

## Chapitre 2

# Introduction à la Mécanique

### 2.1 La Cinématique

La *cinématique*<sup>1</sup> est la partie de la Mécanique qui vise à décrire mathématiquement les évolutions des systèmes, sans se préoccuper réellement des causes qui les produisent. Il s'agit donc plutôt d'une théorie élaborée de la mesure. Pourtant, il ne faut pas oublier que notre vision des phénomènes ne peut pas être si simplement séparée des interactions gouvernant l'évolution des systèmes, car ce sont les interactions elles-mêmes qui nous amènent à structurer l'Univers de telle ou telle façon.<sup>2</sup>

Dans la suite du cours, nous étudierons plus particulièrement des mouvements de points matériels.

Un point matériel est dit *en mouvement* dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si ses coordonnées d'espace  $x$ ,  $y$ ,  $z$  relatives à ce référentiel évoluent au cours du temps. A chaque position prise par le mobile et repérée par  $x$ ,  $y$  et  $z$ , est associé un événement de date  $t$ <sup>3</sup>. On appelle *équations horaires* la mise en relation de  $x$ ,  $y$  et  $z$  avec  $t$ , soit

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

c'est-à-dire, les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont considérées comme des fonctions de la date  $t$ .

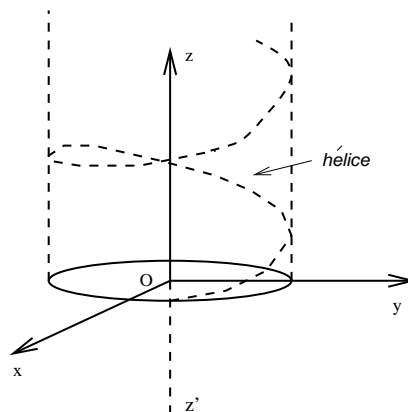


Figure 2.1

<sup>1</sup>Voir <http://www.physicsontheweb.com/>

<sup>2</sup>L'une des difficultés de cette description consiste à reconnaître les paramètres pertinents permettant de définir un état du système étudié, paramètres dont l'évolution doit caractériser sans ambiguïté l'évolution de ce système.

<sup>3</sup>par exemple, coïncidence avec une certaine position d'un pendule.

La *trajectoire* du mobile est l'ensemble des positions prises par le mobile lors de son évolution. C'est, géométriquement parlant, une courbe dans l'espace. Les équations de cette courbe, en tant qu'objet géométrique, s'obtiennent en éliminant  $t$  des équations ci-dessus. Au moins en principe, on peut par exemple inverser la relation  $z = h(t)$ , c'est-à-dire utiliser cette relation pour exprimer  $t$  comme une fonction de  $z$  :  $t = T(z)$ . On obtient alors les relations  $x = f(T(z)) = F(z)$ ,  $y = g(T(z)) = G(z)$ , qui sont une expression possible des équations recherchées<sup>4</sup>. Supposons par exemple que les équations horaires soient

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = at$$

On obtient

$$x = R \cos \omega \frac{z}{a}, \quad y = R \sin \omega \frac{z}{a}$$

Il s'agit des équations d'une hélice d'axe  $z'z$ , de rayon  $R$  et de pas  $2\pi a/\omega$  (figure 2.1).

Bien entendu, l'observation ne se limite pas seulement au repérage des positions du point matériel au cours du temps. Elle vise également à étudier la *façon* dont ces diverses positions se succèdent au cours du temps.

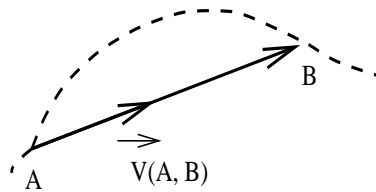


Figure 2.2

Considérons donc deux positions  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  prises par le point matériel aux dates  $t_A$  et  $t_B$  respectivement. Les quantités intéressantes pour étudier l'évolution sont les *taux de variation* des coordonnées entre  $t_A$  et  $t_B$ , à savoir,

$$\frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}, \quad \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}, \quad \frac{z_B - z_A}{t_B - t_A}$$

Ces trois rapports, qui ont la dimension d'une longueur divisée par une durée et s'expriment donc en m/s dans le système S.I., définissent les trois composantes cartésiennes d'un vecteur, appelé *vitesse moyenne* du mobile entre  $t_A$  et  $t_B$ , vecteur que l'on peut exprimer comme

$$\vec{V}(A, B) = \frac{\vec{AB}}{\Delta t}$$

où  $\Delta t = t_B - t_A$ .

Cette grandeur vectorielle donne une première idée de la façon dont le mobile évolue entre  $A$  et  $B$ <sup>5</sup>. Une analyse plus fine peut cependant être obtenue en considérant des positions  $B$  de plus en plus voisines de  $A$ , c'est-à-dire des dates  $t_B$  de plus en plus proches de  $t_A$ . Prenant la limite lorsque  $t_B \rightarrow t_A$ , la vitesse moyenne définie plus haut tend alors vers la *vitesse instantanée* du mobile à la date  $t_A$ . Comme  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ,  $O$  étant l'origine du référentiel dans lequel est étudié le mouvement, on a

<sup>4</sup>Une courbe est un ensemble à une seule dimension. Aussi, deux des trois coordonnées doivent-elles être données comme fonctions de la troisième. C'est pourquoi on obtient deux équations.

<sup>5</sup>On notera qu'à ce stade, la mesure d'une vitesse comporte le repérage d'une direction, la mesure d'une longueur et celle d'une durée.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}(A, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t_A)$$

$\vec{OM}$  étant le vecteur *position instantanée*

$$\vec{OM} = \vec{i} x(t) + \vec{j} y(t) + \vec{k} z(t)$$

Dans le référentiel considéré, le vecteur vitesse instantanée du mobile  $M$  à la date  $t$  est donc le vecteur

$$\vec{v}(t) = \vec{i} \frac{dx}{dt}(t) + \vec{j} \frac{dy}{dt}(t) + \vec{k} \frac{dz}{dt}(t)$$

que l'on peut réécrire comme

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t)$$

puisque les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont fixes dans  $\mathcal{R}$ .

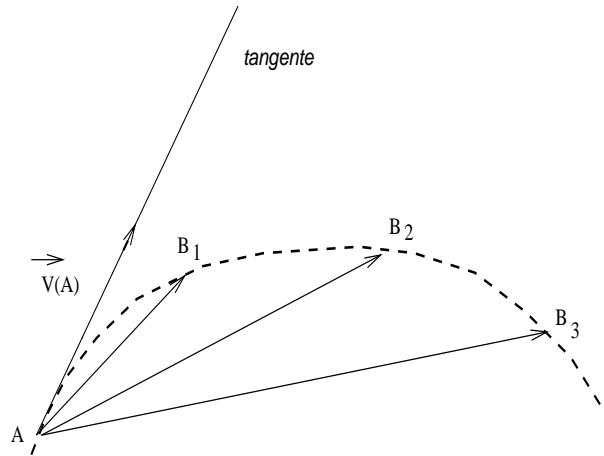


Figure 2.3

En faisant tendre  $B$  vers  $A$ , la direction du vecteur  $\vec{AB}$  devient de plus en plus voisine de celle de la tangente à la trajectoire au point  $A$ . On voit ainsi que le vecteur vitesse instantanée au point  $A$  est un vecteur ayant pour point d'application le point  $A$  et est porté par la tangente à la trajectoire en  $A$ , dans le sens du mouvement du mobile.

