Chapitre 7

Les spineurs et matrices de Dirac

7.1 Introduction

Les *spineurs de Dirac* sont en fait des *bi-spineurs* de la représentation $D(\frac{1}{2},0) \oplus D(0,\frac{1}{2})$ de $SL(2,C)$. Leur rôle essentiel dans la théorie des Particules Elémentaires fut découvert en 1928 par P.A.M. Dirac [1], ce qui explique leur appellation [2].

Nous considèrerons tout d'abord le cas où la particule considérée, de spin 1/2, a une masse non nulle. A partir des expressions établies dans la section 6.5, on déduit, en "représentation-p", l'expression d'un spineur de Dirac associé à un état $|\,\Phi >$ (équation 6.91) :

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) \\ \hat{\phi}(p) \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

au moyen des amplitudes spinorielles

$$\phi_\sigma(p) = < p, \sigma \,|\, \Phi > \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_\sigma(p) = < \hat{p}, \sigma \,|\, \Phi > \tag{7.2}$$

L'indice de spin σ prenant ici les valeurs $+1/2$ et $-1/2$, les spineurs de Dirac possèdent donc 4 composantes. Nous qualifierons de "représentation initiale" cette représentation des spineurs de Dirac. D'autres représentations équivalentes sont bien sûr possibles en appliquant une matrice inversible 4×4 quelconque au spineur (7.1) (voir plus loin). Ce dernier vérifie l'équation de Dirac en représentation-p :

$$\Gamma(p)\,\Phi(p) = m\,\Phi(p) \tag{7.3}$$

où $\Gamma(p)$ est la matrice 4×4 donnée par [3]

$$\Gamma(p) = \begin{pmatrix} 0_2 & \underset{\sim}{p} \\ & \\ \widetilde{p} & 0_2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

0_2 étant la matrice nulle 2×2. On notera que cette matrice est *linéaire* vis-à-vis des composantes de p. Sous une transformation (a, A) de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, le spineur (7.1) devient

1. P.A.M. Dirac, Proceedings of the Royal Society of London A, **117**, 610 (1928) ; **118**, 351 (1928). La renommée de la théorie de Dirac tient notamment au fait qu'elle put prédire l'existence d'un moment magnétique intrinsèque de l'électron et d'en donner la valeur correcte ; Voir par exemple A. Messiah, "Mécanique Quantique", Tome 2, p.804, Dunod, Paris (1964).
2. Et le fait que dans la suite les bi-spineurs seront tout simplement appelés spineurs.
3. Rappelons que $\mathcal{D}^s(A) \equiv A$ pour $s = 1/2$.

$$^{(a,A)}\Phi(p) \;=\; \Phi'(p) \;=\; e^{ia\cdot p}\, S(A)\, \Phi(A^{-1}p), \quad \text{avec} \quad S(A) = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{\dagger -1} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

Naturellement, le spineur transformé doit lui aussi vérifier une équation de Dirac de la forme

$$\Gamma'(p)\, \Phi'(p) = m\, \Phi'(p) \tag{7.6}$$

Utilisant (7.5), ceci implique que

$$S(A)^{-1}\, \Gamma'(p)\, S(A)\, \Phi(A^{-1}p) \;=\; m\, \Phi(A^{-1}p)$$

En comparant à (7.3), on en déduit la relation

$$S(A)^{-1}\, \Gamma'(p)\, S(A) \;=\; \Gamma(A^{-1}p), \quad \text{soit}$$
$$\Gamma'(p) = S(A)\, \Gamma(A^{-1}p)\, S(A)^{-1} \tag{7.7}$$

Or, le calcul direct montre qu'en fait $\Gamma'(p) \equiv \Gamma(p)$. On met ainsi en évidence une propriété de covariance des matrices $\Gamma(p)$, exprimée par (7.7), qui fait que l'équation de Dirac (7.3) garde exactement la même forme dans tout référentiel galiléen [4, 5]. Posons

$$\Gamma(u) = \begin{pmatrix} 0_2 & \underset{\sim}{u} \\ \widetilde{u} & 0_2 \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

où u est un 4-vecteur quelconque et exprimons $\Gamma(u)$ sous la forme d'un produit scalaire

$$\Gamma(u) = u_\mu\, \Gamma^\mu = u^\mu\, \Gamma_\mu = u_0\, \Gamma^0 - \sum_k u^k\, \Gamma^k, \quad \text{avec}$$

$$\Gamma^0 = \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^k = -\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0_2 & -\tau_k \\ \tau_k & 0_2 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

où τ_0 est la matrice unité 2×2 et τ_k $(k = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli [6]. En posant $q = A^{-1}p$ (ou en remplaçant A par A^{-1}), l'équation (7.7) donne

$$S(A)\, \Gamma(q)\, S(A)^{-1} = \Gamma(Aq) \tag{7.10}$$

d'où l'on déduit ($[Aq]^\nu = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\, q^\mu$, $[Aq]_\nu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_{\cdot\,\nu}\, q_\mu$ - eq 3.55 - avec $\Lambda \equiv \Lambda(A)$)

$$\boxed{S(A)\, \Gamma_\mu\, S(A)^{-1} = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\, \Gamma_\nu \quad \text{et} \quad S(A)\, \Gamma^\mu\, S(A)^{-1} = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_{\cdot\,\nu}\, \Gamma^\nu} \tag{7.11}$$

On peut dire aussi que sous la transformation définie par $\Gamma'^\mu = S(A)^{-1}\, \Gamma^\mu\, S(A)$, les matrices Γ^μ se transforment comme les composantes contravariantes d'un 4-vecteur.

4. A noter que la relation (7.7) est en fait valable pour tout spin $s > 0$.
5. Des transformations plus générales pour l'équation de Dirac peuvent être envisagées dans un espace-temps courbe. Voir par exemple : M. Arminjon, "Dirac equation from the Hamiltonian and the case with a gravitational field", Found. Phys. Lett. 19, 225-247 (2006), arXiv :gr-qc/0512046 ; arXiv :gr-qc/0702048.
6. Voir chapitre 5, Eq. 5.158.

Il est facile de montrer que les matrices (7.9) vérifient les relations [7]

$$(\Gamma^0)^2 = \Gamma_0^2 = 1, \quad (\Gamma^k)^2 = \Gamma_k^2 = -1$$
$$\Gamma^0\,\Gamma^k = -\Gamma^k\,\Gamma^0, \quad \Gamma^k\,\Gamma^\ell = -\Gamma^\ell\,\Gamma^k \quad (k \neq \ell) \tag{7.12}$$

que l'on résume par la relation fondamentale de définition des matrices de Dirac :

$$\boxed{\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\,\Gamma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}, \quad \text{ou} \quad \Gamma_\mu\,\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\,\Gamma_\mu = 2\,g_{\mu\nu}} \tag{7.13}$$

Les matrices (7.9) constituent ce que nous appelerons la *représentation initiale* des matrices de Dirac, qui diffère de celle de Weyl par le signe des Γ^k. S'il existe bien une infinité de quadruplets de matrices 4×4 vérifiant la relation générale (7.13), on montre cependant que deux quadruplets possibles $\{\gamma^\mu\}$ et $\{\gamma'^\mu\}$ sont nécessairement reliés au moyen d'une matrice 4×4 inversible U via la relation [8] :

$$\boxed{\gamma'^\mu = U\,\gamma^\mu\,U^{-1}} \tag{7.14}$$

De ce point de vue, toutes les représentations des matrices de Dirac sont *équivalentes* et toute propriété de ces matrices démontrée dans une représentation particulière est applicable à toute autre représentation. La *représentation de Dirac*, qui est aussi la *représentation standard* couramment utilisée des matrices de Dirac, et qui est définie par

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 & 0_2 \\ 0_2 & -\tau_0 \end{pmatrix} = \Gamma_5\,, \quad \gamma^k = -\gamma_k = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_k \\ -\tau_k & 0_2 \end{pmatrix} = -\Gamma^k$$
$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0_2 \end{pmatrix} = \Gamma^0 \tag{7.15}$$

s'obtient à partir de la représentation initiale (7.9) par la matrice inversible

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & -\tau_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_0 + \Gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\gamma_0 + \gamma_5) = \mathcal{U}^{-1} \tag{7.16}$$

Notons ici qu'en vertu de l'équation (6.263), pour toute base d'espace-temps t, x, y, z, on a

$$\Gamma_5 = -i\,\Gamma(t)\,\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,\Gamma(z) \tag{7.17}$$

et que par conséquent

$$\boxed{\gamma_5 = \mathcal{U}\,\Gamma_5\,\mathcal{U}^{-1} = -i\,\gamma(t)\,\gamma(x)\,\gamma(y)\,\gamma(z)} \tag{7.18}$$

où, pour un 4-vecteur v quelconque [9] ,

7. Voir Section 6.12.

8. C'est le *théorème fondamental* de W. Pauli, voir *Annales de l'I.H.P.* tome 6, n° 2 (1936), p. 109 ; voir aussi le Complément.

9. En Physique des Particules on utilise couramment la notation "slash" de Feynman $\not{v} = v^\mu\,\gamma_\mu$. Cependant, nous garderons ici la notation $\gamma(v)$, pour la clarté du texte.

$$\gamma(v) = v^\mu \, \gamma_\mu = v_\mu \, \gamma^\mu \tag{7.19}$$

On a notamment, pour la base d'espace-temps standard,

$$\Gamma_5 = i \, \Gamma^0 \, \Gamma^1 \, \Gamma^2 \, \Gamma^3 \quad \text{et} \quad \gamma_5 = i \, \gamma^0 \, \gamma^1 \, \gamma^2 \, \gamma^3 \tag{7.20}$$

D'après (6.264), les matrices Γ_5 et γ_5 anti-commutent, respectivement, avec les matrices Γ^μ et γ^μ :

$$\Gamma_5 \, \Gamma^\mu = -\Gamma^\mu \, \Gamma_5, \qquad \gamma_5 \, \gamma^\mu = -\gamma^\mu \, \gamma_5 \tag{7.21}$$

D'après (7.13), les matrices Γ^μ avec des indices différents anti-commutent entre elles, ce qui fait que le produit $\Gamma^\mu \, \Gamma^\nu \, \Gamma^\rho \, \Gamma^\sigma$ avec les quatre indices μ, ν, ρ, σ tous différents est complètement antisymétrique suivant ces indices. En introduisant le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, tel que $\epsilon_{0123} = 1$, on peut donc écrire

$$\Gamma^0 \, \Gamma^1 \, \Gamma^2 \, \Gamma^3 = \epsilon_{0123} \, \Gamma^0 \, \Gamma^1 \, \Gamma^2 \, \Gamma^3 = \frac{1}{4!} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \Gamma^\mu \, \Gamma^\nu \, \Gamma^\rho \, \Gamma^\sigma$$

Ceci permet de représenter les matrices Γ_5 et γ_5 sous la forme de produits contractés de tenseurs

$$\boxed{\Gamma_5 = \frac{i}{4!} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \Gamma^\mu \, \Gamma^\nu \, \Gamma^\rho \, \Gamma^\sigma \quad \text{et} \quad \gamma_5 = \frac{i}{4!} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \gamma^\mu \, \gamma^\nu \, \gamma^\rho \, \gamma^\sigma} \tag{7.22}$$

grandeurs qui, manifestement, doivent se comporter comme des scalaires sous les transformations de $SL(2, C)$. De fait, en utilisant (7.11), on a

$$\begin{aligned} S(A)^{-1} \, \Gamma_5 \, S(A) &= \frac{i}{4!} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \Lambda^\mu_{\cdot\,\mu'} \, \Lambda^\nu_{\cdot\,\nu'} \, \Lambda^\rho_{\cdot\,\rho'} \, \Lambda^\sigma_{\cdot\,\sigma'} \, \Gamma^{\mu'} \, \Gamma^{\nu'} \, \Gamma^{\rho'} \, \Gamma^{\sigma'} \\ = \frac{i}{4!} \, (\det \Lambda) \, \epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \, \Gamma^{\mu'} \, \Gamma^{\nu'} \, \Gamma^{\rho'} \, \Gamma^{\sigma'} &= \frac{i}{4!} \, \epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \, \Gamma^{\mu'} \, \Gamma^{\nu'} \, \Gamma^{\rho'} \, \Gamma^{\sigma'} = \Gamma_5 \end{aligned}$$

puisque $\det \Lambda = 1$. Ainsi, les matrices Γ_5 et γ_5 commutent avec les matrices représentant les transformations de $SL(2, C)$, ce qui, d'ailleurs, peut être facilement vérifié par un calcul matriciel direct (voir Eq. 6.266), et constituent donc des scalaires vis-à-vis de ce groupe.

Montrons ici comment on peut exprimer simplement $S(A)$ au moyen des matrices de Dirac. On peut envisager $\Lambda = \Lambda(A)$ comme la transformation du groupe de Lorentz restreint transformant une base d'espace-temps t, x, y, z en la base T, X, Y, Z. Les matrices A et $A^{\dagger-1}$ peuvent alors être exprimées comme (formule 5.204) [10] :

$$\begin{gathered} A = \frac{M}{4 \, a_0^\star} \, , \; A^{\dagger-1} = \frac{M'}{4 \, a_0} \, , \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{1}{2} \, \mathrm{Tr} \, A \quad \text{et} \\ M = \left(\underset{\sim}{T} \;\, \tilde{t} - \underset{\sim}{X} \;\, \tilde{x} - \underset{\sim}{Y} \;\, \tilde{y} - \underset{\sim}{Z} \;\, \tilde{z} \right), \quad M' = \left(\tilde{T} \;\, \underset{\sim}{t} - \tilde{X} \;\, \underset{\sim}{x} - \tilde{Y} \;\, \underset{\sim}{y} - \tilde{Z} \;\, \underset{\sim}{z} \right) \end{gathered} \tag{7.23}$$

Posons $a_0 = |a_0| e^{i\theta}$. On a ainsi

$$S(A) = \frac{1}{4|a_0|} \left[\cos\theta \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & M' \end{pmatrix} + i \sin\theta \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & -M' \end{pmatrix} \right]$$

10. On démontre aisément que $A^{\dagger-1}$ a bien cette forme en notant que $A + A^{-1} = \mathrm{Tr} \, A = \mathrm{Tr} \, A^{-1}$.

$$= \frac{1}{4|a_0|}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\Gamma_5]\begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & M' \end{pmatrix}$$

Or, on montre aisément que

$$\begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & M' \end{pmatrix} = \Gamma(T)\,\Gamma(t) - \Gamma(X)\,\Gamma(x) - \Gamma(Y)\,\Gamma(y) - \Gamma(Z)\,\Gamma(z)$$

D'où

$$\boxed{S(A) = \frac{1}{4|a_0|}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\Gamma_5]\;[\Gamma(T)\,\Gamma(t) - \Gamma(X)\,\Gamma(x) - \Gamma(Y)\,\Gamma(y) - \Gamma(Z)\,\Gamma(z)]} \tag{7.24}$$

ou encore, compte tenu de la relation (5.49) :

$$\boxed{S(A) = \frac{1}{4|a_0|}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\Gamma_5]\;\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\Lambda_{\mu\nu}} \tag{7.25}$$

Le terme en Γ_5 de cette expression n'est absent que si a_0 est réel. Cette circonstance se produit lorsque la transformation $\Lambda(A)$ est *plane*, auquel cas (eqs. 5.188 et 5.189)

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = 0 \tag{7.26}$$

Dans la représentation standard, les spineurs de Dirac de la représentation-p prennent donc la forme

$$\Phi_{\rm st}(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) + \hat{\phi}(p) \\ \phi(p) - \hat{\phi}(p) \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

à un facteur de normalisation près et $S(A)$ est remplacé par

$$\begin{aligned} L(A) = \mathcal{U}\,S(A)\,\mathcal{U}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + A^{\dagger -1} & A - A^{\dagger -1} \\ A - A^{\dagger -1} & A + A^{\dagger -1} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4|a_0|}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\gamma_5]&\;[\gamma(T)\,\gamma(t) - \gamma(X)\,\gamma(x) - \gamma(Y)\,\gamma(y) - \gamma(Z)\,\gamma(z)] \\ &= \frac{1}{4|a_0|}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\gamma_5]\;\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\Lambda_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Comme il a été fait dans la section 6.10, on peut également introduire des spineurs de Dirac $\Phi(x)$ d'une "représentation$-x$". Dans la représentation initiale, ceux-ci vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$i\,\Gamma^\mu\,\partial_\mu\,\Phi(x) = m\,\Phi(x)$$

qui devient

$$i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\Phi_{\rm st}(x) = m\,\Phi_{\rm st}(x) \tag{7.29}$$

dans la représentation standard et qui représente l'équation de Dirac proprement dite. C'est une équation *linéaire* vis-à-vis des dérivées partielles.

7.2 L'algèbre de Dirac

Une matrice complexe $n \times n$ est définie par n^2 nombres complexes a priori indépendants. Si la matrice est de *trace nulle*, seuls $n^2 - 1$ parmi ceux-ci restent a priori indépendants. Il s'ensuit qu'on peut toujours trouver un ensemble de $n^2 - 1$ matrices $n \times n$ linéairement indépendantes ayant une trace nulle. Pour constituer une base de l'espace vectoriel des matrices complexes $n \times n$, lequel est de dimension n^2, il suffit alors d'adjoindre à cet ensemble la matrice unité, laquelle est indépendante des matrices dudit ensemble, puisque de trace non nulle.

Concernant les matrices 4×4, il apparaît que l'on peut construire une telle base à partir des matrices de Dirac et de certains de leurs produits. Ses éléments seront notés par E_α avec $\alpha = 1, 2, \cdots, 16$ et $E_1 = 1/2$ (c'est-à-dire, $1/2$ fois la matrice identité 4×4). Les matrices E_α seront en outre définies de telle sorte que l'on ait

$$\mathrm{Tr}\,\{E_\alpha\, E_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \tag{7.30}$$

relation qui inclut (en prenant $\alpha = 1$) la propriété de trace nulle des matrices E_β pour $\beta \geq 2$.

• Considérons tout d'abord les matrices Γ_μ. On a

$$\Gamma_0^2 = 1, \quad \Gamma_k^2 = -1, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu = 0$$

et, du fait de l'anti-commutation des matrices [11]

$$\mathrm{Tr}\,\Gamma_0\,\Gamma_k = -\mathrm{Tr}\,\Gamma_k\,\Gamma_0 = \mathrm{Tr}\,\Gamma_k\,\Gamma_0 = 0$$
$$\mathrm{Tr}\,\Gamma_k\,\Gamma_\ell = -\mathrm{Tr}\,\Gamma_\ell\,\Gamma_k = \mathrm{Tr}\,\Gamma_\ell\,\Gamma_k = 0, \quad \text{pour} \quad k \neq \ell$$

On peut alors définir

$$E_2 = \frac{1}{2}\,\Gamma_0, \quad E_3 = \frac{i}{2}\,\Gamma_1, \quad E_4 = \frac{i}{2}\Gamma_2, \quad E_5 = \frac{i}{2}\,\Gamma_3 \tag{7.31}$$

• D'après (7.15) et (7.20), il est clair que la matrice Γ_5 vérifie

$$\Gamma_5^2 = 1, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_5 = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_5\,\Gamma_\mu = -\mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_5 = \mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_5 = 0$$

On prendra alors

$$E_6 = \frac{1}{2}\,\Gamma_5 \tag{7.32}$$

• Envisageons ensuite les matrices $\Gamma_\mu\,\Gamma_5$. On a

$$(\Gamma_0\,\Gamma_5)^2 = -1, \quad (\Gamma_k\,\Gamma_5)^2 = 1, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_5 = 0$$
$$\mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_5\,\Gamma_\nu\,\Gamma_5 = -\mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu = -\mathrm{Tr}\,\Gamma_\nu\,\Gamma_\mu = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\,\Gamma_\mu] = -4\,g_{\mu\nu}$$

Comme

$$\Gamma_5\,\Gamma(u)\,\Gamma(v) = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{u}\,\widetilde{v} & 0_2 \\ & \\ 0_2 & -\widetilde{u}\,\underset{\sim}{v} \end{pmatrix}, \quad \text{et que} \quad \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{u}\,\widetilde{v} = \mathrm{Tr}\,\widetilde{u}\,\underset{\sim}{v} = 2\,u \cdot v$$

11. On rappelle que $\mathrm{Tr}\,M\,N = \mathrm{Tr}\,N\,M$.

on déduit que

$$\mathrm{Tr}\,\Gamma_5\,\Gamma(u)\,\Gamma(v) = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_\mu\,\Gamma_5\,\Gamma_\nu = 0 \tag{7.33}$$

De ces relations il résulte qu'on peut choisir

$$E_7 = \frac{i}{2}\,\Gamma_0\,\Gamma_5, \quad E_8 = \frac{1}{2}\,\Gamma_1\,\Gamma_5, \quad E_9 = \frac{1}{2}\,\Gamma_2\,\Gamma_5, \quad E_{10} = \frac{1}{2}\,\Gamma_3\,\Gamma_5 \tag{7.34}$$

• Pour compléter la base, il reste à trouver 6 autres matrices. Celles-ci seront définies à partir des 6 matrices

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,[\,\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\,] \quad ([\,\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\,] = \Gamma_\mu\,\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\,\Gamma_\mu) \tag{7.35}$$

On a

$$\Sigma_{0k} = \frac{i}{2}\,\Gamma_0\,\Gamma_k, \quad \Sigma_{k\ell} = \frac{i}{2}\,\Gamma_k\,\Gamma_\ell \quad (k \neq \ell)$$
$$(\Sigma_{0k})^2 = -\frac{1}{4}, \quad (\Sigma_{k\ell})^2 = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{Tr}\,\Sigma_{0k} = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Sigma_{k\ell} = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_5\,\Sigma_{\mu\nu} = 0$$

En observant que le produit d'un nombre impair de matrices Γ_μ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_2 & P \\ Q & 0_2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \Gamma_5 \begin{pmatrix} 0_2 & P \\ Q & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & P \\ -Q & 0_2 \end{pmatrix}$$

on déduit que

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}, \cdots \Gamma_{\mu_r} = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Gamma_5\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}, \cdots \Gamma_{\mu_r} = 0, \quad \text{si } r \text{ est impair}} \tag{7.36}$$

D'où

$$\mathrm{Tr}\,\Sigma_{\mu\nu}\,\Gamma_\rho = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\Sigma_{\mu\nu}\,\Gamma_\rho \Gamma_5 = 0 \tag{7.37}$$

On note enfin que

$$\Sigma_{0m}\,\Sigma_{k\ell} = -\frac{1}{4}\,\Gamma_0\,\Gamma_m\,\Gamma_k\,\Gamma_\ell \;\propto\; \Gamma_5 \;\; \text{si} \;\; m \neq k, m \neq \ell \;\; \text{et} \;\; \mathrm{Tr}\,\Gamma_5 = 0$$
$$\Sigma_{0k}\,\Sigma_{k\ell} = \Gamma_0\,\Gamma_\ell \;\; \text{et} \;\; \mathrm{Tr}\,\Gamma_0\,\Gamma_\ell = 0$$
$$\Sigma_{rk}\,\Sigma_{k\ell} = \frac{1}{4}\,\Gamma_r\,\Gamma_\ell \;\; \text{et} \;\; \mathrm{Tr}\,\Gamma_r\,\Gamma_\ell = 0 \;\; \text{pour} \;\; r \neq \ell$$

On peut donc définir

$$\begin{gathered} E_{11} = i\,\Sigma_{01}, \quad E_{12} = i\,\Sigma_{02}, \quad E_{13} = i\,\Sigma_{03} \\ E_{14} = \Sigma_{12}, \quad E_{15} = \Sigma_{23}, \quad E_{16} = \Sigma_{31} \end{gathered} \tag{7.38}$$

Les 16 matrices ainsi définies sont bien linéairement indépendantes car si c_α avec $\alpha = 1, 2, \cdots, 16$ sont des complexes tels que

$$X = \sum_{\alpha=1}^{16} c_\alpha\,E_\alpha = 0$$

on a

$$\mathrm{Tr}\, X\, E_\beta = \sum_{\alpha=1}^{16} c_\alpha\, \mathrm{Tr}\, E_\alpha\, E_\beta = \sum_{\alpha=1}^{16} c_\alpha\, \delta_{\alpha\beta} = c_\beta = 0 \quad \text{avec} \quad \beta = 1, 2, \cdots, 16$$

Indépendamment de la représentation, toute matrice 4×4 peut ainsi être développée selon cette base de matrices ou, de façon équivalente, selon l'ensemble de matrices

$$1,\ \Gamma_5,\ \Gamma_\mu,\ \Gamma_\mu\,\Gamma_5,\ \Sigma_{\mu\nu} \tag{7.39}$$

De même, par application de la transformation $\mathcal{U}$, les 16 matrices

$$1,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_\mu\,\gamma_5,\ \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{7.40}$$

forment une base selon laquelle on peut développer toute matrice 4×4 M :

$$\boxed{M = S + P\,\gamma_5 + V^\mu\,\gamma_\mu + A^\mu\,\gamma_\mu\,\gamma_5 + T^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}} \tag{7.41}$$

où : S et P sont des scalaires, V^μ et A^μ des 4-vecteurs, $T^{\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique. Ces grandeurs s'obtiennent à partir de la matrice M au moyen de projections effectuées par des traces faisant office de produits scalaires :

$$\boxed{\begin{gathered} S = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\, M, \quad P = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\, M\,\gamma_5, \\ V_\mu = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\, M\,\gamma_\mu, \quad A_\mu = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\, M\,\gamma_\mu\,\gamma_5, \\ T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M\,\sigma_{\mu\nu} \end{gathered}} \tag{7.42}$$

Notamment, le produit d'un nombre quelconque de matrices γ^μ admet un développement tel que (7.41). Il s'ensuit que les 16 matrices (7.40) engendrent une *algèbre* (au sens mathématique du terme) appelée *algèbre de Dirac*, qui n'est autre que *l'algèbre de Clifford*[12] sur l'espace vectoriel complexe de dimension 4. Par exemple, puisque

$$\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_r} = \mathcal{U}\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}\cdots\Gamma_{\mu_r}\,\mathcal{U}^{-1}, \quad \gamma_5\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_r} = \mathcal{U}\,\Gamma_5\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}\cdots\Gamma_{\mu_r}\,\mathcal{U}^{-1}$$

$$\text{et donc} \quad \mathrm{Tr}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_r} = \mathrm{Tr}\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}\cdots\Gamma_{\mu_r}, \quad \mathrm{Tr}\,\gamma_5\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_r} = \mathrm{Tr}\,\Gamma_5\,\Gamma_{\mu_1}\,\Gamma_{\mu_2}\cdots\Gamma_{\mu_r}$$

la relation (7.36) s'applique aussi bien aux matrices de la représentation standard, et l'on en déduit que le produit d'un nombre impair de matrices γ_μ se décompose uniquement sur les matrices γ_μ et $\gamma_\mu\,\gamma_5$.

