Chapitre 6

Le groupe de Poincaré et ses représentations quantiques [1]

6.1 Groupe de Poincaré, groupe de Poincaré restreint

Le groupe de Poincaré *complet* est l'ensemble des transformations linéaires qui laissent invariant le produit scalaire $x \cdot y$ où x et y sont deux 4-vecteurs joignant chacun deux points d'espace-temps. Une telle *transformation de Poincaré* s'envisage donc comme l'association d'une transformation de Lorentz Λ autour d'un point O et d'une translation subséquente d'espace-temps caractérisée par un 4-vecteur a. On la note (a, Λ). Un 4-vecteur x d'origine O sera ainsi transformé selon

$$x \stackrel{(a,\Lambda)}{\longrightarrow} x' = \Lambda(x) + a \tag{6.1}$$

Comme il a été vu, les transformations de Lorentz forment un groupe $\mathcal{L}$. Quant aux translations, elle forment aussi un groupe T qui, lui, est abélien (voir plus loin). L'association [2] de ces deux groupes constitue le groupe de Poincaré $\mathcal{P}$. Ce dernier, comme le groupe de Lorentz, possède quatre nappes : $\mathcal{P}_+^\uparrow$, $\mathcal{P}_-^\uparrow$, $\mathcal{P}_+^\downarrow$, $\mathcal{P}_-^\downarrow$, parmi lesquelles seule la composante $\mathcal{P}_+^\uparrow$ est connexe et forme un groupe appelé *groupe de Poincaré restreint*. Les autres nappes de $\mathcal{P}$ sont obtenues en adjoignant à $\mathcal{P}_+^\uparrow$ les opérations discrètes Π (réflexion d'espace) et $\mathcal{T}$ (renversement du sens du temps) [3].

De (6.1), on déduit

$$x' \stackrel{(a',\Lambda')}{\longrightarrow} x'' = \Lambda'(x') + a' = (\Lambda'\Lambda)(x) + a' + \Lambda'(a) \tag{6.2}$$

d'où la loi de composition des transformations de Poincaré :

$$(a', \Lambda')(a, \Lambda) = (a' + \Lambda'(a), \Lambda'\Lambda) \tag{6.3}$$

où Λ et Λ' sont deux transformations de Lorentz autour d'un même point arbitraire O. Elle conduit aux relations suivantes

$$(a, \Lambda)^{-1} = \left(-\Lambda^{-1}(a), \Lambda^{-1}\right) \tag{6.4}$$

$$(a', 1)(a, 1) = (a, 1)(a', 1) \quad \text{et} \quad (a', 1)(a, 1)(a', 1)^{-1} = (a, 1) \tag{6.5}$$

1. Ce chapitre s'inspire fortement des travaux suivants : P. Moussa, R. Stora, dans "Methods in subnuclear Physics", Hercegnovi 1966, vol. II, p.265, Gordon and Breach ; P. Moussa, Thèse d'état, Orsay (1968) ; D. Zwanziger, Phys. Rev. 133B (1964), 1036 ; G. Mahoux, Cours de deuxième année de troisième cycle de Physique théorique, Faculté d'Orsay 1970-1971.
2. En fait, leur produit semi-direct.
3. Voir § 5.1.1.

$$(0,\Lambda)(a,1)=(\Lambda(a),\Lambda) \quad , \quad (0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda)^{-1}=(\Lambda(a),1) \quad \text{et}$$
$$(a,1)(0,\Lambda)(a,1)^{-1}=(a-\Lambda(a),\Lambda) \tag{6.6}$$
$$(0,\Lambda')(0,\Lambda)=(0,\Lambda'\Lambda) \quad \text{et} \quad (0,\Lambda')(0,\Lambda)(0,\Lambda')^{-1}=(0,\Lambda'\Lambda\Lambda'^{-1}) \tag{6.7}$$

où, de façon évidente, (6.5) et (6.6) expriment le fait que le groupe des translations T est abélien et qu'il s'agit d'un sous groupe invariant de $\mathcal{P}$; c'est en fait le *seul* sous-groupe invariant non trivial de $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

Le groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$, produit semi-direct de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et du groupe des translations, est doublement connexe. Son groupe de revêtement $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ est le produit semi-direct de $SL(2,C)$, groupe de revêtement de $\mathcal{L}_+^\uparrow$, et du groupe des translations.

Les relations précédentes pourraient nous permettre d'établir les relations de commutation définissant l'algèbre de Lie de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, comprenant les six générateurs $J_{\mu\nu}$ de $SL(2,C)$ et les quatre générateurs P_μ du groupe des translations T. Cependant, il nous paraît plus simple de rechercher les représentants de ces opérateurs agissant sur une fonction scalaire $f(x)$, puis leurs relations de commutation. Une transformation infinitésimale du groupe sera écrite comme

$$(a,\Lambda)=1-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}+ia^\mu P_\mu \tag{6.8}$$

où $\omega^{\mu\nu}$ (4-tenseur antisymétrique) et a^μ (4-vecteur) sont des grandeurs infinitésimales. Notons que l'on a ici [4]

$$\Lambda=1-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad (L^{\mu\nu})^\alpha_\beta=i\left(g^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta-g^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta\right) \tag{6.9}$$

et

$$[(a,\Lambda)(x)]_\mu=x'_\mu=x_\mu+\omega_{\mu\nu}x^\nu+a_\mu \tag{6.10}$$

D'où

$$\begin{aligned} f^{(a,\Lambda)}(x)&=f(x')=f(x)+a^\mu\partial_\mu f(x)+\omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu f(x)\\ &=f(x)-i\left\{a^\mu(i\partial_\mu)-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left[x_\mu(i\partial_\nu)-x_\nu(i\partial_\mu)\right]\right\}f(x) \end{aligned} \tag{6.11}$$

On en déduit les expressions des représentants recherchés :

$$P_\mu=i\partial_\mu \quad , \quad J_{\mu\nu}=i\left(x_\mu P_\nu-x_\nu P_\mu\right) \tag{6.12}$$

et leurs relations de commutation [5] :

$$[\,P_\mu,P_\nu\,]=0 \tag{6.13}$$
$$[\,J_{\mu\nu},J_{\rho\sigma}\,]=i\left\{g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}-g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma}-g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}+g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}\,\right\} \tag{6.14}$$
$$[\,J_{\mu\nu},P_\rho\,]=i\left\{g_{\nu\rho}P_\mu-g_{\mu\rho}P_\nu\,\right\} \tag{6.15}$$

Il est clair que, bien qu'ayant été obtenues au moyen d'une représentation particulière, ces relations sont bien celles définissant l'algèbre de Lie de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Les relations additionnelles

4. Voir chapitre 5, eq. (5.231).
5. Comme il se doit, on retrouve ici, eq. (6.14), les relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SL(2,C)$, eq. (5.56).

$$\left[\, J_{\mu\nu}, P^2 \,\right] = 0 \ , \quad \left[\, P_\mu, P^2 \,\right] = 0 \quad (P^2 = P_\rho P^\rho) \tag{6.16}$$

confirment que l'opérateur P^2 est un invariant de l'algèbre.

Rappelons que les opérateurs $J_{\mu\nu}$ engendrent des transformations de Lorentz *autour du point* O. La relation (6.6) indique qu'après une translation de 4-vecteur a, une transformation de Lorentz $(0, \Lambda)$ autour d'un point O devient $(a - \Lambda(a), \Lambda)$. Cette dernière transformation s'interprète comme l'équivalente de la première, mais cette fois, *autour du point* O' tel que $OO' = a$. En considérant une transformation infinitésimale, on obtient

$$\begin{aligned}(a - \Lambda(a), \Lambda) &= 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + iP_\mu \left\{a^\mu - (a^\mu + \omega^{\mu\nu} a_\nu)\right\} \\ &= 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} \left\{a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu\right\} = 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J'_{\mu\nu} \\ &\text{avec} \quad J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu)\end{aligned} \tag{6.17}$$

et par translation a, les générateurs $J_{\mu\nu}$ se transforment donc en $J'_{\mu\nu}$. Il est facile de vérifier que l'ensemble des opérateurs $J'_{\mu\nu}$ et P_ρ satisfont bien aux relations de commutation établies plus haut. Remarquons ici que non seulement l'équation (6.15) signifie que l'ensemble des opérateurs $\{P_\mu\}$ se transforme comme un 4-vecteur par transformation de Lorentz, mais elle indique aussi qu'une translation change nécessairement les générateurs $J_{\mu\nu}$ des transformations de Lorentz autour d'un point donné. On trouve en effet

$$J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + [\, ia^\rho P_\rho, J_{\mu\nu} \,] = J_{\mu\nu} - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu) \tag{6.18}$$

résultat conforme à (6.17). Notons enfin que (6.13) indique que les composantes P_μ sont invariantes par translation et que le 4-vecteur $\{P_\mu\}$ se comporte donc comme un 4-vecteur libre.

6.2 Représentations quantiques de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

Nous savons de la Mécanique Classique que la conservation de l'énergie totale, de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total d'un système physique *isolé* résulte d'une propriété d'invariance de celui-ci sous les transformations spatio-temporelles, et que ces grandeurs cinématiques représentent les générateurs de ces transformations [6].

En Mécanique Quantique, l'état d'un système isolé est décrit au moyen d'un vecteur d'état appartenant à un certain espace de Hilbert H. Dans un traitement relativiste, pour exprimer l'invariance globale du système sous un groupe de transformations spatio-temporelles, cet espace H se doit d'être un espace de représentation de ce groupe. En l'occurence, il s'agira ici du revêtement du groupe de Poincaré orthochrone, associant $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ et l'opération de parité.

Si le système considéré est décomposable en sous-systèmes indépendants, on admet que son état se construit comme produit tensoriel des vecteurs d'états décrivant chacun des sous-systèmes. Dans ce cas, l'espace de représentation H sera réductible vis-à-vis du groupe considéré. Par contre, si le système ne peut se décomposer en sous-structures plus fondamentales, l'espace H devra constituer une représentation irréductible du groupe.

On est ainsi amené à associer à chaque particule supposée "élémentaire" une représentation irréductible du groupe de Poincaré orthochrone.

6. Voir les chapitres 1 et 2, où l'invariance globale d'un système est exprimée par l'invariance de son Lagrangien. Le traitement équivalent en Mécanique Quantique Relativiste sera considéré dans un chapitre ultérieur.

Identifiant, à l'instar de ce qui est fait en Mécanique Classique, les générateurs P_μ et $J_{\mu\nu}$ des transformations de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ aux observables "énergie-impulsion" et "moment angulaire généralisé", respectivement, ces opérateurs se devront d'être des opérateurs *hermitiques* engendrant par conséquent des représentants des transformations qui seront des opérateurs *unitaires* conservant les normes des vecteurs d'état. Les représentations physiques envisagées de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ seront donc exclusivement unitaires. Il en sera de même pour la représentation de l'opération de parité. Notons que $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ étant non-compact, ses représentations unitaires sont de dimension infinie.

En Mécanique Quantique, un vecteur d'état d'un système est envisagé comme vecteur propre d'un nombre maximal d'observables commutantes caractérisant le système étudié. Pour ce qui concerne le groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, un premier ensemble d'observables commutantes est constitué par les quatre opérateurs P_μ. Soit donc $|\, p >$ le vecteur propre commun à ces opérateurs et tel que

$$P_\mu \,|\, p >= p_\mu \,|\, p > \tag{6.19}$$

L'état décrit par ce vecteur est celui d'un système possédant la 4-impulsion $\{p_\mu\}$, p_0 étant son énergie, prise ici positive, et $\overrightarrow{p}$ sa quantité de mouvement [7]. La grandeur $m^2 = p^2 = p_0^2 - \overrightarrow{p}^2$ est un invariant relativiste, lequel, s'agissant de décrire une particule réelle, sera supposé positif ou nul et $m = +\sqrt{m^2} \geq 0$ s'identifiera à la masse de la particule. Le 4-vecteur p sera donc soit du genre temps, soit du genre lumière, avec $p_0 = +\sqrt{m^2 + \overrightarrow{p}^2}$. Notons que le groupe des translations étant non-compact, le spectre des P_μ n'est pas borné et pour cette raison, l'espace de représentation H est d'emblée de dimension infinie.

Recherchant ensuite dans l'algèbre des $J_{\mu\nu}$ des combinaisons de ces opérateurs commutant avec les quatre opérateurs P_μ, il est clair que celles-ci devront engendrer des transformations de Lorentz conservant le 4-vecteur p, c'est-à-dire, des transformations du *petit groupe de* p. Dans la section 5.4, nous avons montré que les générateurs des petits groupes s'expriment à l'aide de l'opérateur de Pauli-Lubanski

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\rho\sigma}P^\nu \tag{6.20}$$

qui vérifie $W \cdot P = P \cdot W = 0$. Montrons que ces opérateurs satisfont les relations de commutation :

$$[\, W_\mu, P_\nu\,] = 0 \tag{6.21}$$

$$[\, J_{\mu\nu}, W_\rho\,] = i\,\{g_{\nu\rho}W_\mu - g_{\mu\rho}W_\nu\} \tag{6.22}$$

$$[\, W_\mu, W_\nu\,] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma \tag{6.23}$$

où (6.22) signifie que les quatre opérateurs W_μ sont bien les composantes d'un 4-vecteur [8]. Calculons tout d'abord (6.21). Compte tenu de (6.13), on a :

$$\begin{aligned}[\, W_\mu, P_\nu\,] &= \frac{1}{2}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta\gamma}\,[\, P_\alpha\, J_{\beta\gamma}, P_\nu\,] = \frac{1}{2}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta\gamma}\, P_\alpha\,[\, J_{\beta\gamma}, P_\nu\,] \\ &= \frac{i}{2}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta\gamma}\, P_\alpha\,\{g_{\gamma\nu}P_\beta - g_{\beta\nu}P_\gamma\} = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, P^\alpha\, P^\beta = 0\end{aligned}$$

Le calcul direct [9] de (6.22) est un peu plus long. Développons :

$$[\, J_{\mu\nu}, W_\rho\,] = \frac{1}{2}\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,[\, J_{\mu\nu}, P_\alpha\, J_{\beta\gamma}\,] = \frac{1}{2}\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\{P_\alpha\,[\, J_{\mu\nu}, J_{\beta\gamma}\,] + [\, J_{\mu\nu}, P_\alpha\,]\, J_{\beta\gamma}\}$$

7. Nous utilisons ici et dans la suite le système d'unités où $c = 1$, $\hbar = 1$.
8. En fait, un pseudo-vecteur.
9. C'est-à-dire, sans projeter sur un système d'axes particulier.

$$= \frac{i}{2}\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\;\{P_\alpha\,(g_{\nu\beta}J_{\mu\gamma} - g_{\mu\beta}J_{\nu\gamma} - g_{\nu\gamma}J_{\mu\beta} + g_{\mu\gamma}J_{\nu\beta}) + (g_{\nu\alpha}P_\mu - g_{\mu\alpha}P_\nu)\;J_{\beta\gamma}\}$$

$$= \frac{i}{2}\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\;\left\{2\,(g_{\mu\gamma}\,g_{\nu\lambda} - g_{\nu\gamma}\,g_{\mu\lambda})P_\alpha J^\lambda{}_\beta + (g_{\nu\alpha}\,g_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\lambda})\,P^\lambda J_{\beta\gamma}\right\}$$

Nous utiliserons dans la suite les relations [10]

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\left[\,\delta^\alpha_\mu\,\delta^\beta_\nu\,\delta^\gamma_\rho + \delta^\alpha_\nu\,\delta^\beta_\rho\,\delta^\gamma_\mu + \delta^\alpha_\rho\,\delta^\beta_\mu\,\delta^\gamma_\nu - \delta^\alpha_\mu\,\delta^\beta_\rho\,\delta^\gamma_\nu - \delta^\alpha_\nu\,\delta^\beta_\mu\,\delta^\gamma_\rho - \delta^\alpha_\rho\,\delta^\beta_\nu\,\delta^\gamma_\mu\,\right] \tag{6.24}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\left[\,\delta^\alpha_\mu\,\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\,\delta^\beta_\mu\,\right] \tag{6.25}$$

Il vient

$$[\,J_{\mu\nu}, W_\rho\,] = \frac{i}{2}\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\;\left\{\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_{ab\gamma\lambda}\,P_\alpha\,J^\lambda{}_\beta + \frac{1}{2}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\,P^\lambda\,J_{\beta\gamma}\right\}$$

$$= \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\left\{2\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\gamma\lambda}\,P_\alpha\,J^\lambda{}_\beta + \epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\,P^\lambda\,J_{\beta\gamma}\right\}$$

$$= \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\left\{2\epsilon_\rho{}^{\gamma\beta\alpha}\,\epsilon_{ab\alpha\lambda}\,P_\gamma\,J^\lambda{}_\beta + \epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\,P^\lambda\,J_{\beta\gamma}\right\}$$

$$= \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\;\left\{\,2P_\gamma\,J^\lambda{}_\beta + P^\lambda\,J_{\beta\gamma}\right\}$$

Or, de (6.24) on tire

$$\epsilon_{\lambda\beta\gamma\theta}\,W^\theta = P_\lambda J_{\beta\gamma} + P_\beta J_{\gamma\lambda} + P_\gamma J_{\lambda\beta} \tag{6.26}$$

D'où

$$[\,J_{\mu\nu}, W_\rho\,] = \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\;\left\{\,P_\gamma\,J^\lambda{}_\beta + P_\beta\,J^\lambda{}_\gamma + \epsilon^\lambda{}_{\beta\gamma\theta}W^\theta\right\}$$

$$\equiv \frac{i}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\,\epsilon^\lambda{}_{\beta\gamma\theta}\,W^\theta$$

Mais

$$\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon^\lambda{}_{\beta\gamma\theta} = 2\left(\delta^\lambda_\rho\,\delta^\alpha_\theta - g_{\rho\theta}\,g^{\alpha\lambda}\right)\;\;,\quad \epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\; = -2\,(g_{\mu\lambda}\,g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\lambda})$$

et

$$\frac{1}{4}\epsilon^{ab}{}_{\mu\nu}\,\epsilon_\rho{}^{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{ab\lambda\alpha}\,\epsilon^\lambda{}_{\beta\gamma\theta}\; = g_{\mu\theta}\,g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\,g_{\nu\theta}$$

d'où l'on déduit (6.22). Tenant compte de (6.21) et (6.22), on obtient immédiatement.

$$[\,W_\mu, W_\nu\,] = \frac{1}{2}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta\gamma}\;[\,P_\alpha\,J_{\beta\gamma}, W_\nu\,] = \frac{i}{2}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta\gamma}\,P_\alpha\;\{g_{\gamma\nu}W_\beta - g_{\beta\nu}W_\gamma\} = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,P^\alpha W^\beta$$

Notons que

$$\left[\,P_\mu, W^2\,\right] = 0\;,\quad \left[\,W_\mu, W^2\,\right] = 0 \qquad (W^2 = W_\mu W^\mu) \tag{6.27}$$

10. Voir eq. (3.68), chapitre 3.

On peut alors constituer un ensemble de 6 observables commutantes en associant les quatre opérateurs P_μ, une des composantes du 4-vecteur W et l'invariant W^2. On montre que cet ensemble représente bien, pour $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, un ensemble *maximal*. Ceci est conforme à la formule

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2}(D + I) \tag{6.28}$$

donnant le nombre d'observables $\mathcal{O}$ en fonction de la dimension D de l'algèbre de Lie et du nombre I d'invariants [11]. En l'occurence, on a ici $D = 10$, $I = 2$ (P^2 et W^2), donc $\mathcal{O} = 6$.

Au chapitre 5, section 5.4, ont été répertoriés les divers petits groupes, selon le genre des 4-vecteurs auquels ils sont associés (genre temps, lumière ou espace). Pour tous, les générateurs sont donnés par les composantes de W selon les 4-vecteurs de base de l'hyperplan orthogonal au 4-vecteur p. L'une des composantes notamment engendre des rotations dans un 2-plan (x, y). C'est celle-la que nous choisirons comme l'une des observables.

Notons que du point de vue de la Relativité, lorsqu'il est dans un état de 4-impulsion totale p donnée, le système étudié peut être assimilé à un observateur particulier. On voit ainsi que l'opérateur de Pauli-Lubanski constitue la partie magnétique du tenseur antisymétrique $J_{\mu\nu}$ relativement à cet observateur [12]. Il possède la propriété remarquable d'être indépendant du choix du point O choisi pour définir $J_{\mu\nu}$. D'après (6.18) et grâce à l'antisymétrie du tenseur de Levi-Civita, on a en effet

$$W'_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu J'^{\rho\sigma} \equiv W_\mu \tag{6.29}$$

Ce 4-vecteur représente donc une caractéristique du système étudié. Comme il a été vu au chapitre 5, il s'interprète en terme de *moment cinétique propre* de ce système (c'est-à-dire, son spin).

La représentation quantique des états d'une particule selon le groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ sera donc la suivante.

L'espace H auquel appartiennent tous ces états est un espace de représentation irréductible de ce groupe, de dimension infinie, correspondant à des valeurs particulières des invariants P^2 et W^2 (avec ici $P^2 \geq 0$). Cet espace est une superposition continue de sous-espace H_p, chacun correspondant à une valeur donnée p de la 4-impulsion de la particule. Chaque sous-espace H_p est de dimension finie car le spectre de la composante choisie de W pour repérer les états dans H_p est discret et fini (voir plus loin).

Dans H, les vecteurs d'états $|\, p >$ seront normalisés de façon invariante comme suit [13] :

$$< p' \,|\, p > = \; (2\pi)^3\, 2\,\omega_p\; \delta^3\left(\overrightarrow{p} \,-\, \overrightarrow{p}'\right) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{m^2 \,+\, \overrightarrow{p}^{\,2}} \tag{6.30}$$

et les transformations de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ seront représentées dans H par des opérateurs unitaires $U(a, \Lambda)$ tels que

$$U(a, \Lambda) = U(a, 1)\, U(0, \Lambda) \tag{6.31}$$

Cette forme reproduit bien la loi de composition (6.3). On a en effet

$$U(a', \Lambda')\, U(a, \Lambda) = U(a', 1)\, U(0, \Lambda')\, U(a, 1)\, U(0, \Lambda')^{-1} U(0, \Lambda')\, U(0, \Lambda)$$

Or

11. Voir H. Bacry, loc. cit., p. 197.
12. Voir le chapitre 3, § 3.3.2.
13. Notant d'une part que les distributions $\delta^4(p - p')$, $\theta(p_0)$ et $\delta(p^2 - m^2)$ sont invariante sous $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et que, d'autre part, $\theta(p_0)\delta(p^2 - m^2) = \dfrac{1}{2\omega}\delta(p_0 - \omega)$, on obtient $2\omega\delta^3\left(\overrightarrow{p} \,-\, \overrightarrow{p}'\right)\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) = \delta^3\left(\overrightarrow{p} \,-\, \overrightarrow{p}'\right)\delta(p_0 - \omega) = \delta^4(p - p')$, en considérant que $p'_0 = \omega' = \omega$; d'où l'invariance du produit scalaire (6.30).

$$U(0,\Lambda')\,U(a,1)\,U(0,\Lambda')^{-1} = U(\Lambda'(a),1)$$

et

$$\begin{aligned}U(a',\Lambda')\,U(a,\Lambda) &= U(a',1)\,U(\Lambda'(a),1)\,U(0,\Lambda'\Lambda)\\ &= U(a'+\Lambda'(a),1)\,U(0,\Lambda'\Lambda) = U(a'+\Lambda'(a),\Lambda'\Lambda)\end{aligned}$$

Comme à toute transformation de Lorentz Λ peut être associée une matrice A de $SL(2,C)$, nous écrirons ces opérateurs plutôt sous la forme $U(a,A)$ qui fait plus référence à l'élément (a,A) du groupe de revêtement $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$.

