.7.1). D'après (5.254), dans une transformation de Lorentz, ces vecteurs de polarisation subissent une translation parallèlement à $K = \Lambda(A)(k)$. Or, une propriété fondamentale des équations de Maxwell est qu'elles sont *invariantes de jauge*. Au final, cela signifie que les prévisions mesurables de la théorie sont insensibles au remplacement d'un vecteur de polarisation $e^{(\lambda)}(k)$ par $e^{(\lambda)}(k) + c(k)\ k$, où $c(k)$ est un scalaire quelconque. Il s'ensuit que, dans ce cas, le terme $c_\lambda\ L$ est sans effet et peut être tout simplement ignoré. Tout se passe alors comme si, dans une transformation de Lorentz, les vecteurs de polarisation subissaient un simple changement de phase $e^{i\lambda\psi}$. La conséquence importante est que l'hélicité λ du photon peut être considérée comme un véritable invariant relativiste.

5.5 Les représentations irréductibles finies $D(j_1, j_2)$

Pour ces représentations de $SL(2,C)$, appelées aussi *représentations spinorielles*, les opérateurs (5.61) sont hermitiques. Les générateurs des transformations de $SL(2,C)$ s'écrivent

$$G = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu}\ \equiv\ i\left(\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{S} + i\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{N}\right)\ \equiv\ i\ \overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{s} + i\ \overrightarrow{n}) + i\ \overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{s} - i\ \overrightarrow{n})$$

Comme $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ commutent, les opérateurs T qui correspondent à ces transformations se présentent donc comme le produit des deux opérateurs commutants

$$T_A = e^{G_A} \quad \text{et} \quad T_B = e^{G_B} \quad \text{avec} \quad G_A = i \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{s} + i \overrightarrow{n}) \quad , \quad G_B = i \overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{s} - i \overrightarrow{n})$$

chacun représentant, pour les objets sur lequels ils agissent effectivement chacun de leur propre côté, la même opération de $SL(2,C)$, mais sous une forme différente. Or, les deux opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ qui ont alors la même structure d'opérateurs de spin, se comportent de façon strictement similaire, chacun de leur côté. Comme

$$G_A^\dagger = -i \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{s} - i \overrightarrow{n}) \quad \text{et que} \quad T_A^{\dagger -1} = e^{-G_A^\dagger}$$

on constate que si l'on remplaçait $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{B}$ on aurait $T_A^{\dagger -1} = e^{-G_A^\dagger} = T_B(\overrightarrow{B} \to \overrightarrow{A})$. Il s'ensuit que si T_A représente effectivement une matrice A de $SL(2,C)$, T_B doit représenter la matrice $A^{\dagger -1}$.

La représentation $D(\frac{1}{2}, 0)$ est la représentation fondamentale de $SL(2,C)$ dont l'étude vient d'être abordée dans les précédents paragraphes. L'espace de représentation est un espace hermitien de dimension 2, noté E_2, et les éléments du groupe sont représentés par des matrices 2x2. Un élément u de E_2 est appelé *spineur* d'ordre 1 et ses composantes contravariantes sont notées u^1 et u^2. Sous une transformation A de $SL(2,C)$ le spineur u se transforme conformément à

$$u' = Au = \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, u^1 + \beta\, u^2 \\ \gamma\, u^1 + \delta\, u^2 \end{pmatrix} \tag{5.255}$$

Au paragraphe 4.3.3, nous avons déjà signalé l'existence d'un *automorphisme interne* pour $SL(2,C)$, tel que

$${}^tA^{-1} \;=\; C^{-1}AC \quad \text{avec} \quad C = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.256}$$

montrant que la représentation contragrédiente ${}^tA^{-1}$ est équivalente à la représentation A elle-même, et que la représentation conjuguée $A^\star$ est équivalente à $A^{\dagger -1}$. Par contre, il n'existe aucune matrice 2x2 permettant de passer de la représentation A à sa conjuguée $A^\star$. Ces deux représentations ne sont pas équivalentes. Envisageons alors un espace hermitien $E_2^\star$ de dimension 2 sur lequel agit la représentation conjuguée $A^\star$. Les composantes contravariantes d'un spineur $v^\star$ de cet espace seront notées $v^{\dot 1}$, $v^{\dot 2}$ avec des indices "en haut" et "pointés", et ce spineur aura pour loi de transformation

$$v'^\star = A^\star v^\star = \begin{pmatrix} v'^{\,\dot 1} \\ v'^{\,\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^\star & \beta^\star \\ \gamma^\star & \delta^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{\dot 1} \\ v^{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^\star\, v^{\dot 1} + \beta^\star\, v^{\dot 2} \\ \gamma^\star\, v^{\dot 1} + \delta^\star\, v^{\dot 2} \end{pmatrix} \tag{5.257}$$

Cette représentation est équivente à $A^{\dagger -1}$ et donc à $D(0, \frac{1}{2})$. Les diverses représentations de $SL(2,C)$ peuvent être obtenues par tensorialisation multiples des deux représentations $D(0, \frac{1}{2})$ et sa conjuguée. Les objets correspondants sur lesquels agissent les transformations sont des tenseurs, ou *spineurs*, dont les composantes sont de la forme

$$T^{a_1 \cdots a_p \; \dot b_1 \cdots \dot b_q}$$

et ayant pour loi de transformation

$${}^AT^{a'_1 \cdots a'_p \; \dot b'_1 \cdots \dot b'_q} \;=\; A^{a'_1}_{a_1} \cdots A^{a'_p}_{a_p} \, (A^\star)^{\dot b'_1}_{\dot b_1} \cdots (A^\star)^{\dot b'_q}_{\dot b_q} \; T^{a_1 \cdots a_p \; \dot b_1 \cdots \dot b_q}$$