12. Voir, par exemple, D. Kastler, "Introduction à l'Electrodynamique Quantique", Dunod, Paris, 1961, p. 297 ; G. Casanova, "L'algèbre de Clifford et ses applications", Advances in Applied Clifford Algebras, **12** (S) 1-155, mai 2002, Mexico ; H. Bacri, loc. cit. §6.3.

7.3 La "γ-gymnastique"

En Physique des Particules, nombre d'amplitudes de transition [13] de processus élémentaires s'expriment en fonction de produits de matrices de Dirac, et le calcul direct standard des *sections efficaces* relatives à ces processus revient à évaluer des traces de produits de ces matrices. Ceci nécessite une bonne connaissance de certaines règles de calcul concernant les produits de matrices de Dirac et notamment leurs traces (la γ-gymnastique). Ce qui suit a pour but d'établir les plus utiles pour ce type de calcul.

Dans la mesure du possible, nous éviterons ici d'utiliser une représentation particulière des matrices de Dirac et ferons uniquement usage de la relation fondamentale (7.13) ainsi que des définitions (7.20) ou (7.22) de la matrice γ_5. En outre, pour simplifier, nous appelerons tout simplement "matrices γ" l'ensemble des matrices γ_μ et γ_5.

7.3.1 Formules de base

① De la relation (7.13) on déduit que les matrices γ_μ avec des indices différents anti-commutent. Considérons alors le produit $\gamma_5\,\gamma^\alpha$. Dans le produit $\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma\,\gamma^\alpha$ où les quatre indices μ,ν,ρ et σ sont tous différents, parmi ces derniers l'un est certainement identique à α. En conséquence γ^α commute avec l'une des matrices de l'expression (7.22) et anticommute avec les trois autres. On en conclut que γ_5 anticommute avec toutes les matrices γ^μ.

De (7.13), (7.20) et de l'anticommutation des matrices de Dirac d'indices différents on tire

$$\begin{aligned} &\gamma_0^2 = 1,\quad \gamma_k^2 = -1 \\ \text{et}\quad &\gamma_5^2 = -\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 = +\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 \\ &\quad = -\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^1\,\gamma^2 = -\gamma^1\,\gamma^1 = 1 \\ &\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu = \mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu\,] = 4\,g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{7.43}$$

Considérons alors la trace d'un produit de matrices de Dirac. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r} &= \mathrm{Tr}\,\gamma_5^2\,\gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r} = \mathrm{Tr}\,\gamma_5\,\gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r}\,\gamma_5 \\ &= (-1)^r\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r}\,\gamma_5\,\gamma_5 = (-1)^r\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r} \end{aligned} \tag{7.44}$$

On en conclut que la trace d'un nombre impair de matrices de Dirac est nulle. En particulier

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0,\quad \mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma_5 = 0,\quad \mathrm{Tr}\,\gamma^\rho\,\sigma^{\mu\nu} = 0,\quad \mathrm{Tr}\,\gamma^\rho\,\gamma_5\,\sigma^{\mu\nu} = 0$$

Par anticommutations successives, on a $\mathrm{Tr}\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 = -\mathrm{Tr}\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^0 = -\mathrm{Tr}\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$, d'où il ressort que

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$$

Considérons ensuite le produit $\gamma_5\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta$. Si $\alpha=\beta$, il se réduit à $\pm\gamma_5$ et $\mathrm{Tr}\,\gamma_5\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta = \pm\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$. Supposons donc $\alpha\neq\beta$. L'expression $\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta$ se réduit alors à un produit de deux matrices de Dirac avec des indices différents car dans $\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$ se trouvent nécessairement γ^α et γ^β et l'on a $(\gamma^\alpha)^2=\pm1$ et $(\gamma^\beta)^2=\pm1$. Or, $\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 0$ si $\mu\neq\nu$. On en déduit

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 0,\quad \mathrm{Tr}\,\gamma_5\,\sigma^{\mu\nu} = 0$$

13. En Mécanique Quantique, une amplitude de transition permet, par le carré de son module, de définir la probabilité d'occurrence d'un processus.

② Calculons maintenant la trace de $X_1 = \gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma$. Par anticommutations successives et compte tenu de (7.43), on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,X_1 &= -\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma + 2\,g_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma = -\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma + 8g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma} \\ &= \mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\mu\,\gamma_\sigma - 8g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} + 8g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma} = -\mathrm{Tr}\,X_1 + 8g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho} - 8g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} + 8g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\boxed{\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma = 4\,[\,g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}\,]}} \tag{7.45}$$

A partir de ce résultat, on déduit

$$\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma} = -\frac{1}{16}\,\mathrm{Tr}\,[\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu - \gamma_\nu\,\gamma_\mu\,]\,[\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\,\gamma_\rho\,] = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,[\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu - g_{\mu\nu}\,]\,[\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma - g_{\rho\sigma}\,]$$

soit, tout calcul fait,

$$\boxed{\boxed{\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma} = g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}}} \tag{7.46}$$

d'où, aussi, la dernière équation de (7.42).

③ Calculons la trace de $X_2 = \gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta$. Ici encore, on effectue des anticommutations successives pour trouver

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,X_2 = -\mathrm{Tr}\,X_2 + 2\,g_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta - 2\,g_{\mu\rho}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\sigma\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta + 2\,g_{\mu\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta \\ -2\,g_{\mu\alpha}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_\beta + 2\,g_{\mu\beta}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_\alpha\end{gathered}$$

Utilisant (7.45), il vient

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,X_2 = 4\,g_{\mu\nu}\,\{g_{\rho\sigma}\,g_{\alpha\beta} - g_{\rho\alpha}\,g_{\sigma\beta} + g_{\rho\beta}\,g_{\sigma\alpha}\} - 4\,g_{\mu\rho}\,\{g_{\nu\sigma}\,g_{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha}\,g_{\sigma\beta} + g_{\nu\beta}\,g_{\sigma\alpha}\} \\ +4\,g_{\mu\sigma}\,\{g_{\nu\rho}\,g_{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha}\,g_{\rho\beta} + g_{\nu\beta}\,g_{\rho\alpha}\} - 4\,g_{\mu\alpha}\,\{g_{\nu\rho}\,g_{\sigma\beta} - g_{\nu\sigma}\,g_{\rho\beta} + g_{\nu\beta}\,g_{\rho\sigma}\} \\ +4\,g_{\mu\beta}\,\{g_{\nu\rho}\,g_{\sigma\alpha} - g_{\nu\sigma}\,g_{\rho\alpha} + g_{\nu\alpha}\,g_{\rho\sigma}\}\end{gathered} \tag{7.47}$$

④ A titre d'exercice, le lecteur vérifiera le résultat suivant :

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma}\,\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\,\{\,g_{\mu\rho}\,[\,g_{\nu\alpha}\,g_{\sigma\beta} - g_{\nu\beta}\,g_{\sigma\alpha}\,] + g_{\nu\sigma}\,[\,g_{\mu\alpha}\,g_{\rho\beta} - g_{\mu\beta}\,g_{\rho\alpha}\,] \\ +g_{\mu\sigma}\,[\,g_{\rho\alpha}\,g_{\nu\beta} - g_{\rho\beta}\,g_{\nu\alpha}\,] + g_{\nu\rho}\,[\,g_{\sigma\alpha}\,g_{\mu\beta} - g_{\sigma\beta}\,g_{\mu\alpha}\,]\}\end{gathered} \tag{7.48}$$

⑤ Une relation importante concerne la trace de $X_3 = \gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_5$. Comme la trace d'un produit $\gamma_5\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta$ est nulle, on a

$$\mathrm{Tr}\,X_3 = -\mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_5 = \mathrm{Tr}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\mu\,\gamma_\sigma\,\gamma_5 = -\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\rho\,\gamma_\nu\,\gamma_\sigma\,\gamma_5, \quad \text{etc}$$

d'où il ressort que la trace de X_3 est complètement aintisymétrique suivant les quatre indices μ, ν, ρ, σ. Or, une seule forme est possible pour un tenseur de rang 4 complètement antisymétrique, celle du tenseur de Levi-Civita, et ladite trace est nécessairement proportionnelle à ce dernier :

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_5 = \kappa\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Comme $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$, on trouve

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_5 = -\kappa\,4! = -i\,4!\ \mathrm{Tr}\,\gamma_5^2, \quad \text{soit}$$
$$\kappa = 4\,i$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma_5 = 4\,i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{7.49}$$

On en déduit aussi :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma}\,\gamma_5 = -i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{7.50}$$

⑥ Par transposition :

$$^t\left\{\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu\right\} = {}^t\gamma_\nu\,{}^t\gamma_\mu +{}^t\gamma_\nu\,{}^t\gamma_\mu = 2\,g_{\mu\nu} \tag{7.51}$$

on constate que les transposées des matrices γ_μ satisfont elles aussi la relation fondamentale (7.13). En vertu du théorème d'équivalence mentionné plus haut, il existe une matrice inversible U_t telle que

$$\boxed{U_t\,\gamma_\mu\,U_t^{-1} = {}^t\gamma_\mu} \tag{7.52}$$

Comme

$$^t\gamma_5 = i\,({}^t\gamma^3)\,({}^t\gamma^2)\,({}^t\gamma^1)\,({}^t\gamma^0) = i\,U_t\,\gamma^3\,\gamma^2\,\gamma^1\,\gamma^0\,U_t^{-1} = i\,U_t\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,U_t^{-1} = U_t\,\gamma_5\,U_t^{-1}$$

on a aussi

$$\boxed{U_t\,\gamma_5\,U_t^{-1} = {}^t\gamma_5} \tag{7.53}$$

Envisageons alors la trace de $X_4 = \gamma^{\mu_1}\,\cdots\,\gamma^{\mu_r}$. On a

$$\mathrm{Tr}\,X_4 = \mathrm{Tr}\,{}^tX_4 = \mathrm{Tr}\,{}^t\gamma^{\mu_r}\,{}^t\gamma^{\mu_{r-1}}\cdots{}^t\gamma^{\mu_1} = \mathrm{Tr}\,U_t\,\gamma^{\mu_r}\,\cdots\,\gamma^{\mu_1}\,U_t^{-1} = \mathrm{Tr}\,U_t^{-1}\,U_t\,\gamma^{\mu_r}\,\cdots\,\gamma^{\mu_1}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, \gamma^{\mu_1}\, \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{r-1}}\, \gamma^{\mu_r} = \mathrm{Tr}\, \gamma^{\mu_r}\, \gamma^{\mu_{r-1}} \cdots \gamma^{\mu_2}\, \gamma^{\mu_1}} \tag{7.54}$$

Ainsi, dans la trace, on peut indifféremment lire le produit des matrices de droite à gauche ou de gauche à droite, le résultat est le même. De la même manière, on montre que

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, \gamma_5\, \gamma^{\mu_1}\, \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{r-1}}\, \gamma^{\mu_r} = \mathrm{Tr}\, \gamma_5\, \gamma^{\mu_r}\, \gamma^{\mu_{r-1}} \cdots \gamma^{\mu_2}\, \gamma^{\mu_1}} \tag{7.55}$$

⑦ Passons maintenant au calcul de la trace de $X_5 = \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_\lambda\, \gamma_\omega\, \gamma_5$. Par anticommutations successives, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\, X_5 = -\mathrm{Tr}\, \gamma_\omega\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_\lambda\, \gamma_5 + 2\, g_{\lambda\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_5 - 2\, g_{\sigma\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\lambda\, \gamma_5 \\ +2\, g_{\rho\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\sigma\, \gamma_\lambda\, \gamma_5 - 2\, g_{\nu\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_\lambda\, \gamma_5 + 2\, g_{\mu\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_\lambda\, \gamma_5 \\ = \mathrm{Tr}\, X_5 + 2\, g_{\lambda\omega}\, \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma_\rho\, \gamma_\sigma\, \gamma_5 + \cdots\end{aligned}$$

Compte tenu de (7.49), on en déduit une relation entre les composantes du tenseur de Levi-Civita

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{\lambda\omega} + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\, g_{\sigma\omega} + \epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu}\, g_{\rho\omega} + \epsilon_{\rho\sigma\lambda\mu}\, g_{\nu\omega} + \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\, g_{\mu\omega} = 0} \tag{7.56}$$

⑦ Montrer que

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Tr}\, \gamma_{\mu_1}\, \gamma_{\mu_2}\, \gamma_{\mu_3}\, \gamma_{\mu_4}\, \gamma_{\mu_5}\, \gamma_{\mu_6} = 4\, \{g_{\mu_1\mu_2}\, [g_{\mu_3\mu_4}\, g_{\mu_5\mu_6} - g_{\mu_3\mu_5}\, g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_3\mu_6}\, g_{\mu_4\mu_5}] \\ -g_{\mu_1\mu_3}\, [g_{\mu_2\mu_4}\, g_{\mu_5\mu_6} - g_{\mu_2\mu_5}\, g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6}\, g_{\mu_4\mu_5}] + g_{\mu_1\mu_4}\, [g_{\mu_2\mu_3}\, g_{\mu_5\mu_6} \\ -g_{\mu_2\mu_5}\, g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6}\, g_{\mu_3\mu_5}] - g_{\mu_1\mu_5}\, [g_{\mu_2\mu_3}\, g_{\mu_4\mu_6} - g_{\mu_2\mu_4}\, g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6}\, g_{\mu_3\mu_4}] \\ +g_{\mu_1\mu_6}\, [g_{\mu_2\mu_3}\, g_{\mu_4\mu_5} - g_{\mu_2\mu_4}\, g_{\mu_3\mu_5} + g_{\mu_2\mu_5}\, g_{\mu_3\mu_4}]\}\end{aligned}} \tag{7.57}$$

7.3.2 Développements de produits de matrices suivant la base (7.40)

Lorsque le nombre de matrices γ_μ intervenant dans un produit devient important, il peut être judicieux, selon le calcul qui se présente, d'effectuer préalablement un développement, suivant la base (7.40), soit du produit entier, soit de certains de ses sous-produits. Nous donnons ci-après des exemples de tels développements. Pour certains, la démonstration est laissée à titre d'exercice.

① **Développement de** $\gamma_\mu\, \gamma_\nu$.

C'est le plus simple. Ecrivons

$$\gamma_\mu\, \gamma_\nu = \frac{1}{2}\, [\gamma_\mu\, \gamma_\nu + \gamma_\nu\, \gamma_\mu] + \frac{1}{2}\, [\gamma_\mu\, \gamma_\nu - \gamma_\nu\, \gamma_\mu]$$

d'où

$$\boxed{\gamma_\mu\,\gamma_\nu = g_{\mu\nu} - 2\,i\,\sigma_{\mu\nu}} \tag{7.58}$$

② Développement de $\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho$

Dans la développement (7.41) de ce produit "impair", on a $S = 0$, $P = 0$, $T = 0$. Il se décompose donc uniquement sur γ_λ et $\gamma_\lambda\,\gamma_5$. Utilisant (7.42), (7.45) et (7.49), on obtient immédiatement

$$\boxed{\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho = g_{\mu\nu}\,\gamma_\rho - g_{\mu\rho}\,\gamma_\nu + g_{\nu\rho}\,\gamma_\mu - i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\sigma\,\gamma_5} \tag{7.59}$$

③ Développement de $\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5$

Il est facile de montrer que cette matrice s'exprime uniquement à l'aide des $\sigma_{\alpha\beta}$. On a

$$\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,[\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu - g_{\mu\nu}\,]\,[\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}\,]\,\gamma_5 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta\,\gamma_5 = -i\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$$

d'où

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5 = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\sigma^{\alpha\beta}} \tag{7.60}$$

④ Développement de $\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma}$

De (7.46), (7.48) et (7.50), on tire

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}\,\{\,g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho} - i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\}\\ +\frac{i}{2}\,\{\,g_{\mu\sigma}\,\sigma_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\,\sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\,\sigma_{\mu\sigma}\,\}\end{aligned}} \tag{7.61}$$

et

$$\boxed{[\,\sigma_{\mu\nu}\,,\sigma_{\rho\sigma}\,] = i\,\{\,g_{\mu\sigma}\,\sigma_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\,\sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\,\sigma_{\mu\sigma}\,\}} \tag{7.62}$$

On reconnait ici les relations de commutation (5.56) de l'algèbre de Lie du groupe $SL(2, C)$. Il est opportun de montrer ici que les matrices $\sigma_{\mu\nu}$ sont effectivement, dans l'espace des spineurs de Dirac, les représentants des générateurs de cette algèbre. Pour cela, nous utiliserons la dernière expression de $L(A)$ apparaissant dans (7.28). Envisageons en effet une transformation Λ infinitésimale. A des termes du second ordre près suivant les paramètres de cette transformation, on a

$$\Lambda_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad a_0 \simeq 1 \quad (\theta \simeq 1)$$

où $\omega_{\mu\nu}$ est un tenseur *antisymétrique*, d'ordre 1 suivant les paramètres de la transformation. Comme $\gamma_\mu\,\gamma^\mu = 4$, il vient

$$L(A) \simeq \frac{1}{4}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\left(g_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\right) = 1+\frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 1+\frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\frac{1}{4}\,[\,\gamma^\mu,\gamma^\nu\,] \quad \text{soit}$$

$$L(A) \simeq 1-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \tag{7.63}$$

cette expression est bien la forme attendue lorsque $L(A)$ est infinitésimale, avec pour générateurs $J^{\mu\nu} \equiv \sigma^{\mu\nu}$.

⑤ **Développement de** $\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma = g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma}-g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}+i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma_5 \\ +2\,i\,\{\,g_{\mu\rho}\,\sigma_{\nu\sigma}+g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\mu\rho}-g_{\mu\sigma}\,\sigma_{\nu\rho}-g_{\nu\rho}\,\sigma_{\mu\sigma}-g_{\rho\sigma}\,\sigma_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma}\,\}\end{array}} \tag{7.64}$$

Pour démontrer cette formule, le plus simple est d'utiliser (7.58) et (7.61). On pourra également la vérifier en utilisant (7.59) et (7.60).

7.3.3 Produits de matrices avec contractions d'indices

Dans les calculs de sections efficaces de processus élémentaires, il arrive souvent que dans les produits de matrices γ_μ auxquels on a affaire, deux indices de Lorentz soient contractés, ce qui en fait réduit de deux unités le nombre de matrices γ dans ces produits. Nous donnons ci-après des exemples très simples des effets de telles contractions.