6.3 Représentations irréductibles unitaires de masses non nulles

Ici, le petit groupe à considérer est celui d'un 4-vecteur p du genre temps ($p^2 = m^2 > 0$) et pointant vers le futur ($p_0 = \omega > 0$). Comme on sait, il s'agit du groupe des rotations dans l'hyperplan orthogonal à p. Il conserve globalement le sous-espace H_p et ses générateurs sont obtenus à partir de la restriction à H_p de l'opérateur (6.20), soit

$$W_\mu(p) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\nu\,J^{\alpha\beta} \tag{6.32}$$

Comme au § 5.4.1, nous associons au 4-vecteur $t = p/m$ trois 4-vecteurs du genre espace, $n_i(p),\ i = 1,2,3$, orthogonaux à t et orthogonaux entre eux, de sorte à former une base d'espace-temps $\mathcal{B}(t) = (t, n_1(p),\, n_2(p), n_3(p))$ orthonormée et d'orientation directe :

$$t\cdot n_i(p) = 0\ ,\quad n_i(p)\cdot n_k(p) = -\delta_{ik}\ ,\quad i,k = 1,2,3,\quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,t^\mu\,n_1^\nu(p)\,n_2^\rho(p)\,n_3^\sigma(p) = 1 \tag{6.33}$$

que l'on appelle *tétrade* associée à p. Puisqu'il est orthogonal à p, l'opérateur (6.32) se décompose par rapport à cette tétrade comme

$$W(p) = m\sum_{k=1}^{3} S_k(p)\,n_k(p)\ ,\quad \text{avec}\quad S_k(p) = -\frac{1}{m}n_k(p)\cdot W(p) \tag{6.34}$$

Utilisant (6.23), on obtient

$$[\,S_k(p), S_\ell(p)\,] = \frac{i}{m}\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\,t^\alpha\,n_k^\mu(p)\,n_\ell^\nu(p)\,W^\beta(p)$$

et puisque

$$\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\,t^\alpha\,n_k^\mu(p)\,n_\ell^\nu(p) = -\epsilon_{k\ell m}\,n_m(p)_\beta$$

(avec sommation sur l'indice m), il vient

$$[\,S_k(p), S_\ell(p)\,] = i\epsilon_{k\ell m}\,S_m(p) \tag{6.35}$$

Comme attendu, les opérateurs $S_k(p)$ satisfont les relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SU(2)$. On en déduit que les valeurs propres de l'invariant (qui commute avec tous les $S_k(p)$)

$$\overrightarrow{S}\,(p)^2 = \sum_{k=1}^{3} S_k^2(p) = -W^2(p)/m^2 \tag{6.36}$$

sont de la forme $s(s+1)$ où $2s$ est un entier positif ou nul., et pour s fixé, les valeurs propres σ de $S_3(p)$ prennent les $2s+1$ valeurs $-s, -s+1, \cdots, s-1, s$. L'espace H_p sera ainsi constitué par $2s+1$ vecteurs d'état notés $|\,[\,p\,], \sigma >$ qui satisfont les équations aux valeurs propres :

$$P_\mu\,|\,[\,p\,],\sigma> = \; p_\mu\,|\,[\,p\,],\sigma> \;, \quad \text{et} \quad P^2\,|\,[\,p\,],\sigma> = \; m^2\,|\,[\,p\,],\sigma> \tag{6.37}$$

$$\overrightarrow{S}\,(p)^2\,|\,[\,p\,],\sigma> = \; s(s+1)\,|\,[\,p\,],\sigma> \tag{6.38}$$

$$S_3(p)\,|\,[\,p\,],\sigma> = \; \sigma\,|\,[\,p\,],\sigma> \tag{6.39}$$

Les opérateurs $S_k(p)$ sont les *opérateurs de spin* du système ou de la particule étudiée et le nombre s, invariant relativiste, est communément appelé son *spin*.

Les états $|\,[\,p\,], \sigma >$ sont ainsi notés pour signifier qu'ils dépendent crucialement du choix de la tétrade associée à p. Le symbole $[\,p\,]$ est en fait le même que celui utilisé au § 5.3.4 pour noter une matrice 2×2 de $SL(2,C)$ associée à la transformation de Lorentz permettant d'obtenir la tétrade de p choisie à partir d'une tétrade de référence $\mathcal{B}(e_0) = (e_0, e_x, e_y, e_z)$ et qui a été également nommée *tétrade*. Son action est définie par les relations

$$[\,p\,]\,\underset{\sim}{e_0}\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{t} \quad , \quad [\,p\,]\,\underset{\sim}{e_x}\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_1}(p) \quad , \quad [\,p\,]\,\underset{\sim}{e_y}\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_2}(p) \quad , \quad [\,p\,]\,\underset{\sim}{e_z}\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_3}(p) \tag{6.40}$$

La base de référence $\mathcal{B}(e_0)$ elle-même est associée à une matrice (tétrade) $[\,\mathring{p}\,]$ qui s'identifie à la matrice identité 2×2 si

$$\mathcal{B}(e_0)\;:\; e_0 = (1,0,0,0)\;,\; e_x = (0,1,0,0)\;,\; e_y = (0,0,1,0)\;,\; e_z = (0,0,0,1)$$

Relativement à cette base, l'opérateur de Pauli-Lubanski et les opérateurs de spin s'écrivent comme

$$W_\mu(\mathring{p}) = \frac{m}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,e_0^\nu J^{\rho\sigma} \;, \quad S_k(\mathring{p}) = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,n_k^\mu(\mathring{p})\,e_0^\nu\,J^{\alpha\beta} \quad \text{soit}$$

$$S_1(\mathring{p}) = J_{yz} \;,\quad S_2(\mathring{p}) = J_{zx} \;,\quad S_3(\mathring{p}) = J_{xy} \tag{6.41}$$

et les vecteurs d'états correspondant $|\,[\,\mathring{p}\,]\,, \sigma >$ vérifient

$$P_\mu\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> = \; g_{\mu 0}\,m\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma>$$

$$\overrightarrow{S}^{\,2}\;|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> = \; s(s+1)\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> \;,\quad S_3(\mathring{p})\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> = \; \sigma\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> \tag{6.42}$$

Notant $U(0,[\,p\,])$ le représentant dans H de la tétrade $[\,p\,]$. Les vecteurs d'états correspondant à la tétrade $\mathcal{B}(t)$ choisie seront définis comme

$$|\,[\,p\,],\sigma> = \; U(0,[\,p\,])\,|\,[\,\mathring{p}\,],\sigma> \tag{6.43}$$

et les opérateurs de spin correspondants vérifient

$$S_k(p) = U(0,[\,p\,])\,S_k(\mathring{p})\,U(0,[\,p\,])^{-1} \tag{6.44}$$

Cette convention permet d'établir simplement la relation entre les vecteurs d'états associés à deux choix différents de tétrade pour la même 4-impulsion p. Considérons en effet un autre choix de tétrade $[\,p\,]'$. On a

$$
\begin{aligned}
|\,[\,p\,]', \sigma' > \,=\, & U(0, [\,p\,]')\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma' > = U(0, [\,p\,])\,U(0, [\,p\,])^{-1}\,U(0, [\,p\,]')\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma' > \\
& = U(0, [\,p\,])\,U(0, [\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]')\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma' >
\end{aligned}
$$

Manifestement, la matrice $[\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]'$ appartient au petit groupe de e_0 et représente donc une rotation dans l'espace tri-dimensionnel engendré par la base (e_x, e_y, e_z). Son action sur les vecteurs d'états de référence, qui fait appel aux matrices $\mathcal{D}^s$ introduites au chapitre 4 (Eq. 4.66), est connue :

$$
U(0, [\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]')\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma' > \,=\, \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]')\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma > \tag{6.45}
$$

où la sommation sur l'indice σ est sous-entendue. On a donc

$$
\boxed{\boxed{\,|\,[\,p\,]', \sigma' > \,=\, \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]')\,|\,[\,p\,], \sigma >\,}} \tag{6.46}
$$

Remarquons ici que si l'on choisit $n_3(p)$ tel que $n_3^0 = |\overrightarrow{p}|/m$, $\overrightarrow{n_3} = \dfrac{p^0}{m\,|\overrightarrow{p}|}\,\overrightarrow{p}$, la composante du spin $S_3(p)$ prend la forme

$$
S_3(p) = -\frac{1}{2m^2}\,\left\{\epsilon_{01\rho\sigma}\left(n_3^0 p^1 - n_3^1 p^0\right) + \epsilon_{02\rho\sigma}\left(n_3^0 p^2 - n_3^2 p^0\right) + \epsilon_{03\rho\sigma}\left(n_3^0 p^3 - n_3^3 p^0\right)\right\}\,J^{\rho\sigma}
$$

soit

$$
S_3(p) = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{J}}{|\overrightarrow{p}|} \tag{6.47}
$$

Cette expression s'interprète comme la projection du spin $\overrightarrow{J}$ selon la direction de la quantité de mouvement de la particule et est souvent appelée "hélicité" de la particule. Cette grandeur ne possède pas l'invariance relativiste dans le cas $m \neq 0$.

Examinons maintenant l'action d'une transformation (a, A) de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ sur les vecteurs d'états. On a

$$
\begin{aligned}
U(a, A)\,|\,[\,p\,], \sigma > \,=\, & U(a, 1)\,U(0, A)\,U(0, [\,p\,])\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma > \\
= U(a, 1)\,U(0, [\,Ap\,])\,& U(0, [\,Ap\,])^{-1}\,U(0, A)\,U(0, [\,p\,])\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma > \\
= \,& U(a, 1)\,U(0, [\,Ap\,])\,U(0, R_W)\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma >
\end{aligned} \tag{6.48}
$$

où

$$
R_W = [\,Ap\,]^{-1}\,A\,[\,p\,] \tag{6.49}
$$

est la *rotation de Wigner* déjà rencontrée au chapitre 5 (eq. 5.223) et où l'on a posé par commodité $Ap \equiv \Lambda(A)(p)$. Cette rotation est aussi un élément du petit groupe de e_0. On a donc

$$
U(0, R_W)\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma > \,=\, \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,|\,[\overset{\circ}{p}], \sigma' >
$$

et (6.48) devient

$$U(a,A)\,|\,[\,p\,],\sigma> \,=\, U(a,1)\,U(0,[\,Ap\,])\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,|\,[\,\overset{\circ}{p}\,],\sigma'> \,=\, U(a,1)\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,|\,[\,Ap\,],\sigma'>$$

soit

$$\boxed{U(a,A)\,|\,[\,p\,],\sigma> \,=\, e^{ia\cdot Ap}\;\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,|\,[\,Ap\,],\sigma'>} \tag{6.50}$$

On vérifie que la loi (6.50) définit bien une transformation unitaire :

$$< [\,p_2\,],\sigma_2|\,U(a,A)^\dagger\,U(a,A)\,|\,[\,p_1\,],\sigma_1> \,=\, e^{iA(p_1-p_2)}\;\mathcal{D}^{s\,\star}_{\sigma'_2\sigma_2}(R_{2W})\,\mathcal{D}^s_{\sigma'_1\sigma_1}(R_{1W})\times$$
$$< [\,Ap_2\,],\sigma'_2\,|\,[\,Ap_1\,],\sigma'_1>$$

Comme, d'une part,

$$< [\,Ap_2\,],\sigma'_2\,|\,[\,Ap_1\,],\sigma'_1> = (2\pi)^3\,2\omega_{Ap_1}\,\delta^3\left(\overrightarrow{Ap_2}-\overrightarrow{Ap_1}\right)\,\delta_{\sigma'_2\sigma'_1} = (2\pi)^3\,2\omega_{p_1}\,\delta^3\left(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right)\,\delta_{\sigma'_2\sigma'_1}$$

du fait de l'invariance de Lorentz de cette distribution, et que, d'autre part, puisque la rotation R_{2W} est unitaire on a

$$\mathcal{D}^{s\,\star}_{\sigma'_2\sigma_2}(R_{2W}) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma'_2}(R^\dagger_{2W}) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma'_2}(R^{-1}_{2W})$$

il vient

$$< [\,p_2\,],\sigma_2|\,U(a,A)^\dagger\,U(a,A)\,|\,[\,p_1\,],\sigma_1> \,=\, \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma'_2}(R^{-1}_{1W})\,\delta_{\sigma'_2\sigma'_1}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'_1\sigma_1}(R_{1W})\times$$
$$(2\pi)^3\,2\omega_{p_1}\,\delta^3\left(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right) \;=\; (2\pi)^3\,2\omega_{p_1}\,\delta^3\left(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right)\,\delta_{\sigma_2\sigma_1}$$

Le produit scalaire est donc conservé et la transformation $U(a,A)$ est bien unitaire. En résumé, l'espace H est un espace de représentation irréductible unitaire de $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$. Comme elle est globalement caractérisée par les valeurs m et s, on la note couramment $[\,m,s\,]$. Dans cet espace, les vecteurs d'état définis précédemment constituent une base complète :

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\sum_\sigma |\,[\,p\,],\sigma><[\,p\,],\sigma| \;=\; \text{id.} \tag{6.51}$$

où “id” est l'identité dans $[\,m,s\,]$. Un vecteur quelconque de cet espace peut s'écrire

$$|\,\Phi> \,=\, \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\sum_\sigma \Phi_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,],\sigma> \tag{6.52}$$

où $\Phi_\sigma([\,p\,]) =< [\,p\,],\sigma|\,\Phi>$ est une fonction d'onde de cet état. On notera la loi de transformation de cette dernière :

$${}^{(a,A)}\Phi_\sigma([\,p\,]) \;=< [\,p\,],\sigma|\,U(a,A)\,|\,\Phi> = <\Phi\,|\,U^\dagger(a,A)\,|\,[\,p\,],\sigma>^\star = <\Phi\,|\,U(-a,A^{-1})\,|\,[\,p\,],\sigma>^\star$$
$$= \left(e^{-ia\cdot p}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,A^{-1}p\,]^{-1}A^{-1}[\,p\,])\,\Phi^\star_{\sigma'}([\,A^{-1}p\,])\right)^\star$$

soit

$$\boxed{{}^{(a,A)}\Phi_\sigma([\,p\,]) \;=\; e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}p\,])\,\Phi_{\sigma'}([\,A^{-1}p\,])} \tag{6.53}$$

6.4 Représentations irréductibles unitaires de masses nulles

Ce cas, pour lequel P^2 prend la valeur zéro, correspond à celui d'une particule de masse nulle dont tout 4-vecteur énergie-impulsion ℓ est donc du genre lumière : $\ell^2 = 0$. Comme il a été vu au §5.4.3, le petit groupe associé à un tel 4-vecteur n'est plus un groupe de rotations, mais un groupe isomorphe à $P(2)$, groupe des déplacements dans un 2-plan euclidien. Associons à ℓ une base $\mathcal{B}(\ell)$: $(t, n_1(\ell), n_2(\ell), n_3(\ell))$ telle que $\ell = \kappa(t + n_3(\ell))$, avec

$$\kappa = t \cdot \ell = -n_3(\ell) \cdot \ell > 0 \ , \quad t_0 > 0 \ , \quad t^2 = 1 \ , \quad t \cdot n_k(\ell) = 0$$
$$n_j(\ell) \cdot n_k(\ell) = -\delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3 \ , \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma\theta}\, t^\alpha\, n_1^\beta(\ell)\, n_2^\gamma(\ell)\, n_3^\theta(\ell) = 1$$

L'opérateur de Pauli-Lubanski $W_\mu(\ell)$ étant orthogonal à ℓ s'écrit

$$W(\ell) = n_1(\ell)\, W_1(\ell) + n_2(\ell)\, W_2(\ell) + J(\ell)\, \ell \quad \text{avec}$$
$$W_1(\ell) = -n_1(\ell) \cdot W(\ell), \ W_2(\ell) = -n_2(\ell) \cdot W(\ell), \ J(\ell) = t \cdot W(\ell)/\kappa = -n_3(\ell) \cdot W(\ell)/\kappa \quad (6.54)$$

✎ Le lecteur vérifiera que les projections $W_1(\ell), W_2(\ell), J(\ell)$ satisfont les relations de commutation [14]

$$[\, W_1(\ell), W_2(\ell)\,] = 0 \ , \ [\, J(\ell), W_1(\ell)\,] = iW_2(\ell) \ , \ [\, J(\ell), W_2(\ell)\,] = -iW_1(\ell) \qquad (6.55)$$

c'est-à-dire, celles définissant l'algèbre de Lie de $P(2)$, $J(\ell)$ engendrant pour sa part les rotations dans le 2-plan $(n_1(\ell), n_2(\ell)$. L'opérateur $W^2(\ell)$ prend la forme *négative*

$$W^2(\ell) = -W_1^2(\ell) - W_2^2(\ell) \qquad (6.56)$$

et possède donc a priori des valeurs propres *négatives* et une valeur propre *nulle*.

Un vecteur d'état de ladite particule sera ici encore construit comme vecteur propre commun de P_μ (valeur propre ℓ_μ), $W^2(\ell)$ et $J(\ell)$ (valeur propre *réelle* λ) et noté $|\,[\,\ell\,], \lambda >$. Posons

$$W_+(\ell) = W_1(\ell) + iW_2(\ell) \ , \quad W_-(\ell) = W_1(\ell) - iW_2(\ell) \qquad (6.57)$$

Puisque la représentation est supposée unitaire, on a $W_+(\ell) = W_-^\dagger(\ell)$. En outre,

$$[\, J(\ell), W_\pm(\ell)\,] = \pm W_\pm(\ell) \ , \quad [\, W_+(\ell), W_-(\ell)\,] = 0$$
$$W^2(\ell) = -W_+(\ell)W_-(\ell) = -W_-(\ell)W_+(\ell) \qquad (6.58)$$

Les opérateurs W_+ et W_- font respectivement monter et descendre d'une unité la valeur propre λ :

$$J(\ell)W_\pm(\ell)\,|\,[\,\ell\,], \lambda > = \ (\lambda \pm 1)\, W_\pm(\ell)\,|\,[\,\ell\,], \lambda > \qquad (6.59)$$

et l'on peut ainsi écrire

$$W_\pm(\ell)\,|\,[\,\ell\,], \lambda > = \ a_\pm(\lambda)\,|\,[\,\ell\,], \lambda \pm 1 > \qquad (6.60)$$

où $a_\pm(\lambda)$ sont des nombres complexes. Lorsque λ est valeur propre de $J(\ell)$, $\lambda \pm n$ où n est un entier positif, sont aussi valeurs propres de cet opérateur. Si λ_0 est la plus petite valeur propre positive, $\lambda_0 - 1$ est certainement négatif. Par conséquent, $0 \leq \lambda_0 \leq 1$. On observe que

$$< \lambda', [\,\ell'\,]\,|\, W_+\,|\,[\,\ell\,], \lambda > = \ 2\omega_\ell\, (2\pi)^3\, \delta^3 \left(\overrightarrow{\ell} \ - \ \overrightarrow{\ell'} \right) a_+(\lambda)\, \delta_{\lambda', \lambda+1}$$

14. Voir §5.4.3, Eq. 5.244.

$$= 2\omega_\ell\,(2\pi)^3\,\delta^3\left(\overrightarrow{\ell} - \overrightarrow{\ell'}\right)\,a_-^\star(\lambda')\,\delta_{\lambda'-1,\lambda} \tag{6.61}$$

$$\text{soit} \qquad a_+(\lambda) = a_-^\star(\lambda+1)$$

D'où l'on déduit, d'après (6.58),

$$\begin{gathered} W^2(\ell)\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; -\,a_-(\lambda)\,a_+(\lambda-1)\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; -|a_-(\lambda)|^2\;|\,[\,\ell\,],\lambda> \\ = -a_-(\lambda+1)\,a_+(\lambda)\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; -|a_+(\lambda)|^2\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; -|a_-(\lambda+1)|^2\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \\ \text{soit} \quad |a_-(\lambda)|^2 \;=\; |a_-(\lambda+1)|^2 \end{gathered} \tag{6.62}$$

Il s'ensuit que les valeurs propres (négatives) de $W^2(\ell)$ sont *indépendantes de* λ. Il apparaît que les représentations correspondant à des particules physiques sont telles que $W_1(\ell) \equiv 0$, $W_2(\ell) \equiv 0$ pour tout ℓ, et que par conséquent, soit $|\lambda|$ ne prend qu'une seule valeur entière, par exemple $\lambda = \pm 1$ pour le photon, soit λ ne prend qu'une seule valeur demi-entière, par exemple $\lambda = -1/2$ pour un neutrino non massif, $\lambda = +1/2$ pour son anti-particule.

Dans cette circonstance en effet, d'après (6.60), une seule valeur de λ devient admissible et l'espace H_ℓ de représentation irréductible est donc de dimension 1. Cela signifie également que le nombre λ apparaît comme un invariant sous les transformations du petit groupe de ℓ, puisque celles-ci sont alors simplement représentées par l'opérateur $e^{-i\varphi J(\ell)}$ qui a pour effet un simple changement de phase :

$$e^{-i\varphi J(\ell)}\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; e^{-i\lambda\varphi}\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \tag{6.63}$$

Mais plus encore, puisque les différents espaces H_ℓ sont reliés entre eux par des opérateurs unitaires, ces espaces correspondent tous à la même valeur propre λ des divers opérateurs $J(\ell)$. Il s'ensuit que ce nombre λ, que l'on appelle *hélicité*, caractérise la représentation H toute entière et prend le statut *d'invariant relativiste*. C'est l'équivalent du spin pour la particule de masse nulle.

Tout d'abord, l'état $|\,[\,\ell\,],\lambda>$ sera ici encore défini par rapport à un état de référence $|\,[\,\mathring{\ell}\,],\lambda>$ lui-même associé à une tétrade de référence $[\,\mathring{\ell}\,]$ par la relation

$$|\,[\,\ell\,],\lambda> \;=\; U(0,[\,\ell\,])\,|\,[\,\mathring{\ell}\,],\lambda> \tag{6.64}$$

où $|\,[\,\mathring{\ell}\,],\lambda>$ est le vecteur propre unique de $J(\mathring{\ell})$ (dans $H_{\mathring{\ell}}$) avec la valeur propre λ. Un changement de tétrade $[\,\ell\,] \longrightarrow [\,\ell\,]'$ donne le nouvel état

$$|\,[\,\ell\,]',\lambda> \;=\; U(0,[\,\ell\,]')\,|\,[\,\mathring{\ell}\,],\lambda> \tag{6.65}$$

Or

$$|\,[\,\ell\,]',\lambda> \;=\; U(0,[\,\ell\,])\,U(0,[\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]')\,|\,[\,\mathring{\ell}\,],\lambda>$$

et $[\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]'$ est manifestement une opération du petit groupe de $\mathring{\ell}$, laquelle, d'après (6.63), est représentée dans $H_{\mathring{\ell}}$ par un simple facteur de phase $e^{-i\lambda\psi}$. Ainsi

$$|\,[\,\ell\,]',\lambda> \;=\; e^{-i\lambda\psi}\,|\,[\,\ell\,],\lambda> \tag{6.66}$$

et, comme attendu puisque H_ℓ est de dimension 1, un changement de tétrade revient à un simple changement de phase. On peut d'ailleurs relier le facteur de phase à la matrice $M = [\,\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]'$ de $SL(2,C)$ en combinant la formule (4.66) du chapitre 4 à la formule (5.249) du chapitre 5. En effet, d'après (5.249), étant un élément du petit groupe de $\mathring{\ell}$, la matrice M est de la forme

$$M = A_\zeta\,U_\psi \quad \text{avec}$$

$$A_\zeta \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_\psi \;=\; \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} \tag{6.67}$$

et d'après (4.66), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^J_{mm'}(A_\zeta) \;&=\; \frac{\zeta^{m-m'}}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(J+m)!(J-m')!}{(J-m)!(J+m')!}} \quad \text{si} \quad m \geq m' \\ &= 0 \quad \text{si} \quad m < m' \\ \mathcal{D}^J_{mm'}(U_\psi) &= \delta_{mm'}\, e^{-im\psi} \end{aligned} \tag{6.68}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{D}^J_{mm'}(M) \;=\; \sum_n \mathcal{D}^J_{mn}(A_\zeta)\, \mathcal{D}^J_{nm'}(U_\psi) \quad \text{soit}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^J_{mm'}(M) \;&=\; e^{-im'\psi}\, \frac{\zeta^{m-m'}}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(J+m)!(J-m')!}{(J-m)!(J+m')!}} \quad \text{si} \quad m \geq m' \\ &= 0 \quad \text{si} \quad m < m' \\ &= \; e^{-im\psi} \quad \text{si} \quad m = m' \end{aligned} \tag{6.69}$$

Pour $m = m'$, ces éléments de matrice sont indépendants de J. On peut donc écrire

$$e^{-i\lambda\psi} \;=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M) \tag{6.70}$$

Notons ici que dans le référentiel où $t = (1, 0, 0, 0)$, on a

$$J(\ell) = \frac{\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{J}}{|\,\overrightarrow{\ell}\,|} \tag{6.71}$$

et que "l'opérateur d'hélicité" $J(\ell)$ s'identifie ici encore à la projection du "spin" $\overrightarrow{J}$ selon la direction de la quantité de mouvement $\overrightarrow{\ell}$. Cependant, contrairement à (6.47), c'est ici un invariant relativiste.