Si celle-ci est écrite sous forme matricielle, on a simplement

$${}^AT = \; A^{\otimes p} \; T \; (A^\dagger)^{\otimes q} \tag{5.258}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre 4, une façon élégante de passer d'une représentation à une représentation équivalente consiste à user de la matrice C, qui est invariante sous $SL(2,C)$, comme d'une métrique. Ainsi, les composantes covariantes d'un spineur de la représentation normale seront-elles définies par

$$u_1 = u^2 \quad , \quad u_2 = -u^1 \tag{5.259}$$

avec des indices "en bas", non pointés. On peut les considérer comme les composantes d'un spineur $\widehat{u}$ qui est lié à u par[48]

$$\widehat{u} = Cu \tag{5.260}$$

et qui se transforme comme

$$^A\widehat{u} = \ {}^tA^{-1}\ \widehat{u} \ = \begin{pmatrix} u'_1 = \delta\, u_1 - \beta\, u_2 \\ u'_2 = -\gamma\, u_1 + \alpha\, u_2 \end{pmatrix} \tag{5.261}$$

De la même manière, les composantes covariantes d'un spineur $v^\star$ de la représentation conjuguée sont définies par

$$v^\star_{\dot 1} = v^{\star \dot 2} \quad , \quad v^\star_{\dot 2} = -v^{\star \dot 1} \tag{5.262}$$

avec des indices en bas et pointés. Elles aussi peuvent être considérées comme les composantes d'un spineur[49]

$$\widehat{v}^\star = C\, v^\star \tag{5.263}$$

qui se transforme comme

$$^A\,\widehat{v}^\star \ = \ A^{\dagger -1}\,\widehat{v}^\star \ = \begin{pmatrix} v'^\star_{\dot 1} = \delta^\star\, v^\star_{\dot 1} - \beta^\star\, v^\star_{\dot 2} \\ v'^\star_{\dot 2} = -\gamma^\star\, v^\star_{\dot 1} + \alpha^\star\, v^\star_{\dot 2} \end{pmatrix} \tag{5.264}$$

c'est-à-dire, selon la représentation $D(0,\frac{1}{2})$.

La métrique $C_{aa'}$ et son inverse $(C^{-1})^{aa'} = -C_{aa'}$ permettent de faire monter ou descendre des indices *de même espèce* (pointés ou non pointés). Ainsi, les composantes

$$T^{a_1\cdots a_p}{}_{\dot b'_1\cdots \dot b'_q} \ = \ C_{\dot b_1 \dot b'_1}\cdots C_{\dot b_q \dot b'_q}\ T^{a_1\cdots a_p\ \dot b'_1\cdots \dot b'_q} \tag{5.265}$$

se transforment comme $D(\frac{1}{2},0)^{\otimes p}\otimes D(0,\frac{1}{2})^{\otimes q}$. Les composantes $T^a_{c\ \dot b}$ d'un tenseur d'ordre 3 se transforment selon

$$^AT^{a'}_{c'\ \dot b'} \ = \ \sum A^{a'}_a\,({}^tA^{-1})^{c'}_c\,(A^{\dagger -1})^{\dot b'}_{\dot b}\ T^a_{c\ \dot b}$$

Un avantage de cette façon d'envisager les représentations de $SL(2,C)$ est de pouvoir construire facilement des quantités invariantes sous le groupe en contractant entre eux des indices de même espèce (pointés ou non pointés). Ainsi, à partir du tenseur d'ordre 3 précédent, on peut construire un tenseur d'ordre 1 en posant $a = c$ et en sommant sur l'indice a :

$$T_{\dot b} = \sum_a T^a_{a\ \dot b}$$

48. En toute rigueur, ce spineur devrait être envisagé comme un élément d'un autre espace hermitien $\widehat{E_2}$ de dimension 2, correspondant à la représentation contragrédiente ${}^tA^{-1}$.

49. Ici encore, en toute rigueur, ce spineur devrait être considéré comme un élément d'un autre espace hermitien $\widehat{E_2^\star}$ de dimension 2, correspondant à la représentation $A^{\dagger -1}$.

Les grandeurs obtenues se transforment comme

$$
\begin{aligned}
{}^{A}T_{\dot{b}'} = \sum_{\dot{b}} \sum_{a'} A_{a}^{a'} \, ({}^{t}A^{-1})_{c}^{a'} \, (A^{\dagger -1})_{\dot{b}}^{\dot{b}'} \, T_{c\,\dot{b}}^{a} \; &= \; \sum_{\dot{b}} (A^{\dagger -1})_{\dot{b}}^{\dot{b}'} \sum_{a'} A_{a}^{a'} \, (A^{-1})_{a'}^{c} \, T_{c\,\dot{b}}^{a} \\
\equiv \; \sum_{\dot{b}} (A^{\dagger -1})_{\dot{b}}^{\dot{b}'} \sum_{a} T_{a\,\dot{b}}^{a} \; &= \; \sum_{\dot{b}} (A^{\dagger -1})_{\dot{b}}^{\dot{b}'} \, T_{\dot{b}}
\end{aligned}
$$

et constituent bien des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 1 "pointé".