L'expression précédente du vecteur vitesse faisant intervenir les dérivées des coordonnées est dite *extrinsèque* car elle fait appel au repère annexe  $(O, x, y, z)$ .

On peut donner une expression *intrinsèque* du vecteur vitesse faisant intervenir certaines grandeurs propres à la trajectoire considérée comme objet géométrique.

Soient  $M$  la position du mobile à la date  $t$  et  $M'$  sa position à la date  $t'$  infiniment voisine de  $t$ . La différence  $dt = t' - t$  étant infinitésimale le vecteur  $d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$  l'est aussi. On a

$$d\vec{OM}(t) = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

où  $dx = x' - x$ ,  $dy = y' - y$ ,  $dz = z' - z$  sont les variations infinitésimales des coordonnées cartésiennes du mobile de  $M$  vers  $M'$ .

La quantité  $\|d\vec{OM}\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$  est le carré de la distance  $MM'$ .

On peut aussi repérer la position du mobile sur sa trajectoire par ce qu'on appelle une *abscisse curviligne*, qui représente la longueur  $s$  de l'arc de courbe décrit par le mobile depuis un point  $M_0$  pris comme origine sur la trajectoire

$$s = \widehat{M_0M}$$

On peut alors écrire

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Or  $dx = V_x dt$ ,  $dy = V_y dt$ ,  $dz = V_z dt$ , d'où

$$(ds)^2 = V^2(dt)^2 \quad \text{et} \quad ds = \pm V dt$$

où l'on a posé  $V = \|\vec{V}\|$ . Si l'on convient de choisir  $s(t)$  comme une fonction *croissante*, alors

$$\frac{ds}{dt} \geq 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{ds}{dt}$$

En désignant par  $\vec{T}(t)$  le vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point  $M(t)$ , on obtient ainsi

$$\vec{V}(t) = V(t) \vec{T}(t) = \frac{ds}{dt} \vec{T}(t)$$

C'est l'expression *intrinsèque* recherchée.

Illustrons ces notions au moyen d'un exemple très simple : le mouvement circulaire uniforme.

Tout d'abord, précisons qu'on appelle mouvement *uniforme* un mouvement pour lequel la *norme* du vecteur vitesse est constante :

$$\text{mouvement uniforme} \quad \|\vec{V}(t)\| = \text{constante (indépendant de } t)$$

Soit alors dans un plan  $xOy$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  sur lequel un mobile se déplace suivant les lois horaires

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t$$

Ici, l'abscisse curviligne est la longueur de l'arc de cercle parcouru par le mobile depuis la date 0 où l'angle polaire  $\theta$  sera pris comme étant égal à 0. D'après les équations horaires, on a

$$\theta = \omega t, \quad s = R\theta = R\omega t$$

et

$$V = \frac{ds}{dt} = R\omega$$

$V$  est donc constant et le mouvement est uniforme. On peut le vérifier autrement. Les composantes cartésiennes de la vitesse sont

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = R\omega \cos \omega t$$

Par suite

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = R\omega$$

Quant au vecteur tangent, on peut le définir comme

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{V} = \vec{i} \frac{V_x}{V} + \vec{j} \frac{V_y}{V} = -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}$$

ce qui donne, en fonction de l'angle polaire  $\theta$

$$\vec{T} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

Il s'agit bien du vecteur unitaire tangent en  $M$  au cercle de centre  $O$  passant par  $M$ , orienté dans le sens du mouvement (on vérifie facilement qu'il est perpendiculaire à  $\vec{OM}$ ).

Comme nous le verrons dans la suite, il apparaît que la cause responsable du mouvement d'un corps n'influe pas directement sur la vitesse, mais plutôt sur une autre grandeur que l'on pourrait appeler "vitesse de la vitesse" et qui porte le nom d'*accélération*. L'accélération représente le taux de variation de la vitesse et est donc définie comme

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t)$$

C'est aussi un vecteur dont le point d'application variable est la position prise par le mobile à l'instant considéré. En fonction des dérivées des coordonnées du mobile, il prend la forme

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t) \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t) \vec{k}$$

Autrement dit, les composantes catésiennes de l'accélération sont

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t), \quad a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t), \quad a_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2}(t)$$

Elles ont pour dimension une longueur divisée par le carré d'une durée et s'expriment donc en  $m/s^2$  dans le système S.I..

On peut aussi trouver pour l'accélération une expression "intrinsèque" en fonction de grandeurs propres à la trajectoire. Dérivant l'expression intrinsèque du vecteur vitesse, on obtient

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( V \vec{T} \right) = \frac{dV}{dt} \vec{T} + V \frac{d\vec{T}}{dt}$$

En fait,  $\vec{T}$  est avant tout une fonction de l'abscisse curviligne  $s$ , qui devient une fonction de  $t$  par l'équation horaire  $s = s(t)$ . Ecrivons alors

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Comme le vecteur  $\vec{T}$  est unitaire (c'est-à-dire que  $\|\vec{T}\|^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = T^2 = 1$ ), on a

$$\frac{d\vec{T}^2}{ds} = \frac{d}{ds}(1) = 0 = 2 \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

On en déduit

- ♠ ou bien  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$ , auquel cas le vecteur tangent est un vecteur constant et la trajectoire est une droite;
- ♠ ou bien  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  n'est pas nul; la relation précédente montre alors qu'il est perpendiculaire au vecteur tangent.

Considérons le second cas qui est le plus général. On note que le vecteur  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  est homogène à l'inverse d'une longueur (le vecteur  $\vec{T}$  étant unitaire est sans dimension). Posons alors

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}}$$

où, par définition,  $\vec{N}$  sera supposé être un vecteur unitaire, et  $\mathcal{R}$  un paramètre positif, homogène à une longueur. Le vecteur  $\vec{N}$ , perpendiculaire à  $\vec{T}$ , est appelé *normale principale* à la courbe au point considéré, et  $\mathcal{R}$  est le *rayon de courbure* de la trajectoire en ce point. L'interprétation physique de ces grandeurs est la suivante. Localement, la trajectoire peut être assimilée à un arc élémentaire d'un cercle de rayon  $\mathcal{R}$  se trouvant dans le plan défini par les deux vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  et qui contient le point au voisinage duquel on étudie la trajectoire. La position du centre  $C$  de ce cercle, appelé *centre de courbure* au point considéré, est définie par

$$\vec{MC} = \mathcal{R} \vec{N}$$

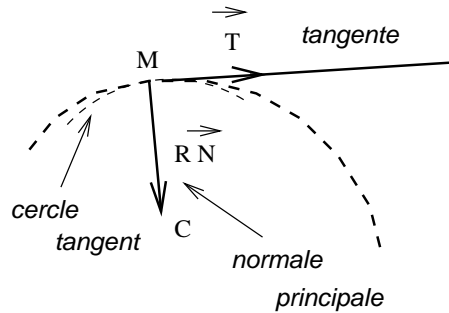


Figure 2.4

On note que d'après cette définition la normale principale est toujours orientée vers le centre de courbure. On remarquera aussi que le cas de la trajectoire rectiligne correspond à la limite d'un rayon de courbure infini. Dans ce cas, la normale principale n'est plus définie de façon unique par les expressions précédentes : il existe en effet une infinité de vecteurs perpendiculaires à une droite !!

L'accélération prend ainsi la forme

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{N}$$

Par rapport à la trajectoire, l'accélération a donc deux composantes. L'une, suivant le vecteur tangent, est dite *accélération tangentielle* et a pour expression

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$$

L'autre, suivant la normale principale, est dite *accélération normale* et a pour expression

$$a_N = \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{V^2}{\mathcal{R}}$$

Ces expressions définissent la forme *intrinsèque* de l'accélération.