① $\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma^\lambda$

$$\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma^\lambda = [\,-\gamma_\mu\,\gamma_\lambda+2\,g_{\mu\lambda}\,]\,\gamma^\lambda = 2\,\gamma_\mu-4\,\gamma_\mu \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma^\lambda = -2\,\gamma_\mu} \tag{7.65}$$

② $\gamma_\lambda\;\gamma_\mu\,\gamma_\nu\;\gamma^\lambda$

$$\gamma_\lambda\;\gamma_\mu\,\gamma_\nu\;\gamma^\lambda = -\gamma^\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\lambda\;\gamma_\nu+2\,g_{\lambda\nu}\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 2\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu+2\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma^\lambda = 4\,g_{\mu\nu}} \tag{7.66}$$

On en déduit aussi

$$\boxed{\gamma_\lambda\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma^\lambda = 0} \tag{7.67}$$

③ $\sigma^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{8}\,[\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu-\gamma_\nu\,\gamma_\mu\,]\,[\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu-g_{\mu\nu}\,] \equiv \frac{1}{8}\,[\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu-\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,]\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu \\ &= \frac{1}{4}\,[\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu-g^{\mu\nu}]\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu = \frac{1}{4}\,[\,16-4\,] \quad \text{soit}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu} = 3} \tag{7.68}$$

④ $\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta}$

$$\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\left[\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta - \gamma_\beta\,\gamma_\alpha\,\right]\,\gamma_\mu\,\left[\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}\,\right] \equiv \frac{1}{8}\left[\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta - \gamma^\beta\,\gamma^\alpha\,\right]\,\gamma_\mu\,\gamma_\beta\,\gamma_\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\left[\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta - g^{\alpha\beta}\right]\,\gamma_\mu\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta = \frac{1}{4}\left[\,4\,\gamma_\mu - 4\,\gamma_\mu\right] \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta} = 0} \tag{7.69}$$

Du point de vue de la γ-gymnastique, il est instructif de mettre ce résultat en rapport avec la relation (7.60). Pour cela, on remarque que, étant une somme de produits de matrices γ en nombre impair, la matrice $\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta}$ se développe sur les matrices γ_ρ et $\gamma_\rho\,\gamma_5$ uniquement :

$$\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta} = V_{\mu\,\alpha\,\beta\rho}\,\gamma^\rho + A_{\mu\,\alpha\,\beta\rho}\,\gamma^\rho\,\gamma_5 \qquad \text{avec}$$

$$V_{\mu\,\alpha\,\beta\rho} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta}\,\gamma_\rho, \quad A_{\mu\,\alpha\,\beta\rho} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta}\,\gamma_5\,\gamma_\rho$$

Mais, d'après (7.60),

$$A_{\mu\,\alpha\,\beta\rho} = -\frac{i}{8}\,\epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\sigma^{\nu\sigma}\,\gamma_\rho = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma}\,V_\mu{}^{\nu\,\sigma}{}_\rho$$

Ensuite,

$$\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_\mu\,\sigma_{\alpha\beta} = V_{\mu\,\alpha\,\beta\rho}\,\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma^\rho + \frac{i}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma}\,V_\mu{}^{\nu\,\sigma}{}_\rho\,\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_5\,\gamma^\rho =$$

$$V_{\mu\,\alpha\,\beta\rho}\,\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma^\rho + \frac{i}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma}\,V_\mu{}^{\nu\,\sigma}{}_\rho\,\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma_5\,\gamma^\rho = V_{\mu\,\alpha\,\beta\rho}\,\sigma^{\alpha\beta}\,\gamma^\rho - V_\mu{}^{\nu\,\sigma}{}_\rho\,\sigma_{\nu\sigma}\,\gamma^\rho = 0$$

⑤ $\sigma^{\alpha\beta}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\alpha\beta}$

Tenant compte de (7.67), on a

$$\sigma^{\alpha\beta}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\,\left[\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta - \gamma^\beta\,\gamma^\alpha\,\right]\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_\beta\,\gamma_\alpha = \frac{1}{4}\,\left[\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta - g^{\alpha\beta}\,\right]\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_\beta\,\gamma_\alpha = \frac{1}{4}\,\left[\,-g^{\alpha\beta}\,\right]\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_\beta\,\gamma_\alpha$$

d'où

$$\boxed{\sigma^{\alpha\beta}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\mu\nu}} \tag{7.70}$$

⑥ $\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma^\lambda$

$$\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma^\lambda = -\gamma^\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\lambda\,\gamma_\rho + 2\,g_{\lambda\rho}\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu = 2\,\gamma_\rho\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu - 2\,\gamma_\rho\,\left[\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu\,\right] \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma^\lambda = -2\,\gamma_\rho\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu} \tag{7.71}$$

Ce résultat peut également être obtenu en utilisant (7.59) et (7.65). On trouve ainsi

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma^\lambda &= -2\,\{g_{\mu\nu}\,\gamma_\rho - g_{\mu\rho}\,\gamma_\nu + g_{\nu\rho}\,\gamma_\mu + i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\sigma\,\gamma_5\,\}\\ &= -2\,\gamma_\rho\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu\end{aligned}} \tag{7.72}$$

⑦ $\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma^\lambda$

D'après (7.64) et (7.67), on obtient

$$\boxed{\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\gamma_\sigma\,\gamma^\lambda = 4\,\{\,g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho} - i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma_5\,\}} \tag{7.73}$$

On notera ici avec intérêt que, d'après la formule générale de développement (7.41) et la formule (7.67), on a

$$\boxed{\gamma_\lambda\,M\,\gamma^\lambda = 4\,\{\,S - P\,\gamma_5\,\}} \tag{7.74}$$

si M est un produit d'un nombre *pair* de matrices γ, et

$$\boxed{\gamma_\lambda\,M\,\gamma^\lambda = -2\,\{\,V_\mu\,\gamma^\mu - A_\mu\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,\}} \tag{7.75}$$

si M est un produit d'un nombre *impair* de matrices γ.

⑧ M_1 et M_2 étant des matrices 4×4 que l'on développera suivant la formule (7.41), démontrer les *identités de Fierz*[14]

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,M_1\,\gamma_\mu\,M_2 = [\,\mathrm{Tr}\,M_1\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,M_2\,] - [\,\mathrm{Tr}\,M_1\,\gamma_5\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,M_2\,\gamma_5\,]\\ -\frac{1}{2}\,[\,\mathrm{Tr}\,M_1\,\gamma_\mu\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,M_2\,\gamma^\mu\,] - \frac{1}{2}\,[\,\mathrm{Tr}\,M_1\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,M_2\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,]\\[2ex] \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,(1\pm\gamma_5)\,M_1\,\gamma^\mu\,(1\pm\gamma_5)\,M_2 = -16\,(V_1\mp A_1)\cdot(V_2\mp A_2)\\ = -\,[\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,(1\pm\gamma_5)\,M_1\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,(1\pm\gamma_5)\,M_2\,]\\[2ex] \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,(1\pm\gamma_5)\,M_1\,\gamma^\mu\,(1\mp\gamma_5)\,M_2 = 32\,(S_1\pm P_1)\,(S_2\mp P_2)\\ = 2\,[\,\mathrm{Tr}\,(1\pm\gamma_5)\,M_1\,]\,[\,\mathrm{Tr}\,(1\mp\gamma_5)\,M_2\,]\end{gathered}} \tag{7.76}$$

14. Indication : pour obtenir les deux dernières formules de (7.76), faire dans la première les remplacements $M_{1\,\mathrm{ou}\,2} \to (1\pm\gamma_5)\,M_{1\,\mathrm{ou}\,2}$.

7.3.4 Conjugaison hermitique et conjugaison complexe des matrices γ

① En effectuant la conjugaison hermitique de la relation fondamentale (7.13), on trouve, le tenseur $g_{\mu\nu}$ étant réel,

$$[\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu]^\dagger = \gamma_\nu^\dagger\,\gamma_\mu^\dagger + \gamma_\mu^\dagger\,\gamma_\nu^\dagger = 2\,g_{\mu\nu}$$

On constate alors que les conjuguées hermitiques des matrices γ_μ satisfont elles aussi la relation fondamentale et doivent par conséquent être reliées à ces dernières par une matrice inversible U_h, de sorte que

$$\boxed{\gamma_\mu^\dagger = U_h\,\gamma_\mu\,U_h^{-1}} \tag{7.77}$$

On note que dans la représentation initiale (7.8) et (7.9), on a

$$\Gamma_0\,\Gamma(v)\,\Gamma_0 = \Gamma(v)^\dagger \tag{7.78}$$

pour tout 4-vecteur v *réel*, et par suite

$$\Gamma_0\,\Gamma_\mu\,\Gamma_0 = \Gamma_\mu^\dagger\,, \quad \Gamma_0\,\Gamma_5\,\Gamma_0 = \Gamma_5^\dagger \tag{7.79}$$

Le passage de cette représentation à la représentation standard s'effectuant par la matrice (7.16) qui est réelle et symétrique (donc hermitique), on en déduit, pour la représentation standard,

$$\boxed{\gamma_0\,\gamma_\mu\,\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger} \tag{7.80}$$

et qu'on peut donc faire l'identification [15]

$$\boxed{U_h \equiv \gamma_0} \tag{7.81}$$

② De même, par conjugaison complexe :

$$\gamma_\mu^\star\,\gamma_\nu^\star + \gamma_\nu^\star\,\gamma_\mu^\star = 2\,g_{\mu\nu}$$

Les conjuguées complexes des matrices γ sont donc également reliées à celles-ci par une matrice inversible U_c :

$$\boxed{\gamma_\mu^\star = U_c\,\gamma_\mu\,U_c^{-1}} \tag{7.82}$$

Notons ici que la matrice $C = i\,\tau_2$ introduite au chapitre 4 (Eq. 4.112) a pour propriétés

$$C^2 = -1, \quad {}^tC = C^{-1} = -C, \quad C\,\tau_k\,C^{-1} = -\,{}^t\tau_k = -\tau_k^\star \quad (k = 1, 2, 3) \tag{7.83}$$

15. On rappelle que γ_0 est inversible et que $\gamma_0^{-1} = \gamma_0$.

Définissons alors la matrice 4×4 :

$$\mathcal{C} = \Omega_c \, \Gamma_0 = - \begin{pmatrix} 0_2 & C \\ C & 0_2 \end{pmatrix} \tag{7.84}$$

où Ω_c est la matrice Ω_c du chapitre 6 (Eq. 6.176) pour $s = 1/2$. On vérifie aisément que cette matrice est telle que

$$\mathcal{C} \, \Gamma^k \, \mathcal{C}^{-1} = \left[\Gamma^k \right]^\star , \quad \mathcal{C} \, \Gamma^0 \, \mathcal{C}^{-1} = \Gamma^0 = \left[\Gamma^0 \right]^\star , \quad \mathcal{C} \, \Gamma_5 \, \mathcal{C}^{-1} = -\Gamma_5 = -\left[\Gamma_5 \right]^\star \tag{7.85}$$

Les formules équivalentes dans la représentation standard sont obtenues au moyen de la matrice

$$U_c = \mathcal{U} \, \mathcal{C} \, \mathcal{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -C & 0_2 \\ 0_2 & C \end{pmatrix} = \mathcal{C}_i \tag{7.86}$$

qui n'est autre que la matrice $\mathcal{C}_i$ de l'équation 6.210 pour $s = 1/2$, représentant la matrice de conjugaison de charge dans la représentation initiale, d'où la notation "i" de $\mathcal{C}_i$. On a donc

$$\boxed{U_c \, \gamma^\mu \, U_c^{-1} = \left[\gamma^\mu \right]^\star , \quad U_c \, \gamma_5 \, U_c^{-1} = -\gamma_5 = -\left[\gamma_5 \right]^\star} \tag{7.87}$$

Remarquons enfin que puisque

$${}^t\gamma_\mu = \left[\gamma_\mu^\dagger \right]^\star = \left[\gamma_0 \, \gamma_\mu \, \gamma_0 \right]^\star = \gamma_0 \, \gamma_\mu^\star \, \gamma_0 = \gamma_0 \, U_c \, \gamma_\mu \, U_c^{-1} \, \gamma_0$$

on peut faire l'identification [16]

$$U_t = \pm \, \gamma_0 \, U_c = \pm \begin{pmatrix} C & 0_2 \\ 0_2 & C \end{pmatrix} = \pm \, \Omega_c \tag{7.88}$$

On sait que la trace d'un produit de matrices ne comportant que des matrices γ_μ est non nulle uniquement si ces matrices sont en nombre pair. Grâce à la relation (7.87), on peut de plus affirmer que cette trace est *réelle*. En effet, on a

$$\left[\mathrm{Tr} \, \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_r} \right]^\star = \mathrm{Tr} \, \gamma_{\mu_1}^\star \cdots \gamma_{\mu_r}^\star = \mathrm{Tr} \, U_c \, \gamma_{\mu_1} \, U_c^{-1} \, U_c \cdots U_c^{-1} \, U_c \, \gamma_{\mu_r} \, U_c^{-1} = \mathrm{Tr} \, \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_r}$$

Lorsque le produit contient des matrices γ_5, la trace est réelle si ces matrices sont en nombre pair. C'est un complexe imaginaire pur si les γ_5 sont en nombre impair.

7.3.5 Autre méthode pour obtenir l'expression (7.28) de $L(A)$

La méthode proposée ici peut être considérée comme un exercice d'application de certaines formules établies précédemment. Tout d'abord, à partir de la première forme de $L(A)$ dans (7.28), on déduit facilement que (pour simplifier, on pose $L \equiv L(A)$)

$$L \, \gamma_5 \, L^{-1} = \gamma_5 , \quad \gamma_0 \, L^\dagger \, \gamma_0 = L^{-1} \tag{7.89}$$

Conformément à (7.41), écrivons L sous la forme

16. Les matrices U_t, U_h et U_c, appelées aussi *matrices d'entrelacement*, ne sont définies qu'à un facteur de phase près.

$$L = S + P\,\gamma_5 + V^\mu\,\gamma_\mu + A^\mu\,\gamma_\mu\,\gamma_5 + T^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}$$

Mais, d'après (7.89), γ_5 commute avec L et ce développement doit donc se réduire à

$$L = S + P\,\gamma_5 + T^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu} \tag{7.90}$$

En outre, la seconde formule de (7.89) permet d'obtenir l'inverse L^{-1} de cette matrice sous la forme

$$L^{-1} = S^\star - P^\star\,\gamma_5 + T^\star_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \tag{7.91}$$

La transformation de Lorentz Λ à laquelle la matrice L est associée transformant une base t, x, y, z en base T, X, Y, Z, on a aussi les relations

$$L\,\gamma(t)\,L^{-1} = \gamma(T), \quad L\,\gamma(x)\,L^{-1}, \quad \text{etc.} \tag{7.92}$$

Considérons alors la matrice

$$\mathcal{M} = \gamma(T)\,\gamma(t) - \gamma(X)\,\gamma(x) - \gamma(Y)\,\gamma(y) - \gamma(Z)\,\gamma(z) = \Lambda_{\mu\nu}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu \tag{7.93}$$

On la relie à L comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= L\,\gamma(t)\,L^{-1}\,\gamma(t) - L\,\gamma(x)\,L^{-1}\,\gamma(x) - \cdots = L\,\left[\,\gamma^\mu\,L^{-1}\,\gamma^\nu\,\right][\,t_\mu\,t_\nu - x_\mu\,x_\nu - \cdots] \\ &= L\,\left[\,\gamma^\mu\,L^{-1}\,\gamma^\nu\,\right]\,g_{\mu\nu} \quad \text{soit}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M} = L\,\gamma_\mu\,L^{-1}\,\gamma^\mu} \tag{7.94}$$

Comme $\gamma_\mu\,L^{-1}\,\gamma^\mu = 4\,S^\star + 4\,P^\star\,\gamma_5$, on obtient finalement

$$\mathcal{M} = 4\,L\,\left(S^\star + P^\star\,\gamma_5\right) \tag{7.95}$$

Puisque $\mathrm{Tr}\;\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_5 = 0$, on a $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}\,\gamma_5 = 0 = 4\,\mathrm{Tr}\,L\,\left(S^\star\,\gamma_5 + P^\star\,\right) = 4\,\left(P^\star\,S + S^\star\,P\right)$, et

$$P^\star\,S + S^\star\,P = 2\,\Re\,(S^\star\,P) = 0 \tag{7.96}$$

Cependant, d'après la première expression de L donnée en (7.28),

$$\mathrm{Tr}\,L = \mathrm{Tr}\left(A + A^{\dagger\,-1}\right) = 2\,\left(a_0 + a_0^\star\right) = 4\,S \tag{7.97}$$

On en déduit que S est *réel* et, comme conséquence de (7.96), que P est *imaginaire pur*. Il vient alors

$$\left(S^\star + P^\star\,\gamma_5\right)\,\left(S + P\,\gamma_5\right) = |S|^2 + |P|^2, \quad \text{et} \quad \left(S^\star + P^\star\,\gamma_5\right)^{-1} = \frac{S + P\,\gamma_5}{|S|^2 + |P|^2}$$

D'où

$$\boxed{\boxed{L = \frac{\mathcal{M}\,\left(S + P\,\gamma_5\right)}{4\,(|S|^2 + |P|^2)}}} \tag{7.98}$$

L'expression de L recherchée est alors obtenue en introduisant la paramétrisation

$$S = \sqrt{|S|^2 + |P|^2}\,\cos\theta, \quad P = i\,\sqrt{|S|^2 + |P|^2}\,\sin\theta$$

Relions ensuite S et P aux paramètres de la transformation Λ. On a d'une part

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{M} = 4\,a \quad \text{avec} \quad a = g^{\alpha\beta}\,\Lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\,\Lambda$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{M} = 4\,\mathrm{Tr}\,\left[S^\star\,L + P^\star\,L\,\gamma_5\right] = 16\,\left(|S|^2 + |P|^2\right)$$

d'où

$$|S|^2 + |P|^2 = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}\,g^{\alpha\beta}\,\Lambda_{\alpha\beta} \tag{7.99}$$

Posons ensuite

$$\mathcal{M}' = \gamma_0\,\mathcal{M}^\dagger\,\gamma_0 = \gamma(t)\,\gamma(T) - \gamma(x)\,\gamma(X) - \cdots = \Lambda_{\nu\mu}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,L^{-1}\,(S - P\,\gamma_5) \tag{7.100}$$

Compte tenu de (7.58), on peut écrire

$$\mathcal{M} = a + 2\,i\,\Lambda^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}, \quad \mathcal{M}' = a - 2\,i\,\Lambda^{\rho\sigma}\,\sigma_{\rho\sigma} \tag{7.101}$$

D'après (7.61), le produit de ces deux matrices donne

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\,\mathcal{M}' = a^2 + 4\,\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma} = a^2 + \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda_{\mu\nu} - \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda_{\nu\mu} - i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,\gamma_5 \\ -2\,\left\{\Lambda^{\rho}_{\cdot\,\mu}\,\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\nu}\,\sigma_{\nu\rho} - \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\mu\rho}\,\sigma_{\nu\sigma} - \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\mu\rho} + \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\sigma}\,\sigma_{\mu\sigma}\right\}\end{aligned}$$

Mais, d'une part

$$\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\mu\rho} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\nu}\,\Lambda_{\mu}^{\cdot\,\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\nu}\,\left[\Lambda^{-1}\right]^{\sigma}_{\cdot\,\mu} = \delta^{\sigma}_{\lambda}\,g^{\lambda\nu} = g^{\sigma\nu}$$

$$\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\nu\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\nu\mu}\,(\Lambda^{-1})^{\sigma\rho}\,g_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho}$$

de sorte que

$$\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\mu\rho}\,\sigma_{\nu\sigma} = 0, \quad \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\mu\rho} = 0$$

et, d'autre part, du fait de l'antisymétrie des $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\Lambda^{\rho}_{\cdot\,\mu}\,\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\nu}\,\sigma_{\nu\rho} + \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\lambda}\,g^{\lambda\sigma}\,\sigma_{\mu\sigma} = (\Lambda^2)^{\rho\nu}\,\sigma_{\nu\rho} + (\Lambda^2)^{\mu\sigma}\,\sigma_{\mu\sigma} = (\Lambda^2)^{\rho\nu}\,(\sigma_{\nu\rho} - \sigma_{\nu\rho}) = 0$$

Compte tenu de ce que

$$\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda_{\mu\nu} = 4, \quad \text{et} \quad \Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda_{\nu\mu} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\mu} = \mathrm{Tr}\,\Lambda^2$$

le précédent produit se résume finalement à

$$\mathcal{M}\,\mathcal{M}' = a^2 + 4 - \mathrm{Tr}\,\Lambda^2 - i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma}\,\gamma_5 \tag{7.102}$$

Or, ce produit est aussi égal à

$$4\,L\,(S^\star + P^\star\,\gamma_5)\;4\,L^{-1}\,(S - P\,\gamma_5) = 16\,(S - P\,\gamma_5)^2 = 16\,\left(S^2 - |P|^2 - 2S\,P\,\gamma_5\right)$$

d'où

$$S^2 - |P|^2 = \frac{1}{16}\,\left(a^2 + 4 - \mathrm{Tr}\,\Lambda^2\right), \quad S\,P = \frac{i}{32}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu\nu}\,\Lambda^{\rho\sigma} \tag{7.103}$$

Puis, les carrés S^2 et $|P|^2$ peuvent être déduits séparément en utilisant (7.99) [17, 18] :

$$S^2 = \frac{1}{32}\,\left\{(a+2)^2 - \mathrm{Tr}\,\Lambda^2\right\}, \quad |P|^2 = \frac{1}{32}\,\left\{\mathrm{Tr}\,\Lambda^2 - (a-2)^2\right\} \tag{7.104}$$

7.4 Représentations explicites des spineurs de Dirac, projecteurs ($m \neq 0$)

Pour commencer cette étude, écrivons les spineurs de Dirac associés au ket $|\,[\,p\,],\sigma >$ (formules 6.215 et 6.216 pour $s = 1/2$). Dans la représentation initiale, ce sont, le spineur "à énergie positive"

$$\boxed{\tilde{U}_\sigma([\,p\,]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \{[\,p\,]\}_{\cdot\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{7.105}$$

où σ est ici un indice de spin ($= \pm 1/2$), et le spineur "à énergie négative"

$$\boxed{\tilde{V}_\sigma([\,p\,]) \;=\; \Gamma_5\,\tilde{U}_\sigma([\,p\,]) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \{[\,p\,]\}_{\cdot\,\sigma} \\ -\,\left\{[\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{7.106}$$

La notation "tilde" a été utilisée ici pour signifier deux choses ; d'une part que lesdits spineurs relèvent de la représentation initiale ; d'autre part, qu'ils sont normalisés "à l'unité", cette normalisation se référant au produit scalaire défini par

$$\boxed{\boxed{(\Phi, \Psi) = \overline{\Phi}\,\Psi, \quad \text{avec} \quad \overline{\Phi} = \Phi^\dagger\,\Gamma_0}} \tag{7.107}$$

et pour lequel on a effectivement [19, 20]

$$\overline{\tilde{U}}_{\sigma'}\,\tilde{U}_\sigma \;=\; \delta_{\sigma'\sigma}\,, \quad \overline{\tilde{V}}_{\sigma'}\,\tilde{V}_\sigma \;=\; -\,\delta_{\sigma'\sigma}\,, \quad \overline{\tilde{V}}_{\sigma'}\,\tilde{U}_\sigma \;=\; \overline{\tilde{U}}_{\sigma'}\,\tilde{V}_\sigma = 0 \tag{7.108}$$

17. On notera ici que d'après les équations (5.186) et (5.187), $\mathrm{Tr}\,\Lambda^2 - (\mathrm{Tr}\,\Lambda)^2 - 4 = -16\,\Re(a_0^2)$ avec $4\,|a_0|^2 = \mathrm{Tr}\,\Lambda$, et que par conséquent $-4\,\mathrm{Tr}\,\Lambda \leq \mathrm{Tr}\,\Lambda^2 - (\mathrm{Tr}\,\Lambda)^2 - 4 \leq 4\,\mathrm{Tr}\,\Lambda$, ce qui fait que l'on a bien $S^2 \geq 0$ et $|P|^2 \geq 0$.

18. Vérifier par le calcul matriciel direct que $P = 0$ pour les transformations définies par les matrices (3.160) et (3.161). Qu'en est-il pour la transformation définie par la matrice (3.158) ? Expliquer en détaillant la seconde formule de (7.103) ou à l'aide de la formule (5.188).

19. On prendra garde au fait que, vis-à-vis du produit scalaire hermitien usuel, les spineurs définis plus haut ne sont pas normés à l'unité et que les spineurs $\tilde{V}$ ne sont pas orthogonaux aux spineurs $\tilde{U}$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer, par exemple, que $\tilde{U}^\dagger_{\sigma'}\,\tilde{U}_\sigma = 2\,\delta_{\sigma'\sigma}\,E/m$ où $E = p_0$.