5.5.1 Exemple de la représentation $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Comme

$$
D(\frac{1}{2}, 0) \otimes D(0, \frac{1}{2}) = D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \tag{5.266}
$$

la représentation $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ peut être obtenue en effectuant le produit tensoriel de la représentation fondamentale $D(\frac{1}{2}, 0)$ avec sa contragrédiente $D(0, \frac{1}{2})$, ou encore avec sa représentation conjuguée puisque celle-ci est équivalente à la contragrédiente. On considère alors les produits tensoriels

$$
\Psi^{a\,\dot{b}} \;=\; u^{a} \, v^{\dot{b}} \tag{5.267}
$$

des composantes contravariantes d'un spineur u d'ordre 1 de la représentation normale et d'un spineur $v^{\star}$ d'ordre 1 de la représentation conjuguée, définissant les quatre composantes d'un spineur mixte Ψ d'ordre 2 (un indice non pointé et un indice pointé). Ecrivons ce spineur sous forme matricielle :

$$
\Psi \equiv \begin{pmatrix} u^{1} \, v^{\dot{1}} & u^{1} \, v^{\dot{2}} \\ u^{2} \, v^{\dot{1}} & u^{2} \, v^{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{5.268}
$$

Comme il a été indiqué plus haut, la loi de transformation de ce spineur mis sous cette forme est

$$
{}^{A}\Psi = A \, \Psi \, A^{\dagger} \tag{5.269}
$$

Mais nous savons que toute matrice 2x2 telle que Ψ peut être mise en relation biunivoque avec un 4-vecteur V (à composantes a priori complexes) au moyen de la formule

$$
\Psi \;=\; \underset{\sim}{V} \;=\; V^{0} + \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\tau} \tag{5.270}
$$

La représentation $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est donc finalement celle des 4-vecteurs, et pour cette raison est qualifiée de représentation quadri-vectorielle. Explicitement, on a

$$
\begin{aligned}
V^{0} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Psi \;&=\; \frac{1}{2}(u^{1} \, v^{\dot{1}} + u^{2} \, v^{\dot{2}}) \quad , \quad V^{3} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Psi \, \tau_{3} \;=\; \frac{1}{2}(u^{1} \, v^{\dot{1}} - u^{2} \, v^{\dot{2}}) \\
V^{1} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Psi \, \tau_{1} \;&=\; \frac{1}{2}(u^{1} \, v^{\dot{2}} + u^{2} \, v^{\dot{1}}) \quad , \quad V^{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \Psi \, \tau_{2} \;=\; \frac{i}{2}(u^{1} \, v^{\dot{2}} - u^{2} \, v^{\dot{1}})
\end{aligned} \tag{5.271}
$$

On vérifie que la loi de transformation de V est bien celle d'un 4-vecteur, puisque

$$
{}^{A}V^{\mu} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \tau_{\mu} \, A \, \Psi \, A^{\dagger} \;=\; V^{\nu} \, \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \tau_{\mu} \, A \, \tau_{\nu} \, A^{\dagger} \;\equiv\; \Lambda_{\nu}^{\mu} \, V^{\nu}
$$

Du point de vue du groupe des rotations, ladite représentation $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est décomposable en une représentation scalaire (spin 0) et une représentation vectorielle (spin 1). L'opérateur de spin est ici donné par

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\tau} \otimes 1 - 1 \otimes \overrightarrow{\tau}^{\star}\right) \tag{5.272}$$

Calculons son carré :

$$\overrightarrow{S}^2 = \frac{1}{2}\left(3 - \overrightarrow{\tau} \otimes \cdot \overrightarrow{\tau}^{\star}\right) \tag{5.273}$$

Le carré de cet opérateur est

$$\left(\overrightarrow{S}^2\right)^2 = \frac{1}{4}\left(9 - 6\ \overrightarrow{\tau} \otimes \cdot\ \overrightarrow{\tau}^{\star} + \sum_{k,\ell} \tau_k\tau_\ell \otimes \tau_k^\star\tau_\ell^\star\right)$$

Utilisant

$$\tau_k\ \tau_\ell = \delta_{k\ell} + i\ \epsilon_{k\ell m}\tau_m \quad \text{et} \quad \sum_{k\ell} \epsilon_{k\ell m}\ \epsilon_{k\ell n}\ =\ 2\ \delta_{mn} \tag{5.274}$$

il vient

$$\sum_{k,\ell} \tau_k\tau_\ell \otimes \tau_k^\star\tau_\ell^\star = 3 + 2\ \ \overrightarrow{\tau} \otimes \cdot\ \overrightarrow{\tau}^{\star}$$

On en déduit la relation

$$\left(\overrightarrow{S}^2\right)^2 = 2\ \ \overrightarrow{S}^2 \tag{5.275}$$

qui montre que l'opérateur (5.273) a bien pour valeurs propres 0 (spin 0) et 2 (spin 1). Ses éléments de matrice sont

$$\left(\overrightarrow{S}^2\right)_{a\dot{b}}^{c\dot{d}} = \frac{1}{2}\left(3\,\delta_a^c\delta_b^d - \sum_k\ (\tau_k)_a^c(\tau_k)_d^b\right) \tag{5.276}$$

où l'on a utilisé la propriété $\tau_k^\star\ =\ {}^t\tau_k$.

Cette expression peut être simplifiée en tenant compte de la relation

$$\sum_k\ (\tau_k)_a^c(\tau_k)_d^b = 2\ \delta_a^b\delta_d^c - \delta_a^c\delta_d^b \tag{5.277}$$

que l'on démontre comme suit. Utilisons la notation "bra" et "ket" de Dirac. Soient $|\,b>$ et $|\,d>$ deux vecteurs de base de l'espace hermitien à deux dimensions E_2. On a donc $<d\,|\,b>=\delta_b^d$. L'opérateur $|\,d><b\,|$, qui est une matrice 2x2, peut être développé sur la base des matrices de Pauli :

$$|\,d><b\,| = x + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{\tau}$$

avec

$$2\,x = \mathrm{Tr}\ |\,d><b\,| =<b\,|\,d>=\delta_b^d \quad , \quad \text{et} \quad 2\,y^k =\ \mathrm{Tr}\ (\tau_k\ |\,d><b\,|) =<b\,|\tau_k|\,d>=(\tau_k)_d^b$$

D'où

$$|\,d><b\,| = \frac{1}{2}\left(\delta_b^d + \sum_k \tau_k\ (\tau_k)_d^b\right) \tag{5.278}$$