Trouvons ensuite l'action sur $|\,[\,\ell\,], \lambda >$ d'une transformation $U(a, A)$ de $\bar{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$. On a

$$\begin{aligned} U(a, A)\,|\,[\,\ell\,], \lambda > &= \; U(a, 1)\, U(0, A)\, U(0, [\,\ell\,])\,|\,[\,\mathring{\ell}\,], \lambda > \\ = U(a, 1)\, U(0, [\,A\ell\,])\, &U(0, [\,A\ell\,])^{-1}\, U(0, A)\, U(0, [\,\ell\,])\,|\,[\,\mathring{\ell}\,], \lambda > \\ &= \; U(a, 1)\, U(0, [\,A\ell\,])\, U(0, M)\,|\,[\,\mathring{\ell}\,], \lambda > \end{aligned} \tag{6.72}$$

où

$$M = [\,A\ell\,]^{-1}\, A\, [\,\ell\,] \tag{6.73}$$

est une transformation du petit groupe de $\mathring{\ell}$ pour laquelle [15]

$$U(0, M)\,|\,[\,\mathring{\ell}\,], \lambda > = \; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M)\;|\,[\,\mathring{\ell}\,], \lambda >$$

On obtient donc

$$\boxed{U(a, A)\,|\,[\,\ell\,], \lambda > = \; e^{ia\cdot A\ell}\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M)\;|\,[\,A\ell\,], \lambda >} \tag{6.74}$$

15. Rappelons que $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M)$ est un facteur de phase $e^{-i\lambda\theta}$.

Il est facile de vérifier que (6.74) définit bien une transformation unitaire au sens du produit scalaire (6.30) où l'on pose $m = 0$:

$$< [\,\ell'\,], \lambda \,|\, [\,\ell\,], \lambda > \,=\, (2\pi)^3\, 2\omega_\ell\, \delta^3(\overrightarrow{\ell'} - \overrightarrow{\ell}\,) \quad \text{avec} \quad \omega_\ell = |\,\overrightarrow{\ell}\,|$$

Les relations précédentes définissent la représentation irréductible unitaire de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondant à une particule de masse nulle et d'hélicité λ. On la note $[\,0, \lambda\,]$, le zéro signifiant $m = 0$. Dans cet espace, on a la relation de fermeture :

$$\int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3\, 2\omega_\ell}\, |\,[\,\ell\,], \lambda >< [\,\ell\,], \lambda| \,=\, \text{id.} \tag{6.75}$$

où "id" est l'identité dans $[\,0, \lambda\,]$ et l'un quelconque de ses vecteurs admet la décomposition

$$|\,\Phi > \,=\, \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3\, 2\omega_\ell}\, \Phi_\lambda([\,\ell\,])\,|\,[\,\ell\,], \lambda > \tag{6.76}$$

où $\Phi_\lambda([\,\ell\,]) =< [\,\ell\,], \lambda|\,\Phi >$ est la fonction d'onde de cet état. Sa loi de transformation est :

$$\begin{aligned} {}^{(a,A)}\Phi_\lambda([\,\ell\,]) \,&=< [\,\ell\,], \lambda|\,U(a, A)\,|\,\Phi > \,=\, < \Phi\,|\,U^\dagger(a, A)\,|\,[\,\lambda\,], \lambda >^\star \,=\, < \Phi\,|\,U(-a, A^{-1})\,|\,[\,\ell\,], \lambda >^\star \\ &= \left(e^{-ia\cdot\ell}\, \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,A^{-1}\ell\,]^{-1}A^{-1}[\,\ell\,])\, \Phi^\star_\lambda([\,A^{-1}\ell\,])\right)^\star \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,A^{-1}\ell\,]^{-1}A^{-1}[\,\ell\,])$ est un facteur de phase, on peut écrire

$$\left(\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,A^{-1}\ell\,]^{-1}A^{-1}[\,\ell\,])\right)^\star \,=\, \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}\left(([\,A^{-1}\ell\,]^{-1}A^{-1}[\,\ell\,])^{-1}\right) \,=\, \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]^{-1}A[\,A^{-1}\ell\,]^{-1})$$

d'où

$$\boxed{\boxed{{}^{(a,A)}\Phi_\lambda([\,\ell\,]) \,=\, e^{ia\cdot\ell}\, \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}\ell\,])\, \Phi_\lambda([\,A^{-1}\ell\,])}} \tag{6.77}$$

6.5 Les amplitudes spinorielles dans le cas $m \neq 0$ [16]

D'après (6.46) et (4.67), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1} \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma'}([\,p\,]'^{-1})\,|\,[\,p\,]', \sigma_1 > \,&=\, \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2} \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma_1}([\,p\,]^{-1}[\,p\,]')\, \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma'}([\,p\,]'^{-1})\,|\,[\,p\,], \sigma_2 > \\ &= \sum_{\sigma_2} \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma'}([\,p\,]^{-1})\,|\,[\,p\,], \sigma_2 > \end{aligned} \tag{6.78}$$

L'état

$$|\,\hat{p}, \sigma > \,=\, \sum_{\sigma_2} \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma}([\,p\,]^{-1})\,|\,[\,p\,], \sigma_2 > \tag{6.79}$$

est donc *indépendant du choix de la tétrade* $[\,p\,]$, il ne dépend que de p et σ. Les produits scalaires des états (6.79) entre eux sont donnés par

16. Voir H. Joos, Fortschritte der Physik, 10 (1962), p.65.

$$
\begin{aligned}
< \hat{p'}, \sigma' \,|\, \hat{p}, \sigma > = & \sum_{\sigma_1'} \sum_{\sigma_1} \mathcal{D}^{s\,\star}_{\sigma_1'\sigma'}([\,p'\,]^{-1})\, \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{-1})\ (2\pi)^3\, 2\omega_p\, \delta^3(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p})\, \delta_{\sigma_1'\sigma_1} \\
& = (2\pi)^3\, 2\omega_p\, \delta^3(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p})\, \mathcal{D}^{s}_{\sigma'\sigma}\left(\frac{\widetilde{p}}{m}\right)
\end{aligned}
\tag{6.80}
$$

où l'on a tenu compte de la relation

$$
[\,p\,]^{\dagger -1}\,[\,p\,] = \frac{\widetilde{p}}{m}
$$

De même, comme $R_W = [\,p\,]^{-1}[\,p\,]' = R_W^{\dagger -1} = [\,p\,]^{\dagger}\,[\,p\,]'^{\dagger -1}$ puisqu'il s'agit d'une rotation du petit groupe de $\overset{\circ}{p}$, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma_1} \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma'}([\,p\,]'^{\dagger})\,|\,[\,p\,]', \sigma_1 > = & \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2} \mathcal{D}^{s}_{\sigma_2\sigma_1}([\,p\,]^{\dagger}\,[\,p\,]'^{\dagger -1})\, \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma'}([\,p\,]'^{\dagger})\,|\,[\,p\,], \sigma_2 > \\
= & \sum_{\sigma_2} \mathcal{D}^{s}_{\sigma_2\sigma'}([\,p\,]^{\dagger})\,|\,[\,p\,], \sigma_2 >
\end{aligned}
\tag{6.81}
$$

L'état

$$
|\,p, \sigma > = \sum_{\sigma_1} \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{\dagger})\,|\,[\,p\,], \sigma_1 >
\tag{6.82}
$$

est donc lui aussi *indépendant du choix de la tétrade* $[\,p\,]$ et ne dépend que de p et de σ. Utilisant la relation

$$
[\,p\,]\,[\,p\,]^{\dagger} = \frac{\underset{\sim}{p}}{m}
$$

on obtient le produit scalaire

$$
< p, \sigma' | p, \sigma > = (2\pi)^3\, 2\omega_p\, \delta^3(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p})\, \mathcal{D}^{s}_{\sigma'\sigma}(\frac{\underset{\sim}{p}}{m})
\tag{6.83}
$$

Les états (6.79) et (6.82) constituent ce qu'on appelle la *base spinorielle* mais ne sont toutefois pas indépendants. En effet, comme

$$
[\,p\,]^{\dagger} = [\,p\,]^{-1}\, \frac{\underset{\sim}{p}}{m}
$$

il vient

$$
|\,p, \sigma > = \mathcal{D}^{s}_{\sigma'\sigma}(\frac{\underset{\sim}{p}}{m})\,|\,\hat{p}, \sigma' > \quad \text{et inversement} \quad |\,\hat{p}, \sigma > = \mathcal{D}^{s}_{\sigma'\sigma}(\frac{\widetilde{p}}{m})\,|\,p, \sigma' >
\tag{6.84}
$$

avec une sommation sur l'indice σ'. Par ailleurs, sous une transformation de $\bar{\mathcal{P}}_{+}^{\uparrow}$, on a

$$
\begin{aligned}
U(a, A)\,|\hat{p}, \sigma > = \ & \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{-1})\, U(a, A)\,|\,[\,p\,], \sigma_1 > = e^{ia\cdot Ap}\ \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1'\sigma_1}([\,Ap\,]^{-1}\, A\,[\,p\,]) \times \\
& \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{-1})\,|\,[\,Ap\,], \sigma_1' > = e^{ia\cdot Ap}\ \mathcal{D}^{s}_{\sigma_1'\sigma_2}([\,Ap\,]^{-1})\, \mathcal{D}^{s}_{\sigma_2\sigma}(A)\,|\,[\,Ap\,], \sigma_1' >
\end{aligned}
$$

d'où (avec sommation sur σ_2)

$$
U(a, A)\,|\hat{p}, \sigma > = e^{ia\cdot Ap}\ \mathcal{D}^{s}_{\sigma_2\sigma}(A)\,|\,\widehat{Ap}, \sigma_2 >
\tag{6.85}
$$

Puis (avec sommations implicites)

$$U(a,A)\,|\,p,\sigma> = \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^\dagger)\,U(a,A)\,|\,[\,p\,],\sigma_1> = e^{ia\cdot Ap}\;\mathcal{D}^s_{\sigma_1'\sigma_1}([\,Ap\,]^\dagger\,A^{\dagger-1}\,[\,p\,]^{\dagger-1})\times$$
$$\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^\dagger)\,|\,[\,Ap\,],\sigma_1'> = e^{ia\cdot Ap}\;\mathcal{D}^s_{\sigma_1'\sigma_2}([\,Ap\,]^\dagger)\,\mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma}(A^{\dagger-1})\,|\,[\,Ap\,],\sigma_1'>$$

où l'on a utilisé le fait que $[\,Ap\,]^{-1}\,A\,[\,p\,] = \big([\,Ap\,]^{-1}\,A\,[\,p\,]\big)^{\dagger-1} = [\,Ap\,]^\dagger\,A^{\dagger-1}\,[\,p\,]^{\dagger-1}$ puisqu'il s'agit aussi d'une matrice de rotation du petit groupe de $\overset{\circ}{p}$. On en déduit

$$U(a,A)\,|\,p,\sigma> = e^{ia\cdot Ap}\;\mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma}(A^{\dagger-1})\,|\,Ap,\sigma_2> \tag{6.86}$$

Les états (6.79) et (6.82) permettent de définir des *amplitudes spinorielles* associées à un état $|\Phi>$, dont les lois de transformation sous $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ ne font pas référence au choix de tétrade, contrairement à celle des fonctions d'onde $\Phi_\sigma([\,p\,])$. Elles sont définies comme

$$\phi_\sigma(p) = <p,\sigma\,|\,\Phi> \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_\sigma(p) = <\hat{p},\sigma\,|\,\Phi> \tag{6.87}$$

On a d'une part :

$$^{(a,A)}\phi_\sigma(p) = <p,\sigma\,|\,U(a,A)\,|\,\Phi> = \big(<\Phi\,|\,U(a,A)^\dagger\,|\,p,\sigma>\big)^\star = \big(<\Phi\,|\,U(a,A)^{-1}\,|\,p,\sigma>\big)^\star$$
$$= \big(<\Phi\,|\,U(-A^{-1}a,A^{-1})\,|\,\hat{p},\sigma>\big)^\star = \Big(e^{-ia\cdot p}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A^\dagger) <\Phi\,|\,\widehat{A^{-1}p},\sigma'>\Big)^\star, \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\;^{(a,A)}\phi_\sigma(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(A)\;\phi_{\sigma'}(A^{-1}p)\;} \tag{6.88}$$

D'autre part,

$$^{(a,A)}\hat{\phi}_\sigma(p) = <\hat{p},\sigma\,|\,U(a,A)\,|\,\Phi> = \big(<\Phi\,|\,U(-A^{-1}a,A^{-1})\,|\,\hat{p},\sigma>\big)^\star$$
$$= \Big(e^{-ia\cdot p}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A^{-1}) <\Phi\,|\,\widehat{A^{-1}p},\sigma'>\Big)^\star, \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\;^{(a,A)}\hat{\phi}_\sigma(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(A^{\dagger-1})\;\hat{\phi}_{\sigma'}(A^{-1}p)\;} \tag{6.89}$$

Ainsi, du point de vue de $SL(2,C)$, les $2s+1$ amplitudes $\phi_\sigma(p)$ se transforment-elles comme des éléments de la représentation $D(s,0)$ tandis que les $2s+1$ amplitudes $\hat{\phi}_\sigma(p)$ se transforment comme des éléments de la représentation conjuguée $D(0,s)$ (Voir la section 5.5). Ce sont les composantes respectives des spineurs à $2s+1$ dimensions $\phi(p)$ et $\hat{\phi}(p)$. Suivant (6.84), elles sont liées par des relations du type *équations de Dirac* :

$$\boxed{\;\phi_\sigma(p) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(\frac{\underset{\sim}{p}}{m})\,\hat{\phi}_{\sigma'}(p) \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_\sigma(p) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(\frac{\widetilde{p}}{m})\,\phi_{\sigma'}(p)\;} \tag{6.90}$$

Pour $s \neq 0$, ces équations peuvent être écrites sous une forme plus synthétique en introduisant le *bi-spineur* à $2(2s+1)$ composantes :

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) \\ \hat{\phi}(p) \end{pmatrix} \tag{6.91}$$

et la matrice $2(2s+1) \times 2(2s+1)$

$$\Gamma(\frac{p}{m}) = \begin{pmatrix} 0_s & \mathcal{D}^s(\frac{\underset{\sim}{p}}{m}) \\ \mathcal{D}^s(\frac{\widetilde{p}}{m}) & 0_s \end{pmatrix} \tag{6.92}$$

où 0_s est la matrice nulle $(2s+1) \times (2s+1)$. On obtient en effet l'équation

$$\boxed{\Gamma(\frac{p}{m})\,\Phi(p) = \Phi(p)} \tag{6.93}$$

En outre, d'après (6.88) et (6.89), la loi de transformation sous $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ du bi-spineur (6.91) est

$$\boxed{{}^{(a,A)}\Phi(p) \;=\; e^{ia\cdot p}\, S(A)\, \Phi(A^{-1}p)} \tag{6.94}$$

où $S(A)$ est la matrice $2(2s+1) \times 2(2s+1)$ donnée par

$$\boxed{S(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s(A) & 0_s \\ 0_s & \mathcal{D}^s(A^{\dagger -1}) \end{pmatrix}} \tag{6.95}$$

montrant que vis-à-vis des transformations de Lorentz, le bi-spineur (6.91) se comporte comme un élément de la représentation $D(s,0) \oplus D(0,s)$ de $SL(2,C)$.

6.6 Les amplitudes spinorielles dans le cas $m = 0$ [17]

Notons tout d'abord, que d'après (6.69), toute matrice M de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe de $\mathring{\ell}$ est telle que $\mathcal{D}_{mm'}(M) = 0$ si $m < m'$. Envisageons alors un état $|\,[\,\ell\,], -|\lambda| >$ de la représentation $[\,0, -|\lambda|\,]$. On peut écrire (sans sommation sur $|\lambda|\,!$)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]')\,|\,[\,\ell\,]', -|\lambda| > \;&=\; \sum_{\lambda'=-|\lambda|}^{|\lambda|} \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\;\lambda'}([\,\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]')\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda'\,\sigma}([\,\ell\,]'^{-1})\,|\,[\,\ell\,]', -|\lambda| > \\ &=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,|\,[\,\ell\,], -|\lambda| > \end{aligned}$$

Par conséquent, l'état

17. Voir D. Zwanziger, loc. cit.

$$|\,\ell_-,\sigma> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|> \tag{6.96}$$

est indépendant du choix de la tétrade $[\,\ell\,]$. Sous $\bar{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$, il est transformé comme suit :

$$\begin{aligned} U(a,A)\,|\,\ell_-,\sigma> &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,e^{ia\cdot A\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|-|\lambda|}\big([\,A\ell\,]^{-1}\,A\,[\,\ell\,]\big)\,\,|\,[\,A\ell\,],-|\lambda|> \\ &\equiv\; e^{ia\cdot A\ell}\sum_{\sigma_1=-|\lambda|}^{|\lambda|}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma_1}\big([\,A\ell\,]^{-1}\,A\,[\,\ell\,]\big)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma_1\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,|\,[\,A\ell\,],-|\lambda|> \\ &=\; e^{ia\cdot A\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma'}\big([\,A\ell\,]^{-1}\big)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(A)\,|\,[\,A\ell\,],-|\lambda|> \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\;U(a,A)\,|\,\ell_-,\sigma> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(A)\,|\,(A\ell)_-,\sigma'>\;}} \tag{6.97}$$

Rappelons que

$$[\,\ell\,]\;\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\;[\,\ell\,]^{\dagger}\;=\underset{\sim}{\ell}\quad\text{soit}\quad\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\;[\,\ell\,]^{\dagger}\;=\;[\,\ell\,]^{-1}\underset{\sim}{\ell}$$

d'où

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\underset{\sim}{\ell}\,)\,|\,\ell_-,\sigma> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\underset{\sim}{\ell}\,)\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma'}(\,[\,\ell\,]^{-1}\underset{\sim}{\ell}\,)\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|>$$

$$= \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma'}(\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\,[\,\ell\,]^{\dagger})\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma_1}(\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\,)\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma_1\sigma'}([\,\ell\,]^{\dagger})\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|>$$

Déterminons les éléments de matrice $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma_1}(\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\,)$. On a

$$\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\;=2\ell_0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \widetilde{\overset{\circ}{\ell}}=2\ell_0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Utilisant la formule (4.66) on trouve que

$$\mathcal{D}^{J}_{JJ}(\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\,)\;=\;(2\ell_0)^{2J}\;=\;\mathcal{D}^{J}_{-J-J}(\,\widetilde{\overset{\circ}{\ell}}\,) \tag{6.98}$$

tandis que tous les autres éléments sont nuls. Il s'ensuit que

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\underset{\sim}{\ell}\,)\,|\,\ell_-,\sigma> = \;0 \tag{6.99}$$

Notons ensuite que $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M) = e^{-i\lambda\varphi} = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(M^{\dagger-1})$ et que $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda'}(M^{\dagger-1}) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda'\lambda}{}^{\star}(M^{-1}) = 0$ si $\lambda' < \lambda$. Pour un état $|\,[\,\ell\,],|\lambda|>$ de la représentation $[\,0,|\lambda|\,]$, on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]'^{\dagger})\,|\,[\,\ell\,]',|\lambda|> \;&=\;\sum_{\lambda'=-|\lambda|}^{|\lambda|}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\;\lambda'}([\,\ell\,]^{\dagger}[\,\ell\,]'^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda'\,\sigma}([\,\ell\,]'^{\dagger})\,|\,[\,\ell\,]',|\lambda|> \\ &=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{\dagger})\,|\,[\,\ell\,],|\lambda|> \end{aligned}$$

et l'état

$$|\,\ell_+,\sigma> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,|\,[\,\ell\,],|\lambda|> \tag{6.100}$$

est lui aussi indépendant du choix de tétrade. Sa loi de transformation sous $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
U(a,A)\,|\,\ell_+,\sigma> &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,e^{ia\cdot A\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}\left([\,A\ell\,]^{-1}\,A\,[\,\ell\,]\right)\,|\,[\,A\ell\,],|\lambda|> \\
&= e^{ia\cdot A\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}\left([\,A\ell\,]^\dagger\,A^{\dagger-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\right)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,|\,[\,A\ell\,],|\lambda|> \\
&\equiv e^{ia\cdot A\ell}\sum_{\sigma_1=-|\lambda|}^{|\lambda|}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma_1}\left([\,A\ell\,]^\dagger\,A^{\dagger-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\right)\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma_1\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,|\,[\,A\ell\,],|\lambda|> \\
&= e^{ia\cdot A\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma'}\left([\,A\ell\,]^\dagger\right)\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(A^{\dagger-1})\,|\,[\,A\ell\,],|\lambda|> \quad \text{soit}
\end{aligned}$$

$$\boxed{U(a,A)\,|\,\ell_+,\sigma> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(A^{\dagger-1})\,|\,(A\ell)_+,\sigma'>} \tag{6.101}$$

Par ailleurs, tenant compte de

$$[\,\ell\,]^\dagger\,\widetilde{\ell} = \widetilde{\mathring{\ell}}\,[\,\ell\,]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma'}(\widetilde{\mathring{\ell}}) = 0$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\widetilde{\ell}\,)\,|\,\ell_+,\sigma> &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\widetilde{\ell}\,)\,|\,[\,\ell\,],|\lambda|> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma'}(\,[\,\ell\,]^\dagger\,\widetilde{\ell}\,)\,|\,[\,\ell\,],|\lambda|> \\
&= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma'}(\,\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\,[\,\ell\,]^\dagger)\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|> \quad \text{soit}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\widetilde{\ell}\,)\,|\,\ell_+,\sigma> = 0 \tag{6.102}$$

A l'aide des états (6.96) et (6.100), constituant ici encore une *base spinorielle*, deux sortes d'amplitudes spinorielles peuvent être définies, mais celles-ci correspondent à deux représentations différentes, d'hélicité opposées.