20. Montrer que $S(A)$ est *unitaire* vis-à-vis de ce produit scalaire.

D'après les résultats établis au paragraphe 6.9.2, les projecteurs sur les sous-espaces engendrés, respectivement, par les spineurs de "type U" et les spineurs de "type V" sont donnés par

$$\sum_\sigma \tilde{U}_\sigma \overline{\tilde{U}}_\sigma \; = \; \frac{1}{2m}\left[\, m + \Gamma(p)\,\right] \,, \quad \text{et} \quad \sum_\sigma \tilde{V}_\sigma \overline{\tilde{V}}_\sigma \; = \; \frac{1}{2m}\left[\,\Gamma(p) \, - m\right] \tag{7.109}$$

et l'on a la relation de fermeture

$$\sum_\sigma \left[\tilde{U}_\sigma \overline{\tilde{U}}_\sigma \; - \; \tilde{V}_\sigma \overline{\tilde{V}}_\sigma \right] \; = \; 1 \tag{7.110}$$

La matrice de passage (7.16) de la représentation initiale à la représentation standard est réelle, symétrique, donc hermitique, égale à son inverse et donc, finalement, unitaire. Exprimons alors le produit scalaire (7.107) au moyen des spineurs de la représentation standard :

$$(\Phi_{in}, \Psi_{in}) = \Phi^\dagger_{in}\,\Gamma_0\,\Psi_{in} = \Phi^\dagger_{st}\,\mathcal{U}^{\dagger -1}\,\Gamma_0\,\mathcal{U}^{-1}\,\Psi_{st} = \Phi^\dagger_{st}\,\mathcal{U}\,\Gamma_0\,\mathcal{U}^{-1}\,\Psi_{st} = \Phi^\dagger_{st}\,\gamma_0\,\Psi_{st}$$

Si, dans la représentation standard, on définit un produit scalaire par

$$\boxed{(\Phi_{st}, \Psi_{st}) = \overline{\Phi}_{st}\,\Psi_{st}, \quad \text{avec} \quad \overline{\Phi}_{st} = \Phi^\dagger_{st}\,\gamma_0} \tag{7.111}$$

on voit que l'on préserve ainsi la valeur du produit scalaire dans le passage de la représentation initiale à la représentation standard. D'une représentation à une autre, le produit scalaire défini comme en (7.111) n'est donc conservé que si la matrice de passage vérifie

$$\mathcal{U}^{\dagger -1}\,\Gamma_0\,\mathcal{U}^{-1} = \Gamma'_0 \tag{7.112}$$

Conformément à l'usage, nous changerons la normalisation des spineurs de telle sorte que dorénavant

$$\boxed{\overline{U}_\sigma\,U_{\sigma'} = 2\,m\,\delta_{\sigma\,\sigma'} \,, \quad \overline{V}_\sigma\,V_{\sigma'} = -2\,m\,\delta_{\sigma\,\sigma'} \,, \quad \overline{U}_\sigma\,V_{\sigma'} = \overline{V}_\sigma\,U_{\sigma'} = 0} \tag{7.113}$$

Ainsi, dans la représentation standard, les spineurs de type U et les spineurs de type V attachés à l'état $|\,[\,p\,], \sigma >$ sont donnés par

$$\boxed{U_\sigma([\,p\,]) \;\; = \;\; \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \left\{[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger -1}\right\}_{.\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger -1}\right\}_{.\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{7.114}$$

$$\boxed{V_\sigma([\,p\,]) \;\; = \;\; \gamma_5\,U_\sigma([\,p\,]) \;\; = \;\; \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \left\{[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger -1}\right\}_{.\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger -1}\right\}_{.\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{7.115}$$

Ils vérifient les relations

$$\sum_\sigma U_\sigma\,\overline{U}_\sigma \;\; = \;\; m + \gamma(p) \,, \quad \sum_\sigma V_\sigma\,\overline{V}_\sigma \;\; = \;\; \gamma(p) - m \,, \quad \gamma(p)\,U = m\,U \,, \quad \gamma(p)\,V = -m\,V$$

$$\sum_{\sigma} \left[U_\sigma \overline{U}_\sigma \; - \; V_\sigma \overline{V}_\sigma \right] \; = \; 2\,m \tag{7.116}$$

et constituent une base selon laquelle on peut développer tout vecteur unicolonne de C^4. Considérons le cas où la tétrade $[\,p\,]$ correspond à un boost le long de $\overrightarrow{p}$. Il s'agit d'une matrice hermitique que nous noterons $\mathcal{H}$, telle que

$$\mathcal{H}\,\tau_0\,\mathcal{H} = \mathcal{H}^2 = \underset{\sim}{p}/m$$

Comme[21] $\mathcal{H} + \mathcal{H}^{-1} = \mathrm{Tr}\,\mathcal{H}$, on en déduit $\mathcal{H}^2 + 1 = \mathcal{H}\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}$, $(\mathrm{Tr}\,\mathcal{H})^2 = \mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^2 + 2$, d'où

$$\mathcal{H} = \frac{1 + \mathcal{H}^2}{\sqrt{2 + (\mathrm{Tr}\,\mathcal{H})^2}} = \frac{m + \underset{\sim}{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{7.117}$$

où $E = p_0$, soit, explicitement sous forme de tableau :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1/2 & E + m + p_z & p_x - i\,p_y \\ \hline -1/2 & p_x + i\,p_y & E + m - p_z \\ \hline \end{array} \tag{7.118}$$

avec $p_x = p^1, p_y = p^2, p_z = p^3$. On a donc

$$\mathcal{H} + \mathcal{H}^{-1} = \frac{2\,(E+m)}{\sqrt{2m(E+m)}}, \quad \mathcal{H} - \mathcal{H}^{-1} = \frac{2\,\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\tau}}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{7.119}$$

Ainsi :

$$\boxed{U^{\uparrow}(\mathcal{H}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad U^{\downarrow}(\mathcal{H}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}} \tag{7.120}$$

$$\boxed{V^{\uparrow}(\mathcal{H}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{\downarrow}(\mathcal{H}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E+m \end{pmatrix}} \tag{7.121}$$

où les notations $\uparrow$ ("up") et $\downarrow$ ("down") se réfèrent à un indice de spin σ égal à $+1/2$ et $-1/2$, respectivement. On notera que la normalisation choisie permet d'extrapoler les expressions des spineurs au cas limite $m = 0$. Ils deviennent alors :

21. Voir Eq. 5.181.

$$\boxed{U_n^{\uparrow}(\mathcal{H}) \;=\; \sqrt{E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_z \\ u_x + i u_y \end{pmatrix}, \quad U_n^{\downarrow}(\mathcal{H}) \;=\; \sqrt{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_x - i u_y \\ -u_z \end{pmatrix}} \tag{7.122}$$

où u_x, u_y, u_z sont les composantes cartésiennes du 3-vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{p}$.

7.4.1 Opérateurs de spin et projecteurs

Nous avons montré précédemment que, dans la représentation standard des spineurs de Dirac, les générateurs de $SL(2,C)$ sont les matrices $\sigma_{\mu\nu}$. Compte tenu de (7.60) et posant $t = p/m$, l'opérateur de Pauli-Lubanski associé à la 4-impulsion p s'écrit donc

$$W_\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,t^\alpha\,\sigma^{\beta\gamma} = i\,t^\nu\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5 \quad \text{soit}$$
$$W_\mu = -\frac{1}{4}\,[\,\gamma_\mu\,,\gamma_\nu\,]\,t^\nu\,\gamma_5 \tag{7.123}$$

Notons x, y et z les trois 4-vecteurs du genre espace associé à t dans la tétrade $[\,p\,]$ et formant avec t une base d'espace-temps orthonormée et d'orientation directe. Les générateurs du petit groupe de p (opérateurs de spin engendrant un groupe de rotations) sont représentés par les matrices [22]

$$S_x = -x\cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(x)\,\gamma(t)\,\gamma_5, \quad S_y = -y\cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(y)\,\gamma(t)\,\gamma_5,$$
$$S_z = -z\cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(z)\,\gamma(t)\,\gamma_5 \tag{7.124}$$

et l'on a [23], en posant $U_\sigma \equiv U_\sigma([\,p\,])$, $V_\sigma \equiv V_\sigma([\,p\,])$, $S_\pm = S_x \pm iS_y$,

$$\begin{gathered} S_z\,U_\sigma = \sigma\,U_\sigma, \quad S_z\,V_\sigma = \sigma\,V_\sigma \\ S_+\,U^\uparrow = 0\,, \quad S_+\,U^\downarrow = U^\uparrow\,, \quad S_+\,V^\uparrow = 0 \quad S_+\,V^\downarrow = V^\uparrow \\ S_-\,U^\uparrow = U^\downarrow\,, \quad S_-\,U^\downarrow = 0\,, \quad S_-\,V^\uparrow = V^\downarrow \quad S_-\,V^\downarrow = 0 \end{gathered} \tag{7.125}$$

Il est facile de montrer que ces formules conduisent également aux suivantes :

$$\begin{gathered} \gamma(z)\,U^{\uparrow,\downarrow} = \pm\,V^{\uparrow,\downarrow}, \quad \gamma(z)\,V^{\uparrow,\downarrow} = \mp\,U^{\uparrow,\downarrow} \\ \gamma(x+iy)\,U^\uparrow = 0, \quad \gamma(x+iy)\,U^\downarrow = 2\,V^\uparrow \\ \gamma(x-iy)\,U^\downarrow = 0, \quad \gamma(x-iy)\,U^\uparrow = 2\,V^\downarrow \end{gathered} \tag{7.126}$$

En appliquant $\gamma(z)$ ou $\gamma(x \pm iy)$ soit sur les projecteurs soit sur la relation de fermeture de (7.116), on en déduit alors :

$$\begin{gathered} 2\,m\,\gamma(z) = V^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow + U^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow \\ 2\,\gamma(z)\,\gamma(p) = V^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow + U^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow \\ m\,\gamma(x+iy) = V^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow + U^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow, \quad 2\,\gamma(x+iy)\,\gamma(p) = V^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow \end{gathered} \tag{7.127}$$

22. A l'aide de (7.18), montrer que les matrices S_x, S_y et S_z vérifient bien les relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SU(2)$.
23. A vérifier.

$$m\,\gamma(x-iy) = V^{\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\,\overline{V}^{\uparrow}, \quad 2\,\gamma(x-iy)\,\gamma(p) = V^{\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow} - U^{\downarrow}\,\overline{V}^{\uparrow}$$

Montrons maintenant comment l'utilisation conjointe des relations (7.125) et (7.116) permet d'exprimer simplement certains projecteurs au moyen des matrices γ. En additionnant

$$S_+\,U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} = 0\,, \quad \text{et} \quad S_+\,U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow} = U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\downarrow}$$

on obtient

$$U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\downarrow} = S_+\,(U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow}) = S_+\,[\,\gamma(p) + m\,]$$

soit, puisque $\gamma(t)\,[\,\gamma(p)+m\,] = [\,\gamma(p)+m\,]$,

$$\boxed{U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\downarrow} = \frac{1}{2}\,\gamma_5\,\gamma(x+iy)\;[\,\gamma(p)+m\,]} \tag{7.128}$$

Suivant un procédé similaire, on obtient de même [24]

$$\boxed{U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow} = \frac{1}{2}\,\gamma_5\,\gamma(x-iy)\;[\,\gamma(p)+m\,]} \tag{7.129}$$

Comme

$$2\,S_z\,\left[U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow}\right] = U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} - U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow}\,, \quad \text{et} \quad U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow} = \gamma(p) + m$$

on a

$$2\,U^{\uparrow,\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = [\,1 \pm 2\,S_z\,]\;[\,\gamma(p)+m\,] \quad \text{soit au final}$$

$$\boxed{U^{\uparrow,\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{2}\;[\,1 \pm \gamma_5\,\gamma(z)\,]\;[\,\gamma(p)+m\,]} \tag{7.130}$$

7.4.2 Spineurs propres de $S_z = \overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{p}/\mid\overrightarrow{p}\mid$

Le lecteur vérifiera [25] que les spineurs (7.120) sont vecteurs propres de la projection du vecteur polarisation (7.123) selon le 4-vecteur z (orthogonal à p) ayant pour composantes

$$z_0 = \frac{p_z}{m}, \quad z_x = \frac{p_z p_x}{m(E+m)}, \quad z_y = \frac{p_z p_y}{m(E+m)}, \quad z_z = 1 + \frac{p_z^2}{m(E+m)} \tag{7.131}$$

et dont la partie spatiale n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{p}$. Pour obtenir une composante de spin S_z correspondant à une projection du spin selon $\overrightarrow{p}$, il faut préalablement effectuer une rotation amenant l'axe des z selon la direction de ce 3-vecteur. Notant respectivement θ et φ l'angle orbital et l'angle azimutal de $\overrightarrow{p}$, la matrice 2×2 représentant cette rotation s'écrit

24. A titre d'exercice, trouver (7.129) à partir de la conjugaison hermitique de (7.128).
25. Par exemple, en calculant $\mathcal{H}\,\tau_3\,\mathcal{H}$.

$$\mathcal{R}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & -\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z(\varphi)\,\mathcal{R}_y(\theta)\,\mathcal{R}_z^{-1}(\varphi) \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \tag{7.132}$$

Il est facile de vérifier que l'on a bien

$$\mathcal{R}(\theta,\varphi)\,\tau_3\,\mathcal{R}^{-1}(\theta,\varphi) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau} \qquad (\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}/p, \quad p = \sqrt{E^2-m^2})$$

La tétrade correspondante s'écrit

$$[\,p\,] = \mathcal{H}\,\mathcal{R}(\theta,\varphi) \tag{7.133}$$

et conduit à

$$\underset{\sim}{z}(p) = [\,p\,]\,\tau_3\,[\,p\,] = \mathcal{H}\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\ \mathcal{H} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\ \mathcal{H}^2 = \frac{1}{m}\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\ \left(E + \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\tau}\right) \quad \text{soit}$$

$$\underset{\sim}{z}(p) = \frac{1}{m}\left(p + E\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\right) \tag{7.134}$$

Le 4-vecteur $z(p)$ ainsi obtenu a pour composantes

$$z_0 = \frac{p}{m}, \quad \overrightarrow{z} = \frac{E}{m}\ \overrightarrow{u} \tag{7.135}$$

et sa partie spatiale est colinéaire à $\overrightarrow{p}$. On a alors

$$S_z = \frac{1}{2m^2}\,\gamma_5\left(p\,\gamma_0 - E\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\gamma}\right)\left(E\,\gamma_0 - \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\gamma}\right) = \frac{1}{2}\gamma_5\,\gamma_0\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\gamma} \qquad \text{soit}$$

$$S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau} & 0_2 \\ 0_2 & \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\ \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\tau}/p \tag{7.136}$$

Ce choix de tétrade correspond donc bien à la projection de spin suivant la direction du 3-vecteur $\overrightarrow{p}$. D'après la formule générale (7.114), et compte tenu de

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\ \mathcal{R}(\theta,\varphi)\ = \mathcal{R}(\theta,\varphi)\,\tau_3 \qquad \tau_3\,\chi_0^{\uparrow,\downarrow} = \pm\chi_0^{\uparrow,\downarrow}, \quad \chi_0^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger -1} = \left(\mathcal{H} + \mathcal{H}^{-1}\right)\ \mathcal{R}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E+m}\,\mathcal{R}(\theta,\varphi),$$

$$[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger -1} = \left(\mathcal{H} + \mathcal{H}^{-1}\right)\ \mathcal{R}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E+m}\ \Delta\,\mathcal{R}(\theta,\varphi)\,\tau_3, \quad \text{avec} \quad \Delta = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}}$$

les spineurs propres de type U associés sont donnés par

$$\boxed{U_\sigma = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \{\mathcal{R}(\theta,\varphi)\}_{.\,\sigma} \\ 2\,\sigma\,\Delta\ \{\mathcal{R}(\theta,\varphi)\}_{.\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{7.137}$$

Explicitement,

$$\boxed{U^{\uparrow} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \\ \Delta\,\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \Delta\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad U^{\downarrow} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \Delta\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ -\Delta\,\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \tag{7.138}$$

7.4.3 Conjugaison de charge

Toute particule possède son *antiparticule*, laquelle peut d'ailleurs lui être identique. S'agissant des particules massives de spin 1/2 trouvées jusqu'à présent, particule et antiparticule sont différentes, mais présentent les mêmes caractéristiques vis-à-vis du groupe de Poincaré, sauf leurs parités respectives, qui sont opposées. Ainsi le *positron* e^+ a la même masse m et le même spin $1/2$ que sa particule, l'électron e^-. Tous les autres nombres quantiques internes susceptibles de caractériser une antiparticule, comme la charge électrique si elle en possède une, ont des valeurs strictement opposées à celles relatives à la particule.

Sur le plan théorique, l'opération de *conjugaison de charge* a pour fonction de transformer une particule de nombres quantiques internes donnés en son antiparticule de nombres quantiques internes opposés, la 4-impulsion et le spin restant *inchangés*. Dans cette opération, la parité reste inchangée pour les particules de spin entier (les *bosons*), mais change de signe pour les particules de spin demi-entier (les *fermions*).

Prenant l'exemple de l'électron et du positron, ces deux particules sont donc décrites, vis-à-vis du groupe de Poincaré, par les deux représentations $[\,m, 1/2, \eta, \varepsilon = +1\,]$ et $[\,m, 1/2, -\eta, \varepsilon = +1\,]$, η étant la parité de l'électron et ε le signe de p_0 (énergie). Le procédé inventé pour relier ces deux représentations par conjugaison de charge a été décrit au paragraphe 6.9.1. : il consiste à construire les états du positron à partir d'états à énergie négative associés à la représentation de l'électron, via une opération anti-linéaire, procédé qui se justifie dans le cadre de la théorie quantique des champs. Les deux particules ayant le même comportement vis-à-vis du groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$, leurs fonctions d'onde spinorielles doivent être strictement identiques. Pour cette raison, la conjugaison de charge doit nécessairement reproduire le spineur $U_\sigma([\,p\,])$, avec la même valeur de σ, à partir d'un spineur à énergie négative associé à la représentation $[\,m, 1/2, \eta, \varepsilon = -1\,]$, via une conjugaison complexe. Partons des spineurs de la représentation initiale et considérons le spineur à énergie négative (7.106). Compte tenu des relations

${}^t[\,p\,]^{-1} = C^{-1}\,[\,p\,]\,C$, $[\,p\,]^\star = C^{-1}\,[\,p\,]^{\dagger -1}\,C$, $C^{-1} = -C$, $C_{\sigma'\sigma} = (-1)^{1/2+\sigma}\,\delta_{\sigma',-\sigma}$, on a

$$\left[\tilde{V}_\sigma([\,p\,])\right]^\star = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \{[\,p\,]^\star\}_{\cdot\,\sigma} \\ -\left\{{}^t[\,p\,]^{-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_c\begin{pmatrix} \{[\,p\,]\,C\}_{\cdot\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,]^{\dagger -1}\,C\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix} = (-1)^{1/2+\sigma}\,\Gamma_c\,\tilde{U}_{-\sigma}([\,p\,])$$

Γ_c étant la matrice définie en (6.204), pour $s = 1/2$:

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{7.139}$$

Le spineur à énergie négative défini par

$$\boxed{\tilde{W}_\sigma([\,p\,]) = (-1)^{1/2-\sigma}\,\tilde{V}_{-\sigma}([\,p\,])} \tag{7.140}$$

est donc tel que ($\Gamma_c^2 = 1$) :

$$\boxed{\boxed{\tilde{U}_\sigma([p]) = \Gamma_c \left[\tilde{W}_\sigma([p])\right]^\star = \mathcal{C}_i\, {}^t\overline{\tilde{W}}_\sigma([p])}} \tag{7.141}$$

où la matrice $\mathcal{C}_i$ est défine par (7.86) (voir aussi (6.246)). Dans la représentation standard (et avec la normalisation 7.113), cette relation devient

$$\boxed{\boxed{U_\sigma([p]) = \gamma_c\, [W_\sigma([p])]^\star = \mathcal{C}\, {}^t\overline{W}_\sigma([p])}} \tag{7.142}$$

où $\gamma_c = i\gamma^2$ et où la matrice $\mathcal{C} = i\,\gamma^2\,\gamma_0$ est définie par (7.84). En outre :

$$\boxed{W^\uparrow = V^\downarrow, \quad W^\downarrow = -V^\uparrow} \tag{7.143}$$

De (7.84) et (7.85), on tire les propriétés suivantes pour la matrice $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^{-1}\,\gamma_\mu\,\mathcal{C} = -\,{}^t\gamma_\mu$$
$$\mathcal{C}^2 = -1, \quad \mathcal{C}\,\gamma^k\,\mathcal{C}^{-1} = \left[\,\gamma^k\,\right]^\star, \quad \mathcal{C}\,\gamma^0\,\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^0 = -\left[\,\gamma^0\,\right]^\star, \quad \mathcal{C}\,\gamma_5\,\mathcal{C}^{-1} = \gamma_5 = [\,\gamma_5\,]^\star$$

ou, puisque $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$, $[\,\gamma^k\,]^\dagger = -\gamma^k$,

$$\boxed{\mathcal{C}^{-1}\,\gamma_\mu\,\mathcal{C} = -\,{}^t\gamma_\mu} \tag{7.144}$$

7.5 Formes bilinéaires

On appelle ainsi une forme hermitienne

$$\overline{\psi}\,M\,\phi \tag{7.145}$$

impliquant dans un produit scalaire deux spineurs ψ et ϕ et une matrice 4×4, M.

7.5.1 Formes bilinéaires dans la représentation-p

Pour commencer leur étude, nous supposerons que les spineurs dans (7.145) sont des spineurs de la représentation-p et qu'ils sont associés à une même 4-impulsion p du genre temps satisfaisant $p^2 = m^2$, $p_0 \geq m$. D'après (7.5), (7.28) et (7.89), la loi de transformation sous $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ de la forme correspondante est

$${}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,M\,\phi\,\right](p) = {}^{(a,A)}\overline{\psi}(p)\,M\,{}^{(a,A)}\phi(p) = \overline{\psi}(A^{-1}p)\,L(A)^{-1}\,M\,L(A)\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.146}$$

Tenant compte du résultat (7.41), on est amené à envisager les transformations des 16 formes indépendantes obtenues en prenant pour M l'une des matrices de la base (7.40).

① Si M est l'identité, on trouve

$$ {}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,\phi\,\right](p) = \overline{\psi}(A^{-1}p)\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.147}$$

ce qui montre que le produit scalaire introduit dans (7.111) porte bien son nom : il se transforme comme un scalaire.

② Lorsque $M = \gamma_5$, cette matrice commutant avec $L(A)$, on a

$$ {}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\phi\,\right](p) = \overline{\psi}(A^{-1}p)\,\gamma_5\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.148}$$

et cette forme se transforme aussi comme un scalaire.