Puis, $|\,a>$ et $|\,c>$ étant l'un ou l'autre des vecteurs précédents, on a

$$<c\,|\,d><b\,|\,a> = \delta_d^c\delta_a^b = \frac{1}{2}\left(\delta_a^c\delta_b^d + \sum_k (\tau_k)_a^c\ (\tau_k)_d^b\right)$$

d'où (5.277) résulte immédiatement. On en déduit

$$\left(\overrightarrow{S}^2\right)_{a\dot{b}}^{c\dot{d}} = 2\,\delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^b\delta_d^c \tag{5.279}$$

Il est alors facile de vérifier que la combinaison $W^0 = \frac{1}{2}\left(\delta_1^a\delta_1^b + \delta_2^a\delta_2^b\right)$ est associée à un spin 0, tandis que les trois combinaisons

$$W^1 = \frac{1}{2}\left(\delta_1^a\delta_2^b + \delta_2^a\delta_1^b\right) \quad , \quad W^2 = \frac{i}{2}\left(\delta_1^a\delta_2^b - \delta_2^a\delta_1^b\right) \quad , \quad W^3 = \frac{1}{2}\left(\delta_1^a\delta_1^b - \delta_2^a\delta_2^b\right)$$

sont associées à un spin 1 (leurs projections sur $u^a v^{\dot{b}}$ conduisent aux combinaisons (5.271)).

5.5.2 La représentation $D(\frac{1}{2},0)\otimes D(\frac{1}{2},0)\otimes D(\frac{1}{2},0)$

Cette représentation de $SL(2,C)$ a pour éléments des tenseurs d'ordre 3 dont les indices sont non pointés. Elle est réductible et, d'après la formule

$$D(\frac{1}{2},0)\otimes D(\frac{1}{2},0)\otimes D(\frac{1}{2},0) = 2\ D(\frac{1}{2},0)\oplus D(\frac{3}{2},0) \tag{5.280}$$

elle se présente comme la somme directe de deux représentations $D(\frac{1}{2},0)$ et d'une représentation $D(\frac{3}{2},0)$, toutes irréductibles celles-là. On sait que pour toute représentation $D(j,0)$, la valeur du spin est unique et égale à j. Aussi, pour effectuer la réduction (5.280), il suffit de diagonaliser l'opérateur $\overrightarrow{S}^2$, c'est-à-dire, trouver les combinaisons de tenseurs d'ordre 3 qui se comportent, vis-à-vis de $SL(2,C)$, soit comme des spineurs de spin 1/2, soit comme des spineurs de spin 3/2.

L'opérateur (vectoriel) de spin a ici pour expression

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\tau}\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes\overrightarrow{\tau}\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes\overrightarrow{\tau}\right) \tag{5.281}$$

dans laquelle le symbole "1" doit être compris comme la matrice unité 2x2. Son carré est

$$\overrightarrow{S}^2 = \frac{1}{4}\,(9+Q) \tag{5.282}$$

avec

$$\begin{gathered} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ Q_1 = 1\otimes\overrightarrow{\tau}\cdot\otimes\overrightarrow{\tau} \quad , \quad Q_2 = \overrightarrow{\tau}\cdot\otimes 1\otimes\overrightarrow{\tau} \quad , \quad Q_3 = \overrightarrow{\tau}\cdot\otimes\overrightarrow{\tau}\otimes 1 \end{gathered} \tag{5.283}$$

Exprimons

$$Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + (Q_1Q_2 + Q_2Q_1) + (Q_1Q_3 + Q_3Q_1) + (Q_2Q_3 + Q_3Q_2)$$

On a

$$Q_1^2 = \sum_{k\ell} 1 \otimes \tau_k\tau_\ell \otimes \tau_k\tau_\ell$$

Utilisant encore (5.274), on obtient

$$Q_1^2 = 3 - 2Q_1 \quad , \quad \text{puis} \;\; Q_2^2 = 3 - 2Q_2 \quad , \quad Q_3^2 = 3 - 2Q_3$$

Puis

$$Q_1Q_2 + Q_2Q_1 = \sum_{k\ell} \tau_\ell \otimes \tau_k \otimes (\tau_k\tau_\ell + \tau_\ell\tau_k) = 2Q_3$$

D'où, finalement, $Q^2 = 9$. L'opérateur Q a donc deux valeurs propres, $q = -3$ et $q = +3$ correspondant, respectivement, aux valeurs $S = 1/2$ ($\overrightarrow{S}^2 = 3/4$) et $S = 3/2$ ($\overrightarrow{S}^2 = 15/4$) du spin. Le lecteur vérifiera que les éléments de matrice de Q s'expriment comme

$$Q_{abc}^{\alpha\beta\gamma} = 2\left(\delta_a^\alpha\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\beta + \delta_a^\gamma\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\alpha + \delta_a^\beta\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\gamma\right) - 3\,\delta_a^\alpha\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma \tag{5.284}$$

Ce n'est cependant pas la seule forme possible. Il faut en effet remarquer que puisqu'ici les indices des tenseurs ne peuvent prendre que deux valeurs, un tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique est nécessairement nul. Ceci conduit à la relation

$$\delta_a^\alpha\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma + \delta_a^\beta\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\alpha + \delta_a^\gamma\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\beta - \delta_a^\alpha\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\beta - \delta_a^\gamma\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\alpha - \delta_a^\beta\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\gamma = 0 \tag{5.285}$$

qui permet de récrire (5.286) sous la forme

$$Q_{abc}^{\alpha\beta\gamma} = 2\left(\delta_a^\beta\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\alpha + \delta_a^\gamma\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\beta\right) - \;\delta_a^\alpha\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma \tag{5.286}$$