☞ Pour un état $|\,\Phi>$ de la représentation $[\,0,-|\lambda\,|]$ il s'agira de

$$\phi^-_\sigma(\ell) = <\ell_-,\sigma\,|\,\Phi> \tag{6.103}$$

ayant pour loi de transformation

$$\boxed{{}^{(a,A)}\phi^-_\sigma(\ell) = e^{ia\cdot\ell}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(A^{\dagger-1})\,\phi^-_{\sigma'}(\,A^{-1}\ell\,)} \tag{6.104}$$

et telle que

$$\boxed{\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\underset{\sim}{\ell}\,)\,\phi^-_{\sigma'}(\ell) = 0} \tag{6.105}$$

☞ Pour un état $|\,\Psi>$ de la représentation $[\,0, |\lambda|\,]$ il s'agira de

$$\psi^{+}_{\sigma}(\ell) \;= <\ell_{+}, \sigma\,|\,\Psi> \tag{6.106}$$

ayant pour loi de transformation

$$\boxed{\,^{(a,A)}\psi^{+}_{\sigma}(\ell) = \; e^{ia\cdot\ell}\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(A)\,\psi^{+}_{\sigma'}(\,A^{-1}\ell\,)} \tag{6.107}$$

et telle que

$$\boxed{\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(\,\widetilde{\ell}\,)\;\psi^{+}_{\sigma'}(\ell)\;=\;0} \tag{6.108}$$

Les relations (6.105) et (6.108) constituent les équations de Dirac pour une masse nulle.

6.7 Représentations des opérations discrètes

6.7.1 Automorphismes induits par les opérations discrètes

Outre le groupe de Poincaré restreint, le groupe de Poincaré *complet* comporte les opérations dites *discrètes* que sont : la réflexion d'espace Π, le renversement du sens du temps $\mathcal{T}$ et leur produit (réflexion totale) $\Pi\mathcal{T}$. Au chapitre 5, il a été vu que l'action de Π et $\mathcal{T}$ sur les 4-vecteurs peut s'exprimer au moyen de la matrice

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette représentation on a

$$\Pi = (0, g), \quad \mathcal{T} = (0, -g), \quad \Pi\mathcal{T} = (0, -1) \tag{6.109}$$

et ces opérations transforment un 4-vecteur x comme suit :

$$\Pi(x) = \underline{x} = (x_0, -\overrightarrow{x}), \quad \mathcal{T}(x) = -\underline{x}, \quad \Pi\mathcal{T}(x) = -x \tag{6.110}$$

Utilisant l'équation (5.1), on note que pour une transformation (a, Λ) du groupe $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ on a

$$\begin{aligned} \Pi\;(a, \Lambda)\;\Pi^{-1} = (\underline{a},\; {}^{t}\Lambda^{-1}), \quad \mathcal{T}(a, \Lambda)\mathcal{T}^{-1} = (-\underline{a},\; {}^{t}\Lambda^{-1}), \\ (\Pi\mathcal{T})\;(a, \Lambda)\;(\Pi\mathcal{T})^{-1} = (-a, \Lambda) \end{aligned} \tag{6.111}$$

et que, puisque ${}^{t}\Lambda^{-1} \;\in\; \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$, lesdites opérations constituent donc des automorphismes externes de ce groupe, qui induisent aussi des automorphismes sur le groupe de recouvrement $\bar{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$ de celui-ci.

Au paragraphe 5.1.2, Eq. 5.46, il a été montré que la transformation de Lorentz Λ peut toujours être écrite de façon unique comme le produit BR d'une matrice symétrique B (boost) et d'une matrice orthogonale R (rotation). Corrélativement, il correspond à Λ une matrice A de $SL(2, C)$ s'écrivant de façon unique sous la forme du produit $A_1 A_2$ d'une matrice hermitique A_1 associée à B et d'une matrice unitaire A_2 associée à R. A la matrice ${}^{t}\Lambda^{-1} = B^{-1}R$ sera ainsi associée la matrice

$A_1^{-1} A_2 = A^{\dagger -1}$ qui appartient aussi à $SL(2, C)$. On sait cependant (voir paragraphe 5.3.1) que cette association n'est pas un isomorphisme entre $L(3,1)$ et $SL(2,C)$ car à Λ peuvent être associées les deux matrices A et $-A$. Or, seule l'application $A \to A^{\dagger -1}$ représente bien un automorphisme de $SL(2,C)$. On est donc conduit à associer aux opérations discrètes les automorphismes suivants de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$:

$$\Pi \ (a, A) \ \Pi^{-1} = (\underline{a}, A^{\dagger -1}), \quad \mathcal{T} \ (a, A) \ \mathcal{T}^{-1} = (-\underline{a}, A^{\dagger -1})$$
$$(\Pi \mathcal{T}) \ (a, A) \ (\Pi \mathcal{T})^{-1} = (-a, A) \tag{6.112}$$

et leurs représentants $U(\Pi)$, $U(\mathcal{T})$ et $U(\Pi\mathcal{T})$ dans l'espace des états H devront satisfaite les relations

$$U(\Pi) \ U(a, A) \ U(\Pi)^{-1} = U(\underline{a}, A^{\dagger -1}), \quad U(\mathcal{T}) \ U(a, A) \ U(\mathcal{T})^{-1} = U(-\underline{a}, A^{\dagger -1})$$
$$U(\Pi\mathcal{T}) \ U(a, A) \ U(\Pi\mathcal{T})^{-1} = U(-a, A) \tag{6.113}$$

6.7.2 Unitarité ou antiunitarité des opérations discrètes ?

Admettons que les opérations discrètes considérées soient des symétries du système envisagé. Dans cette circonstance, leurs représentants dans l'espace des états H du système conservent la probabilité de transition $| < \Psi | \Phi > |^2$ d'un état $|\Phi >$ vers un état $|\Psi >$, c'est-à-dire que si S est l'une de ces opérations, on doit avoir

$$| < U(S) \Psi | U(S) \Phi > |^2 = | < \Psi | \Phi > |^2 \tag{6.114}$$

Il résulte d'un théorème dû à Wigner [18] que l'opérateur $U(S)$ est alors nécessairement soit unitaire, soit antiunitaire, l'antiunitarité d'un opérateur U se référant aux deux propriétés suivantes :

① antilinéarité :

$$U \left(\alpha_1 |\phi_1 > + \alpha_2 |\phi_2 > \right) = \alpha_1^\star \, U |\phi_1 > + \alpha_2^\star \, U |\phi_2 > \tag{6.115}$$

où α_1 et α_2 sont des nombres complexes et $|\phi_1 >$ et $|\phi_2 >$ deux états quelconques de H ;

② :

$$< U \phi_2 | U \phi_1 > = < \phi_2 | \phi_1 >^\star = < \phi_1 | \phi_2 > \tag{6.116}$$

Rappelons également un théorème qui sera utile pour la suite [19] :

• Pour que deux opérateurs A et B linéaires soient égaux à une phase près, soit $A = B \, e^{i\theta}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$| < \phi_2 \, |A| \, \phi_1 > | = | < \phi_2 \, |B| \, \phi_1 > | \quad \text{quels que soient } |\phi_1 > \text{ et } |\phi_2 > \tag{6.117}$$

Démontrons maintenant que si l'on impose que l'application des opérations discrètes sur les états de H ne doit pas changer le signe positif de leurs énergies, alors, nécessairement, $U(\Pi)$ est *unitaire* tandis que $U(\mathcal{T})$ et $U(\Pi\mathcal{T})$ sont *antiunitaires*. Pour ce faire, appliquons les équations (6.113) au cas d'une transformation infinitésimale $U(a, 0) = 1 - i a_0 P^0$ où a_0 est réel. Il vient :

$$U(\Pi) \left[-i P^0 \right] U(\Pi)^{-1} = -i P^0, \quad U(\mathcal{T}) \left[-i P^0 \right] U(\mathcal{T})^{-1} = i P^0 \tag{6.118}$$

18. E. Wigner, "Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra" Academic Press, New-York, 1959 ; V. Bargmann, Journal of Mathematical Physics, vol. 5 (1964) p. 862 ; A. Messiah "Mécanique Quantique", ed. Dunod, Paris 1964, Tome II, chap. XV, §2, p.540.

19. A. Messiah, loc. cit, théorème II.

$$U(\Pi\mathcal{T})\left[-iP^0\right]U(\Pi\mathcal{T})^{-1} = iP^0$$

Soit $|p, ... >$ un état propre des opérateurs P_μ :

$$P_\mu\ |p, ... > =\ p_\mu\ |p, ... >, \quad \text{avec} \;\; p^0 > 0$$

Utilisant (6.118), on obtient

$$p^0\ U(\Pi)\,[-i]\ \ |p, ... > =\ -iP^0\,U(\Pi)\ |p, ... >, \quad p^0\ U(\mathcal{T})\,[-i]\ \ |p, ... > =\ iP^0\,U(\mathcal{T})\ |p, ... >$$

$$p^0\ U(\Pi\mathcal{T})\,[-i]\ \ |p, ... > =\ -iP^0\,U(\Pi\mathcal{T})\ |p, ... > \tag{6.119}$$

On constate ainsi que les énergies des états transformés $U(\Pi)\,|p, ... >$, $U(\mathcal{T})\,|p, ... >$ et $U(\Pi\mathcal{T})\,|p, ... >$ ne pourront être du même signe positif que celui de p^0 que si

$$U(\Pi)\ [-i] = -i\,U(\Pi), \quad U(\mathcal{T})\ [-i] = i\,U(\mathcal{T}), \quad U(\Pi\mathcal{T})\ [-i] = i\,U(\Pi\mathcal{T}) \tag{6.120}$$

et par conséquent, $U(\Pi)$ doit être un opérateur linéaire, et par suite unitaire, tandis que $U(\mathcal{T})$ et $U(\Pi\mathcal{T})$ doivent être des opérateurs antilinéaires, et par suite antiunitaires. On en déduit aussi les relations

$$U(\Pi)\,P^0\,U(\Pi)^{-1} = P^0, \quad U(\mathcal{T})\,P^0\,U(\mathcal{T})^{-1} = P^0 \tag{6.121}$$
$$U(\Pi\mathcal{T})\,P^0\,U(\Pi\mathcal{T})^{-1} = P^0$$

exprimant que les opérations discrètes commutent avec P^0.

Compte tenu de ces résultats et considérant ensuite une transformation infinitésimale de la forme $1 + i\ \overrightarrow{a}\cdot\ \overrightarrow{P}$ où $\overrightarrow{a}$ est un 3-vecteur <u>réel</u>, on montre facilement que

$$U(\Pi)\ \ \overrightarrow{P}\ \ U(\Pi)^{-1} = -\ \overrightarrow{P}, \quad U(\mathcal{T})\ \ \overrightarrow{P}\ \ U(\mathcal{T})^{-1} = -\ \overrightarrow{P} \tag{6.122}$$

$$U(\Pi\mathcal{T})\ \ \overrightarrow{P}\ \ U(\Pi\mathcal{T})^{-1} = \overrightarrow{P}$$

Au vu de (6.121) et (6.122), on déduit notamment que l'opérateur 4-impulsion P_μ est invariant sous la transformation $\Pi\mathcal{T}$ et que toutes les opérations discrètes commutent avec l'invariant $P^2 = P_\mu P^\mu$.

Afin de dégager d'autres propriétés des opérateurs représentant dans H les opérations discrètes, notons les résultats suivants.

☞ D'après (6.115), le produit de deux opérateurs antilinéaires est un opérateur linéaire. Il en est donc ainsi des carrés $U(\mathcal{T})^2$ et $U(\Pi\mathcal{T})^2$.

☞ D'après le théorème (6.117), tout opérateur <u>linéaire</u> A vérifiant

$$|<\phi_2\,|A|\,\phi_1>| = |<\phi_2\,|\,\phi_1>| \quad \text{quels que soient } |\phi_1> \text{ et } |\phi_2> \tag{6.123}$$

est égal à l'opérateur identité, à un facteur de phase près : $A = e^{i\theta}$ (θ réel !).

Les opérations discrètes définies en (6.109) sont toutes de carré unité. En s'appuyant sur (6.123), il est donc naturel de leur rechercher dans H des représentants dont les carrés, qui sont tous des opérateurs linéaires, soient égaux à l'opérateur identité dans H, à des facteurs de phase près :

$$U(\Pi)^2 = \omega_1, \quad U(\mathcal{T})^2 = \omega_2, \quad U(\Pi\mathcal{T})^2 = \omega_3, \quad \text{avec} \;\; |\omega_i| = 1 \;(i = 1, 2, 3) \tag{6.124}$$

L'espace H peut être décomposé en sous-espaces correspondant chacun à des valeurs données des ω_i. Dans chacun, il est possible de redéfinir le représentant de Π de telle sorte que son carré soit égal à 1. En effet, l'opérateur $U'(\Pi) = \dfrac{1}{\sqrt{\omega_1}}\, U(\Pi)$ vérifie bien $U'(\Pi)^2 = 1$. Nous admettrons ainsi que dans H tout entier on peut définir $U(\Pi)$ de telle sorte que :

$$\boxed{U(\Pi)^2 = 1} \tag{6.125}$$

Sous cette condition, l'opérateur unitaire $U(\Pi)$ est aussi hermitique car $U(\Pi)^\dagger = U(\Pi)^{-1} = U(\Pi)$. Il est diagonalisable [20] et ses valeurs propres sont $+1$ et -1.

Les deux opérations Π et $\mathcal{T}$ commutent et leur produit donne l'opération $(\Pi\mathcal{T})$. Il est donc naturel d'admettre, d'une part, que $U(\Pi)$ et $U(\mathcal{T})$ commutent et, d'autre part, que les produits $U(\Pi)U(\mathcal{T})$ et $U(\Pi\mathcal{T})$ doivent conduirent à des résultats similaires. Plus précisément, utilisant (6.123), l'opérateur linéaire $U(\Pi)U(\mathcal{T})U(\Pi\mathcal{T})^{-1}$ ne peut qu'être égal à l'identité, à un facteur de phase près. On peut toujours s'arranger pour que ce dernier soit égal à 1. On admettra donc que dans H tout entier, on a

$$\boxed{U(\Pi)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T})U(\Pi) = U(\Pi\mathcal{T})} \tag{6.126}$$

Enfin, puisque

$$U(\mathcal{T})\ U(\mathcal{T})^2 = U(\mathcal{T})\ \omega_2 = \omega_2^\star\ U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T})^2\ U(\mathcal{T}) = \omega_2\ U(\mathcal{T}) \tag{6.127}$$

il vient $\omega_2^\star = \omega_2$, et comme $|\omega_2| = 1$, on en déduit

$$\boxed{U(\mathcal{T})^2 = \omega_2 = \pm 1} \tag{6.128}$$

Pour la suite, on notera que les relations (6.113) impliquent les résultats suivants.

① L'opérateur $U(\Pi\mathcal{T})$ commute avec tous les représentants des générateurs de $SL(2,C)$ dans H.

② Les opérateurs $U(\Pi)$ et $U(\mathcal{T})$ commutent avec les générateurs des rotations (pour lesquelles $A^{\dagger -1} = A$) et anticommutent avec les générateurs de boosts (pour lesquels $A^{\dagger -1} = A^{-1}$).

On en déduit que dans H les opérations discrètes commutent non seulement avec P^2 mais aussi avec l'invariant W^2. On peut ainsi prévoir, pour ce qui concerne le cas $m \neq 0$, qu'un espace $[\,m, s\,]$ de représentation irréductible de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ soit aussi un espace de représentation du groupe de recouvrement $\bar{\mathcal{P}}$ du groupe de Poincaré complet, se décomposant en sous-espaces de représentations irréductibles de $\bar{\mathcal{P}}$, chacun pouvant être associé à une valeur propre particulière (± 1) de l'opérateur "parité" $U(\Pi)$.

6.7.3 Représentations unitaires de la parité dans le cas $m \neq 0$

Une représentation irréductible du groupe orthochrone $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow$ est aussi une représentation du groupe restreint $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Puisque la parité conserve les invariants P^2 et W^2, un espace $[\,m, s\,]$ se décompose en fait en somme directe de représentations irréductibles de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ du type $[\,m, s, \eta\,]$, toutes de même masse m et de même spin s, chacune étant associée à un indice η relatif à la parité. Choisissons pour

20. Sans vouloir faire affront au lecteur, rappelons ici qu'un opérateur unitaire est toujours diagonalisable.

vecteurs de base de $[\, m, s, \eta\,]$ des vecteurs du type $|[\,p\,], \sigma, \eta >$, définis par rapport à une base de référence $|[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta >$ comme en (6.43) :

$$|[\,p\,], \sigma, \eta > = \; U(0, [\,p\,]) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta > \tag{6.129}$$

Comme $\overset{\circ}{\underline{p}} = \overset{\circ}{p}$ (soit $\overrightarrow{\overset{\circ}{p}} = \overrightarrow{0}$), cette base de référence correspond à un "état de repos" qui reste inchangé par application de $U(\Pi)$. De plus, comme cette opération commute avec les rotations, son application ne change pas non plus la valeur propre σ. En conséquence, on peut écrire

$$U(\Pi) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta > = \; \sum_{\eta'} P_{\eta\eta'} \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta' > \tag{6.130}$$

où la matrice $P_{\eta\eta'}$, indépendante de σ, doit, comme l'opérateur $U(\Pi)$ qu'elle représente, être unitaire et de carré unité. La diagonalisant, on peut redéfinir les vecteurs d'état de la base de référence comme vecteurs propres de $U(\Pi)$, de sorte que :

$$\boxed{U(\Pi) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta_P > = \; \eta_P \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta_P > \quad \text{avec} \quad \eta_P = +1 \text{ ou } -1} \tag{6.131}$$

Les diverses représentations $[\, m, s, \eta_P\,]$ ainsi obtenues constituent autant de représentations irréductibles du groupe orthochrone, indépendantes les unes des autres. L'application de $U(\Pi)$ aux états (6.129) donne alors

$$\begin{aligned} U(\Pi) \; |[\,p\,], \sigma, \eta_P > = \; U(\Pi) \; U(0, [\,p\,]) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta_P > = \; U(0, [\,p\,]^{\dagger -1}) \; U(\Pi) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta_P > \\ = \eta_P \; |[\,p\,]^{\dagger -1}, \sigma, \eta_P > \end{aligned} \tag{6.132}$$

L'état (6.132) associé à la tétrade $[\,p\,]^{\dagger -1}$ a bien la 4-impulsion $\underline{p}$ car ($\overset{\circ}{\underset{\sim}{p}} = m\, \tau_0$)

$$[\,p\,] \, \overset{\circ}{\underset{\sim}{p}} \, [\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{p} \quad \text{et} \quad \left([\,p\,] \, \overset{\circ}{\underset{\sim}{p}} \, [\,p\,]^\dagger \right)^{\dagger -1} = [\,p\,]^{\dagger -1} \, \overset{\circ}{\underset{\sim}{p}} \, [\,p\,]^{-1} = (\underset{\sim}{p}\,)^{\dagger -1} = \tilde{p} \equiv \underset{\sim}{\underline{p}} \tag{6.133}$$

Cependant, cette tétrade peut être différente de celle, $[\,\underline{p}\,]$, associée à un état de 4-impulsion $\underline{p}$. La matrice $[\,\underline{p}\,]^{-1} \, [\,p\,]^{\dagger -1} = [\,\underline{p}\,]^\dagger \, [\,p\,]$ étant une rotation du petit groupe de $\overset{\circ}{p}$, on a

$$\begin{aligned} |[\,p\,]^{\dagger -1}, \sigma, \eta_P > = \; U(0, [\,\underline{p}\,]) \; U(0, [\,\underline{p}\,]^{-1} \, [\,p\,]^{\dagger -1}) \; |[\,\overset{\circ}{p}\,], \sigma, \eta_P > \\ = \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^\dagger \, [\,p\,]) \; |[\,\underline{p}\,], \sigma', \eta_P > \end{aligned}$$

On en déduit la loi de transformation par parité des états de la représentation $[\, m, s, \eta_P\,]$:

$$\boxed{U(\Pi) \; |[\,p\,], \sigma, \eta_P > = \; \eta_P \; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^\dagger \, [\,p\,]) \; |[\,\underline{p}\,], \sigma', \eta_P >} \tag{6.134}$$

La valeur propre η_P est appelée *parité intrinsèque* de ladite représentation.

6.7.4 Représentations unitaires de la parité dans le cas $m = 0$

Ce cas est plus compliqué que le précédent pour deux raisons : d'une part, la 4-impulsion de référence $\mathring{\ell} = \ell_0\,(1,0,0,1)$ n'est plus conservée par parité et, d'autre part, $U(\Pi)$ ne commute pas avec les transformations du petit groupe de $\mathring{\ell}$, celles-ci ne se réduisant pas uniquement à des rotations. Préalablement à son étude, rappelons ou établissons les faits suivants.

① Pour toute matrice A de $SL(2,C)$ $(\det A = 1)$, on a $C\,A\,C^{-1} = {}^tA^{-1}$ où C est la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.135}$$

vérifiant $C^2 = -1$, $C^\star = C$, $C^\dagger = {}^tC = C^{-1} = -C$.

② Il est facile de montrer que

$$C \;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\; C^{-1} = \tilde{\mathring{\ell}} = \underset{\sim}{\mathring{\underline{\ell}}} \quad \text{avec} \quad \mathring{\underline{\ell}} = \ell_0\,(1,0,0,-1) \tag{6.136}$$

Le résultat (6.136) indique que la matrice C est une tétrade possible pour $\mathring{\underline{\ell}}$, que nous noterons aussi $[\,\mathring{\underline{\ell}}\,]'$.

③ Soient $[\ell]$ et $[\underline{\ell}]$ des tétrades possibles pour les 4-impulsions du genre lumière $\ell = (\ell_0, \overrightarrow{\ell}\,)$ et $\underline{\ell} = (\ell_0, -\overrightarrow{\ell}\,)$, respectivement :

$$[\ell]\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;[\ell]^\dagger = \underset{\sim}{\ell} \quad , \quad [\underline{\ell}]\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;[\underline{\ell}]^\dagger = \underset{\sim}{\underline{\ell}}$$

On a

$$C\;\underset{\sim}{\ell}\;C^{-1} = {}^t[\ell]^{-1}\,C\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;C^{-1}\,{}^t[\ell]^{\dagger-1} \quad \text{et comme} \quad C\;\underset{\sim}{\ell}\;C^{-1} = {}^t\underset{\sim}{\underline{\ell}}$$

on en déduit

$$\underset{\sim}{\underline{\ell}} = [\ell]^{\dagger-1}\,C\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;C^{-1}\,[\ell]^{-1}$$

La matrice $[\ell]^{\dagger-1}\,C$ est donc une tétrade possible pour $\underline{\ell}$ et par conséquent la matrice $[\underline{\ell}]^{-1}[\ell]^{\dagger-1}\,C$ appartient au petit groupe de $\mathring{\ell}$.

④ Soit A une matrice du petit groupe de $\mathring{\ell}$. Comme A est transformée en $A^{\dagger-1}$ par parité, on peut s'attendre que cette dernière matrice appartienne au petit groupe de $\mathring{\underline{\ell}}$. Vérifions-le. On a

$$A\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;A^\dagger = \underset{\sim}{\mathring{\ell}} \quad \text{et} \quad {}^tA^\dagger\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;{}^tA = \underset{\sim}{\mathring{\ell}} = C^{-1}A^{\dagger-1}C\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;C^{-1}A^{-1}C \quad \text{soit}$$

$$C\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;C^{-1} = A^{\dagger-1}C\;\underset{\sim}{\mathring{\ell}}\;C^{-1}A^{-1} \quad \text{ou} \quad \underset{\sim}{\mathring{\underline{\ell}}} = A^{\dagger-1}\;\underset{\sim}{\mathring{\underline{\ell}}}\;A^{-1}$$

d'où le résultat annoncé.