③ Prenons ensuite $M = \gamma^\mu$. Sur la base de (7.11), (7.15) et (7.16), on a $L(A)^{-1}\,\gamma^\mu\,L(A) = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\gamma^\nu$ et par conséquent

$$ {}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\phi\,\right](p) = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\overline{\psi}(A^{-1}p)\,\gamma^\nu\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.149}$$

et la forme correspondante se transforme comme un 4-vecteur. La matrice γ_5 étant invariante sous $\bar{L}^{\uparrow}_{+}$, on en déduit aussi que la forme $\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,\phi$ se transforme comme un 4-vecteur :

$$ {}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,\phi\,\right](p) = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu}\,\overline{\psi}(A^{-1}p)\,\gamma^\nu\,\gamma_5\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.150}$$

④ Il est maintenant clair que la forme $\overline{\psi}\,\sigma^{\mu\nu}\,\phi$ se transforme comme un tenseur (antisymétrique) de rang 2 :

$$ {}^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,\sigma^{\mu\nu}\,\phi\,\right](p) = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\rho}\,\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\sigma}\,\overline{\psi}(A^{-1}p)\,\sigma^{\rho\sigma}\,\phi(A^{-1}p) \tag{7.151}$$

Plus généralement, une forme pour laquelle M est un produit de r matrices γ se transforme sous $\bar{L}^{\uparrow}_{+}$ comme un tenseur de rang r. C'est pourquoi les formes de ce type sont aussi appelées *formes bilinéaires covariantes*.

☞ Evaluons ensuite les formes bilinéaires pour les spineurs (7.114) et (7.115). Remarquant qu'un produit scalaire tel que $\overline{\psi}\,M\,\phi$ peut se concevoir comme une trace :

$$\overline{\psi}\,M\,\phi = \mathrm{Tr}\left[\,M\,\phi\,\overline{\psi}\,\right]$$

on déduit les formules suivantes de celles du paragraphe précédent.

① $\quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,U^{\uparrow,\downarrow} = \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,U^{\uparrow,\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\left[\,1 \pm \gamma_5\,\gamma(z)\,\right]\left[\,\gamma(p)+m\,\right] \equiv \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma(p) \quad$ soit

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,U^{\uparrow,\downarrow} = 2\,p_\mu} \tag{7.152}$$

De même, $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,U^{\downarrow,\uparrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\gamma(x \mp iy)\,\left[\,\gamma(p)+m\,\right]$, soit

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,U^{\downarrow,\uparrow} = 0} \tag{7.153}$$

En fait, on peut démontrer ces formules par une méthode classique plus astucieuse qui est la suivante :

$$\overline{U}_{\sigma'}\,\gamma_\mu\,U_\sigma \equiv \overline{U}_{\sigma'}\,\gamma_\mu\,\gamma(t)U_\sigma = -\overline{U}_{\sigma'}\,\gamma(t)\gamma_\mu\,U_\sigma + 2\,t_\mu\,\overline{U}_{\sigma'}\,U_\sigma = -\overline{U}_{\sigma'}\,\gamma_\mu\,U_\sigma + 4\,p_\mu\,\delta_{\sigma'\sigma} \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\overline{U}_{\sigma'}\,\gamma_\mu\,U_\sigma = \overline{U}_{\sigma'}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,V_\sigma = 2\,p_\mu\,\delta_{\sigma'\sigma}} \tag{7.154}$$

Cette dernière relation permet de montrer que

$$U^\dagger_{\sigma'}\,U_\sigma = V^\dagger_{\sigma'}\,V_\sigma = 2\,E\,\delta_{\sigma'\sigma} \tag{7.155}$$

② $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow} = \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,[\,1 \pm \gamma_5\,\gamma(z)\,]\,[\,\gamma(p) + m\,] \equiv \pm\dfrac{m}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma(z)$ soit

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,V^{\uparrow,\downarrow} = \pm 2\,m\,z_\mu} \tag{7.156}$$

③ $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow} = \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma(x \mp iy)\,[\,\gamma(p) + m\,] \equiv \dfrac{m}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma(x \mp iy)$,

soit

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,V^{\downarrow,\uparrow} = 2\,m\,(x \mp iy)_\mu} \tag{7.157}$$

④ $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,U^{\uparrow,\downarrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,[\,1 \pm \gamma_5\,\gamma(z)\,]\,[\,\gamma(p) + m\,] \equiv \pm\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma(z)\,\gamma(p)\,\gamma_5$
$= \pm\dfrac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma(z)\,\gamma(p) = \mp\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,z^\alpha\,p^\beta$. Or, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,t^\alpha\,z^\beta = x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu$. On a donc

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,U^{\uparrow,\downarrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,V^{\uparrow,\downarrow} = \pm\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,z^\beta = \pm m\,[\,x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu\,]} \tag{7.158}$$

⑤ $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,U^{\downarrow,\uparrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,\gamma(x \mp iy)\,[\,\gamma(p) + m\,] \equiv \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma(x \mp iy)\,\gamma(p)\,\gamma_5$

$= \dfrac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma(x \mp iy)\,\gamma(p) = \,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,(x \mp iy)^\beta$. Or, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,t^\alpha\,(x \mp iy)^\beta =$

$\pm i\,[\,(x \mp iy)_\mu\,z_\nu - (x \mp iy)_\nu\,z_\mu\,] = i\sqrt{2}\,\left[\,e^{(\mp)}_\mu\,z_\nu - e^{(\mp)}_\nu\,z_\mu\,\right]$, en posant $e^{(\pm)} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,[\,x \pm iy\,]$. D'où

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,U^{\downarrow,\uparrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,V^{\downarrow,\uparrow} = \pm\sqrt{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,e^{(\mp)\beta} = im\,\sqrt{2}\left[\,e^{(\mp)}_\mu z_\nu - e^{(\mp)}_\nu z_\mu\,\right]} \tag{7.159}$$

⑥ $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,[\,1 \pm \gamma_5\,\gamma(z)\,]\,[\,\gamma(p) + m\,] \equiv \pm\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma(z)\,\gamma(p) =$

$= \pm\dfrac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma(z)\,\gamma(p) = \pm i\,[\,p_\mu\,z_\nu - p_\nu\,z_\mu\,]$, soit

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,V^{\uparrow,\downarrow} = \pm i\,[\,p_\mu z_\nu - p_\nu z_\mu\,] = \mp i\,m\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,x^\alpha\,y^\beta} \tag{7.160}$$

⑦ $$\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma(x\mp iy)\,\left[\,\gamma(p)+m\,\right] \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma(x\mp iy)\,\gamma(p)$$
$$= \frac{i}{4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma(x\mp iy)\,\gamma(p) = i\,\left[\,p_\mu\,(x\mp iy)_\nu - p_\nu\,(x\mp iy)_\nu\,\right], \text{ soit}$$

$$\boxed{\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow} = \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,V^{\downarrow,\uparrow} = \pm i\sqrt{2}\,\left[\,p_\mu\,e^{(\mp)}_\nu - p_\nu\,e^{(\mp)}_\nu\,\right] = \sqrt{2}\,m\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,e^{(\mp)\alpha}\,z^\beta} \quad (7.161)$$

On notera que les deux éléments de matrice précédents peuvent aussi être obtenus en remarquant que

$$\overline{U}_{\sigma'}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U_\sigma = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\overline{U}_{\sigma'}\,\sigma^{\alpha\beta}\,U_\sigma, \quad \text{soit}$$

$$\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\uparrow,\downarrow} = \mp\frac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\omega}\,p_\rho\,z_\omega = \pm i\,\left[\,\delta^\rho_\mu\,\delta^\omega_\nu - \delta^\rho_\nu\,\delta^\omega_\mu\,\right]\,p_\rho\,z_\omega = \pm i\,\left[\,p_\mu\,z_\nu - p_\nu\,z_\mu\,\right]$$

$$\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5\,U^{\downarrow,\uparrow} = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\sigma^{\alpha\beta}\,U^{\downarrow,\uparrow} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\omega}\,p_\rho\,e^{(\mp)}_\omega = \pm i\sqrt{2}\,\left[\,p_\mu\,e^{(\mp)}_\nu - p_\nu\,e^{(\mp)}_\nu\,\right]$$

☞ Le calcul de formes bilinéaires dans le cas où les deux spineurs sont associées à des 4-impulsions différentes p et p' ne sera pas abordé ici. En fait, il n'est véritablement intéressant que si les tétrades $[\,p'\,]$ et $[\,p\,]$ sont liées d'une façon particulière, principalement dans le cas du fameux *couplage d'hélicité*[26].

7.5.2 Formes bilinéaires dans la représentation-x

Considérons maintenant des formes (7.145) où les spineurs sont deux champs spinoriels $\psi(x)$ et $\phi(x)$, envisagés au même point d'espace-temps x et supposés être exprimés dans la représentation standard. Nous admettrons que sous une transformation A de $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$ ces champs se transforment de la façon suivante[27]

$$^{(a,A)}\psi(Ax+a) = L(A)\,\psi(x) \quad (7.162)$$

On en déduit la loi de transformation

$$^{(a,A)}\left[\,\overline{\psi}\,M\,\phi\,\right](Ax+a) = \left[\,\overline{\psi}\,L(A)^{-1}\,M\,L(A)\,\phi\,\right](x) \quad (7.163)$$

Du fait de la présence du même facteur $L(A)^{-1}\,M\,L(A)$ que celui apparaissant dans (7.146), la forme $\overline{\psi}(x)\,M\,\phi(x)$ présente donc les mêmes propriétés de covariance que $\overline{\psi}(p)\,M\,\phi(p)$. Ainsi :

① $\overline{\psi}(x)\,\phi(x)$ et $\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\phi(x)$ se transforment comme des champs scalaires ;

② $\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\,\phi(x)$ et $\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\phi(x)$ se transforment comme des champs vectoriels (4-vectoriels) ;

③ $\overline{\psi}(x)\,\sigma_{\alpha\beta}\,\phi(x)$ se transforme comme un champ tensoriel.

7.5.3 Symétries discrètes et formes bilinéaires covariantes

D'après (6.166) et (6.175), les lois de transformation des spineurs de la représentation standard sous les opérations de parité (Π), de renversement du sens du temps $(\mathcal{T})$, de réflexion totale $(\Pi\mathcal{T})$ et de conjugaison de charge C sont données par[28]

26. Qui est étudié dans notre cours sur le "Calcul Spinoriel".
27. Voir notamment l'équation (6.238), transposée dans la représentation standard.
28. La matrice Ω_c commute avec la matrice de passage $\mathcal{U}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} {}^{P}\Phi(p) = \eta_P\,\gamma_0\,\Phi(\underline{p}), \quad \eta_P = \pm 1 \\[2mm] {}^{T}\Phi(p) = \Omega_c\,\Phi^\star(\underline{p}) \\[2mm] {}^{PT}\Phi(p) = \eta_P\,\gamma_0\ \Omega_c\,\Phi^\star(p) \\[2mm] {}^{C}\Phi(p) = \gamma_c\,\Phi^\star(p), \quad \gamma_c = i\gamma^2 \end{array}} \tag{7.164}$$

Considérons alors une forme bilinéaire $\overline{\Phi}(p)\,B_k\,\Psi(p)$ où B_k est l'une des matrices de la base (7.40).

$\boxed{\text{a}}$ Parité

Sous l'opération de parité, cette grandeur est transformée en

$$^{P}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,B_k\,\Psi(p)\,\big] = \eta_P^{\phi}\,\eta_P^{\psi}\ \overline{\Phi}(\underline{p})\,\gamma_0\,B_k\,\gamma_0\Psi(\underline{p}) \tag{7.165}$$

où η_P^{ϕ} et η_P^{ψ} sont les parités des représentations $[m,1/2,\eta_P^{\phi}]$ et $[m,1/2,\eta_P^{\psi}]$ auxquelles sont respectivement associés les spineurs Φ et Ψ. Nous supposerons dans la suite que lesdits spineurs sont issus de la même représentation $[m,1/2,\eta_P]$, donc que $\eta_P^{\phi}\,\eta_P^{\psi} = 1$. On constate alors que :

① $\overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)$ se transforme comme un *scalaire* ;

② $\overline{\Phi}(p)\,\gamma_5\,\Psi(p)$ se transforme comme un *pseudo-scalaire*, puisque $\gamma_0\,\gamma_5\,\gamma_0 = -\gamma_5$;

③ $\overline{\Phi}(p)\,\gamma_\mu\,\Psi(p)$ se transforme comme un *4-vecteur*, puisque $\gamma_0\,\gamma_0\,\gamma_0 = \gamma_0$, $\gamma_0\,\gamma_\ell\,\gamma_0 = -\gamma_\ell$ pour $\ell = 1,2,3$;

④ $\overline{\Phi}(p)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Psi(p)$ se transforme comme un *pseudo-4-vecteur*, du fait de la présence de γ_5, par rapport au cas précédent ;

⑤ $\overline{\Phi}(p)\,\sigma_{\mu\nu}\,\Psi(p)$ se transforme comme un tenseur de rang 2.

$\boxed{\text{b}}$ Renversement du sens du temps.

On a

$$\begin{aligned} {}^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,B_k\,\Psi(p)\,\big] &= {}^{t}\Phi(\underline{p})\,\Omega_c^\dagger\,\gamma_0\,B_k\,\Omega_c\Psi^\star(\underline{p}) = \overline{\Psi}(\underline{p})\,\gamma_0\ {}^{t}\Omega_c\,{}^{t}B_k\,\gamma_0\,\Omega_c\,\Phi(\underline{p}) \\ &= \overline{\Psi}(\underline{p})\,\gamma_0\,\Omega_c^{-1}\,{}^{t}B_k\,\Omega_c\,\gamma_0\,\Phi(\underline{p}) \end{aligned}$$

car ${}^{t}\Omega_c = -\Omega_c = \Omega_c^{-1}$ et $\gamma_0\,\Omega_c = \Omega_c\,\gamma_0$. On en déduit que :

① ${}^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)\,\big] = \overline{\Psi}(\underline{p})\,\Phi(\underline{p})$;

② ${}^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = -\overline{\Psi}(\underline{p})\,\gamma_5\,\Phi(\underline{p})$, puisque $\Omega_c^{-1}\,{}^{t}\gamma_5\,\Omega_c = \gamma_5$ et $\gamma_0\,\gamma_5\,\gamma_0 = -\gamma_5$;

③ ${}^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_0\,\Psi(p)\,\big] = \overline{\Psi}(\underline{p})\,\gamma_0\,\Phi(\underline{p})$ et ${}^{T}\Big[\,\overline{\Phi}(p)\,\overrightarrow{\gamma}\ \Psi(p)\Big] = -\,\overline{\Psi}(\underline{p})\,\overrightarrow{\gamma}\,\Phi(\underline{p})$;

④ ${}^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_0\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = \overline{\Psi}(\underline{p})\,\gamma_0\,\gamma_5\,\Phi(\underline{p})$ et ${}^{T}\Big[\,\overline{\Phi}(p)\,\overrightarrow{\gamma}\ \gamma_5\,\Psi(p)\Big] = -\,\overline{\Psi}(\underline{p})\ \overrightarrow{\gamma}\ \gamma_5\,\Phi(\underline{p})$ puisque $\Omega_c^{-1}\,{}^{t}[\gamma^k\,\gamma_5\,]\,\Omega_c = \gamma_5\,\gamma^k = -\gamma^k\,\gamma_5$;

⑤ Les résultats précédents montrent que dans le renversement du sens du temps la matrice γ^μ est changée en γ_μ. Cela nous permet d'écrire sous forme condensée [29] :

$$^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\sigma^{\mu\nu}\,\Psi(p)\,\big] = -\,\overline{\Psi}(\underline{p})\,\sigma_{\mu\nu}\,\Phi(\underline{p})$$

$\boxed{\text{c}}$ **Réflexion totale**. Le lecteur vérifiera les formules suivantes :

① $^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)\,\big] = \eta_P^\phi\,\eta_P^\psi\,\overline{\Psi}(p)\,\Phi(p) = \overline{\Psi}(p)\,\Phi(p)$;

② $^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = -\eta_P^\phi\,\eta_P^\psi\;\overline{\Psi}(p)\,\gamma_5\,\Phi(p) = -\overline{\Psi}(p)\,\gamma_5\,\Phi(p)$;

③ $^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma^\mu\,\Psi(p)\,\big] = \eta_P^\phi\,\eta_P^\psi\;\overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\Phi(p) = \overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\Phi(p)$;

④ $^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = -\eta_P^\phi\,\eta_P^\psi\;\overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Phi(p) = -\overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Phi(p)$;

⑤ $^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\sigma^{\mu\nu}\,\Psi(p)\,\big] = -\eta_P^\phi\,\eta_P^\psi\;\overline{\Psi}(p)\,\sigma_{\mu\nu}\,\Phi(p) = -\overline{\Psi}(p)\,\sigma_{\mu\nu}\,\Phi(p)$;

On peut résumer synthétiquement les formules des transformations ci-dessus de la façon suivante. Pour les 16 matrices de la base (7.40), introduisons une métrique diagonale $G_{\alpha\beta}$ dont les éléments $G_{\alpha\alpha}$ pour α courant de 1 à 16 ont pour valeurs respectives :

$+1$ pour les 7 matrices 1, γ_5, γ_0, $\gamma_0\,\gamma_5$, σ_{12}, σ_{23} et σ_{31},

-1 pour les 9 matrices γ_k, $\gamma_k\,\gamma_5$ et σ_{0k} pour $k=1,2,3$.

Notons $\mathcal{M}^\alpha$ l'une de ces 16 matrices en convenant que l'indice α "en haut" représente un indice contravariant, et l'indice α "en bas" de $\mathcal{M}_\alpha = G_{\alpha\beta}\,\mathcal{M}^\alpha = G_{\alpha\alpha}\,\mathcal{M}^\alpha$ représentant un indice covariant. Nous écrirons alors (omettant ici un éventuel facteur $\eta_P^\phi\,\eta_P^\psi$)

$$^{P}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\mathcal{M}^\alpha\,\Psi(p)\,\big] = \epsilon_P\;\big[\overline{\Phi}(\underline{p})\,\mathcal{M}_\alpha\,\Psi(\underline{p})\big]$$

$$^{T}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\mathcal{M}^\alpha\,\Psi(p)\,\big] = \epsilon_T\;\big[\overline{\Psi}(\underline{p})\,\mathcal{M}_\alpha\,\Phi(\underline{p})\big]\,,\quad {}^{PT}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\mathcal{M}^\alpha\,\Psi(p)\,\big] = \epsilon_{PT}\;\big[\overline{\Psi}(p)\,\mathcal{M}_\alpha\,\Phi(p)\big] \tag{7.166}$$

où les facteurs $\epsilon_{[P,T,PT]}$ sont donnés dans le tableau suivant :

	S	P	V	A	T
ϵ_P	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
ϵ_T	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
ϵ_{PT}	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

(7.167)

$\boxed{\text{d}}$ **Conjugaison de charge**. Le lecteur vérifiera ici aussi les formules suivantes.

① $^{C}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)\,\big] = -\,\overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)$

② $^{C}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = -\overline{\Psi}(p)\,\gamma_5\,\Phi(p)$;

③ $^{C}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_\mu\,\Psi(p)\,\big] = \;\overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\Phi(p)$;

④ $^{C}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Psi(p)\,\big] = -\overline{\Psi}(p)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Phi(p)$;

⑤ $^{C}\big[\,\overline{\Phi}(p)\,\sigma_{\mu\nu}\,\Psi(p)\,\big] = \overline{\Psi}(p)\,\sigma_{\mu\nu}\,\Phi(p)$.

29. Noter que $\Omega_c^{-1}\,{}^t\sigma_{\mu\nu}\,\Omega_c = -\sigma_{\mu\nu}$

7.6 Le cas de la masse nulle

Nous admettrons qu'une particule dont la masse est nulle et dont la valeur absolue de l'hélicité est 1/2 ne doit être associée qu'à une et une seule des deux représentations $[0,+1/2]$ ou $[0,-1/2]$. D'après ce qui a été vu au chapitre 6, à chacune de ces deux représentations ne correspond qu'un seul type d'amplitude spinorielle :

- pour $[0,-1/2]$, il s'agit des amplitudes $\phi^-_\sigma(\ell)$ (Eq. 6.103), vérifiant $\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma\sigma'}(\underset{\sim}{\ell}\,)\;\phi^-_{\sigma'}(\ell) \;=\; 0,$
- et pour $[0,1/2]$, des amplitudes $\psi^+_\sigma(\ell)$ (Eq. 6.106), vérifiant $\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma\sigma'}(\widetilde{\ell}\,)\;\psi^+_{\sigma'}(\ell) \;=\; 0.$

Pour ces particules, il est cependant possible d'utiliser aussi un formalisme spinoriel à quatre dimensions pour décrire leurs fonctions d'onde. En effet, en représentation initiale, définissons les spineurs suivants :

$$\Psi^\uparrow(\ell) = \begin{pmatrix} \psi^+(\ell) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad [0,+1/2], \quad \Psi^\downarrow(\ell) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^-(\ell) \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad [0,-1/2] \tag{7.168}$$

où le zéro qui y figure représente le spineur nul à deux composantes. Ces deux spineurs vérifient l'équation de Dirac "pour masse nulle"

$$\Gamma(\ell)\,\Psi(\ell) = 0 \tag{7.169}$$

où $\Gamma(\ell)$ a la forme donnée par (7.8), avec $\ell^2 = 0$, laquelle équation peut être considérée comme la limite de l'équation de Dirac (7.3) avec masse lorsque cette dernière tend vers zéro. De plus, compte tenu des équations (6.104) et (6.107), ils se transforment aussi sous $\bar{\mathcal{P}}^\uparrow_+$ comme indiqué par (7.5). De ce fait, les représentants des générateurs de $SL(2,C)$ sont les mêmes que ceux correspondant à une masse non nulle, c'est-à-dire, dans la représentation standard, les matrices $\sigma_{\mu\nu}$.

Une caractéristique propre aux spineurs (7.168) est qu'ils sont vecteurs propres de Γ_5 :

$$(1-\Gamma_5)\;\Psi^\uparrow = 0, \quad (1+\Gamma_5)\;\Psi^\downarrow = 0 \tag{7.170}$$

On dit aussi qu'ils ont une *chiralité* bien définie : chiralité égale à $+1$, ou *chiralité droite* pour le spineur d'hélicité $+1/2$, chiralité égale à -1, ou *chiralité gauche* pour le spineur d'hélicité $-1/2$. Le signe de la chiralité correspond donc à celui de l'hélicité [30].

On remarquera aussi que puisque

$$\overline{\Psi}^\uparrow\,\Psi^\uparrow = 0, \quad \overline{\Psi}^\downarrow\,\Psi^\downarrow = 0$$

les spineurs (7.168) ne peuvent plus être normalisés à l'aide de ce produit scalaire. Il faudra donc les normaliser en utilisant le produit scalaire usuel [31]

$$\left[\Psi^\uparrow\right]^\dagger\;\Psi^\uparrow = [\psi^+]^\dagger\,\psi^+, \quad \left[\Psi^\downarrow\right]^\dagger\;\Psi^\downarrow = [\phi^-]^\dagger\,\phi^-$$

En procédant comme dans le cas $m \neq 0$, les amplitudes spinorielles associées respectivement à l'état $|[\,\ell\,],+1/2>$ de $[0,+1/2]$ et à l'état $|[\,\ell\,],-1/2>$ de $[0,-1/2]$ seront définies comme

30. Les notations anglaises L (pour *left* ou *left-handed*) ou R (pour *right* ou *right-handed*) sont souvent utilisées pour désigner les chiralités gauche et droite, respectivement.