Les projecteurs P_3 et P_{-3} sur les sous-espaces correspondant respectivement à la représentation $D(\frac{3}{2}, 0)$ et aux deux représentations $D(\frac{1}{2}, 0)$ s'ecrivent

$$P_3 = \frac{3+Q}{6} \quad , \quad P_{-3} = \frac{3-Q}{6}$$

A l'aide des relations précédentes, on montre aisément que P_3 est complètement symétrique :

$$(P_3)_{abc}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}\left(\delta_a^\alpha\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma + \delta_a^\beta\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\alpha + \delta_a^\gamma\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\beta + \delta_a^\alpha\,\delta_b^\gamma\,\delta_c^\beta + \delta_a^\gamma\,\delta_b^\beta\,\delta_c^\alpha + \delta_a^\beta\,\delta_b^\alpha\,\delta_c^\gamma\right) \tag{5.287}$$

La représentation $D(\frac{3}{2}, 0)$ est donc celle des tenseurs d'ordre 3 complètement symétriques. On peut en constituer une base orthonormée au moyen des spineurs (5.215). Pour simplifier l'écriture, posons $u^\uparrow = \overset{\circ}{u}_{1/2}$, $u^\downarrow = \overset{\circ}{u}_{-1/2}$. Une base de vecteurs propres de S^3 est

$$\begin{gathered}
u^\uparrow \otimes u^\uparrow \otimes u^\uparrow \quad (S^3 = +3/2) \\
\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(u^\uparrow \otimes u^\uparrow \otimes u^\downarrow + u^\uparrow \otimes u^\downarrow \otimes u^\uparrow + u^\downarrow \otimes u^\uparrow \otimes u^\uparrow\right) \quad (S^3 = +1/2) \\
\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(u^\downarrow \otimes u^\downarrow \otimes u^\uparrow + u^\downarrow \otimes u^\uparrow \otimes u^\downarrow + u^\uparrow \otimes u^\downarrow \otimes u^\downarrow\right) \quad (S^3 = -1/2) \\
u^\downarrow \otimes u^\downarrow \otimes u^\downarrow \quad (S^3 = -3/2)
\end{gathered} \tag{5.288}$$

Le projecteur P_{-3} n'a pas de symétrie particulière. On peut faire le choix de décomposer $(P_{-3})^{\alpha\beta\gamma}_{abc}$ en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique dans l'échange des deux indices b et c :

$$\begin{aligned}(P^a_{-3})^{\alpha\beta\gamma}_{abc} &= \tfrac{1}{6}\delta^\alpha_a\,(\delta^\beta_b\,\delta^\gamma_c - \delta^\gamma_b\,\delta^\beta_c)\\ (P^s_{-3})^{\alpha\beta\gamma}_{abc} &= \tfrac{1}{6}\Big(\delta^\alpha_a(\delta^\beta_b\,\delta^\gamma_c + \delta^\gamma_b\,\delta^\beta_c) - \delta^\gamma_a(\delta^\beta_b\delta^\alpha_c + \delta^\alpha_b\delta^\beta_c) - \delta^\beta_a(\delta^\alpha_b\delta^\gamma_c + \delta^\gamma_b\delta^\beta_c)\Big)\end{aligned} \tag{5.289}$$

Ces deux projecteurs correspondent chacun à l'une des deux représentations $D(\frac{1}{2},0)$ apparaissant dans la décomposition (5.280). Une de ces deux représentations est antisymétrique dans l'échange des deux derniers arguments du produit tensoriel $x\otimes y\otimes z$ tandis que l'autre est symétrique dans cet échange. Une base de la première peut être choisie comme

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\sqrt{2}}u^\uparrow\otimes(u^\uparrow\otimes u^\downarrow - u^\downarrow\otimes u^\uparrow) \qquad (S^3=+1/2)\\ &\tfrac{1}{\sqrt{2}}u^\downarrow\otimes(u^\downarrow\otimes u^\uparrow - u^\uparrow\otimes u^\downarrow) \qquad (S^3=-1/2)\end{aligned} \tag{5.290}$$

et une base de la seconde comme

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(u^\uparrow\otimes u^\uparrow\otimes u^\downarrow + u^\uparrow\otimes u^\downarrow\otimes u^\uparrow - 2u^\downarrow\otimes u^\uparrow\otimes u^\uparrow\right) \qquad (S^3=+1/2)\\ &\tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(u^\downarrow\otimes u^\downarrow\otimes u^\uparrow + u^\downarrow\otimes u^\uparrow\otimes u^\downarrow - 2u^\uparrow\otimes u^\downarrow\otimes u^\downarrow\right) \qquad (S^3=-1/2)\end{aligned} \tag{5.291}$$

5.5.3 La représentation $D(1,1)$

Cette représentation se trouve notamment dans la décomposition

$$\begin{aligned}D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \left[D(\frac{1}{2},0)\otimes D(0,\frac{1}{2})\right]\otimes\left[D(\frac{1}{2},0)\otimes D(0,\frac{1}{2})\right]\\ &= D(0,0)\oplus D(1,0)\oplus D(0,1)\oplus D(1,1)\end{aligned}$$

Nous chercherons ici à quelle condition un tenseur mixte d'ordre quatre $T^{a,b\,;\,\dot c,\dot d}$ peut appartenir à une telle représentation. Dans l'espace de ces tenseurs, les opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ ont pour expressions [50]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\tau}\otimes 1\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes\overrightarrow{\tau}\otimes 1\otimes 1\right)\\ \overrightarrow{B} &= -\frac{1}{2}\left(1\otimes 1\otimes\overrightarrow{\tau}^\star\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes 1\otimes\overrightarrow{\tau}^\star\right)\end{aligned}$$