Considérons maintenant dans l'espace des états un état de référence $|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta>$ d'hélicité λ et d'indice de parité η. D'après (6.74), l'application sur ce vecteur d'une transformation $U(0, B)$ du petit groupe de $\mathring{\ell}$ donne

$$U(0,B)|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(B)\ |[\mathring{\ell}], \lambda, \eta>$$

où $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(B)$ est en fait égal à un facteur de phase $e^{-i\lambda\theta}$. Puis, A étant une transformation du petit groupe de $\mathring{\underline{\ell}}$ (pour laquelle $A^{\dagger -1}$ appartient au petit groupe de $\mathring{\ell}$),

$$U(0,A)\,U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> = U(\Pi)\,U(0, A^{\dagger -1})|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(A^{\dagger -1})\ U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta>$$

Or, $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(A^{\dagger -1}) \equiv \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(A)$ (car il s'agit d'un facteur de phase) et, d'un autre côté,

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(A) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}({}^t\!A) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}({}^t\!A^{-1}) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}(C^{-1}A\,C) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\mathring{\underline{\ell}}]'^{-1}A\,[\mathring{\underline{\ell}}]') \qquad (6.137)$$

Ainsi,

$$U(0,A)\,U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\mathring{\underline{\ell}}]'^{-1}A\,[\mathring{\underline{\ell}}]')\ U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> \qquad (6.138)$$

On en conclut que le vecteur $U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta>$ se transforme comme le vecteur $|[\mathring{\underline{\ell}}]', -\lambda, \eta>$. On est donc amené à poser

$$U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta> = \sum_{\eta'} P^{\lambda}_{\eta\eta'}\ |[\mathring{\underline{\ell}}]', -\lambda, \eta'> \qquad (6.139)$$

où la matrice $P^{\lambda}_{\eta\eta'}$ qui dépend a priori de λ est unitaire, comme $U(\Pi)$. En la diagonalisant, on obtient la relation

$$\boxed{U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta^{\lambda}_P> = \eta^{\lambda}_P\ |[\mathring{\underline{\ell}}]', -\lambda, \eta^{-\lambda}_P>} \qquad (6.140)$$

☞ Une remarque importante s'impose ici. La formule (6.140) montre que dans le cas $m = 0$, la parité fait passer de la représentation $[\,0, \lambda\,]$ à la représentation $[\,0, -\lambda\,]$: elle *change le signe de l'hélicité*. Or, du point de vue de $\bar{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+}$, ces deux représentations sont indépendantes car aucune transformation de ce groupe ne permet de passer de l'une à l'autre. En conséquence, la phase relative entre états d'hélicités opposées est *indéterminée*. C'est une différence essentielle par rapport au cas précédent où la phase relative des états d'indice de spin différents est connue.

Utilisant (6.140), on déduit la loi de transformation sous la parité des états $|[\,\ell\,], \lambda, \eta^{\lambda}_P>$:

$$U(\Pi)\,|[\,\ell\,], \lambda, \eta^{\lambda}_P> = U(0, [\,\ell\,]^{\dagger -1})\,U(\Pi)\,|[\mathring{\ell}], \lambda, \eta^{\lambda}_P> = \eta^{\lambda}_P\,U(0, [\,\ell\,]^{\dagger -1})\,U(0, [\mathring{\underline{\ell}}]')\,|[\mathring{\ell}], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P>$$

$$= \eta^{\lambda}_P\ U(0, [\underline{\ell}])\ U(0, [\underline{\ell}]^{-1}\ [\,\ell\,]^{\dagger -1}\ C)\ |[\mathring{\ell}], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P>$$

soit, puisque la matrice $M = [\underline{\ell}]^{-1}\ [\,\ell\,]^{\dagger -1}\ C$ appartient au petit groupe de $\mathring{\ell}$:

$$\boxed{\begin{aligned} U(\Pi)\ |[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda> = &\ \ \eta_P^\lambda\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\ [\,\ell\,]^{\dagger-1}\ C)\ |[\,\underline{\ell}\,],-\lambda,\eta_P^{-\lambda}> \\ = &\ \ \eta_P^\lambda\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\ [\,\ell\,]\ C)\ |[\,\underline{\ell}\,],-\lambda,\eta_P^{-\lambda}> \end{aligned}} \tag{6.141}$$

où la dernière égalité résulte de la relation $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}(M) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}(M^{\dagger-1})$. Symétriquement, on peut écrire

$$U(\Pi)\ |[\,\underline{\ell}\,],-\lambda,\eta_P^{-\lambda}> =\ \eta^{-\lambda}\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]^{\dagger}\ [\,\underline{\ell}\,]\ C)\ |[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda>$$

d'où

$$U(\Pi)^2\ |[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda> =\ \ \eta_P^\lambda\ \eta_P^{-\lambda}\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\ [\,\ell\,]\ C)\ \ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]^{\dagger}\ [\,\underline{\ell}\,]\ C)\ |[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda>$$

Comme en (6.137), écrivons

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}(M^{\dagger-1})\ =\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(C^{-1}\,M^{\dagger-1}\,C)\ =\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(C^{-1}\,[\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\ [\,\ell\,]\,C^2)$$

Mais $C^2 = -1$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}\,(-C^{-1}\,[\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\ [\,\ell\,]) &= (-1)^{2|\lambda|}\ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}\,(C^{-1}\,[\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\ [\,\ell\,]) \\ =\ (-1)^{2|\lambda|}\ \left[\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}\,(\,[\,\ell\,]^{\dagger}\ [\,\underline{\ell}\,]\,C)\right]^{\star} &=\ (-1)^{2|\lambda|}\ \left[\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}\,(\,[\,\ell\,]^{\dagger}\ [\,\underline{\ell}\,]\,C)\right]^{-1} \end{aligned}$$

d'où

$$U(\Pi)^2|[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda> =\ \eta_P^\lambda\ \eta_P^{-\lambda}\ (-1)^{2|\lambda|}\ |[\,\ell\,],\lambda,\eta_P^\lambda>$$

Comme $U(\Pi)^2 = 1$, on en déduit la relation

$$\boxed{\eta_P^\lambda\ \eta_P^{-\lambda}\ (-1)^{2|\lambda|}\ =\ 1} \tag{6.142}$$

En conclusion, une représentation du groupe orthochrone $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow$ unitaire, irréductible, de masse nulle et d'hélicité de valeur absolue non nulle $|\lambda|$, est constituée par la somme directe des deux représentations unitaires irréductibles et indépendantes de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ que sont $[\,0,|\lambda|\,]$ et $[\,0,-|\lambda|\,]$.

6.7.5 Représentations antiunitaires de $\Pi\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}$ dans le cas $m \neq 0$

L'opération $U(\Pi\mathcal{T})$ laisse invariante la 4-impulsion et commute avec tous les générateurs de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Distinguons le comportement sous $\Pi\mathcal{T}$ des divers vecteurs d'état par un indice η_1. Le vecteur

$$U(\Pi\mathcal{T})\ |[\,\mathring{p}\,],\sigma,\eta_1>$$

de $[\,m,s\,]$ est de 4-impulsion $\mathring{p}$. Sous une rotation A $(= A^{\dagger-1})$ du petit groupe de $\mathring{p}$, il se transforme comme suit.

$$U(0,A)\ U(\Pi\mathcal{T})\ |[\,\mathring{p}\,],\sigma,\eta_1> =\ U(\Pi\mathcal{T})\ \left[U(0,A)\ |[\,\mathring{p}\,],\sigma,\eta_1>\right]$$

$$= U(\Pi\mathcal{T}) \left[\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 > \right] = [\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)]^\star \; U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 >$$

Or, $[\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)]^\star = \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A^\star)$ et $A^\star = C^{-1} A^{\dagger -1} C = C^{-1} A \, C$. D'où

$$U(0, A) \; U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma, \eta_1 > = \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}(C^{-1}) \, \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma_2}(A) \, \mathcal{D}^s_{\sigma_2\sigma}(C) \; U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 > \quad \text{et}$$

$$\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_3}(C^{-1}) \; U(0, A) \; U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma, \eta_1 > = \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma_3}(A) \, \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}(C^{-1}) \; U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 >$$

La matrice C est *réelle* et la matrice $\mathcal{D}(C^{-1})$ l'est aussi. D'où

$$U(0, A) \; U(\Pi\mathcal{T}) \left[\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_3}(C^{-1}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma, \eta_1 > \right] = \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma_3}(A) \; U(\Pi\mathcal{T}) \left[\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}(C^{-1}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 > \right]$$

L'état $U(\Pi\mathcal{T}) \left[\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}(C^{-1}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 > \right]$ se transforme exactement comme $|[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta_1 >$ et l'on est donc amené à poser

$$U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma, \eta_1 > = \sum_{\sigma'\eta'_1} (PT)_{\eta_1\eta'_1} \, \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C) \, |[\overset{\circ}{p}], \sigma', \eta'_1 > \tag{6.143}$$

où $(PT)_{\eta_1\eta'_1}$ est une matrice unitaire, indépendante des indices de spin σ et σ'. Par application de $U(0, [\,p\,])$, la relation ci-dessus se transpose directement au cas d'un état de 4-impulsion p :

$$U(\Pi\mathcal{T}) \, |[\,p\,], \sigma, \eta_1 > = \sum_{\sigma'\eta'_1} (PT)_{\eta_1\eta'_1} \, \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C) \, |[\,p\,], \sigma', \eta'_1 > \tag{6.144}$$

Appliquant une nouvelle fois $U(\Pi\mathcal{T})$ à (6.144), on obtient

$$U(\Pi\mathcal{T})^2 \, |[\,p\,], \sigma, \eta_1 > = \sum_{\sigma'\sigma''\eta'_1\eta'_2} \left[(PT)_{\eta_1\eta'_1} \, (PT)^\star_{\sigma'\eta'_1\eta'_2} \right] \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C) \, \mathcal{D}^s_{\sigma''\sigma'}(C) \, |[\,p\,], \sigma'', \eta'_2 >$$

$$= \sum_{\sigma''\eta_2} [\,(PT)\,(PT)^\star\,]_{\eta_1\eta_2} \; \mathcal{D}^s_{\sigma''\sigma}(C^2) \, |[\,p\,], \sigma'', \eta_2 > = (-1)^{2s} \sum_{\eta_2} [\,(PT)\,(PT)^\star\,]_{\eta_1\eta_2} \; |[\,p\,], \sigma, \eta_2 >$$

Comme $U(\Pi\mathcal{T})^2 = \omega_3$ avec $|\omega_3| = 1$, on doit donc avoir

$$[\,(PT)\,(PT)^\star\,]_{\eta_1\eta_2} = (-1)^{2s} \, \omega_3 \, \delta_{\eta_1\eta_2} \tag{6.145}$$

☞ Seul le cas où $(-1)^{2s}\,\omega_3 = 1$, c'est-à-dire où $(PT) = (PT)^{\star -1}$, semble être réalisé dans la Nature. Comme (PT) est unitaire, on obtient alors $(PT)^{\star -1} = {}^t(PT) = (PT)$. Ce cas conduit donc à une matrice (PT) *symétrique* qui sera donc diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale *réelle*[21]. On peut donc trouver dans l'espace $[\,m, s\,]$ des états $|\,[\,p\,], \sigma, \eta_{PT} >$ tels que

$$\boxed{U(\Pi\mathcal{T}) \, |\,[\,p\,], \sigma, \eta_{PT} > = \eta_{PT} \, \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C) \, |\,[\,p\,], \sigma', \eta_{PT} >} \tag{6.146}$$

où η_{PT} est un facteur de phase ($|\eta_{PT}| = 1$).

21. Ce dernier point est essentiel à cause de l'antiunitarité de $U(P\mathcal{T})$.

☞ En combinant les résultats obtenus pour les représentations de Π et de $\Pi\mathcal{T}$ dans l'espace des états, on peut en principe trouver celles de $\mathcal{T}$ dans ce même espace. Se pose alors la question de savoir si les matrices (P) et (PT) introduites respectivement en (6.130) et (6.143) commutent ou non. Il semble que seul le cas où ces matrices commutent soit effectivement réalisé dans la Nature, ce qui conforte aussi le résultat admis en (6.126). Sous cette hypothèse, les deux matrices sont simultanément diagonalisables et nous notons provisoirement $|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} >$ les vecteurs qui les diagonalisent. On trouve alors

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} > &= U(\Pi)\,U(\Pi\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} > \qquad (6.147) \\ = \eta_{PT}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\,U(\Pi)\,|[p], \sigma', \eta_P, \eta_{PT} > &= \eta_P\,\eta_{PT}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\underline{p}]^\dagger\,[p]\,C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P, \eta_{PT} > \end{aligned}$$

Il est possible de redéfinir les états de telle sorte à faire disparaitre le facteur $\eta_P\,\eta_{PT}$. En effet, multiplions (6.147) par un facteur de phase ζ. Il vient

$$\begin{aligned} \zeta\,U(\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} > &= U(\mathcal{T})\;[\zeta^\star\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} >] \\ &= \zeta\,\eta_P\,\eta_{PT}\;\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\underline{p}]^\dagger\,[p]\,C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P, \eta_{PT} > \end{aligned}$$

Si l'on choisit ζ tel que

$$\zeta\,\eta_P\,\eta_{PT} = \zeta^\star \qquad (6.148)$$

et si l'on redéfinit les états $\zeta^\star\,|\cdots>_{\text{ancien}}$ comme étant les nouveaux états de base $|\cdots>_{\text{nouveau}}$ on obtient

$$U(\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} > = \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\underline{p}]^\dagger\,[p]\,C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P, \eta_{PT} > \qquad (6.149)$$

L'équation (6.146) multipliée par ζ devient

$$\begin{aligned} \zeta\,U(\Pi\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} > &= U(\Pi\mathcal{T})\;[\zeta^\star\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} >] \\ = \zeta\,\eta_{PT}\;\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P, \eta_{PT} > &= \eta_P\;\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\;\;[\zeta^\star\,|[p], \sigma, \eta_P, \eta_{PT} >] \end{aligned}$$

Il s'ensuit que dans la nouvelle base, le facteur η_{PT} devient égal à η_P. Avec cette base que nous notons maintenant $|[p], \sigma, \eta_P >$, les actions de $U(\mathcal{T})$ et $U(\Pi\mathcal{T})$ sont grandement simplifiées :

$$\boxed{\begin{aligned} U(\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P > &= \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\underline{p}]^\dagger\,[p]\,C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P > \\ U(\Pi\mathcal{T})\,|[p], \sigma, \eta_P > &= \eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\;|[\underline{p}], \sigma', \eta_P > \end{aligned}} \qquad (6.150)$$

➽ Les formules (6.50), (6.134) et (6.150) définissent les repésentations *physiques* unitaires, irréductibles, de masse non nulle, du groupe de Poincaré complet. Chacune, notée $[\,m, s, \eta_P\,]$, est caractérisée par sa masse m, son spin s et, du point de vue des opérations discrètes, par un unique nombre η_P, égal à $+1$ ou -1, qui est la parité intrinsèque de la représentation [22] .

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que dans cette représentation, on a

$$\boxed{U(\mathcal{T})^2 \;=\; U(\Pi\mathcal{T})^2 \;=\; (-1)^{2s}} \qquad (6.151)$$

22. A noter qu'avec (6.150), la phase globale des états de la représentation est définie à π près, le facteur ζ dans (6.148) n'étant défini qu'au signe pres.

6.7.6 Représentations antiunitaires de $\Pi\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}$ dans le cas $m = 0$

L'état $U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \cdots >$ est de 4-impulsion $\overset{\circ}{\ell}$. Lui appliquant une transformation A du petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$, on obtient

$$\begin{aligned} U(0,A)\,U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \cdots > &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}(A)^\star\,U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \cdots > \\ &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}(A)\,U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \cdots > \end{aligned}$$

d'où il ressort que ledit état se transforme comme un état d'hélicité $-\lambda$ et que l'on est amené à l'écrire sous la forme

$$U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \eta > = \sum_{\eta} (PT^\lambda)_{\eta\eta'}\,|[\overset{\circ}{\ell}], -\lambda, \eta' > \tag{6.152}$$

où la matrice (PT^λ) dépend de λ. Recherchant des représentations des opérations discrètes connectant uniquement deux représentations du type $[\,0, \lambda, \eta^\lambda_{PT}\,]$ et $[\,0, -\lambda, \eta^{-\lambda}_{PT}\,]$, nous admettrons que la matrice (PT^λ) est diagonalisable, de sorte que (6.152) devienne

$$U(\Pi\mathcal{T})\,|[\overset{\circ}{\ell}], \lambda, \eta^\lambda_{PT} > = \eta^\lambda_{PT}\,|[\overset{\circ}{\ell}], -\lambda, \eta^{-\lambda}_{PT} > \tag{6.153}$$

Par application de $U(0, [\,\ell\,])$, (6.153) donne :

$$U(\Pi\mathcal{T})\,|[\,\ell\,], \lambda, \eta^\lambda_{PT} > = \eta^\lambda_{PT}\,|[\,\ell\,], -\lambda, \eta^{-\lambda}_{PT} > \tag{6.154}$$

Appliquant une nouvelle fois $U(\Pi\mathcal{T})$ à (6.154) et tenant compte de (6.124), il vient finalement

$$\eta^\lambda_{PT}\,\left[\,\eta^{-\lambda}_{PT}\,\right]^\star = \omega_3 \tag{6.155}$$

Ici encore, nous admettrons d'emblée la relation (6.126), de sorte que, en posant $U(\mathcal{T}) = U(\Pi)\,U(\Pi\mathcal{T})$,

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})\,|[\,\ell\,], \lambda, \eta^\lambda_P, \eta^\lambda_{PT} > &= \eta^\lambda_{PT}\,U(\Pi)\,|[\,\ell\,], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P, \eta^{-\lambda}_{PT} > \\ &= \eta^\lambda_{PT}\,\eta^{-\lambda}_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^\dagger\,[\,\ell\,]\,C)\,|[\,\underline{\ell}\,], \lambda, \eta^\lambda_P, \eta^\lambda_{PT} > \end{aligned} \tag{6.156}$$

Le changement de base

$$|[\,\ell\,], \lambda, \cdots > \longrightarrow \zeta^\lambda\,|[\,\ell\,], \lambda, \cdots > \quad \text{avec} \quad \zeta^\lambda = \zeta^{\lambda\star}\,\eta^\lambda_{PT}\,\eta^{-\lambda}_P \tag{6.157}$$

où ζ est un facteur de phase, permet alors de faire disparaitre le facteur de phase dans (6.156). Comme

$$\begin{aligned} U(\Pi\mathcal{T})\,\zeta^\lambda\,|[\,\ell\,], \lambda, \eta^\lambda_P, \eta^\lambda_{PT} > &= \zeta^{\lambda\star}\,\eta^\lambda_{PT}\,|[\,\ell\,], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P, \eta^{-\lambda}_{PT} > \\ = (\eta^{-\lambda}_P)^{-1}\,\zeta^\lambda\,|[\,\ell\,], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P, \eta^{-\lambda}_{PT} > &= (-1)^{2|\lambda|}\,\eta^\lambda_P\,\left[\,\zeta^\lambda\,|[\,\ell\,], -\lambda, \eta^{-\lambda}_P, \eta^{-\lambda}_{PT} >\,\right] \end{aligned}$$

où la dernière égalité tient compte de (6.142), on voit que dans la nouvelle base, le facteur η^λ_{PT} apparaissant dans (6.154) s'identifie à $(-1)^{2|\lambda|}\,\eta^\lambda$. Avec ces nouvelles définitions, la relation (6.155) devient

$$\eta^\lambda_P\,\eta^{-\lambda\star}_P = \omega_3, \quad \text{avec} \quad \eta^\lambda_P\,\eta^{-\lambda}_P = (-1)^{2|\lambda|} \tag{6.158}$$

A ce stade, nous admettrons encore que l'on a affaire à une représentation dite *normale*, pour laquelle

$$\omega_3 = (-1)^{2|\lambda|} \tag{6.159}$$

On déduit alors de (6.158) que les facteurs η_P^λ doivent être *réels*. Une façon de les paramétrer est la suivante :

$$\eta_P^\lambda \;=\; \eta_P\,(-1)^{|\lambda|-\lambda}, \quad \text{avec} \quad \eta_P = \pm 1 \tag{6.160}$$

Cependant, d'une part, le facteur ζ introduit dans (6.157) n'est défini qu'au signe près, ne définissant ainsi la phase des états qu'à π près, et d'autre part un changement de signe des états reviendrait à changer le signe des facteurs η_P^λ sans affecter pour autant la relation (6.158). Cela signifie en fait que le signe de η_P dans (6.160) est arbitraire et n'a donc aucune signification physique : les deux signes possibles correspondent à la même représentation. En conclusion, on ne peut pas définir la parité intrinsèque d'une représentation de masse nulle au moyen du seul groupe de Poincaré.

De ce fait, les états de ladite représentation seront notés simplement $|\,[\,\ell\,],\lambda >$, sans spécifier le paramètre η_P. L'action des opérations discrètes Π et $\Pi\mathcal{T}$ sur ces états est ainsi donnée par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} U(\Pi)\,|\,[\,\ell\,],\lambda > &= \;\eta_P^\lambda\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-\lambda-\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^\dagger\;[\,\ell\,]\;C)\;|[\,\underline{\ell}\,],-\lambda > \\ U(\mathcal{T})\,|\,[\,\ell\,],\lambda > &= \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda\lambda}([\,\underline{\ell}\,]^\dagger\,[\,\ell\,]\,C)\,|\,[\,\underline{\ell}\,],\lambda > \\ U(\Pi\mathcal{T})\,|\,[\,\ell\,],\lambda > &= \;\eta_P^{-\lambda}\,|\,[\,\underline{\ell}\,],-\lambda > \end{aligned}} \tag{6.161}$$

➠ Les formules (6.74) et (6.161) avec $\eta_P^\lambda = \pm(-1)^{|\lambda|-\lambda}$ définissent les représentations physiques, unitaires, irréductibles, de masse nulle et de valeur absolue d'hélicité $|\lambda|$ du groupe de Poincaré complet. Le lecteur vérifiera que pour celles-ci, on a

$$U(\mathcal{T})^2 \;=\; U(\Pi\mathcal{T})^2 \;=\; (-1)^{2|\lambda|} \tag{6.162}$$

6.8 Transformations des amplitudes spinorielles sous les opérations discrètes

6.8.1 Cas $m \neq 0$

Rappelons que les amplitudes spinorielles sont définies au moyen des états indépendants des tétrades donnés par formules (6.79) et (6.82)

$$|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^{-1})\,|\,[\,p\,],\sigma',\eta_P > \quad \text{et} \quad |\,p,\sigma,\eta_P > \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^\dagger)\,|\,[\,p\,],\sigma',\eta_P >$$

Examinons tout d'abord l'effet sur ces états de l'opération de parité. On a

$$\begin{aligned} U(\Pi)\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > &= \;\eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{-1})\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}([\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,])\;|[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \\ &= \;\eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^\dagger)\;|[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{U(\Pi)\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > \;=\; \eta_P\,|\,\underline{p},\sigma,\eta_P >} \tag{6.163}$$

Puis

$$\eta_P\, U(\Pi)\, U(\Pi)\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > = \ \eta_P\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > = \ \eta_P^2\, U(\Pi)\,|\,\underline{p},\sigma,\eta_P > = \ U(\Pi)\,|\,\underline{p},\sigma,\eta_P >$$

d'où

$$\boxed{\boxed{U(\Pi)\,|\,p,\sigma,\eta_P > = \ \eta_P\,|\,\hat{\underline{p}},\sigma,\eta_P >}} \tag{6.164}$$

On en déduit la loi de transformation par parité des amplitudes spinorielles $\phi_\sigma(p) =< p,\sigma,\eta_P\,|\phi >$ et $\hat{\phi}_\sigma(p) =< \hat{p},\sigma,\eta_P\,|\phi >$:

$$\boxed{\boxed{{}^P\phi_\sigma(p) \ = \ \eta_P\,\hat{\phi}_\sigma(\underline{p}) \quad \text{et} \quad {}^P\hat{\phi}_\sigma(p) \ = \ \eta_P\,\phi_\sigma(\underline{p})}} \tag{6.165}$$

soit encore, dans la notation bi-spineur (6.91)

$${}^P\Phi(p) \ = \ \eta_P\,\Gamma_0\,\Phi(\underline{p}) \tag{6.166}$$

Γ_0 étant la matrice $2(2s+1)\times 2(2s+1)$:

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_s & 1_s \\ 1_s & 0_s \end{pmatrix} \tag{6.167}$$

où 1_s est la matrice identité $(2s+1)\times(2s+1)$.