31. A noter que celui-ci est le même pour toutes les représentations des matrices de Dirac liées entre elles par des matrices unitaires, ce qui est le cas entre la représentation initiale et la représentation standard.

$$\psi^+_\sigma([\,\ell\,]) = \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,1/2}([\,\ell\,]) \equiv [\,\ell\,]_{\sigma,\,1/2}, \quad \phi^-_\sigma([\,\ell\,]) = \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,-1/2}([\,\ell\,]^{\dagger-1}) \equiv [\,\ell\,]^{\dagger-1}_{\sigma,\,-1/2} \tag{7.171}$$

On aura alors

$$[\psi^+]^\dagger\,\psi^+ = \sum_\sigma \mathcal{D}^{1/2}_{1/2,\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger)\,\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,1/2}([\,\ell\,]) = \mathcal{D}^{1/2}_{1/2,\,1/2}([\,\ell\,]^\dagger\,[\,\ell\,])$$

On peut calculer cet élément de matrice de la façon suivante. D'après (4.66), la matrice $K_+ = (\tau_0 + \tau_3)\,/2$ est telle que

$$\mathcal{D}^j_{mm'}(K_+) = \delta_{m,j}\,\delta_{m',j}$$

On a ainsi

$$\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,1/2}([\,\ell\,])\,\mathcal{D}^{1/2}_{1/2,\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger) = \sum_{m,m'} \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,m}([\,\ell\,])\,\mathcal{D}^j_{mm'}(K_+)\,\mathcal{D}^{1/2}_{m',\,\sigma}([\,\ell\,]^\dagger) = \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,\sigma}([\,\ell\,]\,K_+\,[\,\ell\,]^\dagger)$$

Or (voir §5.4.3), $[\,\ell\,]\,K_+\,[\,\ell\,]^\dagger = \underset{\sim}{\ell}/(2\kappa)$ avec $\kappa = t\cdot\ell$. On en déduit

$$[\psi^+]^\dagger\,\psi^+ = \sum_\sigma \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,\sigma}(\underset{\sim}{\ell}/(2\kappa)) = \frac{1}{2\kappa}\,\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\ell} = \ell_0/\kappa = 1$$

Utilisant la matrice $K_- = (\tau_0 - \tau_3)/2$ pour laquelle

$$\mathcal{D}^j_{mm'}(K_-) = \delta_{m,-j}\,\delta_{m',-j}$$

on a de même

$$\begin{aligned}[\phi^-]^\dagger\,\phi^- &= \sum_\sigma \mathcal{D}^{1/2}_{-1/2,\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1})\,\mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,-1/2}([\,\ell\,]^{\dagger-1}) = \mathcal{D}^{1/2}_{-1/2,\,-1/2}([\,\ell\,]^{-1}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}) \\ &= \sum_\sigma \sum_{m,m'} \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma,\,m}([\,\ell\,]^{\dagger-1})\,\mathcal{D}^j_{mm'}(K_-)\,\mathcal{D}^{1/2}_{m',\,\sigma}([\,\ell\,]^{-1}) = \mathrm{Tr}\,[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,K_-\,[\,\ell\,]^{-1}\end{aligned}$$

et comme $[\,\ell\,]^{\dagger-1}\,K_-\,[\,\ell\,]^{-1} = \widetilde{\ell}/(2\kappa)$, il vient [32]

$$[\phi^-]^\dagger\,\phi^- = \frac{1}{2\kappa}\,\mathrm{Tr}\,\widetilde{\ell} = \ell_0/\kappa$$

Comme cela sera justifié plus loin, pour se conformer à la structure des spineurs (7.138) lorsque $m \to 0$, les spineurs pour masse nulle seront normalisés selon :

$$\Psi^\dagger_\lambda\,\Psi_\lambda = 2\,E \quad \text{avec} \quad E = \ell_0 \tag{7.172}$$

Dans la représentation initiale, les spineurs associés aux états $|[\,\ell\,], \pm 1/2 >$ seront donc respectivement donnés par

$$\Psi^\uparrow([\,\ell\,]) = \sqrt{2\kappa}\begin{pmatrix} \{[\,\ell\,]\}_{\cdot,\,1/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi^\downarrow([\,\ell\,]) = \sqrt{2\kappa}\begin{pmatrix} 0 \\ \{[\,\ell\,]^{\dagger-1}\}_{\cdot,\,-1/2} \end{pmatrix} \tag{7.173}$$

32. Montrer que, d'une façon générale, pour toute matrice A (2×2), on a :
$\mathcal{D}^j_{jj}(A^\dagger\,A) = \left(\mathrm{Tr}\,A\,K_+\,A^\dagger\right)^{2j}$, $\mathcal{D}^j_{-j,\,-j}(A^\dagger\,A) = \left(\mathrm{Tr}\,A\,K_-\,A^\dagger\right)^{2j}$,
$\mathcal{D}^j_{-j,\,j}(A^\dagger\,A) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}A\,[\tau_x + i\tau_y]\,A^\dagger\right)^{2j}$, $\mathcal{D}^j_{j,\,-j}(A^\dagger\,A) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}A\,[\tau_x - i\tau_y]\,A^\dagger\right)^{2j}$.

Dans la représentation standard, ce seront

$$\boxed{U^{\uparrow}([\,\ell\,]) = \sqrt{\kappa}\,\begin{pmatrix} \{[\,\ell\,]\}_{\cdot,\,1/2} \\ \{[\,\ell\,]\}_{\cdot,\,1/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^{\downarrow}([\,\ell\,]) = \sqrt{\kappa}\,\begin{pmatrix} \left\{[\,\ell\,]^{\dagger -1}\right\}_{\cdot,\,-1/2} \\ -\left\{[\,\ell\,]^{\dagger -1}\right\}_{\cdot,\,-1/2} \end{pmatrix}} \tag{7.174}$$

Dans cette même représentation, l'opérateur d'hélicité a pour expression

$$J(\ell) = \frac{1}{2} t^{\mu}\,\ell^{\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\sigma^{\rho\sigma}/\kappa = 2i\,t^{\mu}\,z^{\nu}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5 = \frac{1}{2}\,\gamma(z)\,\gamma(t)\,\gamma_5 \tag{7.175}$$

(t, x, y, z) étant une base d'espace-temps telle que $\ell = \kappa(t + z)$. Pour cette base, faisons un choix analogue à celui présenté au paragraphe 7.4.2 dans le cas d'une masse non nulle. Faisons en sorte que, dans le référentiel d'arrivée, $\overrightarrow{t}$ et $\overrightarrow{z}$ soient parallèles à $\overrightarrow{\ell}$. Dans ce référentiel, définissons les grandeurs suivantes : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\ell}\,/\ell_0$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{\ell}$; $t_0 = \cosh\chi$ avec $\chi \geq 0$; $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u}\,\sinh\chi$; $z_0 = \sinh\chi$; $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u}\,\cosh\chi$. Puisque $\ell = \kappa(t+z)$, on a donc $\ell_0 = e^{\chi}\,\kappa$. La tétrade $[\,\ell\,]$ comportera ainsi : la rotation (7.132) amenant l'axe des z sur $\overrightarrow{u}\,(\theta, \varphi)$, suivie du boost (voir (7.117) en remplaçant p par t et en prenant $m = 1$)

$$\mathcal{H} = \frac{1 + \underset{\sim}{t}}{\sqrt{2(t_0 + 1)}} \;\equiv\; \cosh\frac{\chi}{2} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\,\sinh\frac{\chi}{2} \tag{7.176}$$

Explicitement, on obtient

$$[\,\ell\,] = \begin{pmatrix} e^{\chi/2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} & -e^{-\chi/2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ e^{\chi/2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} & e^{-\chi/2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$[\,\ell\,]^{\dagger -1} = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} & -e^{\chi/2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ e^{-\chi/2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} & e^{\chi/2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{7.177}$$

d'où l'on déduit les spineurs suivants, en posant $E = \ell_0$,

$$\boxed{U^{\uparrow} = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad U^{\downarrow} = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ -\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \tag{7.178}$$

spineurs qui sont simplement les limites des spineurs (7.138) pour $m \to 0$. Ils sont vecteurs propres (avec les valeurs propres respectives $+1/2$ et $-1/2$) de l'opérateur d'hélicité (7.175), lequel, avec cette tétrade, prend la forme "composante du spin selon la direction de la tri-impulsion", telle que (7.136) :

$$J(\ell) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau} \tag{7.179}$$

mais dont les valeurs propres sont ici des invariants relativistes. On notera ici que, quelle que soit la tétrade choisie mais telle que $\ell = \kappa(t+z)$, l'opérateur d'hélicité peut être exprimé comme

$$J(\ell) = \frac{1}{2}\,\gamma_5 + \frac{1}{2\kappa}\,\gamma_5\,\gamma(z)\,\gamma(\ell) \tag{7.180}$$

Agissant sur les spineurs physiques, il devient équivalent à $1/2$ fois l'opérateur de chiralité γ_5, puisqu'alors $\gamma(\ell)$ est équivalent à zéro.

Calculons ensuite les projecteurs sur les spineurs $\uparrow$ et $\downarrow$. Quelle que soit la tétrade choisie, on a

$$\Psi^{\uparrow}\,\overline{\Psi}^{\uparrow} = 2\kappa \begin{pmatrix} 0 & [\,\ell\,]_{\cdot\,,1/2}\,[\,\ell\,]^{\dagger}_{1/2,\,\cdot'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, d'une part,

$$[\,\ell\,]_{\sigma\,,1/2}\,[\,\ell\,]^{\dagger}_{1/2,\,\sigma'} = \sum_{m,m'} [\,\ell\,]_{\sigma\,,m}\,[K_+]_{mm'}\,[\,\ell\,]^{\dagger}_{m',\,\sigma'} = \big[\,[\,\ell\,]\,K_+\,[\,\ell\,]^{\dagger}\,\big]_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2\kappa}\,\underset{\sim}{\ell}$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{2}\,[1+\Gamma_5]\;\Gamma(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{\ell} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\boxed{\Psi^{\uparrow}\,\overline{\Psi}^{\uparrow} = \frac{1}{2}\,[1+\Gamma_5]\;\Gamma(\ell) \quad \text{puis} \quad U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} = \frac{1}{2}\,[\,1+\gamma_5\,]\;\gamma(\ell)} \tag{7.181}$$

On trouve de même :

$$\boxed{U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow} = \frac{1}{2}\,[\,1-\gamma_5\,]\;\gamma(\ell)} \tag{7.182}$$

En Physique des Particules, les représentations de spin 1/2 et de masse nulle étaient jusqu'à présent associées aux *neutrinos*. Elles peuvent encore l'être, au moins pour certains neutrinos, tant qu'il n'a pas été prouvé expérimentalement que ceux-ci possèdent bien une masse non nulle. Il s'avérait que si l'on attribuait la représentation $[\,0,\lambda\,]$ à un neutrino ν ($\lambda = \pm 1/2$), la représentation $[\,0,-\lambda\,]$ devait être attribuée à son antiparticule, l'anti-neutrino $\overline{\nu}$.

Un problème se posait alors sur le plan théorique. En effet, l'opération de conjugaison de charge, telle qu'elle a été définie plus haut dans le cas d'une masse non nulle, devient inapplicable dans le cas des masses nulles. En effet, comme elle ne change pas le signe de l'hélicité, elle ne peut permettre d'effectuer ici le lien entre les états du neutrino et ceux de son antiparticule dont l'hélicité est opposée. Ce problème a trouvé sa solution lorsqu'il a été montré que le neutrino doit être défini comme un *état propre* de l'opération produit $C\Pi$ (*conjugaison de charge* $\times$ *parité*) [33].

33. L. Landau, Nucl. Phys., 3, 127 (1957) ; T.D. Lee, Phys. Rev. 105, 1671 (1957) ; A. Salam, Nuovo Cimento, 5, 299 (1957).

7.7 La transformation de Fierz

En Physique des Particules, certains processus relevant des interactions dites "faibles" font intervenir quatre particules de spin 1/2 ou d'hélicité 1/2. Citons quelques exemples :

• la désintégration du neutron n en 1 proton p, 1 électron e^- et 1 anti-neutrino électronique $\overline{\nu}_e$:

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$$

• la désintégration du muon négatif μ^- en 1 électron, 1 anti-neutrino $\overline{\nu}_e$ et un neutrino muonique ν_μ, ou celle du tau négatif τ^- en 1 muon μ^-, 1 anti-neutrino muonique $\overline{\nu}_\mu$ et un neutrino tau ν_τ :

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \,, \qquad \tau^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$$

• la diffusion élastique $e^- + \nu_\mu \to e^- + \nu_\mu$.

Les premières tentatives de description théorique de tels processus [34] modèlisaient leurs amplitudes de transition [35] comme des produits "courant-courant" du type

$$(\overline{a}\, B_k\, b)\ (\overline{c}\, B_k\, d) \tag{7.183}$$

où a, b, c et d sont les spineurs respectifs des quatre particules impliquées et où B_k est a priori l'une des 16 matrices de la base (7.40). Il existe donc cinq amplitudes possibles :

• une amplitude "scalaire-scalaire"

$$S = (\overline{a}\, b)\ (\overline{c}\, d) \tag{7.184}$$

• une amplitude "pseudoscalaire-pseudoscalaire"

$$P = (\overline{a}\, \gamma_5\, b)\ (\overline{c}\, \gamma_5\, d) \tag{7.185}$$

• une amplitude "vecteur-vecteur"

$$V = (\overline{a}\, \gamma^\mu\, b)\ (\overline{c}\, \gamma_\mu\, d) \tag{7.186}$$

• une amplitude "pseudovecteur-pseudovecteur" (attention au signe)

$$A = -\,(\overline{a}\, \gamma^\mu\, \gamma_5\, b)\ (\overline{c}\, \gamma_\mu\, \gamma_5\, d) \tag{7.187}$$

• une amplitude "tenseur-tenseur" (attention au facteur 2)

$$T = 2\,(\overline{a}\, \sigma^{\mu\nu}\, b)\ (\overline{c}\, \sigma_{\mu\nu}\, d) \tag{7.188}$$

avec, pour ce qui concerne les interactions faibles, une préférence pour des amplitudes de type V et de type A. Cependant, une autre forme générique d'amplitude est possible, correspondant à l'échange de b et d (ou, de façon équivalente, de a et c) dans (7.183), conduisant à des amplitudes analogues aux précédentes et que nous noterons S', P', V', A' et T' ($S' = (\overline{a}\, d)\ (\overline{c}\, b)$, etc). Se pose alors la question de l'équivalence entre ces deux formes génériques et de la possibilité d'exprimer les unes, S',

34. E. Fermi, Zeits. f. Physik A, vol. 88 (1934), p. 161-177 ; E. C. G. Sudarshan, R. E. Marshak, "The Nature of the Four Fermion Interaction", Proceedings of the Padua-Venice Conference on Mesons and Recently Discovered Particles, 1957 ; R. P. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev., vol. 109 (1958) p. 193-198.

35. Dans le cas de la désintégration d'une particule, le carré de l'amplitude de transition permet de calculer la durée de vie moyenne de celle-ci.

P', V', A' et T', en fonction des autres, S, P, V, A et T. C'est dans ce contexte qu'intervient la *transformation de Fierz*[36] décrite ci-après.

En fait, cette transformation s'obtient simplement en appliquant au projecteur $d\,\bar{c}$ les formules de développement (7.41), (7.42). Ecrivons en effet

$$d\,\bar{c} = \frac{1}{4}\left\{\,(\bar{c}\,d)\; + (\bar{c}\,\gamma_5\,d)\,\gamma_5 + (\bar{c}\,\gamma^\mu\,d)\,\gamma_\mu - (\bar{c}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d)\,\gamma_\mu\,\gamma_5 + 2(\bar{c}\,\sigma^{\mu\nu}\,d)\,\sigma_{\mu\nu}\right\} \tag{7.189}$$

A partir de ce développement et compte tenu de formules établies plus haut, on obtient sans difficulté :

$$\begin{aligned}
\gamma_5\,d\,\bar{c}\,\gamma_5 &= \frac{1}{4}\left\{\,(\bar{c}\,d)\; + (\bar{c}\,\gamma_5\,d)\,\gamma_5 - (\bar{c}\,\gamma^\mu\,d)\,\gamma_\mu - (\bar{c}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d)\,\gamma_\mu\,\gamma_5 + 2(\bar{c}\,\sigma^{\mu\nu}\,d)\,\sigma_{\mu\nu}\right\}\\
\gamma^\mu\,d\,\bar{c}\,\gamma_\mu &= \frac{1}{4}\left\{\,4(\bar{c}\,d)\; - 4(\bar{c}\,\gamma_5\,d)\,\gamma_5 - 2(\bar{c}\,\gamma^\mu\,d)\,\gamma_\mu + 2(\bar{c}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\right\}\\
\gamma_5\,\gamma^\mu\,d\,\bar{c}\,\gamma_\mu\,\gamma_5 &= \frac{1}{4}\left\{\,4(\bar{c}\,d)\; - 4(\bar{c}\,\gamma_5\,d)\,\gamma_5 + 2(\bar{c}\,\gamma^\mu\,d)\,\gamma_\mu - 2(\bar{c}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\right\}\\
2\sigma^{\mu\nu}\,d\,\bar{c}\,\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left\{\,6(\bar{c}\,d)\; + 6(\bar{c}\,\gamma_5\,d)\,\gamma_5 - 2(\bar{c}\,\sigma^{\mu\nu}\,\gamma_5\,d)\,\sigma_{\mu\nu}\right\}
\end{aligned} \tag{7.190}$$

Puis, en calculant les éléments de matrice $\overline{a}\,M\,b$ où M est l'une des matrices dans (7.189) ou dans (7.190), on déduit les relations

$$\begin{aligned}
S' &= \frac{1}{4}\{S+P+V+A+T\} &&= (\overline{a}\,d)\;(\bar{c}\,b)\\
P' &= \frac{1}{4}\{S+P-V-A+T\} &&= (\overline{a}\,\gamma_5\,d)\;(\bar{c}\,\gamma_5\,b)\\
V' &= \frac{1}{4}\{4S-4P-2V+2A\} &&= (\overline{a}\,\gamma^\mu\,d)\;(\bar{c}\,\gamma_\mu\,b)\\
A' &= \frac{1}{4}\{4S-4P+2V-2A\} &&= -\,(\overline{a}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d)\;(\bar{c}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,b)\\
T' &= \frac{1}{4}\{6S+6P-2T\} &&= 2\,(\overline{a}\,\sigma^{\mu\nu}\,d)\;(\bar{c}\,\sigma_{\mu\nu}\,b)
\end{aligned} \tag{7.191}$$

qui constituent la transformation de Fierz. On peut les récrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} S'\\ P'\\ V'\\ A'\\ T' \end{pmatrix} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} S\\ P\\ V\\ A\\ T \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 4 & -4 & -2 & 2 & 0\\ 4 & -4 & 2 & -2 & 0\\ 6 & 6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{7.192}$$

On constate ainsi que des amplitudes décrivant des interactions "vecteur-vecteur" ou "pseudovecteur-pseudovecteur" pour une forme générique donnée, peuvent a priori conduire, après échange de b et d, à des amplitudes décrivant des interactions "scalaire-scalaire", "pseudoscalaire-pseudoscalaire" et "tenseur-tenseur". Toutefois, on remarque que la combinaison $V-A$ garde la même forme après ledit échange, puisque $V'-A' = -\,[V-A]$. On est alors conduit à rechercher si d'autres combinaisons sont globalement invariantes sous la transformation de Fierz, ce qui revient à rechercher des vecteurs propres de la matrice $\mathcal{F}$. Il est facile de montrer que $\mathcal{F}$ possède deux valeurs propres : une valeur propre double égale à $+1$ et une valeur propre triple égale à -1, que cette matrice est diagonalisable avec les vecteurs propres suivants

• deux vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+\,1$

36. M. Fierz, Zeits. f. Physik 104 (1937) p. 553 ; voir aussi : J. F. Nieves, P. B. Pal, Am. J. Phys., 72 (2004) 1100-1108.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• trois vecteurs propres correspondant à la valeur propre -1

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que l'on passe de la base standard à 5 dimensions à la base formée de ces cinq vecteurs via la matrice

$$P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \begin{array}{l} e_1 = [2v_1 + 3v_2 + v_4 + 2v_5]/8 \\ e_2 = [-2v_1 + 3v_2 + v_4 - 2v_5]/8 \\ e_3 = [v_1 + 4v_3 - v_5]/8 \\ e_4 = [v_1 - 4v_3 - v_5]/8 \\ e_5 = [v_2 - v_4]/8 \end{array}$$

On obtient ainsi

$$\begin{gathered} X = S\,e_1 + P\,e_2 + V\,e_3 + A\,e_4 + T\,e_5 \equiv \\ \frac{1}{8}\,y_1\,\left[\,2(S-P) + V + A\,\right] + \frac{1}{8}\,y_2\,\left[\,3(S+P) + T\,\right] + \\ \frac{1}{2}\,y_3\,\left[\,V - A\,\right] + \frac{1}{8}\,\left[\,S + P + T\,\right] + \frac{1}{8}\,\left[\,2(S-P) - (V+A)\,\right] \end{gathered}$$

On en conclut que les expressions

$$2(S-P) + V + A \quad \text{et} \quad 3(S+P) + T$$

ou toute combinaison linéaire de celles-ci sont *invariantes* par la transformation de Fierz, tandis que les expressions

$$V - A, \quad S + P + T, \quad 2(S-P) - (V+A)$$

ou toute combinaison linéaire de celles-ci *changent simplement de signe* par cette transformation, comme on peut d'ailleurs le vérifier directement. On peut donc dire que la transformation de Fierz laisse cinq formes d'amplitudes *globalement invariantes*, deux strictement, trois avec un changement de signe.