Lorsque les deux vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  restent dans un plan fixe, la trajectoire est dite *plane*. Ce n'est pas le cas le plus général. On peut s'imaginer une trajectoire comme un fil de fer que l'on pourrait courber et tordre. De simples courbures du fil définissent une trajectoire plane. En tordant le fil, on change de plan de trajectoire. On se rend compte de cette manière que pour définir complètement une trajectoire il faut encore introduire une *torsion*. Mais ceci dépasse le cadre de ce cours !!

On prendra garde au fait que d'une façon générale, le vecteur tangent, la normale principale, le rayon de courbure, le centre de courbure, évoluent le long de la trajectoire !

Afin d'illustrer le plus simplement possible ces notions, reprenons l'exemple du mouvement circulaire uniforme. Les composantes cartésiennes de l'accélération sont

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t$$

On trouve donc

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM} = -\omega^2 R \vec{u}$$

où  $\vec{u} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$  est le vecteur unitaire porté par  $\vec{OM}$ . Comme il se doit, l'accélération tangentielle est nulle car le mouvement est uniforme. Il ne subsiste qu'une accélération normale, donnée par

$$a_N = \|\vec{a}\| = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

d'où l'on tire que le rayon de courbure  $\mathcal{R}$  coïncide, comme il se doit, avec le rayon  $R$  du cercle! Le vecteur normale principale est tel que ( $a_T = 0$ )

$$\vec{a} = a_N \vec{N} = \omega^2 R \vec{N} = -\omega^2 R \vec{u}$$

et l'on trouve, bien entendu,  $\vec{N} = -\vec{u}$ . Le centre de courbure  $C$  défini par  $\vec{MC} = \mathcal{R} \vec{N} = -R \vec{u} = \vec{MO}$  coïncide avec le point  $O$  comme on pouvait s'y attendre.

## 2.2 Changement de référentiel

Il s'agit ici de comparer, pour un même événement, ou une suite d'événements comme ceux correspondant au mouvement d'un mobile, les données prises dans un référentiel  $\mathcal{R}$  à celles prises dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  lorsque  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Cet événement, qui peut être une explosion, ou, plus pacifiquement, le passage d'un coureur cycliste sur une ligne d'arrivée, sera caractérisé, dans l'un comme dans l'autre des deux référentiels, par trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps, soit  $x, y, z, t$  pour  $\mathcal{R}$  et  $x', y', z', t'$  pour  $\mathcal{R}'$ . Le problème consiste à trouver la loi de transformation qui permet de passer d'un ensemble de données à l'autre.

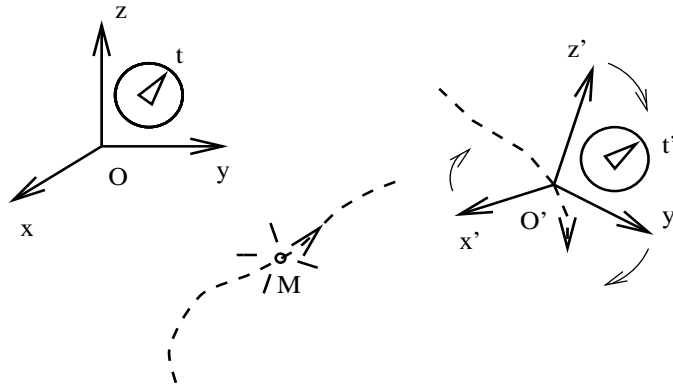


Figure 2.5

Concernant les coordonnées d'espace, il semble logique d'utiliser en premier lieu la relation

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

où  $M$  est le point d'espace où l'événement a lieu,  $O$  l'origine de  $\mathcal{R}$  et  $O'$  celle de  $\mathcal{R}'$ , puis de projeter cette relation sur les axes. Comme on le voit, ceci nécessite préalablement la connaissance complète du mouvement relatif des deux référentiels. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les axes

des deux référentiels restent parallèles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les deux systèmes d'axes  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (pour  $\mathcal{R}$ ) et  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  (pour  $\mathcal{R}'$ ). Plaçons-nous alors du point de vue du référentiel  $\mathcal{R}$ . Le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  provient donc du seul mouvement de l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$ , mouvement caractérisé par les équations horaires

$$\vec{OO'} = \vec{\mathcal{F}}(t) = X_0(t) \vec{i} + Y_0(t) \vec{j} + Z_0(t) \vec{k}$$

que l'on suppose connues.

Le problème ensuite, pour un observateur lié à  $\mathcal{R}$ , consiste à identifier le vecteur  $\vec{O'M}$ .

S'il suppose que l'évaluation des longueurs n'est pas modifiée lorsqu'on passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ , un observateur lié à  $\mathcal{R}$  dira que le vecteur  $\vec{O'M}$  (en fait, bipoint) est vu de la même manière dans les deux référentiels, et que, de ce fait, on peut écrire

$$\vec{O'M} |_{\mathcal{R}} = \vec{O'M} |_{\mathcal{R}'} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$$

compte-tenu de ce que  $\vec{i}' = \vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \vec{k}$ .  
on obtient ainsi par projection sur les axes de  $\mathcal{R}$

$$x = X_0(t) + x', \quad y = Y_0(t) + y', \quad z = Z_0(t) + z'$$

Si l'on étudie une suite d'événements, comme le mouvement d'un point matériel, l'observateur lié à  $\mathcal{R}'$  aura noté les lois horaires  $x'(t')$ ,  $y'(t')$  et  $z'(t')$ , tandis que l'observateur lié à  $\mathcal{R}$  aura noté les lois horaires  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ ,  $t'$  et  $t$  étant les coordonnées de temps attribuées respectivement par  $\mathcal{R}'$  et par  $\mathcal{R}$  pour une même "position" du mobile dans le continuum d'espace. Un problème subsiste donc, celui de la comparaison de  $t$  et  $t'$ .

La mécanique classique admet l'existence d'un "temps absolu" : si un événement est vu à la date  $t$  dans un référentiel, il sera vu exactement à la même date dans tout autre référentiel.<sup>6</sup>

Cette hypothèse repose en fait sur une autre hypothèse plus fondamentale, à savoir que les informations se transmettent à vitesse infinie d'un référentiel à un autre. Nous savons maintenant, grâce à la Théorie de la Relativité Restreinte d'Einstein, théorie dont on ne compte plus les vérifications expérimentales, que cette hypothèse ne correspond pas à la réalité : une information quelconque ne peut être transmise qu'avec une vitesse finie, inférieure à la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide. Toutes les déductions de la Mécanique "non relativiste" repose donc sur l'approximation  $c \rightarrow \infty$ , qui est largement justifiée si les mouvements étudiés se font à des vitesses très inférieures à  $c$ , mais qui cesse de l'être par exemple dans le cas des collisions de particules dans les grands accélérateurs où les vitesses atteintes sont quasiment égales à  $c$ !