Passons ensuite à l'application du renversement du sens du temps. On a

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > &= \ \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^{-1})^\star\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}([\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C)\,|\,[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \\ &= \ \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C\,[\,p\,]^{\star-1})\,|\,[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \end{aligned}$$

Or, $[\,p\,]^\dagger = C^{-1}\,[\,p\,]^{\star-1}\,C$ et $[\,p\,]\,C\,[\,p\,]^{\star-1} = [\,p\,]\,[\,p\,]^\dagger\,C$. Il vient alors

$$[\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C\,[\,p\,]^{\star-1} \ = \ [\,\underline{p}\,]^{-1}\,[\,\underline{p}\,]\,[\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,[\,p\,]^\dagger\,C$$

Mais $[\,\underline{p}\,]\,[\,\underline{p}\,]^\dagger = \widetilde{p}/m$, $[\,p\,]\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{p}\,/m$ et $(\widetilde{p}/m)(\underset{\sim}{p}\,/m) = 1$. D'où :

$$[\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C\,[\,p\,]^{\star-1} \ = \ [\,\underline{p}\,]^{-1}\,C$$

et

$$U(\mathcal{T})\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > = \ \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^{-1}\,C)\,|\,[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P >$$

soit, finalement,

$$\boxed{\boxed{U(\mathcal{T})\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > = \ \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\,|\,\hat{\underline{p}},\sigma',\eta_P >}} \tag{6.168}$$

De même :

$$\begin{aligned} U(\mathcal{T})\,|\,p,\sigma,\eta_P > &= \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,]^\dagger)^\star\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma_1}([\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C)\,|\,[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \\ &= \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,\underline{p}\,]^\dagger\,[\,p\,]\,C\,{}^t[\,p\,])\,|\,[\,\underline{p}\,],\sigma',\eta_P > \end{aligned}$$

et comme $C\,{}^t[\,p\,] = [\,p\,]^{-1}\,C$, il vient

$$\boxed{U(\mathcal{T})\,|\,p,\sigma,\eta_P > = \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\,|\,\underline{p},\sigma',\eta_P >} \tag{6.169}$$

Ecrivant $U(\Pi\mathcal{T}) = U(\Pi)\,U(\mathcal{T})$, on trouve immédiatement

$$\boxed{\begin{aligned} U(\Pi\mathcal{T})\,|\,\hat{p},\sigma,\eta_P > &= \eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\,\,|\,p,\sigma',\eta_P > \\ U(\Pi\mathcal{T})\,|\,p,\sigma,\eta_P > &= \eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(C)\,\,|\,\hat{p},\sigma',\eta_P > \end{aligned}} \tag{6.170}$$

Rappelons que pour un opérateur *antilinéaire* B on a[23] $<\psi\,|\,\,(B\,|\,\phi>) = [(<\psi\,|\,B)\,\,|\,\phi>]^\star$.

Utilisons tout d'abord cette relation pour obtenir $(<\hat{p},\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))$. Calculons $(<\hat{p},\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\,|\,p',\sigma'>$. On a

$$[\,(<\hat{p},\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\,|\,p',\sigma'>]^\star \;=\, <\hat{p},\sigma\,|\,\,(U(\mathcal{T})\,|\,p',\sigma'>)\;=\,<\hat{p},\sigma\,|\,\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma'}(C)\,|\,\underline{p}',\sigma_1>$$

Or, il est facile de vérifier la relation

$$<\hat{p},\sigma|\,p',\sigma'> = \delta_{\sigma\sigma'}\,(2\pi)^3\,2p_0\,\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p'}\right) \tag{6.171}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} [\,(<\hat{p},\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\,|\,p',\sigma'>]^\star &= \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\,(2\pi)^3\,2p_0\,\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{p'}\right) \\ &= \left[\,\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)^\star\,<\underline{\hat{p}},\sigma_1\,|\,p',\sigma'>\right]^\star \end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\boxed{(<\hat{p},\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;=\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)^\star\,<\underline{\hat{p}},\sigma_1\,|\;=\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)\,<\underline{\hat{p}},\sigma_1\,|} \tag{6.172}$$

On montre de la même manière que $(\eta_P = \eta_P^\star)$

$$\boxed{\begin{aligned} (<\hat{p},\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T}))\;&=\;\eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)\,<p,\sigma_1\,| \\ (<p,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;&=\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)\,<\underline{p},\sigma_1\,| \\ (<p,\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T}))\;&=\;\eta_P\,\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C)\,<\hat{p},\sigma_1\,| \end{aligned}} \tag{6.173}$$

23. Voir A. Messiah, loc. cit., p.545.

On déduit aisément de ces relations les lois de transformations des amplitudes spinorielles[24] :

$$\boxed{\begin{array}{rclcrcl} {}^{T}\phi_\sigma(p) & = & \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\ \phi^\star_{\sigma'}(\underline{p}), & & {}^{T}\hat{\phi}_\sigma(p) & = & \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\ \hat{\phi}^\star_{\sigma'}(\underline{p}) \\ {}^{PT}\phi_\sigma(p) & = & \eta_P\, \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\ \hat{\phi}^\star_{\sigma'}(p), & & {}^{PT}\hat{\phi}_\sigma(p) & = & \eta_P\, \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\ \phi^\star_{\sigma'}(p) \end{array}} \tag{6.174}$$

lesquelles, en notation bi-spinorielle, s'écrivent :

$$\boxed{{}^{T}\Phi(p) \ = \ \Omega_C\, \Phi^\star(\underline{p}), \quad {}^{PT}\Phi(p) \ = \ \eta_P\, \Gamma_0\, \Omega_C\, \Phi^\star(p)} \tag{6.175}$$

Ω_C étant la matrice $2(2s+1)\times 2(2s+1)$:

$$\boxed{\Omega_C = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s(C) & 0_s \\ 0_s & \mathcal{D}^s(C) \end{pmatrix}} \tag{6.176}$$

6.8.2 Cas $m = 0$

Rappelons tout d'abord que toute matrice A de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$ est nécessairement de la forme (6.67) et que, comme indiqué en (6.68), cette forme implique que les éléments de matrice $\mathcal{D}^s_{mm'}(A)$ tels que $m' > m$ sont tous nuls. Il est facile de montrer que, symétriquement, toute matrice B de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe de $\underline{\overset{\circ}{\ell}}$ est de la forme[25]

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^\star \end{pmatrix} \tag{6.177}$$

et que, d'après (4.66), les éléments de matrice $\mathcal{D}^s_{nn'}(B)$ pour lesquels $n > n'$ sont tous nuls. Ces résultats seront utiles pour la suite.

Dans le cas $m = 0$, les amplitudes spinorielles sont définies par les états (6.96) et (6.100) :

$$|\,\ell_-,\sigma> = \ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,|\,[\,\ell\,],-|\lambda|>, \qquad |\,\ell_+,\sigma> = \ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,|\,[\,\ell\,],|\lambda|>$$

où l'indice de spin σ court par valeurs entières de $-|\lambda|$ à $|\lambda|$. Appliquons au premier l'opération de parité :

$$U(\Pi)\,|\,\ell_-,\sigma> = \ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,\eta_P^{-|\lambda|}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C)\,|\,[\,\underline{\ell}\,],|\lambda|>$$

Or, d'une part, $\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C)$ étant un facteur de phase,

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C) \ = \ \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C)$$

et, d'autre part, pour toute matrice A de $SL(2,C)$,

24. ${}^{T}\hat{\phi}_\sigma(p) =< \hat{p},\sigma\,|\ (U(\mathcal{T})\,|\,\phi>)$, etc.

25. Il en est ainsi pour $A^{\dagger-1}$ si A appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{j}_{m\,m'}(AC) &= \mathcal{D}^{j}_{m\,m_1}(A)\,\mathcal{D}^{j}_{m_1\,m'}(C) = (-1)^{j+m'}\,\mathcal{D}^{j}_{m,\,-m'}(A)\\ &= (-1)^{j+m'}\,\mathcal{D}^{j}_{m,\,-m'}(C^{-1}CA) = (-1)^{m'-m}\,\mathcal{D}^{j}_{-m,\,-m'}(CA)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\underline{\ell}]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,-|\lambda|}(C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}\,[\,\ell\,])$$

Montrons que la matrice $M = C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}\,[\,\ell\,]$ appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$. On a

$$M\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\,M^{\dagger} = C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}\,\underset{\sim}{\ell}\,[\underline{\ell}]\,C^{-1} = [\underline{\ell}]^{\star-1}\,C\,\underset{\sim}{\ell}\,C^{-1}\,{}^{t}[\underline{\ell}]^{-1} = [\underline{\ell}]^{\star-1}\,(\underset{\sim}{\underline{\ell}})^{\star}\,{}^{t}[\underline{\ell}]^{-1}$$

$$= \left([\underline{\ell}]^{-1}\,\underset{\sim}{\underline{\ell}}\,[\underline{\ell}]^{\dagger-1}\right)^{\star} = (\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}})^{\star} = \underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}$$

D'où le résultat annoncé. Comme $-|\lambda|$ est la plus petite valeur de l'hélicité, on en déduit aussi que

$$\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\lambda'}(M) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda' \neq -|\lambda|$$

Il est ainsi possible d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|\,|\lambda|}([\underline{\ell}]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C) &\equiv \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,-|\lambda|}(C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}\,[\,\ell\,])\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\\ \sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\lambda'}(C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}\,[\,\ell\,])\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda'\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1}) &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma}(C\,[\underline{\ell}]^{\dagger}) = (-1)^{2|\lambda|}\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,\sigma}([\underline{\ell}]^{\dagger})\end{aligned}$$

Comme, d'après (6.160), $\eta_P^{-|\lambda|}\,(-1)^{2|\lambda|} = \eta_P$, on obtient finalement la loi de transformation par parité

$$\boxed{U(\Pi)\,|\,\ell_-,\sigma > = \eta_P\,|\,(\underline{\ell})_+,\sigma >} \tag{6.178}$$

Comme $U(\Pi)^2 = 1$ et $\eta_P^2 = 1$, on a aussi

$$\eta_P\,U(\Pi)^2\,|\,\ell_-,\sigma > = U(\Pi)\,|\,(\underline{\ell})_+,\sigma > = \eta_P\,|\,\ell_-,\sigma >$$

et par conséquent, en faisant l'échange $\ell \longleftrightarrow \underline{\ell}$,

$$\boxed{U(\Pi)\,|\,\ell_+,\sigma > = \eta_P\,|\,(\underline{\ell})_-,\sigma >} \tag{6.179}$$

Lorsqu'on introduit les opérations discrètes dans le cas de la masse nulle, on doit considérer simultanément deux représentations de masse nulle d'hélicités opposées $[\,0,|\,\lambda\,|]$ et $[\,0,-|\lambda|\,]$. Dans l'espace des états ainsi composé, on peut alors associer à un état donné $|\,\Phi >$ les amplitudes spinorielles $\phi^-_\sigma(\ell) = < \ell_-,\sigma\,|\,\Phi >$ et $\phi^+_\sigma(\ell) = < \ell_+,\sigma\,|\,\Phi >$. D'après ce qui précède, celles-ci sont liées par parité de la façon suivante

$$\boxed{\,{}^{P}\phi^{-}_{\sigma}(\ell) \;=\; \eta_P\; \phi^{+}_{\sigma}(\underline{\ell}) \quad \text{et} \quad {}^{P}\phi^{+}_{\sigma}(\ell) \;=\; \eta_P\; \phi^{-}_{\sigma}(\underline{\ell})\,} \tag{6.180}$$

Envisageons ensuite l'action du renversement du sens du temps. On a

$$U(\mathcal{T})\,|\,\ell_{-},\sigma> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})^{\star}\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,-|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C)\;|\,[\,\underline{\ell}\,],-|\lambda|>$$

et comme $M' = [\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C$ appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})^{\star}\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,-|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C) \;&=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{\star-1})\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,-|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C)\\
=\;\sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\lambda'}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C)\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda',\sigma}([\,\ell\,]^{\star-1}) \;&=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,C\,[\,\ell\,]^{\star-1})\\
=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma}([\,\underline{\ell}\,]^{-1}\,C) \;&=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma'}([\,\underline{\ell}\,]^{-1})\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(C)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\,U(\mathcal{T})\,|\,\ell_{-},\sigma> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\sigma}(C)\;|\,(\underline{\ell})_{-},\sigma'>\,} \tag{6.181}$$

De même,

$$U(\mathcal{T})\,|\,\ell_{+},\sigma> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{\dagger})^{\star}\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C)\;|\,[\,\underline{\ell}\,],|\lambda|>$$

Comme la matrice M' précédente appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$, $M'^{\dagger-1} = [\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C$ appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\underline{\ell}}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{\dagger})^{\star}\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,|\lambda|}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C) \;&\equiv\; \sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,\lambda'}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C)\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda',\sigma}({}^{t}[\,\ell\,]) \;=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,\sigma}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,[\,\ell\,]\,C\,{}^{t}[\,\ell\,])\\
=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,\sigma}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger}\,C) \;&=\; \mathcal{D}^{|\lambda|}_{|\lambda|,\,\sigma'}([\,\underline{\ell}\,]^{\dagger})\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\,\sigma}(C)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\,U(\mathcal{T})\,|\,\ell_{+},\sigma> = \;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\sigma}(C)\;|\,(\underline{\ell})_{+},\sigma'>\,} \tag{6.182}$$

Par application consécutive de $U(\Pi)$, on en déduit aisément l'action de $U(\Pi\mathcal{T})$ sur les états précédents :

$$\boxed{\begin{aligned}
U(\Pi\mathcal{T})\,|\,\ell_{-},\sigma> &= \;\eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\sigma}(C)\;|\,(\ell)_{+},\sigma'>\\
U(\Pi\mathcal{T})\,|\,\ell_{+},\sigma> &= \;\eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma'\sigma}(C)\;|\,(\ell)_{-},\sigma'>
\end{aligned}} \tag{6.183}$$

Cherchons ensuite l'action de $U(\mathcal{T})$ sur les "bras" $<\ell_{\mp},\sigma\,|$. On a

$$<\ell_-,\sigma\,|\,(U(\mathcal{T})\,|\,[\ell'\,],-|\lambda|>)\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})^\star\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,-|\lambda|}([\underline{\ell'}]^\dagger\,[\,\ell'\,]\,C)\;(2\pi)^3\,2\ell_0\,\delta^3(\overrightarrow{\ell}\,-\,\overrightarrow{\underline{\ell'}})$$

Ayant remarqué que la matrice $M_1=[\underline{\ell'}]^\dagger\,[\,\ell'\,]\,C$ appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\underline{\ell'}}$, ce qui implique que $\mathcal{D}^j_{nn'}(M_1)=0$ si $n>n'$, et que l'on doit avoir $\ell\equiv\underline{\ell'}$, écrivons

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\sigma}([\underline{\ell'}]^{-1})^\star\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,-|\lambda|}([\underline{\ell'}]^\dagger\,[\,\ell'\,]\,C)\;&=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma,-|\lambda|}([\underline{\ell'}]^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,-|\lambda|}([\underline{\ell'}]^\dagger\,[\,\ell'\,]\,C)\\
\equiv\;\sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma,\lambda'}([\underline{\ell'}]^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\lambda',-|\lambda|}([\underline{\ell'}]^\dagger\,[\,\ell'\,]\,C)\;&=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma,-|\lambda|}([\,\ell'\,]\,C)\\
=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma,-|\lambda|}(C^{\,t}[\,\ell'\,]^{-1})\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma'}([\,\ell'\,]^{-1})\;&=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma'}([\,\underline{\ell}\,]^{-1})
\end{aligned}$$

On en déduit (en notant que $C^\star=C$) :

$$(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\,|\,[\ell'\,],-|\lambda|>\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{-|\lambda|,\,\sigma'}([\,\underline{\ell}\,]^{-1})^\star\;(2\pi)^3\,2\ell_0\,\delta^3(\overrightarrow{\ell}\,-\,\overrightarrow{\underline{\ell'}})$$

ce qui conduit à la relation

$$\boxed{(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<(\underline{\ell})_-,\sigma'\,|} \tag{6.184}$$

En appliquant $U(\Pi)$ à la droite de chacun des membres de cette équation, on obtient ($\eta_P^\star=\eta_P$)

$$\begin{aligned}
(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;U(\Pi)\;&=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<(\underline{\ell})_-,\sigma'\,|\,U(\Pi)\;=\;(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\Pi)\,U(\mathcal{T}))\\
&=\;\eta_P\;(<(\underline{\ell})_+,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;=\;\eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<\ell_+,\sigma'\,|
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{(<\ell_+,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<(\underline{\ell})_+,\sigma'\,|} \tag{6.185}$$

D'un autre côté, l'application de $U(\Pi)$ donne aussi

$$\begin{aligned}
(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;U(\Pi)\;&=\;(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T}))\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<(\underline{\ell})_-,\sigma'\,|\,U(\Pi)\\
&=\;\eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<\ell_+,\sigma'\,|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(<\ell_+,\sigma\,|\,U(\mathcal{T}))\;U(\Pi)\;&=\;(<\ell_+,\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T}))\;=\;\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<(\underline{\ell})_+,\sigma'\,|\,U(\Pi)\\
&=\;\eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<\ell_-,\sigma'\,|
\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}(<\ell_-,\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T})) &= \eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<\ell_+,\sigma'\,| \\ (<\ell_+,\sigma\,|\,U(\Pi\mathcal{T})) &= \eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\;<\ell_-,\sigma'\,|\end{aligned}} \tag{6.186}$$

Ces relations nous permettent d'établir les lois de transformations correspondantes des amplitudes spinorielles :

$$\boxed{\begin{aligned}{}^{T}\phi^-_\sigma(\ell) &= \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,[\phi^-_{\sigma'}(\underline{\ell})]^\star\,, \quad {}^{T}\phi^+_\sigma(\ell) = \mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,[\phi^+_{\sigma'}(\underline{\ell})]^\star \\ {}^{PT}\phi^-_\sigma(\ell) &= \eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,[\phi^+_{\sigma'}(\underline{\ell})]^\star\,, \quad {}^{PT}\phi^+_\sigma(\ell) = \eta_P\,\mathcal{D}^{|\lambda|}_{\sigma\sigma'}(C)\,[\phi^-_{\sigma'}(\underline{\ell})]^\star\end{aligned}} \tag{6.187}$$

Comme dans le cas $m \neq 0$, tous ces résultats peuvent être récrits dans une notation spinorielle. Définissons le bi-spineur à $2(2|\lambda|+1)$ composantes :

$$\Phi(\ell) = \begin{pmatrix} \phi^+(\ell) \\ \\ \phi^-(\ell) \end{pmatrix} \tag{6.188}$$

où $\phi^+(\ell)$ et $\phi^-(\ell)$ sont les spineurs dont les $(2|\lambda|+1)$ composantes sont respectivement $\phi^+_\sigma(\ell)$ et $\phi^-_\sigma(\ell)$, l'indice de spin σ courant par valeurs entières de $-|\lambda|$ à $|\lambda|$. Comme dans le cas $m \neq 0$, Eq. (6.175), on a

$$\boxed{{}^{T}\Phi(\ell) = \Omega_C\,\Phi^\star(\underline{\ell})\,, \quad {}^{PT}\Phi(\ell) = \eta_P\,\Gamma_0\,\Omega_C\,\Phi^\star(\ell)} \tag{6.189}$$

les matrices Γ_0 et Ω_C étant données respectivement par (6.167) et (6.176) où l'on remplace le spin s par $|\lambda|$. Sous $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$, le bi-spineur (6.188) se transforme comme en (6.94) où l'on remplace s par $|\lambda|$. En outre, il satisfait l'équation de Dirac :

$$\begin{pmatrix} 0_{|\lambda|} & \mathcal{D}^{|\lambda|}(\underset{\sim}{\ell}) \\ \mathcal{D}^{|\lambda|}(\widetilde{\ell}) & 0_{|\lambda|} \end{pmatrix} \Phi(\ell) = 0 \tag{6.190}$$

6.9 Etats à énergie négative et conjugaison de charge

6.9.1 représentations conjuguées

Bien qu'ils ne correspondent pas à des états physiques décrivant des particules réelles, les états à énergie négative peuvent cependant servir d'intermédiaires pour établir une connexion entre des états à énergie positive appartenant à deux représentations a priori différentes et dites *conjuguées*, ainsi qu'il est décrit dans la suite. Les représentations irréductibles de $\mathcal{P}$, distinguées par le signe ϵ des énergies de leurs états respectifs, soit $\epsilon = +$ pour $p_0 > 0$, $\epsilon = -$ pour $p_0 < 0$, seront ici notées $[\,m, s, \eta_P, \epsilon\,]$, et nous décrirons ladite connexion uniquement pour le cas $m > 0$, $s > 0$.