Les "courants" qui présentent le plus d'intérêt dans la théorie des interactions faibles sont plutôt de la forme $J_\mu = \overline{a}\,\gamma_\mu\,[1 + \epsilon\,\gamma_5]\,b$ avec $\epsilon = \pm 1$, qui présente une composante vectorielle et une autre pseudovectorielle et qui conduit aux amplitudes de transition

$$\overline{a}\,\gamma_\mu\,[1 + \epsilon\,\gamma_5]\,b\;\overline{c}\,\gamma^\mu\,[1 + \epsilon\,\gamma_5]\,d \tag{7.193}$$

En posant $b' = [1 + \epsilon\,\gamma_5]\,b,\; d' = [1 + \epsilon\,\gamma_5]\,d$, celles-ci se récrivent en fait comme des amplitudes de type V avec b' et d' au lieu de b et d. Comme $\gamma_5\,b' = \epsilon\,b'$ et $\gamma_5\,d' = \epsilon\,d'$ et que $\epsilon^2 = 1$, les amplitudes de type A correspondantes se trouvent être les opposées des amplitudes V, et l'on a donc ici $V - A = 2V$. On en déduit que l'échange de b et d dans l'amplitude (7.193) change simplement le signe de celle-ci [37] :

$$\boxed{\overline{a}\,\gamma_\mu\,[1+\epsilon\,\gamma_5]\;d\;\overline{c}\,\gamma^\mu\,[1+\epsilon\,\gamma_5]\;b = -\,\overline{a}\,\gamma_\mu\,[1+\epsilon\,\gamma_5]\;b\;\overline{c}\,\gamma^\mu\,[1+\epsilon\,\gamma_5]\;d} \tag{7.194}$$

7.8 Expressions matricielles de certains produits tensoriels de spineurs [38]

Au paragraphe 7.4.1, des projecteurs de spineurs ont été réexprimés au moyen de produit de matrices de Dirac. Dans cette section, nous montrons comment on peut exprimer de façon similaire certains produits tensoriels de spineurs. Pour ce faire, nous ferons appel aux formules suivantes. Les premières sont tirées de celles du paragraphe 7.4.3 :

$$U^\uparrow = \mathcal{C}\;{}^t\overline{V}^\downarrow = {}^t\Big(\overline{V}^\downarrow\,{}^t\mathcal{C}\Big) = -\,{}^t\Big(\overline{V}^\downarrow\mathcal{C}\Big), \quad U^\downarrow = {}^t\Big(\overline{V}^\uparrow\mathcal{C}\Big)$$

$$V^\uparrow = {}^t\Big(\overline{U}^\downarrow\mathcal{C}\Big), \quad V^\downarrow = -\,{}^t\Big(\overline{U}^\uparrow\mathcal{C}\Big) \tag{7.195}$$

$$W^\uparrow = V^\downarrow, \quad W^\downarrow = -V^\uparrow$$

D'après (7.52), (7.53) et (7.88), la matrice

$$-\gamma_5\,\mathcal{C} = -\mathcal{C}\,\gamma_5 = \Omega_c \tag{7.196}$$

a pour vertu de transformer les matrices γ en leurs transposées :

$$\Omega_c\,\gamma_\mu\,\Omega_c^{-1} = {}^t\gamma_\mu, \quad \Omega\,\gamma_5\,\Omega_c^{-1} = {}^t\gamma_5 = \gamma_5 \tag{7.197}$$

et est telle que

$$\Omega_c^{-1} = -\Omega_c, \quad {}^t\Omega_c = -\Omega_c, \quad \Omega_c^\star = \Omega_c, \quad \Omega_c\,\gamma_0 = \gamma_0\,\Omega_c \tag{7.198}$$

Des formules précédentes on déduit alors ces autres formules

$$U^\uparrow = -\,{}^t\Big(\overline{U}^\downarrow\Omega_c\Big), \quad U^\downarrow = {}^t\Big(\overline{U}^\uparrow\Omega_c\Big), \quad V^\uparrow = {}^t\Big(\overline{V}^\downarrow\Omega_c\Big), \quad V^\downarrow = -\,{}^t\Big(\overline{V}^\uparrow\Omega_c\Big) \tag{7.199}$$

$$\text{soit encore } U_\alpha^\uparrow = -\Big(\overline{U}^\downarrow\Omega_c\Big)_\alpha, \; U_\alpha^\downarrow = \Big(\overline{U}^\uparrow\Omega_c\Big)_\alpha, \; V_\alpha^\uparrow = \Big(\overline{V}^\downarrow\Omega_c\Big)_\alpha, \; V_\alpha^\downarrow = -\Big(\overline{V}^\uparrow\Omega_c\Big)_\alpha$$

37. L'échange de b' et d' étant équivalent à celui de b et d.

38. C. H. Llewellyn Smith, Ann. Phys. (N.Y.) 53 (1969) 327 ; V.L. Chernyak, A.R. Zhitnitsky, Phys. Rep. 112 (1984), 173-318 ; C. Carimalo, "On the spinor structure of the Proton wave function", J.Math.Phys. 34, (1993), 4930-4963 ; LPC-92-24 App. B. ; G. Eichmann, Dissertation, Université de Graz (2009), arXiv :0909.0703 [hep-ph].

7.8.1 Produits tensoriels à 2 spineurs

Considérons tout d'abord les trois matrices

$$\Psi^{(+)} = U^{\uparrow}\,\overline{W}^{\uparrow} = U^{\uparrow}\,\overline{V}^{\downarrow} = -U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\downarrow}\,\gamma_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\;\gamma(e^{(+)})$$

$$\Psi^{(-)} = U^{\downarrow}\,\overline{W}^{\downarrow} = -U^{\downarrow}\,\overline{V}^{\uparrow} = U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\uparrow}\,\gamma_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\;\gamma(e^{(-)})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^{\uparrow}\,\overline{W}^{\downarrow} + U^{\downarrow}\,\overline{W}^{\uparrow}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^{\uparrow}\,\overline{V}^{\uparrow} - U^{\downarrow}\,\overline{V}^{\downarrow}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} - U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow}\right]\gamma_5$$

$$= \Psi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\;\gamma(z) \tag{7.200}$$

où $e^{(\pm)} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy)$. Il est facile de montrer qu'elles forment une représentation de $\bar{\mathcal{L}}_{+}^{\uparrow}$ de spin 1. En effet, par transformation de Lorentz, chacune d'elle devient

$$\mathcal{L}(A)[\Psi(p)] = L(A)\,\Psi(A^{-1}p)\,L(A)^{-1} \tag{7.201}$$

ce qui implique notamment que l'action sur ces matrices du représentant de la composante de spin suivant z est donnée par [39]

$$\mathcal{S}_z[\Psi(p)] = [\,S_z\,,\Psi(p)\,] \tag{7.202}$$

Comme $S_z\,U_\sigma = \sigma\,U_\sigma$ et que

$$\overline{W}^{\uparrow}\,S_z = -\frac{1}{2}\,\overline{W}^{\uparrow}, \quad \overline{W}^{\downarrow}\,S_z = +\frac{1}{2}\,\overline{W}^{\downarrow} \tag{7.203}$$

on trouve aisément que

$$\mathcal{S}_z[\Psi^{(+)}(p)] = +\Psi^{(+)}(p), \quad \mathcal{S}_z[\Psi^{(0)}(p)] = 0, \quad \mathcal{S}_z[\Psi^{(-)}(p)] = -\Psi^{(-)}(p) \tag{7.204}$$

Les trois matrices en question peuvent ainsi servir de base pour décrire un système particule-antiparticule de spin 1. Quant à la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^{\uparrow}\,\overline{W}^{\downarrow} - U^{\downarrow}\,\overline{W}^{\uparrow}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\,\gamma_5 \tag{7.205}$$

qui commute avec tous les opérateurs de spin $S_k(p)$, elle peut représenter un système particule-antiparticule de spin 0.

De (7.116) et (7.199), on tire les formules suivantes [40].

$$(1\times\Omega_c)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m}\left[\left(U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow} - V^{\uparrow}\,\overline{V}^{\uparrow} - V^{\downarrow}\,\overline{V}^{\downarrow}\right)\Omega_c\right]_{\alpha\beta} \quad \text{soit}$$

$$[\,\Omega_c\,]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m}\,\left[U^{\uparrow}\,U^{\downarrow} - U^{\downarrow}\,U^{\uparrow} + V^{\uparrow}\,V^{\downarrow} - V^{\downarrow}\,V^{\uparrow}\,\right]_{\alpha\beta} \tag{7.206}$$

39. Notons ici que la définition des composantes de spin via l'opérateur de Pauli-Lubanski a pour vertu d'exclure de cette définition toute partie "orbitale" d'un moment cinétique, conférant ainsi au spin une valeur "intrinsèque". Ainsi, si l'on cherche à passer de (7.201) à (7.202) en considérant une transformation de Lorentz infinitésimale, on ne doit pas tenir compte du terme impliquant les dérivées partielles de Ψ par rapport aux composantes de p, terme dont l'apparition est usuellement attribuée à un moment cinétique "orbital".

40. Pour la clarté des formules, nous ommettons le symbole $\otimes$ des produits tensoriels.

Puis, successivement,

$$\begin{aligned}
[\,\gamma(p)\,\Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right]_{\alpha\beta} \\
[\,\gamma_5\,\Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[V^\uparrow U^\downarrow - V^\downarrow U^\uparrow + U^\uparrow V^\downarrow - U^\downarrow V^\uparrow\right]_{\alpha\beta} \\
[\,\gamma_5\,\gamma(p)\,\Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[V^\uparrow U^\downarrow - V^\downarrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow\right]_{\alpha\beta} \\
[(\,m+\gamma(p)\,)\,\Omega_c]_{\alpha\beta} &= \left[\,U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow\,\right]_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.207}$$

A partir des formules

$$\overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\gamma_\mu\,U^{\uparrow,\downarrow} = 2\,p_\mu,\quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\gamma_\mu\,U^{\downarrow,\uparrow} = 0,\quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,V^{\uparrow,\downarrow} = \pm 2\,m\,z_\mu,\quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\,\gamma_\mu\,V^{\downarrow,\uparrow} = \mp\,m\,\sqrt{2}\,e_\mu^{(\mp)}$$

on déduit ($t_\mu = p_\mu/m$)

$$\begin{aligned}
2\,m\,\gamma_\mu = t_\mu &\left\{U^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow + V^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow + V^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow\right\} + \\
-z_\mu &\left\{U^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow + V^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow\right\} + \\
+\sqrt{2}\,e_\mu^{(+)} &\left\{V^\downarrow\,\overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\,\overline{V}^\uparrow\right\} - \sqrt{2}\,e_\mu^{(-)}\left\{U^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow + V^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow\right\}
\end{aligned} \tag{7.208}$$

$$\begin{aligned}
2\,m\,(\,\gamma_\mu\,\Omega_c\,)_{\alpha\beta} = t_\mu &\left\{U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} + \\
-z_\mu &\left\{V^\uparrow U^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\downarrow - U^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} + \\
+\sqrt{2}\,e_\mu^{(+)} &\left\{V^\downarrow U^\downarrow - U^\downarrow V^\downarrow\,\right\}_{\alpha\beta} - \sqrt{2}\,e_\mu^{(-)}\left\{U^\uparrow V^\uparrow - V^\uparrow U^\uparrow\,\right\}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.209}$$

$$\gamma_\mu\,U^\uparrow = t_\mu\,U^\uparrow - z_\mu\,V^\uparrow + \sqrt{2}\,e_\mu^{(+)}\,V^\downarrow \tag{7.210}$$

$$\begin{aligned}
m\left\{\gamma(e^{(+)})\,\Omega_c\right\}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{U^\uparrow V^\uparrow - V^\uparrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} \\
m\left\{\gamma(e^{(-)})\,\Omega_c\right\}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{U^\downarrow V^\downarrow - V^\downarrow U^\downarrow\right\}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.211}$$

Le développement (7.208) permet d'obtenir le commutateur :

$$\begin{aligned}
m\,[\,\gamma_\mu,\gamma_\nu\,] = -\left\{t_\mu\,z_\nu - z_\mu\,z_\nu\right\} &\left\{U^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow - V^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow + V^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow\right\} + \\
-\sqrt{2}\left\{t_\mu\,e_\nu^{(+)} - t_\nu\,e_\mu^{(+)}\right\} &\left\{V^\downarrow\,\overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{V}^\uparrow\right\} + \\
+\sqrt{2}\left\{t_\mu\,e_\nu^{(-)} - t_\nu\,e_\mu^{(-)}\right\} &\left\{V^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow\right\} \\
-\sqrt{2}\left\{z_\mu\,e_\nu^{(+)} - z_\nu\,e_\mu^{(+)}\right\} &\left\{U^\downarrow\,\overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\,\overline{V}^\uparrow\right\} + \\
+\sqrt{2}\left\{z_\mu\,e_\nu^{(-)} - z_\nu\,e_\mu^{(-)}\right\} &\left\{V^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow - U^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow\right\} + \\
-\left\{e_\mu^{(+)}\,e_\nu^{(-)} - e_\nu^{(+)}\,e_\mu^{(-)}\right\} &\left\{U^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow + V^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow - U^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow - V^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow\right\}
\end{aligned} \tag{7.212}$$

d'où

$$\frac{1}{2}[\,\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu\,]\,U^\uparrow = \{t_\mu z_\nu - t_\nu z_\mu\}\,V^\uparrow - \left\{e_\mu^{(+)}e_\nu^{(-)} - e_\nu^{(+)}e_\mu^{(-)}\right\}U^\uparrow +$$
$$-\sqrt{2}\,\left\{t_\mu e_\nu^{(+)} - t_\nu e_\mu^{(+)}\right\}V^\downarrow - \sqrt{2}\,\left\{z_\mu e_\nu^{(+)} - z_\nu e_\mu^{(+)}\right\}U^\downarrow \tag{7.213}$$

et

$$[\,\gamma_\mu\,,\,\gamma(p)\,] = z_\mu\left\{U^\uparrow\overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\overline{V}^\downarrow - V^\uparrow\overline{U}^\uparrow + V^\downarrow\overline{U}^\downarrow\right\} +$$
$$+\sqrt{2}\,e_\mu^{(+)}\left\{V^\downarrow\overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\overline{V}^\uparrow\right\} - \sqrt{2}\,e_\mu^{(-)}\left\{V^\uparrow\overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\overline{V}^\downarrow\right\} \tag{7.214}$$

Toutes ces formules indiquent que, comme il se doit, les éléments d'une quelconque matrice 4×4, peuvent être exprimés au moyen des tenseurs-spineurs de rang deux : UU, UV, VU et VV.

7.8.2 Produits tensoriels à 3 spineurs [41]

A partir des formules précédentes, il est facile d'établir les suivantes concernant des tenseurs-spineurs de rang trois.

$$\begin{aligned}
2m\,\{\,\gamma_\mu\,\Omega_c\,\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_\mu U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\uparrow \\
&- \left\{V^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow V^\uparrow - U^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\uparrow + \\
&+2\left\{V^\uparrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\downarrow
\end{aligned} \tag{7.215}$$

$$\{\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\nu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma^\mu\,U^\uparrow\right\}_\delta = \left\{U^\uparrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\downarrow +$$
$$-\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\uparrow \tag{7.216}$$

$$\{\gamma_5\,\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\nu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\gamma^\mu\,U^\uparrow\right\}_\delta = \left\{V^\uparrow V^\uparrow + U^\uparrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\downarrow +$$
$$-\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow U^\downarrow + U^\downarrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\uparrow \tag{7.217}$$

$$\{\,\gamma_\mu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\bar\sigma_{\mu\nu}p^\nu\,U^\uparrow\right\}_\delta = \left\{V^\uparrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\downarrow +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow - V^\uparrow U^\downarrow - V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\uparrow \tag{7.218}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu\Omega_c)_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\bar\sigma_{\mu\nu}p^\nu\,U^\uparrow\right\}_\delta = \left\{U^\uparrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\downarrow +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow - U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\uparrow \tag{7.219}$$

$$\begin{aligned}
-m\,\{\bar\sigma_{\mu\nu}\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\bar\sigma^{\mu\nu}U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow U^\downarrow + U^\downarrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\uparrow + \\
&+ \left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\uparrow + \\
&-2\left\{U^\uparrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,U_\delta^\downarrow - 2\left\{V^\uparrow U^\uparrow + U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta}\,V_\delta^\downarrow
\end{aligned} \tag{7.220}$$

41. V. Bargmann, E.P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sc. (USA) 34, 211 (1948) ; W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941) ; M. D. Nykerk, "Quantizing spin 3/2 fields", rapport NIKHEF-95-002 (Jan. 1995) ; I. Lovas, K. Sailer, W. Greiner, "Generalized Rarita-Schwinger equations", Heavy Ion Physics 8 (1998) 237-245.

où l'on a posé $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = [\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu]/2$. On peut ainsi exprimer à l'aide des tenseurs de rang trois construits à partir des spineurs U et V toute forme du type $(M\,\Omega_c)_{\alpha\beta}\,(M'U)_\delta$ où M et M' sont des matrices de la base de Dirac (7.40). Il est évident que le nombre de telles formes étant limité à 64, elles ne sont pas toutes indépendantes. On trouve par exemple la relation :

$$\begin{aligned}\left\{\gamma_5\,\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^\mu\,\Omega_c\right\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\gamma^\nu U^\uparrow\right\}_\delta + \left\{\,\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^\mu\,\Omega_c\,\right\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma^\nu U^\uparrow\right\}_\delta \\ = -\frac{m}{2}\left\{\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,\Omega_c\,\right\}_{\alpha\beta}\left\{\bar{\sigma}^{\mu\nu}U^\uparrow\right\}_\delta\end{aligned} \tag{7.221}$$

Inversement, tout tenseur de rang trois peut être exprimé au moyen de telles formes. Par exemple, le tenseur complètement symétrique

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{18}}\big\{\left(V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right)U^\uparrow + \left(U^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right)V^\uparrow + \\ + \left(V^\uparrow U^\uparrow + U^\uparrow V^\uparrow\right)V^\downarrow - 2U^\downarrow V^\uparrow V^\uparrow - 2V^\uparrow U^\downarrow V^\uparrow - 2V^\uparrow V^\uparrow U^\downarrow\big\}\end{aligned} \tag{7.222}$$

et le tenseur complètement antisymétrique

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\big\{\left(U^\uparrow V^\downarrow - V^\downarrow U^\uparrow\right)V^\uparrow - \left(V^\uparrow V^\downarrow - V^\downarrow V^\uparrow\right)U^\uparrow + \\ + \left(V^\uparrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\uparrow\right)V^\downarrow\big\}\end{aligned} \tag{7.223}$$

s'expriment aussi comme

$$\mathcal{S} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^\nu\,\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma^\mu U^\uparrow\right)_\delta + \left(\gamma^\mu\,\Omega_c\,\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5\,\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^\nu U^\uparrow\right)_\delta\right\} \tag{7.224}$$

$$\mathcal{A} = \frac{m}{\sqrt{6}}\left\{\left(\gamma^\mu\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_\mu U^\uparrow\right)_\delta - \left(\Omega_c\right)_{\alpha\beta}U^\uparrow_\delta + \left(\gamma_5\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5 U^\uparrow\right)_\delta\right\} \tag{7.225}$$

7.9 Matrice densité de spin

En Mécanique quantique, lorsque l'état dynamique d'un système est incomplètement connu, on le représente par un mélange statistique de vecteurs d'états ou, de façon équivalente, au moyen de *l'opérateur densité*[42].

Les états a priori possibles d'un système quantique sont usuellement représentés par des *vecteurs d'état* $|\,\varphi_a >$ formant une base orthonormée d'un espace de Hilbert, caractéristique du système. Supposons que la présence même de l'état $|\,\varphi_a >$ dans l'état dynamique du système ne soit connue qu'avec une certaine probabilité a priori, égale à p_a. Par exemple, si ledit état correspond à une valeur donnée E_a de l'énergie du système et que ce dernier est en contact avec un thermostat de température T, on sait que la probabilité a priori d'occupation de cet état par le système est proportionnelle au facteur $\exp[-E_a/(k_BT)]$, k_B étant la constante de Boltzman. L'état dynamique du système sera alors décrit par l'opérateur densité

$$\rho = \sum_a p_a\,|\,\varphi_a >< \varphi_a\,|, \quad \text{avec} \quad p_a \geq 0 \;\; \text{et} \;\; \sum_a p_a = 1 \;\; \text{donc} \;\; \mathrm{Tr}\,\rho = 1 \tag{7.226}$$

Adaptons ce formalisme dans le cas des états de spin d'une particule massive de spin 1/2, représentés par leurs spineurs, en représentation standard. Notons $p^\uparrow$ et $p^\downarrow$ les probabilités a priori des spineurs $U^\uparrow$ et $U^\downarrow$. La matrice densité de spin sera définie comme

42. Voir, par exemple, A, Messiah, loc.cit. Tome 1, p280.

$$\rho = \frac{1}{2m}\left[p^{\uparrow}\,U^{\uparrow}\,\overline{U}^{\uparrow} + p^{\downarrow}\,U^{\downarrow}\,\overline{U}^{\downarrow}\right], \quad \text{avec} \;\; p^{\uparrow} \geq 0,\; p^{\downarrow} \geq 0 \;\; \text{et} \;\; p^{\uparrow} + p^{\downarrow} = 1 \tag{7.227}$$

où le facteur $1/(2m)$ tient compte de la normalisation (7.107) des spineurs, de sorte que $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$. Les spineurs U ci-dessus, associés à une valeur donnée p de la 4-impulsion de la particule, sont vecteurs propres de la composante de spin $S_z(p)$ selon le 4-vecteur z d'une tétrade $[\,p\,]$, Eq. (7.124). On prendra donc garde au fait que la forme de la matrice densité (7.227) dépend du choix de la tétrade $[\,p\,]$[43]. En utilisant les expressions (7.130) des projecteurs, on voit que la matrice densité s'écrit

$$\rho = \frac{1}{4m}\,[\,1 + \gamma_5\,\gamma(\xi)\,]\;[\,m + \gamma(p)\,] \quad \text{avec} \;\; \xi = \left(p^{\uparrow} - p^{\downarrow}\right) z \tag{7.228}$$

Le 4-vecteur ξ, orthogonal à p, est appelé *polarisation* de *l'état de mélange* décrit par cette matrice densité. Sa norme $\xi^2 = -(p^{\uparrow} - p^{\downarrow})^2 = -s^2$ définit le *degré de polarisation* s dudit état. Cette grandeur s est ≤ 1. Un *état pur*, complètement polarisé, correspond soit à $p^{\uparrow} = 1$, soit à $p^{\downarrow} = 1$ et dans les deux cas à $s = 1$. Un état *non polarisé* correspond à $p^{\uparrow} = p^{\downarrow} = 1/2$, soit $s = 0$, $\xi = 0$, et $\rho = \dfrac{1}{4m}\,[\,m + \gamma(p)\,]$. Si les spineurs U servent à décrire les états de spin d'une particule, les spineurs V peuvent être utilisés pour décrire les états de spin de son anti-particule. Pour celle-ci, la matrice densité de spin prend donc la forme

$$\rho = \frac{1}{4m}\,[\,1 - \gamma_5\,\gamma(\xi)\,]\;[\,\gamma(p) - m\,] \tag{7.229}$$

La valeur moyenne dans l'état de mélange d'une grandeur quelconque X étant donnée par la trace

$$< X > = \mathrm{Tr}\;(X\rho) \tag{7.230}$$

nous donnons ci-après les "valeurs moyennes" des matrices de la base de Dirac, hormis celle, triviale, de l'identité. Elles sont aisément déduites à partir des formules établies dans le paragraphe 7.5.1.

$$\begin{aligned}
< \gamma_5 > &= 0\,, && \text{car} \;\; \overline{U}\,\gamma_5\,U = 0 \\
< \gamma_\mu > &= p_\mu/m\,, && \text{car} \;\; \overline{U}\,\gamma_\mu\,U = 2\,p_\mu \\
< \gamma_\mu\,\gamma_5 > &= \xi_\mu\,, && \text{car} \;\; \overline{U}_\sigma\,\gamma_\mu\,V_\sigma = 4\,m\,\sigma\,z_\mu \\
< \sigma_{\mu\nu} > &= \frac{1}{2m}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,\xi^\beta\,, && \text{car} \;\; \overline{U}_\sigma\,\sigma_{\mu\nu}\,U_\sigma = 2\sigma\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,z^\beta
\end{aligned} \tag{7.231}$$

On en déduit aussi

$$< W_\mu > = \frac{1}{2}\,\xi_\mu\,, \quad \text{puis} \quad < S_z > = \frac{1}{2}\,(p^{\uparrow} - p^{\downarrow}) \tag{7.232}$$

43. Montrer que $U_\sigma([\,p\,]') = \mathcal{D}^{1/2}_{\sigma'\sigma}(R)\,U_{\sigma'}([\,p\,])$, où $R = [\,p\,]^{-1}\,[\,p\,]'$ et en déduire la forme de la matrice densité dans la base de ces nouveaux spineurs.

7.10 Complément : sur quelques propriétés des algèbres de Dirac

Résumons ici les propriétés des matrices γ que l'on peut déduire indépendamment de leur représentation. La relation fondamentale

$$\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu = 2\,g_{\mu\nu}$$

leur confère les propriétés suivantes.