Pour illustrer cette approximation, considérons l'expérience suivante, qui a lieu dans le vide. L'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  se déplace à vitesse constante  $u$  (par rapport à  $\mathcal{R}$ ) sur l'axe  $Ox$  de  $\mathcal{R}$  et coïncide avec  $O$  à la date  $t = t' = 0$  (événement zéro). Un miroir, lié à  $\mathcal{R}'$ , est disposé sur l'axe  $O'y'$ , perpendiculairement à celui-ci, à la distance  $h$  de  $O'$ . Lors de la coïncidence de  $O$  et  $O'$ , l'observateur  $O'$  envoie un signal lumineux vers le miroir. Dans  $\mathcal{R}'$ , ce signal se propage le long de l'axe  $O'y'$  à la vitesse  $c'$ , atteint le miroir, est instantanément réfléchi par le miroir et revient le long de  $O'y'$  à la même vitesse  $c'$ . La durée séparant l'émission du signal par  $O'$  et la réception du signal de retour par  $O'$ , mesurée par  $O'$  est

$$\Delta t' = \frac{2h}{c'}$$

Vu depuis  $\mathcal{R}$ , le chemin suivi par la lumière est très différent. Pour l'observateur  $O$ , le signal lumineux suit le chemin oblique  $OMO_2$  (voir figure), à la vitesse  $c$  et la durée séparant l'émission et la réception est

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$



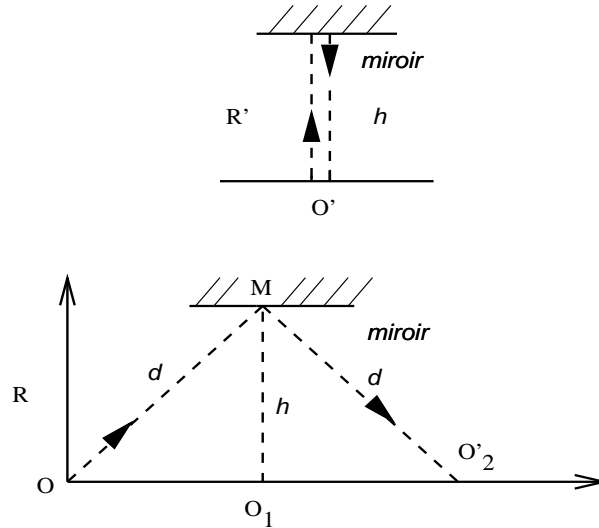


Figure 2.6

Comme  $d^2 = c^2(\Delta t)^2/4 = h^2 + OO_1^2 = h^2 + u^2(\Delta t)^2/4$ , on en déduit la relation

$$\Delta t = \Delta t' \frac{c'}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

D'après la théorie de la Relativité restreinte, la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les référentiels<sup>7</sup>, ce qui fait qu'on a ici  $c' = c$  et

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

La conclusion est que les durées  $\Delta t$  et  $\Delta t'$  sont, dans le principe, *différentes*. De cette manière, la Mécanique classique apparaît comme une approximation de la Mécanique relativiste. L'approximation n'est justifiée ici que pour  $u \ll c$ .

Dans la suite du cours, nous nous placerons dans le cadre de cette approximation.<sup>8</sup>

Les formules de transformations des coordonnées, des vitesses et des accélérations s'en trouvent alors grandement simplifiées.

Etablissons ainsi<sup>9</sup> la *loi de composition des vitesses*. D'après la loi de transformation des coordonnées, on a, en dérivant par rapport à  $t$  (ou  $t'$  !)

$$\vec{V}_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{V}_{\mathcal{R}'}$$

La *loi de composition des accélérations* s'en déduit immédiatement par une nouvelle dérivation par rapport à  $t$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{a}_{\mathcal{R}'}$$

Dans le cas le plus général, le mouvement relatif d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  est une combinaison du mouvement de translation (pas nécessairement rectiligne ni uniforme !) de l'origine  $O'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et d'un mouvement de rotation des axes de  $\mathcal{R}'$  par rapport à ceux de  $\mathcal{R}$ . C'est la possibilité d'avoir une telle rotation des axes qui conduit à des formules de transformation des vitesses et des accélérations plus compliquées que les précédentes<sup>10</sup>.

<sup>6</sup>Comme on l'a déjà signalé, il s'agit en fait de la durée séparant l'événement considéré d'un événement zéro, le même pour tous les référentiels.

<sup>7</sup>C'est un fait expérimental, jamais contredit jusqu'à présent.

<sup>8</sup>Dans cette approximation, l'évaluation des longueurs n'est pas affectée dans un changement de référentiel.

<sup>9</sup>Nous supposons ici encore que les axes des deux référentiels restent parallèles.

<sup>10</sup>Formules qui seront étudiées au second semestre.

## 2.3 Notion de force

L'action d'un opérateur sur un objet pour le déplacer est une action *dirigée*. Pour prendre un exemple, il suffit de considérer les clients d'un supermarché, poussant leur caddie. Il est donc assez naturel d'associer à cette action un vecteur que l'on appelle un *vecteur force*, dont l'orientation indique la direction de l'action réalisée et dont le module (norme) qui représente l'intensité de cette action sera d'autant plus grand que l'action est plus forte.

Lorsque l'action porte sur des objets étendus, on se rend compte que l'effet peut dépendre de l'endroit où s'exerce l'action sur l'objet. On le constate notamment lorsqu'on veut faire tourner son caddie dans les allées d'un supermarché. Ceci montre que pour décrire un effort il ne suffit pas de se donner un vecteur. Il faut également spécifier son *point d'application*. Pour un point matériel, il n'y a pas le choix : le point d'application est le point matériel lui-même.

A notre échelle macroscopique, certaines actions nous paraissent s'exercer par *contact direct* de corps entre eux. Les forces correspondantes sont dites *forces de contact*. Mais il existe aussi des *actions à distance*, comme par exemple celle entre la Terre et la Lune. Ces actions à distance sont aussi décrites, en Mécanique Classique, par des vecteurs forces.

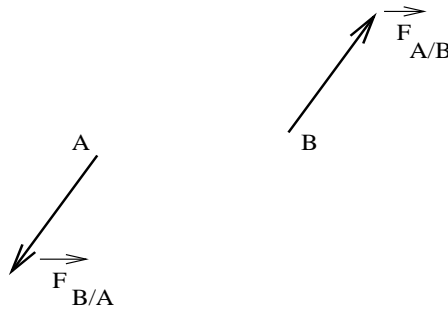


Figure 2.7

Considérons deux points matériels (particules)  $A$  et  $B$  en interaction à distance. L'effort que  $A$  exerce sur  $B$  est décrit par un vecteur force  $\vec{F}_{A/B}$  dont le point d'application est  $B$ . Considérant  $B$  comme un système à part entière,  $\vec{F}_{A/B}$  est une *force extérieure* à  $B$ , créée par des systèmes se trouvant en dehors de  $B$ , en l'occurrence  $A$ .

On peut tout aussi bien caractériser l'effort que  $B$  exerce sur  $A$  par un vecteur force  $\vec{F}_{B/A}$  dont le point d'application est en  $A$ . Du point de vue d'un observateur extérieur au système  $A+B$ ,  $A$  et  $B$  jouent des rôles parfaitement symétriques et il est naturel d'admettre le *principe de l'action et de la réaction*, appelé aussi *troisième loi de Newton*, qui stipule que

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

Cette relation peut être interprétée comme étant dûe au fait qu'un système, ici  $A+B$ , n'exerce aucune action sur lui-même.

Dans la relation précédente, nous avons introduit implicitement l'addition vectorielle des forces. La possibilité d'une telle opération peut être instituée en principe de *superposition vectorielle* que l'observation expérimentale n'a jamais démenti (voir Travaux Pratiques).