Calculons :

$$\overrightarrow{A}^2 = \frac{1}{2}\left(3+\overrightarrow{\tau}\cdot\otimes\overrightarrow{\tau}\otimes 1\otimes 1\right)\ ,\quad \overrightarrow{B}^2 = \frac{1}{2}\left(3+\overrightarrow{\tau}^\star\cdot\otimes\overrightarrow{\tau}^\star\otimes 1\otimes 1\right) \tag{5.292}$$

soit, en utilisant la formule (5.277),

$$\left(\overrightarrow{A}^2\right)^{\alpha\,\beta\,;\,\dot\gamma\,\dot\delta}_{a\,b\,;\,\dot c\,\dot d} = \left(\delta^\alpha_a\,\delta^\beta_b + \delta^\beta\,\delta^\alpha_b\right)\delta^{\dot\gamma}_{\dot c}\,\delta^{\dot\delta}_{\dot d}\ ,\quad \left(\overrightarrow{B}^2\right)^{\alpha\,\beta\,;\,\dot\gamma\,\dot\delta}_{a\,b\,;\,\dot c\,\dot d} = \delta^\alpha_a\,\delta^\beta_b\,\left(\delta^{\dot\gamma}_{\dot c}\,\delta^{\dot\delta}_{\dot d} + \delta^{\dot\delta}_{\dot c}\,\delta^{\dot\gamma}_{\dot d}\right)$$

Il est alors clair que les plus grandes valeurs propres des opérateurs (5.292), en l'occurence 2 pour $j_A = 1$ et $j_B = 1$, sont obtenues pour des tenseurs symétriques à la fois en leurs indices non pointés

50. Rappelons que pour le spin 1/2, on a, d'après (5.172), $S^k = \frac{\tau_k}{2}$ $\;N^k = +i\,\frac{\tau_k}{2}$

et en leurs indices pointés. Au paragraphe précédent, nous avons fait une constatation similaire avec des tenseurs d'ordre 3 ayant des indices non pointés. Ce résultat se généralise au cas de tenseurs d'ordre quelconque et doit être mis en relation avec le fait que les diagrammes de Young de $SL(2, C)$ sont à une seule ligne [51].

Une représentation $D(j_a, j_b)$ peut être réalisée par des tenseurs possédant n_a indices non pointés et n_b indices pointés, à condition que l'on ait $n_a \geq 2j_a$ et $n_b \geq 2j_b$. Fixons n_a et n_b à leurs valeurs minimales $2j_a$ et $2j_b$, respectivement. Pour les tenseurs correspondants, les opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ ont pour expressions

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_a} \overbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\overrightarrow{\tau}}_{k} \otimes \cdots \otimes 1}^{n_a}$$

$$\overrightarrow{B} = -\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n_b} \overbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\overrightarrow{\tau}^{\star}}_{\ell} \otimes \cdots \otimes 1}^{n_b}$$

On a

$$\overrightarrow{A}^2 = \frac{1}{4}\left(3n_a + 2\sum_{k<m} 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\overrightarrow{\tau}}_{k} \cdot \otimes \cdots \otimes \underbrace{\overrightarrow{\tau}}_{m} \otimes \cdots \otimes 1\right)$$

D'où, en utilisant encore (5.277) :

$$\left(\overrightarrow{A}^2\right)^{r_1\, r_2 \cdots r_{n_a}\,;\, \dot{s}_1\, \dot{s}_2 \cdots \dot{s}_{n_b}}_{a_1\, a_2 \cdots a_{n_a}\,;\, \dot{c}_1\, \dot{c}_2 \cdots \dot{c}_{n_b}} = \frac{1}{4}\left(3n_a\,\delta + 2\sum_{k<m}\,[\,2\delta'_{km} - \delta\,]\right)$$

$$\text{avec} \quad \delta = \delta^{r_1}_{a_1}\,\delta^{r_2}_{a_2}\,\cdots\,\delta^{r_{n_a}}_{a_{n_a}}\,\delta^{\dot{s}_1}_{\dot{c}_1}\,\delta^{\dot{s}_2}_{\dot{c}_2}\,\cdots\,\delta^{\dot{s}_{n_b}}_{\dot{c}_{n_b}}\ ,\quad \delta'_{km} = \delta^{r_1}_{a_1}\,\cdots\,\delta^{r_m}_{a_k}\,\cdots\,\delta^{r_k}_{a_m}\,\cdots\,\delta^{r_{n_a}}_{a_{n_a}}\ \delta^{\dot{s}_1}_{\dot{c}_1}\,\cdots\,\delta^{\dot{s}_{n_b}}_{\dot{c}_{n_b}}$$

soit encore

$$\left(\overrightarrow{A}^2\right)^{r_1\, r_2 \cdots r_{n_a}\,;\, \dot{s}_1\, \dot{s}_2 \cdots \dot{s}_{n_b}}_{a_1\, a_2 \cdots a_{n_a}\,;\, \dot{c}_1\, \dot{c}_2 \cdots \dot{c}_{n_b}} = \frac{1}{4}\left([\,3n_a\ - n_a(n_a-1)\,]\,\delta + 4\sum_{k<m}\delta'_{km}\right) \tag{5.293}$$

On a de même

$$\left(\overrightarrow{B}^2\right)^{r_1\, r_2 \cdots r_{n_a}\,;\, \dot{s}_1\, \dot{s}_2 \cdots \dot{s}_{n_b}}_{a_1\, a_2 \cdots a_{n_a}\,;\, \dot{c}_1\, \dot{c}_2 \cdots \dot{c}_{n_b}} = \frac{1}{4}\left([\,3n_b\ - n_b(n_b-1)\,]\,\delta + 4\sum_{\ell<p}\delta''_{\ell p}\right) \tag{5.294}$$

où

$$\delta''_{\ell p} = \delta^{r_1}_{a_1}\,\cdots\,\delta^{r_{n_a}}_{a_{n_a}}\ \delta^{\dot{s}_1}_{\dot{c}_1}\,\cdots\,\delta^{\dot{s}_p}_{\dot{c}_\ell}\,\cdots\,\delta^{\dot{s}_\ell}_{\dot{c}_p}\,\cdots\,\delta^{\dot{s}_{n_b}}_{\dot{c}_{n_b}}$$