Soit p un 4-vecteur tel que $p^2 = m^2$, $p_0 > 0$, auquel nous associons la triade de 4-vecteurs unitaires du genre espace $n_i(p)$, $i = 1, 2, 3$, de sorte que

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, p^\alpha\, n_1^\beta n_2^\gamma\, n_3^\delta \;=\; m$$

et l'élément $[\,p\,]$ de $SL(2, C)$ permettant d'obtenir la base $p/m, n_1, n_2, n_3$ à partir de la base de référence $\mathcal{B}(e_0)$, conformément à (6.40). Le 4-vecteur $-p$ est d'énergie négative et nous lui associons la tétrade notée $[\,-p\,]$, identique à $[\,p\,]$ en tant qu'élément de $SL(2, C)$ et associant à $-p$ la même triade n_1, n_2, n_3 que celle associée à p :

$$[\,-p\,](-\,m\underset{\sim}{e_0}\,)[\,-p\,]^\dagger = -\underset{\sim}{p}\;, \quad [\,-p\,]\,\underset{\sim}{e_x}\,[\,-p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_1}(p)$$

$$[\,-p\,]\,\underset{\sim}{e_y}\,[\,-p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_2}(p)\;, \quad [\,-p\,]\,\underset{\sim}{e_z}\,[\,-p\,]^\dagger = \underset{\sim}{n_3}(p) \tag{6.191}$$

D'après (6.50), l'état à énergie négative $|\,[\,-p\,], \sigma >$ se transforme comme

$$U(a, A)\,|\,[\,-p\,], \sigma > = \; e^{-ia\cdot Ap}\; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,|\,[\,-Ap\,], \sigma' >$$
$$\text{avec}\;\; R_W = [\,Ap\,]^{-1}\,A\,[\,p\,] \;=\; [\,-Ap\,]^{-1}\,A\,[\,-p\,]$$

On en déduit

$$<[\,-p\,], \sigma\,|\,U^\dagger(a, A) \;=\; e^{ia\cdot Ap}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W^\star)\; <[\,-Ap\,], \sigma'\,|$$

Or, $R_W^\star \;=\; {}^tR_W^{-1} = C^{-1}\,R_W\,C$ et par suite

$$\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}(C^{-1})\; <[\,-p\,], \sigma_1\,|\,U^\dagger(a, A) \;=\; e^{ia\cdot Ap}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(R_W)\,\mathcal{D}^s_{\sigma'_1\sigma'}(C^{-1})\; <[\,-Ap\,], \sigma'_1\,|$$

Par conséquent, la combinaison $\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}(C^{-1})\; <[\,-p\,], \sigma_1\,|$ se transforme exactement comme $|\,[\,p\,], \sigma_1 >$. On établit ainsi une correspondance *anti-linéaire* entre une représentation $[\,m, s, \eta_P, +\,]$ et une représentation $[\,m, s, \eta'_P, -\,]$. Considérant un état $|\,\Psi >$ de $[\,m, s, \eta'_P, -\,]$, associons-lui la fonction d'onde

$$\Psi_\sigma([\,-p\,]) \;= <[\,-p\,], \sigma\,|\,\Psi >$$

dont la loi de transformation est, selon (6.53),

$${}^{(a,A)}\Psi_\sigma([\,-p\,]) \;=\; e^{-ia\cdot p}\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}p\,])\,\Psi_{\sigma'}([\,-A^{-1}p\,]) \tag{6.192}$$

Posons alors

$$\boxed{\Phi^c_\sigma([\,p\,]) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\,\Psi^\star_{\sigma'}([\,-p\,])} \tag{6.193}$$

On obtient

$$^{(a,A)}\Phi^c_\sigma([\,p\,]) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(C)\,^{(a,A)}\Psi^\star_{\sigma'}([\,-p\,]) \;=\; e^{-ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma_1}(C\,B^\star\,C^{-1})\,\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma'}(C)\,\Psi^\star_{\sigma'}([\,-A^{-1}p\,])$$

où $B \;=\; [\,p\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}p\,]$. Comme $B \;=\; B^{\dagger -1}$, on a $C\,B^\star\,C^{-1} \;=\; B^{\dagger -1} \;=\; B$ et par conséquent,

$$\boxed{^{(a,A)}\Phi^c_\sigma([\,p\,]) \;=\; e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}p\,])\,\Psi^c_{\sigma'}([\,A^{-1}p\,])} \tag{6.194}$$

La fonction d'onde (6.193) se transforme conformément à (6.53), et peut donc s'interpréter comme celle associée à un état d'une représentation $[\,m, s, \eta'_P, +\,]$, dite *conjuguée* de la représentation $[\,m, s, \eta_P, +\,]$, dont la parité intrinsèque η'_P est a priori différente de η_P. La relation entre les deux représentations sera concrétisée ci-après au moyen de bi-spineurs.

Tout d'abord, introduisons les états de $[\,m, s, \eta'_P, -\,]$ indépendants de la tétrade $[\,p\,] = [\,-p\,]$:

$$|\,-p, \sigma > \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^\dagger)\;|\,[\,-p\,], \sigma' > \;,\quad |\,-\hat{p}, \sigma > \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^{-1})\;|\,[\,-p\,], \sigma' > \tag{6.195}$$

permettant de définir des amplitudes spinorielles attachées à des états d'énergie négative :

$$\psi_\sigma(-p) \;=\, <\,-p, \sigma\,|\,\Psi > \;,\quad \hat{\psi}_\sigma(-p) \;=\, <\,-\hat{p}, \sigma\,|\,\Psi > \tag{6.196}$$

ayant pour lois de transformation sous $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$:

$$\begin{aligned} ^{(a,A)}\psi_\sigma(-p) \;&=\; e^{-ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(A)\,\psi_{\sigma'}(-A^{-1}p) \\ ^{(a,A)}\hat{\psi}_\sigma(-p) \;&=\; e^{-ia\cdot p}\;\mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(A^{\dagger -1})\,\hat{\psi}_{\sigma'}(-A^{-1}p) \end{aligned} \tag{6.197}$$

Ces amplitudes spinorielles sont liées par les équations

$$\psi_\sigma(-p) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(\frac{\underset{\sim}{p}}{m})\,\hat{\psi}_{\sigma'}(-p) \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_\sigma(-p) \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma\sigma'}(\frac{\widetilde{p}}{m})\,\psi_{\sigma'}(-p) \tag{6.198}$$

Introduisons alors le bi-spineur *à énergie négative* :

$$\Psi(-p) \;=\; \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \\ (-1)^{2s}\,\hat{\psi}(-p) \end{pmatrix} \tag{6.199}$$

Sous $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$, celui-ci se transforme comme

$$^{(a,A)}\Psi(-p) \;=\; e^{-ia\cdot p}\;S(A)\;\Psi(-A^{-1}p) \tag{6.200}$$

où la matrice $S(A)$ est donnée par (6.95) et il satisfait l'équation de Dirac :

$$\Gamma(-\frac{p}{m})\ \Psi(-p)\ =\ \Psi(-p) \tag{6.201}$$

où la matrice $\Gamma(-\frac{p}{m})$ est donnée par (6.92) en changeant p en $-p$. C'est cette équation qui peut justifier l'appellation de bi-spineur à énergie négative donnée à $\Psi(-p)$.

Notant que

$$^{(a,A)}\,\{\mathcal{D}^s(C)\psi^\star(-p)\}\ =\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(C)\,\mathcal{D}^s(A^\star)\,\psi^\star(-A^{-1}p)$$
$$=\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(C\,A^\star\,C^{-1})\,\mathcal{D}^s(C)\,\psi^\star(-A^{-1}p)\ =\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(A^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^s(C)\,\psi^\star(-A^{-1}p)$$

$$^{(a,A)}\left\{\mathcal{D}^s(C)\hat{\psi}^\star(-p)\right\}\ =\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(C)\,\mathcal{D}^s({}^tA^{-1})\,\hat{\psi}^\star(-A^{-1}p)$$
$$=\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(C\,{}^tA^{-1}\,C^{-1})\,\mathcal{D}^s(C)\,\hat{\psi}^\star(-A^{-1}p)\ =\ e^{ia\cdot p}\ \mathcal{D}^s(A)\,\mathcal{D}^s(C)\,\hat{\psi}^\star(-A^{-1}p)$$

On est amené à définir les spineurs conjugués de la façon suivante

$$\boxed{\hat{\phi}^c(p)\ =\ \mathcal{D}^s(C)\,\psi^\star(-p)\,,\quad \phi^c(p)\ =\ \mathcal{D}^s(C)\,\hat{\psi}^\star(-p)} \tag{6.202}$$

de sorte que le *bi-spineur conjugué*

$$\Phi^c(p)\ =\ \begin{pmatrix} \phi^c(p) \\ \hat{\phi}^c(p) \end{pmatrix} \tag{6.203}$$

se transforme conformément à (6.94). Le bi-spineur (6.203) est relié au bi-spineur à énergie négative (6.199) par la relation matricielle

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi^c(p)\ =\ \Gamma_c\ \Psi^\star(-p)\quad \text{avec} \\ \Gamma_c\ =\ \begin{pmatrix} 0_s & \mathcal{D}^s(C^{-1}) \\ \mathcal{D}^s(C) & 0_s \end{pmatrix} \end{array}} \tag{6.204}$$

Le lecteur vérifiera aisément que $\Phi^c(p)$ satisfait l'équation de Dirac (6.93) des bi-spineurs à énergie positive.

Dans le cas d'un spin demi-entier, pour lequel $(-1)^{2s} = -1$, il est possible d'obtenir un bi-spineur à énergie négative à partir d'un bi-spineur *à énergie positive* tel que (6.91), au moyen de la matrice

$$\Gamma_5\ =\ \begin{pmatrix} 1_s & 0_s \\ 0_s & (-1)^{2s}\,1_s \end{pmatrix} \tag{6.205}$$

qui n'est effectivement différente de l'unité que dans ce cas [26]. Considérons en effet le bi-spineur $\Upsilon(-p)\ =\ \Gamma_5\,\Phi(p)$. On a

26. Et ce qui suit n'est en fait couramment utilisé que pour le cas $s = 1/2$.

$$\Gamma(-\frac{p}{m})\;\Upsilon(-p) \;=\; \begin{pmatrix} 0_s & \mathcal{D}^s(\frac{\underset{\sim}{p}}{m}) \\ (-1)^{2s}\,\mathcal{D}^s(\frac{\widetilde{p}}{m}) & 0_s \end{pmatrix} \Phi(p) \;=\; \begin{pmatrix} \phi(p) \\ (-1)^{2s}\,\hat{\phi}(p) \end{pmatrix}$$

soit

$$\Gamma(-\frac{p}{m})\;\Upsilon(-p) \;=\; \Upsilon(-p) \tag{6.206}$$

Le bi-spineur $\Upsilon(-p)$ est donc bien un bi-spineur à énergie négative. D'après (6.204), le bi-spineur conjugué $\Phi^c(p)$ associé à $\Upsilon(-p)$ s'écrit $\Phi^c(p) = \Gamma_c\,\Upsilon^\star(-p)$. La relation entre bi-spineurs conjugués est généralement présentée sous une forme que nous allons maintenant établir. Introduisons d'abord le bi-spineur conjugué à énergie négative

$$\Upsilon^c(-p) \;=\; \Gamma_5\,\Phi^c(p) \tag{6.207}$$

puis, pour tout bi-spineur Φ, posons

$$\overline{\Phi} \;=\; \Phi^\dagger\,\Gamma_0 \;=\; {}^t\Phi^\star\,\Gamma_0 \;=\; {}^t\,(\Gamma_0\,\Phi^\star) \tag{6.208}$$

où la matrice Γ_0 est donnée par (6.167). Tenant compte des relations

$$\Gamma_5\,\Gamma_c\,\Gamma_5 = (-1)^{2s}\,\Gamma_c\,, \quad \Gamma_c\,\Gamma_0 = (-1)^{2s}\,\Gamma_0\,\Gamma_c \tag{6.209}$$

on a

$$\Upsilon^c(-p) \;=\; \Gamma_5\,\Gamma_c\,\Gamma_5\,\Phi^\star(p) = (-1)^{2s}\,\Gamma_c\,\Gamma_0\,{}^t\,\overline{\Phi}(p) \;=\; \Gamma_0\,\Gamma_c\,{}^t\,\overline{\Phi}(p)$$

soit [27]

$$\boxed{\begin{aligned} &\Upsilon^c(-p) \;=\; \mathcal{C}_i^{-1}\;{}^t\,\overline{\Phi}(p) \;=\; (-1)^{2s}\,\mathcal{C}_i\;{}^t\,\overline{\Phi}(p) \quad \text{avec} \\ &\mathcal{C}_i \;=\; \Gamma_c\,\Gamma_0 \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s(C^{-1}) & 0_s \\ 0_s & \mathcal{D}^s(C) \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{6.210}$$

D'un autre côté, comme $\Gamma_c^\star = \Gamma_c$, $\Gamma_c^2 = 1$, $\Gamma_5^\star = \Gamma_5$ et $\Gamma_5^2 = 1$, on a aussi

$$\Upsilon(-p) \;=\; \Gamma_c\,\{\Phi^c(p)\}^\star \;=\; \Gamma_c\,\Gamma_0\,{}^t\,\overline{\Phi^c}(p)$$

soit

$$\boxed{\Upsilon(-p) \;=\; \mathcal{C}_i\;{}^t\,\overline{\Phi^c}(p) \;=\; (-1)^{2s}\,\mathcal{C}_i^{-1}\;{}^t\,\overline{\Phi^c}(p)} \tag{6.211}$$

27. La notation "i" de $\mathcal{C}_i$ sera justifiée au chapitre suivant.

Inversement,

$$\boxed{\Phi(p) \;=\; \mathcal{C}_i^{-1}\;{}^t\,\overline{\Upsilon^c}(-p)\,, \quad \Phi^c(p) \;=\; \mathcal{C}_i\;{}^t\,\overline{\Upsilon}(-p)} \tag{6.212}$$

Notons enfin que le bi-spineur conjugué $\Phi^c(p)$ s'obtient directement à partir de $\Phi(p)$:

$$\boxed{\Phi^c(p) \;=\; \Gamma_c\,\Gamma_5\,\Phi^\star(p)} \tag{6.213}$$

Les relations précédentes expriment l'action sur les bi-spineurs d'une opération discrète, appelée *conjugaison de charge*, qui relie les états d'une particule à ceux de son anti-particule, opération que nous retrouverons dans un chapitre ultérieur. La matrice $\mathcal{C}_i$ qui y figure est la matrice de conjugaison de charge.

6.9.2 Bi-spineur associé au ket $|\,[\,p\,],\sigma >$ $(p_0 > 0)$

Les relations

$$\begin{aligned} < p', \sigma' \,|\, [\,p\,], \sigma > \;&=\; (2\pi)^3\, 2\,\omega_p\,\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p}\right)\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]) \\ < \hat{p'}, \sigma' \,|\, [\,p\,], \sigma > \;&=\; (2\pi)^3\, 2\,\omega_p\,\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p}\right)\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}) \end{aligned} \tag{6.214}$$

conduisent à associer au ket $|\,[\,p\,],\sigma >$ le bi-spineur

$$\boxed{U_\sigma([\,p\,]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]) \\ \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}) \end{pmatrix}} \tag{6.215}$$

où la notation "$\cdot$" représente un indice courant par valeurs entières de $-s$ à s. Le bi-spineur à énergie négative associé est

$$V_\sigma([\,p\,]) \;=\; \Gamma_5\,U_\sigma([\,p\,]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]) \\ \\ (-1)^{2s}\,\mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}) \end{pmatrix} \tag{6.216}$$

Ces bi-spineurs sont normalisés selon le produit scalaire $(\Phi, \Psi) \;=\; \overline{\Phi}\,\Psi$. On a en effet

$$\begin{aligned} \overline{U}_{\sigma'}\,U_\sigma \;&=\; \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}^s_{\sigma'\,\cdot}([\,p\,]^\dagger), \mathcal{D}^s_{\sigma'\,\cdot}([\,p\,]^{-1})\right)\begin{pmatrix} \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}) \\ \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]) \end{pmatrix} \;=\; \delta_{\sigma'\sigma} \\ \overline{V}_{\sigma'}\,V_\sigma \;&=\; U^\dagger_{\sigma'}\,\Gamma_5\,\Gamma_0\,\Gamma_5\,U_\sigma \;=\; (-1)^{2s}\,\overline{U}_{\sigma'}\,U_\sigma \;=\; (-1)^{2s}\,\delta_{\sigma'\sigma} \\ \overline{V}_{\sigma'}\,U_\sigma \;&=\; U^\dagger_{\sigma'}\,\Gamma_5\,\Gamma_0\,U_\sigma \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}^s_{\sigma'\,\cdot}([\,p\,]^\dagger), \mathcal{D}^s_{\sigma'\,\cdot}([\,p\,]^{-1})\right)\begin{pmatrix} \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}) \\ \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.217}$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma'\sigma}\,\left[1+(-1)^{2s}\right] \;=\; \overline{U}_{\sigma'}\,V_\sigma$$

On voit ainsi que pour des spins demi-entiers, pour lesquels $(-1)^{2s} = -1$, les bi-spineurs U et V constituent une base de C^{2s+1}, orthogonale et normée selon ledit produit scalaire :

$$\overline{U}_{\sigma'}\,U_\sigma \;=\; \delta_{\sigma'\sigma}\,,\quad \overline{V}_{\sigma'}\,V_\sigma \;=\; -\delta_{\sigma'\sigma}\,,\quad \overline{V}_{\sigma'}\,U_\sigma \;=\; \overline{U}_{\sigma'}\,V_\sigma \;=\; 0$$

On a

$$U_\sigma\,\overline{U}_{\sigma'} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]) \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]^{\dagger-1})\end{pmatrix}\left(\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{-1}),\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{\dagger})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p])\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{-1}) & \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p])\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{\dagger}) \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{-1}) & \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\cdot\cdot'}([p]^{\dagger})\end{pmatrix} \tag{6.218}$$

D'où

$$\sum_\sigma U_\sigma\,\overline{U}_\sigma \;=\; \frac{1}{2}\,[\,1+\Gamma(t)\,]\,,\quad \text{avec}\quad t=p/m,\quad \text{puis}$$

$$\sum_\sigma V_\sigma\,\overline{V}_\sigma \;=\; \frac{1}{2}\,[\,(-1)^{2s}+\Gamma(t)\,] \tag{6.219}$$

Pour s demi-entier, les bi-spineurs U et V satisfont donc la relation de fermeture

$$\sum_\sigma\;\left[\,U_\sigma\,\overline{U}_\sigma \;-\; V_\sigma\,\overline{V}_\sigma\,\right] \;=\; 1_s \tag{6.220}$$

Si l'on suit strictement la relation (6.213), les bi-spineurs conjugués sont définis comme :

$$U^c_\sigma([p]) \;=\; \Gamma_c\,\Gamma_5\,U^\star_\sigma([p]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}(C\,{}^t[p]^{-1}) \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}(C\,[p]^\star)\end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]\,C) \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]^{\dagger-1}\,C)\end{pmatrix}\quad \text{et}$$

$$V^c_\sigma([p]) \;=\; \Gamma_5\,U^c_\sigma([p]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]\,C) \\ (-1)^{2s}\,\mathcal{D}^s_{\cdot\sigma}([p]^{\dagger-1}\,C)\end{pmatrix} \tag{6.221}$$

ou encore, puisque $\mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}(C) = (-1)^{s+\sigma}\,\delta_{\sigma_1\,,-\sigma}$:

$$U^c_\sigma \;=\; (-1)^{s+\sigma}\,U_{-\sigma}\,,\quad V^c_\sigma \;=\; (-1)^{s+\sigma}\,V_{-\sigma} \tag{6.222}$$

Cette définition induit donc un changement de signe de la polarisation σ. Ce point sera rediscuté au chapitre suivant. Utilisant ce résultat, on vérifie que l'on a aussi

$$\overline{U^c_{\sigma'}}\,U^c_\sigma \;=\; \delta_{\sigma'\sigma}\,,\quad \overline{V^c_{\sigma'}}\,V^c_\sigma \;=\; (-1)^{2s}\,\delta_{\sigma'\sigma}$$

$$\overline{V^c_{\sigma'}}\,U^c_\sigma \;=\; \overline{U^c_{\sigma'}}\,V^c_\sigma \;=\; \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma'\sigma}\,[\,1+(-1)^{2s}\,] \tag{6.223}$$

$$\sum_\sigma U^c_\sigma\,\overline{U^c_\sigma} \;=\; \frac{1}{2}\,[\,1+\Gamma(t)\,]\,,\quad \sum_\sigma V^c_\sigma\,\overline{V^c_\sigma} \;=\; \frac{1}{2}\,[\,(-1)^{2s}+\Gamma(t)\,]$$

6.10 Complément I : les "représentations x"

Etant donné un 4-vecteur position x dans l'espace-temps physique, envisageons, dans l'espace de représentation $[\,m, s, +, \eta_P\,]$ (avec $m > 0$) les kets

$$|\, x, \sigma > = \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x}\, |\, p, \sigma > = \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x} \sum_{\sigma} \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^\dagger)\, |\, [\,p\,], \sigma >, \quad \text{et}$$

$$|\, \hat{x}, \sigma > = \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x}\, |\, \hat{p}, \sigma > = \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x} \sum_{\sigma} \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^{-1})\, |\, [\,p\,], \sigma > \tag{6.224}$$

où nous avons posé

$$d\rho(p) \;=\; \frac{d^3p}{2\omega_p(2\pi)^3}\,, \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{m^2 + \overrightarrow{p}^{\,2}}$$

Compte tenu des équations (6.84), ces états vérifient

$$\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(\frac{\widetilde{\partial}}{im})\, |\, x, \sigma' > = \,|\, \hat{x}, \sigma >, \quad \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(\frac{\underset{\sim}{\partial}}{im})\, |\, \hat{x}, \sigma' > = \,|\, x, \sigma > \tag{6.225}$$

où

$$\underset{\sim}{\partial} \;=\; \tau_0\, \partial_0 + \sum_k \tau_k\, \partial^k\,, \quad \widetilde{\partial} \;=\; \tau_0\, \partial_0 - \sum_k \tau_k\, \partial^k\,, \quad (\partial^k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} = -\partial_k) \tag{6.226}$$

Comme $\underset{\sim}{\partial}\,\widetilde{\partial} \;=\; \widetilde{\partial}\,\underset{\sim}{\partial} \;=\; \partial_0^2 - \sum_{k=1}^{3} \partial_k^2 \;=\; \Box$ est le *d'Alembertien*, ils vérifient aussi l'équation de *Klein-Gordon* :

$$\{\Box - m^2\}\; |\, x, \sigma > = \,0\,, \quad \{\Box - m^2\}\; |\, \hat{x}, \sigma > = \,0 \tag{6.227}$$

Ils ont pour produits scalaires :

$$< \hat{y}, \sigma' \,|\, x, \sigma > = \iint d\rho(p)\, d\rho(p')\, e^{ip\cdot x}\, e^{-ip'\cdot y} \sum_{\sigma_1'\sigma_1} \mathcal{D}^s_{\sigma_1'\sigma'}([\,p'\,]^{-1})\, \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}([\,p\,])\; < [\,p'\,], \sigma_1' \,|\, [\,p\,], \sigma_1 >$$

$$= \,\delta_{\sigma'\sigma} \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot(x-y)} \;=\; i\, D^{(+)}(x-y)\, \delta_{\sigma'\sigma} \tag{6.228}$$

où

$$i\, D^{(+)}(x-y) \;=\; \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot(x-y)} \;\equiv\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\, \theta(p_0)\, \delta(p^2 - m^2)\, e^{ip\cdot(x-y)} \tag{6.229}$$

est une distribution invariante (voir section (6.11)) ; puis,

$$< y, \sigma' \,|\, x, \sigma > = \,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(\frac{\underset{\sim}{\partial_x}}{im})\, i\, D^{(+)}(x-y)\,, \quad < \hat{y}, \sigma' \,|\, \hat{x}, \sigma > = \,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(\frac{\widetilde{\partial_x}}{im})\, i\, D^{(+)}(x-y)$$

où ∂_x représente une dérivation par rapport aux composantes de x.