Pour illustrer ce principe, envisageons trois particules  $A$ ,  $B$  et  $C$  en interaction. L'effort dû à  $A$  et  $B$  s'exerçant sur  $C$  est décrit par un vecteur force s'appliquant en  $C$  et qui est la résultante vectorielle

$$\vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C} = \vec{F}_{(A+B)/C}$$

Dans la figure 2.8, on a supposé que les forces  $\vec{F}_{A/C}$  et  $\vec{F}_{B/C}$  ont même direction que les vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{BC}$  respectivement. De telles forces sont qualifiées de *forces centrales*.

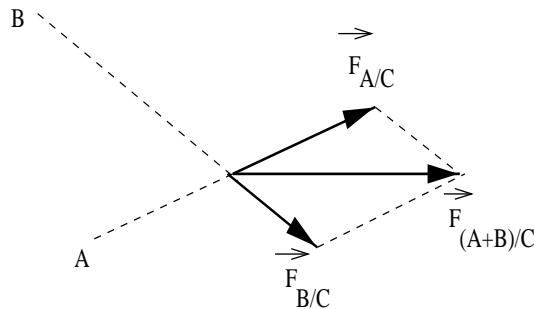


Figure 2.8

La généralisation à un système  $\Sigma$  de  $N$  points matériels  $M_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) est immédiate. Supposons qu'un système  $\Sigma'$  extérieur à  $\Sigma$  exerce sur chacun des points  $M_i$  la force  $\vec{F}_i$ . Alors, l'action globale que  $\Sigma'$  exerce sur  $\Sigma$  est représentée par le vecteur *force résultante*

$$\vec{F}_{\Sigma'/\Sigma} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Il faut noter que chacun des vecteurs forces de cette somme a un point d'application différent de celui des autres.

Quant à la résultante des forces que les divers points matériels constituant  $\Sigma$  pourraient exercer les uns sur les autres, forces qualifiées de *forces intérieures*, elle est nulle :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

(le système  $\Sigma$  n'exerce aucune action sur lui-même).

En fait, à l'échelle microscopique, il n'existe que des interactions à distance. A notre échelle macroscopique, les sensations tactiles qui nous font penser à un contact direct sont en fait des interactions à distance entre constituants microscopiques.

## 2.4 Les interactions fondamentales

La matière est constituée de *particules*, c'est-à-dire des objets microscopiques<sup>11</sup>. L'attribution d'un caractère élémentaire pour ces particules dépend en fait du domaine scientifique considéré. Ainsi, les plus petits objets à la base de la biologie sont plutôt des macromolécules, agrégats de molécules. Les molécules, objets d'étude de la physique moléculaire, sont constitués d'atomes, objets d'étude de la physique atomique et qui concernent aussi directement la chimie. L'atome lui-même est constitué d'un noyau entouré d'un nuage d'électrons. Un noyau est constitué de protons et de neutrons et est l'objet de base de la physique nucléaire. Au bout de cette descente vers les échelles de distance de plus en plus petites se trouve la physique des particules dites élémentaires. Durant le siècle dernier, le développement de cette physique a permis la découverte de très nombreuses particules, principalement grâce à la construction de grands accélérateurs qui sont des machines où l'on fait entrer en collision des particules chargées, par exemple des électrons ou des protons. On a ainsi découvert que le proton

<sup>11</sup> Voir <http://voyage.in2p3.fr>

et le neutron par exemple ne sont pas des structures fondamentales, mais sont constitués de *quarks*, liés entre eux par l'intermédiaire de *gluons*, qui, bien qu'il ne soit pas possible de les observer à l'état libre, comme on pourrait le faire pour un électron, sont des ingrédients nécessaires à la bonne compréhension des phénomènes observés dans cette partie de la physique.

D'une façon générale, selon leurs propriétés, les particules sont susceptibles d'avoir entre elles des interactions. A l'heure actuelle, on distingue un nombre réduit d'interactions dites *fondamentales* à partir desquelles se construisent a priori les interactions plus complexes entre systèmes macroscopiques.

Les interactions les plus importantes du point de vue de leurs intensités à l'échelle microscopique, sont les *interactions fortes*. L'interaction *superforte* est responsable de l'agglomérat de quarks en structure de proton ou de neutron. A l'échelle d'un noyau, ces interactions sont dites *nucléaires*. Elles assurent la cohésion entre protons et neutrons dans un noyau, malgré la répulsion électrostatique entre les protons. Ces interactions intenses sont cependant de très courtes portées, de l'ordre de la taille d'un proton, soit  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ <sup>12</sup>, et ne sont donc pas directement observables à notre échelle. Elles sont encore actuellement imparfaitement connues et font l'objet de recherches très poussées. Les particules pouvant interagir par interaction forte sont appelées des *hadrons*<sup>13</sup>.

En second viennent les interactions *électromagnétiques*<sup>14</sup>. Ce sont principalement des interactions entre porteurs de charges électriques, mais il existe des particules neutres ayant un moment magnétique qui sont également sujettes à ce type d'interaction (comme le neutron). L'interaction électromagnétique, bien que moins intense que l'interaction forte, est de plus longue portée que cette dernière et est donc perceptible à plus longue distance. Dans l'atome, c'est elle qui assure la cohésion du noyau avec le nuage d'électrons qui l'entoure. Par des combinaisons complexes de forces entre atomes ou entre molécules, elle est aussi à l'origine de la plupart des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques se produisant à notre échelle. Elle intervient notamment dans la cohésion de la matière, dans les forces élastiques, comme la force exercée par un ressort, et dans les forces dites de contact entre solides, comme par exemple les forces de frottement.

Les interactions *faibles*<sup>15</sup>, comme leur nom l'indique sont peu intenses et de courte portée. Elle n'interviennent qu'à très petite échelle entre particules élémentaires. Elles sont responsables de la désintégration de certaines particules, comme le neutron, et d'un phénomène spectaculaire appelé *violation de la parité*, découvert en 1956<sup>16</sup>. Dans les années 1970 a été élaboré un modèle théorique qui regroupe les interactions électromagnétiques et faibles en une théorie unificatrice qui porte le nom de *théorie électrofaible*<sup>17</sup>, dont les prévisions sont pour l'heure vérifiées par l'expérience. Certaines particules ne sont sujettes (à part la gravitation, éventuellement) qu'à l'interaction électrofaible. Elles sont appelées *leptons* (du grec "leptos", qui veut dire faible).

Vient enfin l'interaction gravitationnelle<sup>18</sup>. Elle nous est familière à cause du phénomène de la "pesanteur". Elle s'exerce entre des corps massifs quelconques. C'est la moins intense des interactions fondamentales, mais elle est de longue portée. A l'échelle des astres et des corps célestes en général, elle supplante l'interaction électromagnétique pour la bonne raison que les objets macroscopiques concernés sont globalement électriquement neutres et ont des masses énormes, ce qui fait que leur interaction gravitationnelle est de loin prépondérante. C'est la gravitation qui gouverne alors les mouvements des astres. Par contre, au niveau des particules, l'interaction gravitationnelle est complètement négligeable devant les autres types d'interaction.

Le 19ème siècle a vu l'unification des interactions électriques et magnétiques en une théorie électromagnétique élaborée par Maxwell. Le 20ème siècle a vu l'unification des interactions électromagnétiques et faibles en une théorie électrofaible. C'est un souci constant des physiciens d'établir des corrélations entre phénomènes apparemment étrangers et d'en donner une explication globale dans le cadre d'une

<sup>12</sup><http://semsci.u-strasbg.fr/noyau.htm>

<sup>13</sup>Mot venant du grec "hadros" qui veut dire fort, abondant.