Il est évident que l'on obtient les plus grandes valeurs propres des opérateurs (5.293) et (5.294) pour des tenseurs complètement symétriques en leurs indices non pointés et en leurs indices pointés. En effet, on a dans ce cas

$$4\sum_{k<m}\delta'_{km} \equiv 2n_a(n_a-1)\,\delta\ ,\quad 4\sum_{\ell<p}\delta''_{\ell p} \equiv 2n_b(n_b-1)\,\delta$$

51. Voir H. Bacry, loc. cit., § 4.10 et p. 276.

et pour ces tenseurs

$$\overrightarrow{A}^2 \equiv \frac{1}{4}\,[\,3n_a\,+n_a(n_a-1)\,] = \frac{n_a}{2}(\frac{n_a}{2}+1) = j_a(j_a+1)$$
$$\overrightarrow{B}^2 \equiv \frac{1}{4}\,[\,3n_b\,+n_b(n_b-1)\,] = \frac{n_b}{2}(\frac{n_b}{2}+1) = j_b(j_b+1)$$

d'où le résultat annoncé.

5.6 Représentations irréductibles finies du groupe $\mathcal{L}^{\uparrow}$

5.6.1 La réflexion d'espace

En plus du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$, le groupe de Lorentz orthochrone $\mathcal{L}^{\uparrow}$ contient la *réflexion d'espace*. Dans un référentiel donné, il s'agit d'une opération de symétrie consistant à renverser les signes des composantes spatiales de tout 4-vecteur représentant un événement ($\overrightarrow{r} \to -\overrightarrow{r}$), leurs composantes temporelles restant inchangées. En Mécanique Classique, il s'ensuit que la quantité de mouvement d'une particule de masse m, définie par

$$\overrightarrow{p}\,(t) = m\,\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overrightarrow{r}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}\,(t)}{\Delta t} \tag{5.295}$$

où $\overrightarrow{r}\,(t)$ est son vecteur position instantanée, change aussi de signe dans cette opération, tandis que le moment cinétique

$$\overrightarrow{L}\,(t) = \overrightarrow{r}\,(t)\ \wedge\ \overrightarrow{p}\,(t) \tag{5.296}$$

ne change pas. Ceci illustre le fait que les 3-vecteurs se classent en deux catégories distinctes, selon leur comportement vis-à-vis de la réflexion d'espace. Les uns, tels le vecteur position ou la quantité de mouvement, changent de signe dans cette opération. Ils sont qualifiés de *vecteurs polaires*, ou encore de "vrais" vecteurs, et on leur attribue une *parité* égale à -1. Les autres, tels le moment cinétique, ne changent pas de signe dans ladite opération. Ils sont qualifiés de *pseudo-vecteurs* ou encore de *vecteurs axiaux*, et on leur attribue une parité égale à $+1$.

Au chapitre 1, il a été vu que, via les crochets de Poisson, le moment cinétique s'interprète comme le générateur infinitésimal des rotations dans l'espace ordinaire. Les rotations et la réflexion d'espace étant des opérations géométriques de caractère général, on peut donc supposer que la nature axiale du moment cinétique puisse être transposée à n'importe quelle autre représentation de ces opérations, c'est-à-dire qu'elle soit reconnue comme une propriété intrinsèque aux opérateurs de spin $\overrightarrow{S}$. Cette supputation est d'ailleurs confortée au vu de la définition (5.57) de ces opérateurs à partir des générateurs (5.53) de la représentation quadri-vectorielle du groupe de Lorentz restreint. En effet, les opérateurs de spin sont donnés par

$$S^1 = J^{23} \quad , \quad S^2 = J^{31} \quad , \quad S^3 = J^{12}$$

où, pour cette représentation, les opérateurs $J^{k\ell}$ sont les produits tensoriels *antisymétriques*

$$J^{k\ell} = J_{k\ell} = -i(e_k \otimes e_\ell - e_\ell \otimes e_k)$$

les indices k et ℓ se réfèrant ici aux directions spatiales ($k, \ell = 1,2,3$). Or, par réflexion d'espace, $e_k \to -e_k$ pour $k = 1,2,3$. Par suite, $J_{k\ell} \to +J_{k\ell}$, et les opérateurs de spin correspondants restent donc bien inchangés dans l'opération.

Ce retour sur la relation de définition (5.57) permet en outre de mettre en lumière le rapport, spécifique de la dimension 3, entre pseudo-vecteurs et (vrais) tenseurs antisymétriques d'ordre 2. En dimension n, un tenseur d'ordre 2 et antisymétrique possède $n(n-1)/2$ composantes a priori non nulles ; et ce nombre n'est égal à n que pour $n = 3$. Ce n'est donc que pour cette dimension qu'un tenseur antisymétrique d'ordre 2 peut être représenté par un vecteur. Si le tenseur est un *vrai* tenseur, c'est-à-dire, si ses composantes ne changent pas par réflexion d'espace, le 3-vecteur qui le représente est un pseudo-vecteur. Inversement, un pseudo-vecteur de composantes P^m peut toujours être associé à un vrai tenseur $T_{k\ell} = T^{k\ell}$ antisymétrique via la relation

$$T_{k\ell} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{k\ell m}\, P^m \tag{5.297}$$

Par exemple, le (vrai) tenseur d'ordre 2 associé au moment cinétique (5.296) a pour composantes

$$J_{k\ell} = x_k\, p_\ell - x_\ell\, p_k = \frac{1}{2}\, \epsilon_{k\ell m}\, L^m$$

La relation (5.297) peut être étendue aux vecteurs polaires pour construire un *pseudo-tenseur* antisymétrique d'ordre 2, dont les composantes changent de signe par réflexion d'espace. Les notions de (vrai) tenseur et de pseudo-tenseur se généralisent d'ailleurs aux tenseurs d'ordre quelconque [52] : effectuant la réflexion d'espace, un tenseur d'ordre q est un (vrai) tenseur si ses composantes se voient multipliées par $(-1)^q$; c'est un pseudo-tenseur si ses composantes se voient multipliées par $(-1)^{q+1}$. Par exemple, le tenseur complètement antisymétrique $\epsilon_{k\ell m}$ est un pseudo-tenseur.