• Les matrices γ sont inversibles car $(\gamma_0)^2 = 1$, $(\gamma_k)^2 = -1$ $(k = 1, 2, 3)$. La matrice $\gamma_5 = -i\,\gamma_0\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ a pour carré l'identité : $\gamma_5^2 = 1$.

• Les matrices d'indices de Lorentz différents anticommutent, ce qui entraîne

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_0\,\gamma_k = 0, \quad \mathrm{Tr}\ \gamma_k\,\gamma_\ell = 0 \ \text{ si } \ k \neq \ell, \quad \mathrm{Tr}\ \gamma_0\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 = i\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$$

Puis, observant que γ_5 anticommute avec toutes les matrices γ, on déduit que la trace d'un produit d'un nombre impair de matrices γ est nulle (voir (7.3.1)). En particulier,

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_\mu = 0, \quad \mathrm{Tr}\ \gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho = 0$$

où, dans la dernière relation, au moins deux des matrices ont des indices de Lorentz différents.

Comme il a été fait dans la section 7.2, on peut alors construire, à l'aide de produits de matrices γ, 16 matrices $\{E_\alpha\}$ $(\alpha = 1, \cdots 16)$ constituant une base de l'espace des matrices 4×4 et telles que

$$\mathrm{Tr}\ E_\alpha\,E_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad E_1 = 1/2, \quad \mathrm{Tr}\ E_\alpha = 0 \ \text{ pour } \ \alpha \geq 2$$

L'ensemble des matrices E_α forme une algèbre : *l'algèbre de Dirac*.

♣ Toute matrice E_α étant, à un facteur près (réel ou complexe), un produit $\gamma_{\mu_1} \ldots \gamma_{\mu_r}$ où tous les indices de Lorentz sont différents, son carré est nécessairement proportionnel à l'identité, puisque $\gamma_\mu^2 = \pm 1$. Ecrivant $E_\alpha^2 = a_\alpha$, on obtient $\mathrm{Tr}\,E_\alpha^2 = 4\,a_\alpha = 1$. Par conséquent

$$\boxed{E_\alpha^2 = \frac{1}{4} \ \text{ pour tout } \alpha} \tag{7.233}$$

Tout produit $E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_n}$ peut être développé de façon unique selon cette base, en particulier le produit $E_\alpha\,E_\beta$:

$$E_\alpha\,E_\beta = \sum_\gamma C_{\alpha\beta\gamma}\,E_\gamma = C_{\alpha\beta 1}\,E_1 + C_{\alpha\beta\alpha}\,E_\alpha + C_{\alpha\beta\beta}\,E_\beta + \sum_\delta{}' C_{\alpha\beta\delta}\,E_\delta \tag{7.234}$$

où dans la somme $\sum_\delta{}'$, les indices δ sont différents à la fois de α, de β et de 1. Pour $\alpha = \beta = 1$, le premier membre de (7.234) vaut 1/4. Le second membre ne doit alors contenir que le terme $C_{111}\,E_1$. On a donc $C_{111} = 1/2$ et $C_{11\alpha} = 0$ pour $\alpha \geq 2$. Si $\alpha = \beta \geq 2$, le premier membre de (7.234) vaut encore 1/4 et ici aussi, le second membre ne peut contenir que le terme en E_1, donc $C_{\alpha\alpha 1} = 1/2$ et $C_{\alpha\alpha\delta} = 0$ pour $\alpha \geq 2$, $\delta \neq \alpha$ et $\delta \geq 2$. Supposons ensuite $\alpha \neq \beta$, avec ces deux indices ≥ 2. On a maintenant $\mathrm{Tr}\,E_\alpha\,E_\beta = 2\,C_{\alpha\beta 1} = 0$. Puis

$$\mathrm{Tr}\,E_\alpha\,E_\beta\,E_\alpha = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,E_\beta = 0 = C_{\alpha\beta\alpha}, \quad \mathrm{Tr}\,E_\alpha\,E_\beta\,E_\beta = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,E_\alpha = 0 = C_{\alpha\beta\beta}$$

Le développement (7.234) se réduit donc à la dernière somme :

$$E_\alpha\, E_\beta = \sum_\delta{}' \, C_{\alpha\beta\delta}\, E_\delta \tag{7.235}$$

Or, en multipliant à droite par E_β les deux membres de cette relation, on obtient cette autre

$$\frac{1}{4}\, E_\alpha = \sum_\delta{}' \, C_{\alpha\beta\delta}\, E_\delta\, E_\beta \tag{7.236}$$

Invoquant l'unicité de ce nouveau développement, on en déduit que chaque produit $E_\delta\, E_\beta$ doit nécessairement reproduire E_α. On écrira donc

$$E_\delta\, E_\beta = b_{\delta\beta\alpha}\, E_\alpha, \quad \text{soit} \quad E_\delta = 4\, b_{\delta\beta\alpha}\, E_\alpha\, E_\beta$$

☞ En fait, il n'existe qu'une seule matrice E_δ vérifiant cette relation. En effet, toujours d'après l'unicité des développements, si

$$E_\alpha\, E_\beta = E_\delta/K = E_{\delta'}/K'$$

alors, nécessairement, $E_\delta = E_{\delta'}$, $K = K'$. Il n'existe donc qu'un et un seul triplet $(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$, avec des indices tous différents ≥ 2, tel que

$$\boxed{E_\alpha\, E_\beta = C_{\alpha\beta\gamma}\, E_\gamma, \quad \text{avec} \quad C_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{Tr}\, E_\alpha\, E_\beta\, E_\gamma} \tag{7.237}$$

Comme la trace est insensible aux permutations circulaires des matrices, on a

$$C_{\alpha\beta\gamma} = C_{\beta\gamma\alpha} = C_{\gamma\alpha\beta}$$

♣ Du fait de l'anticommutation des matrices γ avec des indices différents, deux matrices E_α et E_β, faites de produits de matrices γ, sont soit commutantes, soit anticommutantes : $E_\beta\, E_\alpha = \pm\, E_\alpha\, E_\beta$. Comme

$$E_\beta\, E_\alpha = \frac{1}{4\, C_{\alpha\beta\gamma}}\, E_\gamma = C_{\beta\alpha\gamma}\, E_\gamma = \pm\, C_{\alpha\beta\gamma}\, E_\gamma$$

on en déduit $C^2_{\alpha\beta\gamma} = \pm\dfrac{1}{4}$. Ainsi : $C_{\alpha\beta\gamma} = \pm\dfrac{1}{2}$ si les matrices commutent, tandis que $C_{\alpha\beta\gamma} = \pm\dfrac{i}{2}$ si les matrices anticommutent.

☞ Cherchons, pour une matrice E_α donnée avec $\alpha \geq 2$, le nombre D des matrices avec lesquelles elle commute, en excluant la matrice E_α elle-même et $E_1 = 1/2$. Les matrices E_α étant traitées de manière symétrique, il est clair que ce nombre est le même pour tout $\alpha \geq 2$. D'après (7.237), il est aussi évident que si E_α commute avec E_β ($\beta \neq \alpha$), cette matrice commute aussi avec E_γ ($\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$). Par conséquent, D est *pair* et $d = D/2$ est égal, pour α donné, au nombre de triplets $(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$ comportant des matrices commutantes et dans lesquels E_α apparaît. Le nombre de tels triplets pour l'ensemble de la base, en excluant l'identité, est $15\, d$. Cependant, le triplet $(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$ se trouvant sous les deux autres formes équivalentes $(E_\beta, E_\alpha, E_\gamma)$ (pour E_β) et $(E_\gamma, E_\alpha, E_\beta)$ (pour E_γ), seuls $15\, d/3 = 5\, d$ tels triplets sont indépendants.

Le raisonnement précédent vaut aussi pour l'anticommutation : si N est le nombre de matrices avec lesquelles E_α anticommute, $n = N/2$ est le nombre de triplets $(E_\alpha, E_\zeta, E_\xi)$ comportant des matrices anticommutantes et dans lesquels E_α apparaît. On doit avoir $2D + 2N = 14$ (ce nombre exclut E_α

et E_1), soit $d+n=7$. Au regard des matrices (7.40), on constate par exemple que γ_5 commute uniquement avec les 6 matrices indépendantes $\sigma_{\mu\nu}$. On trouve ainsi $d=3$ et $n=4$.

Le lecteur pourra vérifier toutes les propriétés de multiplication des matrices E_α énoncées plus haut en examinant le tableau se trouvant à la fin de cette section et qui donne tous les produits $E_\alpha\,(2\,E_\beta)$, les indices α et β étant respectivement celui des lignes et celui des colonnes.

♣ Adoptons la notation $|\,a>$ pour représenter les (quatre) vecteurs d'une base de C^4, dont l'orthogonalité et la normalisation se font selon le produit scalaire hermitien usuel : $<b\,|\,a>=\delta_{ab}$. Considérons les projecteurs $M_{ab}=|\,a><b\,|$ et $M_{cd}=|\,c><d\,|$. Développons-les sur la base des E_α :

$$M_{ab}=\sum_\alpha M_{ab}^\alpha\,E_\alpha,\quad M_{cd}=\sum_\beta M_{cd}^\beta\,E_\beta,\quad \text{avec}$$

$$M_{ab}^\alpha=\mathrm{Tr}\,M_{ab}\,E_\alpha=<b\,|E_\alpha|\,a>=[E_\alpha]_a^b,\quad M_{cd}^\beta=\mathrm{Tr}\,M_{cd}\,E_\beta=<d\,|E_\beta|\,c>=[E^\beta]_c^d$$

Multiplions ces deux projecteurs. Il vient

$$M_{ab}\,M_{cd}=\delta_c^b\,|\,a><d\,|=\sum_\alpha\sum_\beta\,[E_\alpha]_a^b\;[E_\beta]_c^d\;E_\alpha\,E_\beta \tag{7.238}$$

En prenant la trace de ce produit, on obtient

$$\boxed{\boxed{\delta_a^d\,\delta_c^b=\sum_\alpha\,[E_\alpha]_a^b\;[E_\alpha]_c^d}} \tag{7.239}$$

Multiplions ensuite les deux membres de (7.239) par $[E_\beta]_b^c$ et sommons sur les deux indices b et c. On obtient alors

$$\delta_a^d\;\mathrm{Tr}\,E_\beta=\sum_\alpha\,[E_\alpha\,E_\beta\,E_\alpha]_a^d$$

Si $\beta\neq1$, le premier membre est nul. Si $\beta=1$, il vaut $2\,\delta_a^d$. D'où

$$\boxed{2\,\delta_\beta^1\,\delta_a^d=\sum_\alpha\,[E_\alpha\,E_\beta\,E_\alpha]_a^d} \tag{7.240}$$

Puis, pour une matrice 4×4 M quelconque :

$$\boxed{\boxed{\sum_\alpha E_\alpha\,M\,E_\alpha=\mathrm{Tr}\,M}} \tag{7.241}$$

Envisageons ensuite la trace de l'opérateur $X=E_\alpha\,M_{ab}\,E_\gamma\,M_{cd}$. On a

$$X=\sum_\beta\sum_\delta\,E_\alpha\;E_\beta\,[E_\beta]_a^b\;E_\gamma\;[E_\delta]_c^d\;E_\delta,\quad \mathrm{Tr}\,X=[E_\alpha]_a^d\;[E_\gamma]_c^b$$

D'où

$$\boxed{[E_\alpha]_a^d\;[E_\gamma]_c^b=\sum_\beta\sum_\delta\,C_{\alpha\beta\gamma\delta}\;[E_\beta]_a^b\;[E_\delta]_c^d\quad \text{avec}\quad C_{\alpha\beta\gamma\delta}=\mathrm{Tr}\,E_\alpha\,E_\beta\,E_\gamma\,E_\delta} \tag{7.242}$$

La formule (7.242) définit la transformation de Fierz la plus générale.

Notons que si l'on utilise le développement (7.234),

$$E_\alpha\, E_\beta\, E_\gamma\, E_\delta = \sum_{\eta,\xi} C_{\alpha\beta\eta}\, E_\eta\, C_{\gamma\delta\xi}\, E_\xi = \sum_\eta E_\alpha\, C_{\beta\gamma\eta}\, E_\eta\, E_\delta, \quad \text{on obtient}$$

$$\boxed{C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_\eta C_{\alpha\beta\eta}\, C_{\gamma\delta\eta} = \sum_\eta C_{\beta\gamma\eta}\, C_{\delta\alpha\eta} = C_{\beta\gamma\delta\alpha} = C_{\gamma\delta\alpha\beta} = C_{\delta\alpha\beta\gamma}} \tag{7.243}$$

Certains des coefficients $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ont des propriétés simples :

$$C_{\alpha\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma\alpha} = C_{\beta\alpha\alpha\gamma} = C_{\beta\gamma\alpha\alpha} = \frac{1}{4}\,\delta_{\beta\gamma} = \sum_\eta C_{\beta\eta\alpha}\, C_{\gamma\alpha\eta} \tag{7.244}$$

$$C_{\alpha\beta\alpha\gamma} = C_{\beta\alpha\gamma\alpha} = \pm\frac{1}{4}\,\delta_{\beta\gamma}$$

où, dans les dernières relations, on a le signe $+$ ou le signe $-$ selon que la matrice E_α commute ou anticommute avec E_β ou E_γ.

♣ La relation (7.241) permet également d'établir que

$$\sum_\eta E_\eta\, E_\alpha\, E_\beta\, E_\eta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\eta E_\eta\, E_\alpha\, E_\beta\, E_\gamma\, E_\eta = C_{\alpha\beta\gamma}, \quad \sum_\eta E_\eta\, E_\alpha\, E_\beta\, E_\gamma\, E_\delta\, E_\eta = C_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

♣ A l'aide de (7.239), il est possible d'établir une sorte de relation de fermeture concernant les matrices E_α. Ecrivons en effet

$$\sum_\alpha\, [E_\alpha]^b_a\; [E_\alpha]^d_c = \sum_\alpha\, [{}^tE_\alpha]^a_b\; [E_\alpha]^d_c = \sum_\alpha\, [E_\alpha]^b_a\; [{}^tE_\alpha]^c_d = \delta^d_a\,\delta^b_c$$

et sommons soit sur les indices a et c, soit sur les indices b et d. Il vient

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_\alpha\, [{}^tE_\alpha\, E_\alpha]^d_b = \delta^b_d, \quad \sum_\alpha\, [E_\alpha\, {}^tE_\alpha]^c_a = \delta^c_a, \quad \text{soit} \\ \displaystyle\sum_\alpha\, {}^tE_\alpha\, E_\alpha = \sum_\alpha\, E_\alpha\, {}^tE_\alpha = 1\end{array}} \tag{7.245}$$

En utilisant encore (7.239), on montre que, pour toute matrice M 4×4,

$$\sum_\alpha {}^tE_\alpha\, M\, E_\alpha = \sum_\alpha E_\alpha\, M\, {}^tE_\alpha = {}^tM \tag{7.246}$$

♠ A ce stade, il est facile de donner une démonstration du théorème d'équivalence entre les diverses représentations des matrices de Dirac.

Supposons que l'on ait construit une base de matrices $\{E'_\alpha\}$ possédant les mêmes propriétés que les matrices E_α.

Introduisons alors les matrices

$$Q_1 = \sum_\eta E'_\eta\, M_1\, E_\eta, \quad Q_2 = \sum_\eta E_\eta\, M_2\, E'_\eta \tag{7.247}$$

où M_1 et M_2 sont deux matrices 4×4, a priori quelconques. On a

$$E'_\alpha \, Q_1 = \sum_{\eta,\gamma} C_{\alpha\eta\gamma} \, E'_\gamma \, M \, E_\eta = \sum_{\eta,\gamma} E'_\gamma \, M_1 \, C_{\gamma\alpha\eta} \, E_\eta = \sum_\gamma E'_\gamma \, M_1 \, E_\gamma \, E_\alpha = Q_1 \, E_\alpha \tag{7.248}$$

De même,

$$Q_2 \, E'_\alpha = E_\alpha \, Q_2 \tag{7.249}$$

Montrons qu'il existe au moins une matrice M_1 donnant une matrice Q_1 non nulle. En effet, en prenant $M_1 = |\, e >< f\,|$, on obtient

$$[\,Q_1]^b_a \; = < b\,|Q_1|\, a > = \sum_\eta [E'_\eta]^b_e \; [E_\eta]^f_a$$

et cette somme ne peut être nulle car sinon cela contredirait l'indépendance des matrices E_η (ou E'_η). On peut donc toujours trouver des matrices M_1 et M_2 donnant des matrices Q_1 et Q_2 non nulles. D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} Q_1 \, Q_2 &= \sum_\eta Q_1 \, E_\eta \, M_2 \, E'_\eta = \sum_\eta E'_\eta \, Q_1 \, M_2 \, E'_\eta = \mathrm{Tr} \, Q_1 \, M_2 \\ &= \sum_\eta E'_\eta \, M_1 \, E_\eta \, Q_2 = \sum_\eta E'_\eta \, M_1 \, Q_2 \, E'_\eta = \mathrm{Tr} \, M_1 \, Q_2 \end{aligned}$$

Prenons $M_1 = M_2 = |\, e >< f\,|$. Il vient

$$\mathrm{Tr} \, Q_1 \, M_2 = [Q_1]^f_e = [Q_2]^f_e = \sum_\eta \; [E_\eta]^f_e \; [E'_\eta]^f_e \; \neq 0$$

Par conséquent, Q_1 et Q_2 sont inversibles. D'après (7.248), il en résulte qu'il existe au moins une matrice inversible Q_1 telle que

$$\boxed{E'_\alpha = Q_1 \, E_\alpha \, Q_1^{-1}} \tag{7.250}$$

S'il existe une autre matrice N permettant de passer de la base $\{E_\alpha\}$ à la même base $\{E'_\alpha\}$: $E'_\alpha = N \, E_\alpha \, N^{-1}$, on a

$$E_\alpha \, N^{-1} Q_1 = N^{-1} Q_1 \, E_\alpha$$

ce qui montre que la matrice $Z = N^{-1} Q_1$ commute avec *toutes* les matrices E_α. De la relation (7.241) on tire alors

$$\sum_\alpha E_\alpha \, Z \, E_\alpha = Z \sum_\alpha E_\alpha \, E_\alpha = 4 \, Z = \mathrm{Tr} \, Z$$

ce qui signifie que la matrice Z est proportionnelle à l'identité[44]. Il en résulte que les deux matrices N et Q_1 ne peuvent différer que par un facteur. C'est bien ce type de relation qui est observé entre Q_1 et Q_2^{-1}.

44. Cette dernière conclusion est en fait une conséquence directe du *théorème de Schur* : I. Schur, "Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere", Sitzungsber. Preuss. Akad., 1905, p. 406 ; voir aussi : H. Bacry, loc. cit. p59.

	$2E_1$	$2E_2$	$2E_3$	$2E_4$	$2E_5$	$2E_6$	$2E_7$	$2E_8$
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	E_2	E_1	$-iE_{11}$	$-iE_{12}$	$-iE_{13}$	$-iE_7$	iE_6	$-E_{15}$
E_3	E_3	iE_{11}	E_1	iE_{14}	$-iE_{16}$	iE_8	$-E_{15}$	$-iE_6$
E_4	E_4	iE_{12}	$-iE_{14}$	E_1	iE_{15}	iE_9	E_{16}	$-E_{13}$
E_5	E_5	iE_{13}	iE_{16}	$-iE_{15}$	E_1	iE_{10}	$-E_{14}$	E_{12}
E_6	E_6	iE_7	$-iE_8$	$-iE_9$	$-iE_{10}$	E_1	$-iE_2$	iE_3
E_7	E_7	$-iE_6$	$-E_{15}$	$-E_{16}$	$-E_{14}$	iE_2	E_1	iE_{11}
E_8	E_8	$-E_{15}$	iE_6	$-E_{13}$	E_{12}	$-iE_3$	$-iE_{11}$	E_1
E_9	E_9	$-E_{16}$	E_{13}	iE_6	$-E_{11}$	$-iE_4$	$-iE_{12}$	$-iE_{14}$
E_{10}	E_{10}	$-E_{14}$	$-E_{12}$	E_{11}	iE_6	$-iE_5$	$-iE_{13}$	iE_{16}
E_{11}	E_{11}	$-iE_3$	iE_2	E_{10}	E_9	E_{15}	iE_8	$-iE_7$
E_{12}	E_{12}	$-iE_4$	$-E_{10}$	iE_2	E_8	E_{16}	iE_9	E_5
E_{13}	E_{13}	$-iE_5$	iE_9	$-E_8$	iE_2	E_{14}	iE_{10}	$-E_4$
E_{14}	E_{14}	$-E_{10}$	iE_4	$-iE_3$	$-E_7$	E_{13}	$-E_5$	iE_9
E_{15}	E_{15}	E_8	$-E_7$	iE_5	$-iE_4$	E_{11}	$-E_3$	$-E_2$
E_{16}	E_{16}	$-E_9$	$-iE_5$	$-E_7$	iE_3	E_{12}	$-E_4$	$-iE_{10}$

	$2E_9$	$2E_{10}$	$2E_{11}$	$2E_{12}$	$2E_{13}$	$2E_{14}$	$2E_{15}$	$2E_{16}$
E_1	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
E_2	$-E_{16}$	$-E_{14}$	iE_3	iE_4	iE_5	$-E_{10}$	$-E_8$	$-E_9$
E_3	E_{13}	$-E_{12}$	$-iE_2$	$-E_{10}$	E_9	$-iE_4$	$-E_7$	iE_5
E_4	$-iE_6$	E_{11}	E_{10}	$-iE_2$	$-E_8$	iE_3	$-iE_5$	$-E_7$
E_5	$-E_{11}$	$-iE_6$	$-E_9$	E_8	$-iE_2$	$-E_7$	iE_4	$-iE_3$
E_6	iE_4	iE_5	E_{15}	E_{16}	E_{14}	E_{13}	E_{11}	E_{12}
E_7	iE_{12}	iE_{13}	$-iE_8$	$-iE_9$	$-iE_{10}$	$-E_5$	$-E_3$	$-E_4$
E_8	iE_{14}	$-iE_{16}$	iE_7	E_5	$-E_4$	$-iE_9$	$-E_2$	iE_{10}
E_9	E_1	iE_{15}	$-E_5$	iE_7	E_3	iE_8	$-iE_{10}$	$-E_2$
E_{10}	$-iE_{15}$	E_1	E_4	$-E_3$	iE_7	$-E_2$	iE_9	$-iE_8$
E_{11}	$-E_5$	E_4	E_1	iE_{14}	$-iE_{16}$	$-iE_{12}$	E_6	iE_{13}
E_{12}	$-iE_7$	$-E_3$	$-iE_{14}$	E_1	iE_{15}	iE_{11}	$-iE_{13}$	E_6
E_{13}	E_3	$-iE_7$	iE_{16}	$-iE_{15}$	E_1	E_6	iE_{12}	$-iE_{11}$
E_{14}	$-iE_8$	$-E_2$	iE_{12}	$-iE_{11}$	E_6	E_1	iE_{16}	$-iE_{15}$
E_{15}	iE_{10}	$-iE_9$	E_6	iE_{13}	$-iE_{12}$	$-iE_{16}$	E_1	iE_{14}
E_{16}	$-E_2$	iE_8	$-iE_{13}$	E_6	iE_{11}	iE_{15}	$-iE_{14}$	E_1

- Table de multiplication des matrices E_α -