<sup>14</sup>La théorie électromagnétique de Maxwell date de 1864. Elle fut confirmée par la découverte des ondes électromagnétiques par Hertz en 1887.

<sup>15</sup>La première ébauche de théorie des interactions faibles est due à Fermi et date de 1933.

<sup>16</sup><http://irfu.cea.fr/Sphn/Parity/Histo/index.php>

<sup>17</sup>Associée aux noms de Weinberg, Salam et Glashow, voir :

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Interaction\\_electrofaible](http://fr.wikipedia.org/wiki/Interaction_electrofaible)

<sup>18</sup><http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newtongrav.html>

vaste théorie unificatrice. Actuellement des recherches sont en cours pour tenter d'établir la théorie de la "grande unification" dans laquelle toutes les interactions fondamentales observées jusqu'à maintenant ne seraient que des aspects différents d'une seule et unique interaction, fondamentale celle-là.

## 2.5 Exemples de forces

### 2.5.1 La gravitation

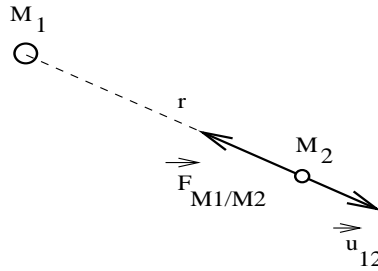


Figure 2.9

On doit à Newton<sup>19</sup> d'avoir donné l'expression de la force de *gravitation* s'exerçant entre deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. Considérons par exemple la force que  $M_1$  exerce sur  $M_2$ . Elle est

- ♣ inversement proportionnelle au carré de la distance  $r = M_1M_2$ ,
- ♣ orientée dans la direction du vecteur  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,
- ♣ proportionnelle au produit des deux masses  $m_1m_2$  :

$$\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} = -G \frac{m_1m_2}{r^2} \overrightarrow{u}_{12}$$

où  $\overrightarrow{u}_{12}$  est le vecteur unitaire porté par  $\overrightarrow{M_1M_2}$  :

$$\overrightarrow{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$$

On notera que cette force est *centrale* et est toujours *attractive*. Bien entendu la force que  $M_2$  exerce sur  $M_1$  est exactement opposée à la force ci-dessus.  $G$  est une constante, appelée *constante de gravitation*, dont la valeur dans le système d'unités international est  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  (l'unité des forces, le *Newton*, de symbole N, sera définie un peu plus loin).

Nous verrons plus tard que cette loi de forces peut être appliquée au système constitué de la Terre et d'un objet massif se trouvant au dessus du sol terrestre (ballon, satellite ou Lune),  $M_1$  étant par exemple le centre de la Terre. Si l'objet est placé en un point  $M_2$  dont l'altitude  $z$  est faible en comparaison du rayon terrestre  $R$  ( $z \ll R$ ), on peut faire l'approximation suivante

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+z)^2} \approx \frac{1}{R^2}$$

d'où,  $M_T$  et  $m$  étant, respectivement, la masse de la Terre et celle de l'objet

<sup>19</sup>La théorie de la gravitation de Newton date de 1687.

$$\vec{F}_{M_1/M_2} = -G \frac{m M_T}{R^2} \vec{k} = -mg \vec{k}$$

Dans cette expression  $\vec{u}_{12}$  a été identifié au vecteur unitaire de la verticale ascendante locale  $\vec{k}$  et  $g$ , appelé communément *accélération de la pesanteur* a été identifié à<sup>20</sup>

$$g = G \frac{M_T}{R^2}$$

En prenant  $R = 6370$  km,  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg et  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>-2</sup> kg<sup>-2</sup>, on trouve  $g \approx 9,72$  m s<sup>-2</sup>, valeur qui n'est pas trop éloignée de la valeur mesurée<sup>21</sup>  $g \approx 9,81$  m s<sup>-2</sup>

Il est utile ici de rappeler que l'unité S.I. de masse est le *kilogramme* (symbole kg). Par définition, c'est la masse du prototype international, fait de platine irridié, déposé au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) au pavillon de Breteuil, à Sèvres.<sup>22</sup>

### 2.5.2 Force électrostatique - Loi de Coulomb

Vers la fin du 18ème siècle, Coulomb<sup>23</sup> a entrepris l'étude expérimentale des interactions entre charges électriques et en a déduit une expression de la force électrostatique s'exerçant entre deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  placées en  $M_1$  et en  $M_2$  respectivement : la force que la charge  $q_1$  exerce sur la charge  $q_2$  est

- ♣ proportionnelle au produit des deux charges  $q_1 q_2$ ,
- ♣ inversement proportionnelle au carré de la distance  $r = M_1 M_2$  séparant les deux charges,
- ♣ orientée dans la direction du vecteur  $\vec{M}_1 \vec{M}_2$  :

$$\vec{F}_{M_1/M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r^2}$$

où, comme précédemment,  $\vec{u}_{12} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 / r$  et où  $\epsilon_0$  est la *permittivité* du vide. Le facteur  $1/(4\pi)$  vient du système d'unités choisi, en l'occurrence ici le système international (S.I.). Dans ce système, la valeur numérique de  $\epsilon_0$  est  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$  S.I..

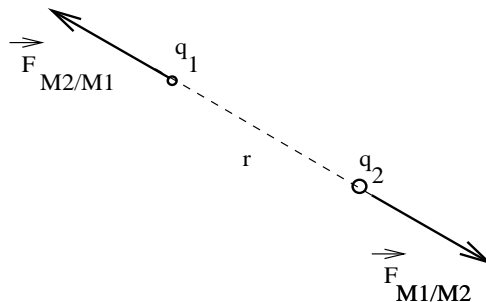


Figure 2.10

<sup>20</sup>Ce sont en fait des approximations, d'une part parce que la Terre n'est pas strictement ronde, et d'autre part il faut tenir compte d'un effet de rotation de la Terre sur elle-même.

<sup>21</sup>Les premières mesures de  $g$  ont été faites vers la fin du 18ème siècle par Huygens, à partir de la mesure de la période d'un pendule simple.

<sup>22</sup><http://www.mel.nist.gov/photos/photo/ph049.html>

<sup>23</sup><http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/coulomb.html>

Cette force est *attractive* si les deux charges ont des *signes opposés*, *répulsive* si les charges ont le *même signe*.

Ici aussi, d'après le principe de l'action et de la réaction, la force s'exerçant sur la charge  $q_1$  et due à la charge  $q_2$  est exactement opposée à la précédente.

Précisons enfin l'unité S.I. de charge : c'est le *Coulomb*, (symbole C). Par définition, 1 Coulomb est la valeur de la charge passant pendant une seconde à travers une section droite d'un conducteur électrique lorsqu'un courant d'une intensité de 1 Ampère le traverse.

### 2.5.3 Force de rappel d'un ressort

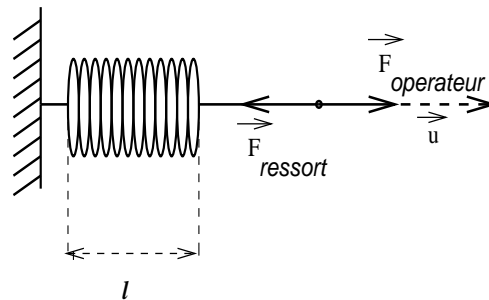


Figure 2.11

Un ressort de longueur  $\ell_0$  est capable de produire une force lorsqu'on le tend ou lorsqu'on le comprime. Cette force s'oppose à la modification de longueur qu'on veut lui imprimer. C'est une force de *rappel* qui tend à ramener le ressort vers son état de repos, où sa longueur est  $\ell_0$ . Si l'allongement imposé n'est pas trop important, le ressort reste dans son domaine d'*élasticité* et sa force de rappel est donnée par la *Loi de Hooke*<sup>24</sup>

$$\vec{F}_r = -k \Delta\ell \vec{u}$$

où  $k$  est la *raideur* du ressort, et où

$$\Delta\ell = (\ell - \ell_0) \vec{u}$$

est, vectoriellement, l'allongement du ressort que l'on effectue selon la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  avec l'amplitude  $\ell - \ell_0$ ,  $\ell$  étant la longueur acquise par le ressort.