D'après (6.85), on a

$$U(a,A)\,|\,\hat{x},\sigma>=\int d\rho(p)\,e^{ip\cdot x}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)\,|\,\hat{Ap},\sigma'>$$

Or, du fait de l'invariance relativiste de ces grandeurs, on a $d\rho(p)=d\rho(Ap)$ et $p\cdot x=Ap\cdot Ax$, d'où

$$\int d\rho(p)\,e^{ip\cdot x}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)\,|\,\hat{Ap},\sigma'>=\int d\rho(Ap)\,e^{iAp\cdot Ax}\,e^{ia\cdot AP}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)\,|\,\hat{Ap},\sigma'>$$
$$\equiv\int d\rho(p)\,e^{ip\cdot(Ax+a)}\,\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)\,|\,\hat{p},\sigma'>$$

et par suite,

$$U(a,A)\,|\,\hat{x},\sigma>=\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A)\,|\,\widehat{Ax+a},\sigma'> \tag{6.230}$$

Utilisant (6.86), on trouve de façon similaire,

$$U(a,A)\,|\,x,\sigma>=\mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}(A^{\dagger-1})\,|\,Ax+a,\sigma'> \tag{6.231}$$

Introduisons ensuite les "kets-bi-spineurs" :

$$|\,p>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}|\,p,\cdot>\\ \\ |\,\hat{p},\cdot>\end{pmatrix},\quad |\,x>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}|\,x,\cdot>\\ \\ |\,\hat{x},\cdot>\end{pmatrix}=\int d\rho(p)\;e^{ip\cdot x}\,|\,p>,$$
$$\text{soit encore}\quad |\,p>=\sum_\sigma U^\star_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,],\sigma>, \tag{6.232}$$
$$|\,x>=\int d\rho(p)\,e^{ip\cdot x}\sum_\sigma U^\star_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,],\sigma>$$

Le ket $|\,x>$ satisfait l'équation

$$\Gamma(\frac{\partial}{im})\,|\,x>\;=\;|\,x>,\quad\text{avec}\quad\Gamma(\frac{\partial}{im})\;=\;\begin{pmatrix}0_s & \mathcal{D}^s(\frac{\underset{\sim}{\partial}}{im})\\ \\ \mathcal{D}^s(\frac{\tilde{\partial}}{im}) & 0_s\end{pmatrix} \tag{6.233}$$

et a pour loi de transformation

$$^{(a,A)}|\,x>=\;S(A^{\dagger-1})\,|\,Ax+a> \tag{6.234}$$

La projection d'un ket $|\,\Phi>$ sur $|\,x>$ donne la fonction d'onde bi-spineur :

$$<x\,|\,\Phi>=\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \\ \hat{\phi}(x)\end{pmatrix},\quad\text{avec}\quad\phi_\sigma(x)\;=<x,\sigma\,|\,\Phi>,\quad\hat{\phi}_\sigma(x)\;=<\hat{x},\sigma\,|\,\Phi> \tag{6.235}$$

d'une "représentation-x" relative à $[\,m,s,+,\eta_P\,]$, qui se décompose comme

$$\Phi(x)\;=\;\int d\rho(p)\,e^{-ip\cdot x}\sum_\sigma U_\sigma([\,p\,])\,\Phi_\sigma([\,p\,]) \tag{6.236}$$

satisfait l'équation

$$\Gamma(\frac{i\partial}{m})\,\Phi(x) \;=\; \Phi(x) \tag{6.237}$$

et a pour loi de transformation [28]

$$^{(a,A)}\Phi(Ax+a) \;=\; S(A)\,\Phi(x) \tag{6.238}$$

Une représentation-x relative à $[\,m,s,-,\eta'_P\,]$ peut également être définie au moyen de kets construits à partir des kets (6.195) [29] :

$$|\,x_-,\sigma> \,=\, \int d\rho(p)\, e^{-ip\cdot x}\,|\,-p,\sigma> \,=\, \int d\rho(p)\, e^{-ip\cdot x}\sum_{\sigma'} \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^\dagger)\,|\,[-p],\sigma'>\,, \quad \text{et}$$

$$|\,\hat{x}_-,\sigma> \,=\, \int d\rho(p)\, e^{-ip\cdot x}\,|\,-\hat{p},\sigma> \,=\, \int d\rho(p)\, e^{-ip\cdot x}\sum_{\sigma'} \mathcal{D}^s_{\sigma'\sigma}([\,p\,]^{-1})\,|\,[-p],\sigma'> \tag{6.239}$$

Le ket-bi-spineur

$$|\,x_->\,=\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |\,x_-,\cdot> \\ \\ (-1)^{2s}\,|\,\hat{x}_-,\cdot> \end{pmatrix} \;=\; \int d\rho(p)\, e^{-ip\cdot x}\sum_{\sigma} V^\star_\sigma([\,p\,])\,|\,[-p],\sigma> \tag{6.240}$$

projeté sur un ket $|\Psi>$ de $[\,m,s,-,\eta'_P\,]$ donne la fonction d'onde bi-spineur

$$\Psi_-(x) \;=<x_-\,|\,\Psi>\,=\begin{pmatrix} \psi_-(x) \\ \\ (-1)^{2s}\,\hat{\psi}_-(x) \end{pmatrix} \tag{6.241}$$

dont le lecteur vérifiera qu'elle satisfait

$$\Gamma(\frac{i\partial}{m})\,\Psi_-(x) \;=\; \Psi_-(x) \quad \text{et} \quad {}^{(a,A)}\Psi_-(Ax+a) \;=\; S(A)\,\Psi_-(x) \tag{6.242}$$

Cherchons ensuite quelle en est la représentation-x conjuguée. L'opération de conjugaison $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ étant *anti-linéaire*, on a

$$|\,x_c>\,=\,\mathcal{O}_\mathcal{C}\,\{|\,x_->\} \;=\; \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x}\sum_{\sigma} V_\sigma([\,p\,])\,|\,\mathcal{O}_\mathcal{C}\,\{[-p],\sigma>\}$$

Comme, d'après (6.193),

$$\mathcal{O}_\mathcal{C}\,\{[-p],\sigma>\} \;=\; \mathcal{D}^s_{\sigma_1\sigma}(C)\,|\,[\,p\,]_c,\sigma_1> \tag{6.243}$$

où $|\,[\,p\,]_c,\sigma_1>$ appartient à la représentation conjuguée $[m,s,+,\eta'_P\,]$, il vient

$$|\,x_c>\,=\, \int d\rho(p)\, e^{ip\cdot x}\sum_{\sigma} W_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,]_c,\sigma> \tag{6.244}$$

28. A vérifier. Rappelons que $U^\dagger(a,A) = U^{-1}(a,A) = U(-A^{-1}a, A^{-1})$.
29. On prendra garde au fait que le 4-vecteur p qui intervient dans ces définitions est tel que $\epsilon(p_0) > 0$.

où

$$\boxed{W^c_\sigma([\,p\,]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]\,C^{-1}) \\ \\ \mathcal{D}^s_{\cdot\,\sigma}([\,p\,]^{\dagger -1}\,C) \end{pmatrix} \;\equiv\; (-1)^{2s}\,V^c_\sigma([\,p\,])} \tag{6.245}$$

On notera que le bi-spineur "conjugué" (6.245) est lié au bi-spineur (6.215) par la relation

$$\boxed{W^c_\sigma([\,p\,]) \;=\; \mathcal{C}_i\,{}^t\,\overline{U}_\sigma([\,p\,]) \quad \text{ou} \quad U_\sigma([\,p\,]) \;=\; \mathcal{C}_i\,{}^t\,\overline{W^c_\sigma}([\,p\,])} \tag{6.246}$$

Il s'ensuit que

$$\Gamma_c\,|\,x> = \int d\rho(p)\,e^{ip\cdot x}\sum_\sigma W^c_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,],\sigma> \tag{6.247}$$

joue dans $[\,m,s,+,\eta_P\,]$ le même rôle que $|\,x_c>$ dans la représentation conjuguée $[\,m,s,+,\eta'_P\,]$ et que, symétriquement,

$$\Gamma_c\,|\,x_c> = \int d\rho(p)\,e^{ip\cdot x}\sum_\sigma U^\star_\sigma([\,p\,])\,|\,[\,p\,]_c,\sigma> \tag{6.248}$$

joue dans ladite représentation conjuguée $[\,m,s,+,\eta'_P\,]$ le même rôle que $|\,x>$ dans $[\,m,s,+,\eta_P\,]$.

6.11 Complément II : les distributions invariantes $D^{(\pm)}(x)$

Ces distributions apparaissent dans la résolution de l'équation de Klein-Gordon

$$\left\{ \Box - m^2 \right\} F \;=\; 0 \tag{6.249}$$

Effectuant une transformation de Fourier 4-dimensionnelle :

$$\hat{F}(p) = \int d^4x \, e^{-ip\cdot x} \, F(x) \tag{6.250}$$

l'image de l'équation (6.249) s'appliquant sur cette transformée de Fourier est

$$(p^2 - m^2)\hat{F}(p) \;=\; 0 \tag{6.251}$$

ce qui montre que $\hat{F}(p)$ doit comporter une distribution de Dirac ayant son support sur l'hyperboloïde de masse d'équation $p^2 = m^2$. Il s'ensuit que la forme générale de $\hat{F}(p)$ est une combinaison linéaire de deux distributions indépendantes correspondant l'une à la nappe $p_0 > 0$, l'autre à la nappe $p_0 < 0$ de cet hyperboloïde, soit

$$\hat{F}(p) \;=\; [\, a\,\theta(p_0) + b\,\theta(-p_0)\,]\;\delta(p^2 - m^2) \tag{6.252}$$

a et b pouvant être fonctions de $\overrightarrow{p}$. Ceci nous amène à étudier les transformées de Fourier desdites distributions. Définissons :

$$D^{(\pm)}(x) \;=\; \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p_0)\,e^{\pm ip\cdot x}\,\delta(p^2 - m^2) \quad \text{avec} \quad D^{(+)}(x) \;=\; \left[D^{(-)}(x)\right]^\star \tag{6.253}$$

Comme $\delta(p^2 - m^2) = \dfrac{1}{2\omega_p}\,[\delta(p_0 - \omega_p) + \delta(p_0 + \omega_p)]$, $\theta(p_0)\,\delta(p^2 - m^2) = \dfrac{1}{2\omega_p}\,\delta(p_0 - \omega_p)$, on a

$$\begin{aligned} D^{(\pm)}(x) \;&=\; \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{2\omega_p}\,e^{\pm ip\cdot x}\,\delta(p_0 - \omega_p) \;=\; \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega_p}\,e^{\pm i\omega_p x_0}\,e^{i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} \\ &=\; \mp\frac{i}{(2\pi)^2}\int \frac{q^2dq}{2\omega_p}\,d\cos\theta\,e^{iqr\cos\theta}\,e^{\pm i\omega_p t} \end{aligned}$$

où l'on a posé $x_0 = t$, $q = |\overrightarrow{p}|$, $r = |\overrightarrow{x}|$. L'intégration sur $\cos\theta$ donne

$$D^{(\pm)}(x) \;=\; \mp\frac{i}{(2\pi)^2}\int \frac{qdq}{r\,\omega_p}\,e^{\pm i\omega_p t}\,\sin qr$$

Ces expressions s'obtiennent en fait à partir de la distribution

$$f(r,t) \;=\; 2\int_0^\infty \frac{dq}{\omega_p}\,e^{i\omega_p t}\,\cos qr$$

On a en effet

$$D^{(+)}(x) \;=\; \frac{i}{8\pi^2 r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

ce qui permet de reporter le calcul de $D^{(\pm)}(x)$ sur celui de $f(r,t)$. Réexprimons $f(r,t)$ comme suit

$$f(r,t) \;=\; \int_0^{\infty} \frac{dq}{\omega_p}\, e^{i(\omega_p t+qr)} \;+\; \int_0^{\infty} \frac{dq}{\omega_p}\, e^{i(\omega_p t-qr)} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{\omega_p}\, e^{i(\omega_p t+qr)}$$

Effectuons le changement de variable : $q = m\sinh\chi$, χ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Notant que $\omega_p = m\cosh\chi$, $dq = \omega_p d\chi$, il vient

$$f(r,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi\, e^{im(t\cosh\chi + r\sinh\chi)}$$

Nous poserons $\nu = t^2 - r^2 = x^2$. Quatre cas sont à considérer : 1) $\nu > 0$ avec $t > r$; 2) $\nu > 0$ avec $t < -r$; 3) $\nu < 0$ avec $0 < t < r$; 4) $\nu < 0$ avec $-r < t < 0$.

① Cas $\nu > 0$, $t > r$

On pose alors $t = \sqrt{\nu}\,\cosh\chi_0$, $r = \sqrt{\nu}\,\sinh\chi_0$, ce qui conduit à $t\cosh\chi + r\sinh\chi = \sqrt{\nu}\,\cosh(\chi+\chi_0)$ et, en posant $\chi' = \chi + \chi_0$,

$$f(r,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi'\, e^{iz\cosh\chi'} \;=\; i\pi\, H_0^{(1)}(z)\,, \quad \text{avec} \quad z = m\sqrt{\nu}$$

où $H_0^{(1)}$ est la *fonction de Hankel*, s'exprimant comme

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z)$$

au moyen de la *fonction de Bessel* d'ordre zéro J_0 et de la *fonction de Neumann* d'ordre zéro N_0 [30].

② Cas $\nu > 0$, $t < -r$

Posant $t = -\sqrt{\nu}\,\cosh\chi_0$, $r = \sqrt{\nu}\,\sinh\chi_0$ on obtient

$$f(r,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi'\, e^{-iz\cosh\chi'} \;=\; -i\pi\, H_0^{(2)}(z)$$

où $H_0^{(2)}$ est la *fonction de Hankel* telle que

$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z)$$

③ Cas $\nu < 0$, $0 < t < r$

On pose ici $t = \sqrt{-\nu}\,\sinh\chi_0$, $r = \sqrt{-\nu}\,\cosh\chi_0$, d'où $t\cosh\chi + r\sinh\chi = \sqrt{-\nu}\,\sinh(\chi+\chi_0)$ et

$$f(r,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi'\, e^{iz\sinh\chi'} \;=\; i\pi\, H_0^{(1)}(iz)$$

où $z = m\sqrt{-\nu}$ et $H_0^{(1)}(iz) = J_0(iz) + iN_0(iz)$.

④ Cas $\nu < 0$, $-r < t < 0$

Ce cas diffère peu du précédent. En posant $t = -\sqrt{-\nu}\,\sinh\chi_0$, $r = \sqrt{-\nu}\,\cosh\chi_0$, il vient $t\cosh\chi + r\sinh\chi = \sqrt{-\nu}\,\sinh(\chi-\chi_0)$ et

$$f(r,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi'\, e^{iz\sinh\chi'} \;=\; i\pi\, H_0^{(1)}(iz)$$

30. Voir E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch, “Tables of higher functions”, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960.

En résumé, on a

$$\begin{aligned} f(r,t) &= i\pi\,[\,\epsilon(t)\,J_0(z)+iN_0(z)\,]\,, \quad \text{pour} \quad \nu>0 \\ f(r,t) &= i\pi\,H_0^{(1)}(iz)\,, \quad \text{pour} \quad \nu<0 \\ &\text{avec} \quad z=m\,\sqrt{|\nu|} \end{aligned} \tag{6.254}$$

Ecrivons alors $f(r,t)$ sous la forme

$$f(r,t) \;=\; \theta(\nu)\,f_+(r,t)+\theta(-\nu)\,f_-(r,t)$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial r}=-2r\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$, on obtient

$$\begin{aligned} D^{(+)}(x) &= -\frac{i}{4\pi^2}\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\,, \quad \text{avec} \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} &= \delta(\nu)\left[\lim_{\nu\to 0^+} f_+ - \lim_{\nu\to 0^-} f_-\right]\; +\theta(\nu)\,\frac{\partial f_+}{\partial \nu}\; +\theta(-\nu)\,\frac{\partial f_-}{\partial \nu} \end{aligned} \tag{6.255}$$

Notons ici les développements en série des fonctions J_0 et N_0 :

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k\,!)^2}\,(\frac{z^2}{4})^k \\ N_0(z) &= \frac{2}{\pi}\,J_0(z)\left[\ln(\frac{z}{2})+\gamma\right]-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k\,!)^2}\,(\frac{z^2}{4})^k\left[\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{q}\right] \end{aligned} \tag{6.256}$$

où $\gamma=0,577215...$ est la *constante d'Euler*, et leurs expressions asymptotiques :

$$\begin{aligned} &\text{lorsque} \quad z\to 0\,: \\ &J_0(z)=1-\frac{z^2}{4}+O(z^4)\,, \quad N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\ln\frac{z}{2}+\gamma\right]+O(z^2) \\ &\text{lorsque} \quad |z|\gg 1\,: \\ &J_0(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos(z-\frac{\pi}{4})\,, \quad N_0(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin(z-\frac{\pi}{4}) \end{aligned} \tag{6.257}$$

On en déduit que

$$\lim_{\nu\to 0^+} f_+ - \lim_{\nu\to 0^-} f_- \;=\; i\pi\,\epsilon(t)$$

Par ailleurs, on a d'une part $\dfrac{\partial f_\pm}{\partial \nu} \;=\; \pm\dfrac{m}{2\sqrt{|\nu|}}\,\dfrac{\partial f_\pm}{\partial m\sqrt{|\nu|}}$, et, d'autre part, la dérivation par rapport à leur argument η des fonctions J_0, N_0 conduit aux fonctions de même espèce d'ordre 1 :

$$\frac{dJ_0}{d\eta}(\eta)=-J_1(\eta)\,, \quad \frac{dN_0}{d\eta}(\eta)=-N_1(\eta)$$

On trouve alors :

$$\frac{\partial f_+}{\partial \nu} \;=\; -i\pi\,\frac{m}{2\sqrt{\nu}}\,\left[\,\epsilon(t)J_1(m\sqrt{\nu})+iN_1(m\sqrt{\nu})\,\right]$$

et

$$\frac{\partial f_-}{\partial \nu} \; = \; -\pi \, \frac{m}{2\sqrt{-\nu}} \, H_1^{(1)}(im\sqrt{-\nu})$$

Rassemblant tous ces résultats, on obtient finalement

$$\begin{aligned} D^{(+)}(x) \; &= \; \frac{1}{4\pi} \, \epsilon(x_0) \, \delta(x^2) - \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \, \theta(x^2) \, \Big[\epsilon(x_0) J_1(m\sqrt{x^2}) + i N_1(m\sqrt{x^2}) \Big] \\ &\quad + i \, \frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}} \, \theta(-x^2) \, H_1^{(1)}(im\sqrt{-x^2}) \\ \text{et} \quad D^{(-)}(x) \; &= \; \Big[D^{(+)}(x) \Big]^\star \end{aligned} \tag{6.258}$$

Comme les fonctions $J_1(z)$, $N_1(z)$ et $H_1^{(1)}(iz)$ sont toutes *réelles* pour $z = m\sqrt{|\nu|}$ réel positif, la distribution $D(x) = 2\,\Re(D^{(+)})$ a pour expression

$$\boxed{D(x) \; = \; \frac{1}{2\pi} \, \epsilon(x_0) \, \delta(x^2) - \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}} \, \theta(x^2) \, \epsilon(x_0) J_1(m\sqrt{x^2})} \tag{6.259}$$

Comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, cette distribution joue un grand rôle en théorie des champs. Elle possède la propriété importante d'être nulle pour $x^2 < 0$, c'est-à-dire, en dehors du cône de lumière, pour des intervalles d'espace-temps du genre espace séparant des événements ne pouvant être joints l'un à l'autre par un signal physique.

6.12 Complément III : quelques propriétés des matrices Γ

Nous appelons ainsi les matrices définies par

$$\Gamma(u) \ = \ \begin{pmatrix} 0_s & \mathcal{D}^s(\underset{\sim}{u}) \\ & \\ \mathcal{D}^s(\widetilde{u}) & 0_s \end{pmatrix} \tag{6.260}$$

où u est un 4-vecteur quelconque. Comme

$$\underset{\sim}{u}\,\widetilde{v} \ = \ -\underset{\sim}{v}\,\widetilde{u} + 2(u\cdot v)\,, \quad \widetilde{u}\,\underset{\sim}{v} \ = \ -\widetilde{v}\,\underset{\sim}{u} + 2(u\cdot v)$$

Il vient

$$\Gamma(u)\,\Gamma(v) \ = \ \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s(\underset{\sim}{u}\,\widetilde{v}) & 0_s \\ & \\ 0_s & \mathcal{D}^s(\widetilde{u}\,\underset{\sim}{v}) \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{2s}\,\Gamma(v)\,\Gamma(u)\,, & \text{si} \quad u\cdot v = 0 \\ (u^2)^{2s}\,, & \text{si} \quad u = v \end{cases} \tag{6.261}$$

Considérant une base d'espace-temps t, n_1, n_2, n_3, orthonormée, d'orientation directe, mais par ailleurs quelconque, et posant $\Gamma_t = \Gamma(t)$, $\Gamma_k = \Gamma(n_k)$, $k = 1,2,3$, on a donc

$$\Gamma_t^2 \ = \ 1\,, \ \ \Gamma_k^2 \ = \ (-1)^{2s}\,, \ \ \Gamma_t\,\Gamma_k \ = \ (-1)^{2s}\,\Gamma_k\,\Gamma_t\,, \quad \Gamma_k\,\Gamma_\ell \ = \ (-1)^{2s}\,\Gamma_\ell\,\Gamma_k \quad \text{si} \quad k \neq \ell \tag{6.262}$$

Ainsi, les matrices Γ_t, Γ_k anti-commutent entre elles si s est demi-entier, et commutent entre elles si s est entier. Puis

$$\Gamma_t\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\Gamma_3 \ = \ \begin{pmatrix} \mathcal{D}^s(\underset{\sim}{t}\,\widetilde{n_1}\,\underset{\sim}{n_2}\,\widetilde{n_3}) & 0_s \\ & \\ 0_s & \mathcal{D}^s(\widetilde{t}\,\underset{\sim}{n_1}\,\widetilde{n_2}\,\underset{\sim}{n_3}) \end{pmatrix}$$

Or [31],

$$\underset{\sim}{t}\,\widetilde{n_1}\,\underset{\sim}{n_2}\,\widetilde{n_3} \ = \ i\,, \quad \widetilde{t}\,\underset{\sim}{n_1}\,\widetilde{n_2}\,\underset{\sim}{n_3} \ = \ -i$$

d'où

$$\boxed{\Gamma_t\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\Gamma_3 \ = \ i^{2s}\,\Gamma_5} \tag{6.263}$$

31. Voir chapitre 5, §5.3.4.

Ci-dessous, sont répertoriées d'autres relations concernant ces matrices.

$$\Gamma_5\,\Gamma(u) \;=\; (-1)^{2s}\;\Gamma(u)\,\Gamma_5 \tag{6.264}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i\;\Gamma(u)\;\mathcal{C}_i^{-1} \;&=\; (-\frac{1}{u^2})^{2s}\;{}^t\Gamma(u) \\ \mathcal{C}_i\;\Gamma_t\;\mathcal{C}_i^{-1} \;&=\; (-1)^{2s}\;{}^t\Gamma_t\,, \quad \mathcal{C}_i\;\Gamma_k\;\mathcal{C}_i^{-1} \;=\; {}^t\Gamma_k \end{aligned} \tag{6.265}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_5\;S(A)\;\Gamma_5 \;&=\; S(A)\,, \quad \Gamma_0\;S(A)\;\Gamma_0 \;=\; S(A^{\dagger-1}) \\ \Gamma_c\;S(A)\;\Gamma_c \;&=\; S(A^\star) \;=\; S(A)^\star\,, \quad \mathcal{C}_i\;S(A)\;\mathcal{C}^{-1} \;=\; S({}^tA^{-1}) \;=\; {}^tS(A)^{-1} \end{aligned} \tag{6.266}$$

Posons $M_1 = \Gamma_2\,\Gamma_3\;(= i^{2s}\,\Gamma_5\,\Gamma_t\,\Gamma_3)$, $M_2 = \Gamma_3\,\Gamma_1$, $M_3 = \Gamma_1\,\Gamma_2$. On a

$$M_1\,M_2 \;=\; M_3\,, \quad M_2\,M_3 \;=\; M_1\,, \quad M_3\,M_1 \;=\; M_2 \tag{6.267}$$

Ces dernières relations s'expliquent aisément par le fait que la matrice 2×2

$$\underset{\sim}{n}_k\;\widetilde{n}_\ell \;=\; 2\,i\,\epsilon_{k\ell m}\,S_m$$

est le représentant, dans l'espace à deux dimensions $E_2(C)$, d'une rotation d'angle $\pm\pi$ autour de l'axe n_m, S_m étant la composante du spin $1/2$ suivant cet axe [32]. Cependant, les matrices M_k ne doivent généralement pas être confondues avec les composantes de spin pour la représentation considérée.

32. Voir chapitre 5, §5.3.4.