D'après (5.57) à nouveau, les opérateurs de boosts N^k se comportent comme les composantes d'un vrai vecteur. Il s'ensuit que les opérateurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ définis en (5.61) *s'échangent l'un en l'autre* par réflexion d'espace : si $\mathcal{P}$ est l'opérateur qui effectue cet échange, on a donc

$$\mathcal{P}\ \overrightarrow{A}\ \mathcal{P}^{-1}\ =\ \overrightarrow{B}\quad ,\quad \mathcal{P}\ \overrightarrow{B}\ \mathcal{P}^{-1}\ =\ \overrightarrow{A} \tag{5.298}$$

Une représentation irréductible du groupe orthochrone doit contenir au moins une représentation irréductible de $SL(2,C)$, groupe de revêtement de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Dans ce paragraphe, nous ne considèrerons que les représentations *finies* $D(j_1, j_2)$ de ce groupe.

Notons $V_{m_a\, m_b}$ les vecteurs de base d'une représentation $\mathcal{D}(j_a, j_b)$ de $\mathcal{L}^\uparrow$, vecteurs propres communs de $\overrightarrow{A}^2$, $\overrightarrow{B}^2$, A^3 et B^3, avec les valeurs propres respectives $j_a(j_a+1)$, $j_b(j_b+1)$, m_a et m_b. Notons encore Π l'opérateur qui représente $\mathcal{P}$ dans ladite représentation, et posons $W_{m_a\, m_b} = \Pi\ V_{m_a\, m_b}$. Puisque

$$B^3\, W_{m_a\, m_b} = \Pi\, A^3\, \Pi^{-1}\, \Pi\, V_{m_a\, m_b} = \Pi\, A^3\, V_{m_a\, m_b} = m_a\, W_{m_a\, m_b}$$

et que

$$A^3\, W_{m_a\, m_b} = \Pi\, B^3\, \Pi^{-1}\, \Pi\, V_{m_a\, m_b} = \Pi\, B^3\, V_{m_a\, m_b} = m_b\, W_{m_a\, m_b}$$

deux possibilités se présentent.

♠ Si $j_a \neq j_b$, les spectres de valeurs propres respectifs de A^3 et B^3 réalisées par les vecteurs W sont différents de ceux correspondant aux vecteurs V. Il s'ensuit que ces deux suites de vecteurs sont nécessairement différentes, et la représentation envisagée doit contenir les deux représentations $D(j_a, j_b)$ <u>et</u> $D(j_b, j_a)$. On posera donc

$$\mathcal{D}(j_a, j_b) = D(j_a, j_b) \oplus D(j_b, j_a) \tag{5.299}$$

52. L'appellation de tenseur étant ici relative au groupe des rotations.

Il s'agit d'une représentation de dimension $2(2j_a + 1)(2j_b + 1)$, engendrée par les deux suites de vecteurs V et W, avec

$$W_{m_a\,m_b} = \Pi\, V_{m_a\,m_b} \quad , \quad V_{m_a\,m_b} = \Pi\, W_{m_a\,m_b} \tag{5.300}$$

♠ On a $j_a = j_b$. Définissons alors

$$U^{\pm}_{m_a\,m_b} = V_{m_a\,m_b} \pm W_{m_b\,m_a}$$

On a

$$A^3\, U^{\pm}_{m_a\,m_b} = m_a U^{\pm}_{m_a\,m_b} \quad , \quad B^3\, U^{\pm}_{m_a\,m_b} = m_b U^{\pm}_{m_a\,m_b} \quad , \quad \Pi\, U^{\pm}_{m_a\,m_b} = \pm U^{\pm}_{m_a\,m_b}$$

d'où il ressort que les suites de vecteurs U^+ et U^- engendrent chacune pour leur part des sous-espaces $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$ *invariants* sous le groupe orthochrone. Pour ce cas, il existe donc deux représentations irréductibles correspondant à $D(j, j)$, de dimension $(2j + 1)^2$ et pour lesquelles la parité est bien définie :

• l'une, notée $\mathcal{D}^+_{j\,j}$ correspondant à la parité $+1$:

$$\Pi\, V_{m\,m'} = +V_{m\,m'} \tag{5.301}$$

• l'autre, notée $\mathcal{D}^-_{j\,j}$, correspondant à la parité -1 :

$$\Pi\, V_{m\,m'} = -V_{m\,m'} \tag{5.302}$$

En particulier, la représentation $\mathcal{D}^+_{00}$ est la représentation *scalaire*, la représentation $\mathcal{D}^-_{00}$ est la représentation *pseudo-scalaire*, la représentation $\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ celle des vecteurs, la représentation $\mathcal{D}^+_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ celle des *pseudo-vecteurs*. Les *vrais* tenseurs d'ordre n se transforment comme $\left(\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^{\otimes n}$ tandis que les *pseudo-tenseurs* se transforment comme $\left(\mathcal{D}^-_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^{\otimes n-1} \otimes \mathcal{D}^+_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.