Si  $\ell \geq \ell_0$ , l'opérateur exerce une traction sur le ressort et la force que celui-ci oppose est orientée en sens inverse de  $\vec{u}$  (cas de la figure ci-dessus) ; si  $\ell \leq \ell_0$ , l'opérateur comprime le ressort et ce dernier oppose alors une force de même sens que  $\vec{u}$ .

### 2.5.4 Force de tension d'un pendule

Un *pendule simple* est constitué d'un fil rectiligne de masse négligeable, rigide et inextensible, de longueur  $\ell$ , dont l'une des extrémités est fixée en un point  $O$  d'un plan horizontal. A l'autre extrémité est accroché un objet de petite taille, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . Du fait que le fil est inextensible, les seuls mouvements possibles de l'objet  $M$  s'effectuent sur une sphère de centre  $O$  et de longueur  $\ell$ . Lorsque le pendule est à l'équilibre, le fil est suivant la verticale. L'objet  $M$  restant accroché au fil, on doit admettre que le fil exerce sur lui une force qui compense alors son poids. Cette

<sup>24</sup>[http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_de\\_Hooke](http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Hooke)

force ( $\vec{T}$  sur la figure), dite *force de tension* résulte des forces de liaison entre atomes constituant le matériau (corps solide) dont est fait le fil et s'oppose à toute tentative de brisure de cohésion entre ces atomes. C'est une force analogue à la force de rappel d'un ressort, mais avec une raideur beaucoup plus importante. Bien sûr, si l'on exerce une force de traction de grande intensité, on peut provoquer la rupture du fil...

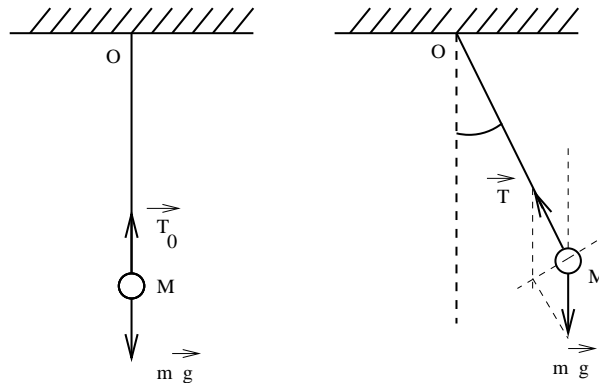


Figure 2.12

On note que cette force de tension est toujours orientée suivant la direction du fil et se transmet intégralement d'un bout à l'autre du fil (supposé sans masse) jusqu'au support en  $O$ . Lorsque le pendule est en mouvement, le fil n'est plus suivant la verticale et la force de tension n'équilibre alors le poids de l'objet que partiellement. Ceci montre que l'intensité de la force de tension, qui est une force de réaction du fil, dépend du mouvement de  $M$ , comme nous le verrons d'ailleurs plus précisément par la suite.

### 2.5.5 Force de réaction d'une piste

L'existence d'une *force de réaction* d'une piste sur un objet en contact avec elle s'impose d'après le principe de l'inertie. Cette force représente la somme des forces réparties sur toute la surface de contact entre la piste et l'objet. Si l'on veut analyser le phénomène à la lumière des interactions fondamentales, cette force résulte des interactions électromagnétiques entre atomes de la piste et de l'objet.

La force de réaction peut être décomposée en deux composantes :

- ♣ une composante perpendiculaire à la piste; c'est elle qui en fait empêche l'objet de pénétrer dans le matériau dont est faite la piste;
- ♣ une composante tangentielle, selon la tangente parallèle à la ligne de plus grande pente de la piste, qui s'oppose au glissement de l'objet; cette dernière composante modélise les forces de frottement qui sont importantes lorsque les surfaces en contact sont rugueuses.

En l'absence de frottement, la force de réaction est toujours *perpendiculaire* à la piste.

Une force de frottement est une force qui s'oppose au glissement relatif de deux surfaces. Le frottement sec, entre deux surfaces non lubrifiées, est un phénomène complexe pour lequel il n'existe pas de théorie fondamentale. On distingue les forces de *frottement statique*, quand il n'y a pas de mouvement relatif des deux surfaces, des forces de *frottement cinétique*, lorsque les surfaces en contact glissent l'une sur l'autre. L'expérience permet d'établir certains faits (résultats d'expérience dues à Coulomb, notamment) :



- ◇ la force de frottement est proportionnelle à la force de pression entre les deux surfaces en contact. Le coefficient de proportionnalité est le *coefficient de frottement*. Celui-ci ne dépend que de la nature et de l'état des surfaces en contact. Il est d'autant plus grand que les surfaces sont plus rugueuses. Pratiquement, il n'existe pas de surface unie parfaite. On cherche à diminuer la rugosité des surfaces par un graissage : les matières utilisées remplissent alors les creux des surfaces en contact et les rendent plus unies ;
- ◇ la force de frottement est indépendante de l'aire apparente de contact ; l'aire de contact réelle est en effet plus faible ;
- ◇ la force de frottement cinétique est indépendante de la vitesse relative des deux surfaces, au moins tant que celle-ci ne prend pas de valeur trop grande (quand cette vitesse est grande, les surfaces en contact s'échauffent, se dilatent, ce qui occasionne une augmentation des forces de pression, et donc une augmentation du frottement).

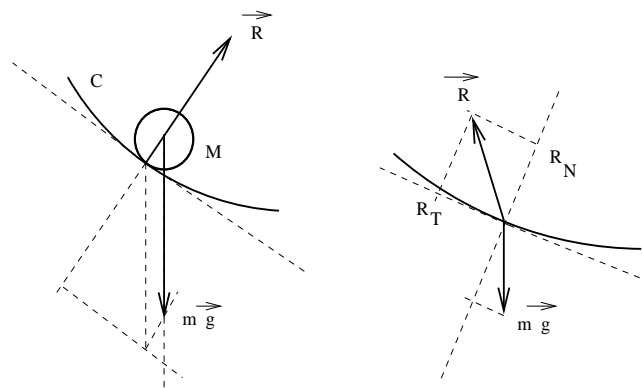


Figure 2.13

Lorsque les surfaces sont immobiles l'une par rapport à l'autre, c'est la force de frottement statique qui intervient. Si le frottement est suffisamment rugueux, l'objet ne glisse pas sur la piste. Lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre c'est la force de frottement cinétique qui intervient<sup>25</sup>.

## 2.6 Principes fondamentaux de la Dynamique Classique

La *Dynamique*<sup>26</sup> est la partie de la Mécanique qui vise à expliquer les évolutions des systèmes à partir de leurs interactions, le but étant la recherche d'une relation de *cause à effet* permettant de prédire une évolution, connaissant les causes susceptibles de la provoquer. En Mécanique Classique, c'est aux forces que l'on attribue la cause des mouvements des corps. A la suite de très nombreuses expériences et après de multiples tâtonnements, il est apparu que la relation liant la cause d'un mouvement et les grandeurs cinématiques servant à décrire ce mouvement est une relation entre la force et l'accélération. La relation de *cause à effet* entre la force  $\vec{F}$  (la cause) s'exerçant sur un point matériel et l'accélération  $\vec{a}$  de ce point (l'effet), dite *relation fondamentale de la dynamique* est la suivante

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

où  $m$  est un paramètre homogène à une masse, appelé *masse inerte* du point matériel, et qui s'avère être identique au paramètre de masse, appelé *masse pesante*, intervenant dans la loi de Newton de

<sup>25</sup><http://cours.cstj.net/203-101-r.f/partie2/chap4/section7.htm>

<sup>26</sup>Avec Google, rechercher "dynamique du point matériel".

l'interaction gravitationnelle<sup>27</sup>. Pour cette raison, nous ne ferons plus de distinction entre ces deux paramètres dans la suite du cours et les appellerons l'un comme l'autre, *masse* du point matériel.

Examinons le cas d'un point matériel très éloigné de tout système susceptible d'agir sur lui. Dans ces conditions, on serait fondé de dire qu'aucune force ne s'exerce sur lui. La relation fondamentale indique alors que son accélération doit être nulle et que par conséquent sa vitesse est un vecteur constant. Un tel point matériel ne pourra donc qu'être au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Cependant, d'après les formules de changement de référentiel, ce résultat ne peut être vrai pour un référentiel quelconque. En effet, supposons qu'il en soit ainsi dans un référentiel  $\mathcal{R} (O, x, y, z)$  :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{0}, \quad \vec{V}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_0$$

Soit maintenant  $\mathcal{R}' (O', x', y', z')$  un référentiel dont l'origine  $O'$  est en mouvement uniformément accéléré dans  $\mathcal{R}$  avec l'accélération  $\vec{a}_{O'} = A \vec{i}$ , et la vitesse  $\vec{V}_{O'} = At \vec{i}$ , mais dont les axes  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}'$  restent parallèle aux axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de  $\mathcal{R}$ . Les formules de transformation des accélérations donnent pour le point matériel  $M$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

d'où l'on déduit

$$\vec{a}'_{\mathcal{R}'} = -A \vec{i} = -A \vec{i}'$$

Si l'on est convaincu de la justesse de la relation fondamentale pour tout référentiel, alors pour l'observateur  $O'$  de  $\mathcal{R}'$ , le point matériel  $M$  est soumis à la force

$$m \vec{a}'_{\mathcal{R}'} = -mA \vec{i}'$$

et de ce fait ne peut être animé d'un mouvement rectiligne uniforme ou être au repos.

On voit donc que le simple changement de référentiel de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}'$  occasionne l'apparition d'une *pseudo-force* dans  $\mathcal{R}'$  alors que le point matériel étudié est censé être isolé. Ceci pose un très sérieux problème lorsqu'on évalue les forces en présence, car on ne peut jamais être sûr que dans le référentiel dans lequel on se trouve il ne faille pas tenir compte d'une pseudo-force dont l'origine est de nature purement relative.

Pour pallier ce défaut, les physiciens ont introduit les principes suivants, initiés par Newton et qui sont à la base de la Dynamique Classique.

Le premier principe est appelé *principe de l'inertie* ou *première loi de Newton*. Il affirme l'existence de référentiels privilégiés dans lesquels tout système isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Ceci permet de distinguer entre forces dites *absolues* qui résultent d'une réelle interaction et *forces fictives* dues à un changement de référentiels. En quelque sorte, on définit ainsi le "zéro des forces".

Ces référentiels sont appelés *référentiels galiléens* (du nom de Galilée). On estime généralement que le référentiel *héliocentrique*<sup>28</sup> dont l'origine est le centre du soleil et dont les axes sont liés à des étoiles dites "fixes" est une bonne approximation d'un référentiel galiléen.

Les référentiels galiléens sont animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation rectiligne uniforme, sans rotation relative des axes. En effet, soit  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux tels référentiels. Pour un point matériel isolé, on a, d'après le principe de l'inertie

<sup>27</sup>L'identité de la masse inerte et de la masse pesante est vérifiée expérimentalement avec une grande précision. Cette identité, qui a été érigée en *Principe d'Equivalence*, est de fait un principe de base de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein. Un microsatellite devrait être lancé en 2004 pour vérifier ce principe, d'où résultent notamment les équations classiques de la chute libre que nous étudierons plus loin (projet du CNES "Microscope", Microsatellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence; <http://www.oca.eu/cerga/gmc/FONDAMENTALE/step/step.html>, <http://www.senat.fr/rap/r00-293/r00-29364.html>)

<sup>28</sup>Appelé aussi référentiel de Copernic.

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{0}, \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

mais d'après la loi de composition des accélérations (en supposant les axes de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  parallèles)

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{a}_{\mathcal{R}'}$$

d'où

$$\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

et, dans  $\mathcal{R}$ ,  $O'$  est soit au repos (il s'agit alors du même référentiel) soit en mouvement de translation rectiligne uniforme.

On en déduit que si un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen, il peut lui même constituer un nouveau référentiel galiléen, dans lequel il sera bien entendu immobile. Dans ces conditions, ce point matériel est sans aucun doute isolé.

A contrario, si ce point matériel a un mouvement varié dans un référentiel galiléen, alors on ne peut trouver aucun référentiel galiléen dans lequel ce point matériel serait vu au repos. Il ne peut donc être isolé : d'autres systèmes sont à coup sûr à l'œuvre pour exercer sur lui une force.

L'écart par rapport au mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen donne ainsi une mesure de l'interaction à laquelle est soumis le point matériel. Ceci se concrétise par la *relation fondamentale de la Dynamique Classique*, appelée encore *deuxième loi de Newton*

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\mathcal{R}}$$

où ici  $\mathcal{R}$  est un référentiel galiléen, et où le vecteur  $\vec{F}_{\mathcal{R}}$  est le résultante des forces *provenant uniquement des interactions* : elle ne comporte *aucun* terme lié à un changement de référentiel.

On note que la relation fondamentale garde la même forme dans les différents référentiels galiléens. En effet,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  étant deux référentiels galiléens, on a

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}} = m \vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\mathcal{R}}$$

Ceci révèle que les équations de la Mécanique Classique sont *invariantes*<sup>29</sup> lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre<sup>30</sup>. Ce fait a été érigé en *principe d'invariance galiléenne* des lois de la Mécanique, principe qui fut étendu par la suite aux phénomènes électromagnétiques par Einstein dans sa Théorie de la Relativité Restreinte, avec tous les bouleversements que l'on sait.

Disposant de la relation fondamentale valable dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la relation de cause à effet pour un référentiel *non galiléen*  $\mathcal{R}'$  s'obtient en appliquant la loi de composition des accélérations :

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}'} = m \vec{a}_{\mathcal{R}} - m \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{F}_{\mathcal{R}} - m \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}$$

où l'on voit apparaître le terme d'inertie d'entraînement  $-m \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}$ , que l'observateur lié à  $\mathcal{R}'$  est sans doute amené à interpréter comme une force, mais qui n'est qu'un effet relatif. Dans  $\mathcal{R}'$ , on écrira néanmoins une relation de la forme

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\mathcal{R}'}$$

à partir de laquelle devront être déduites les équations horaires du mobile étudié.

Les référentiels terrestres ne sont pas rigoureusement des référentiels galiléens. Un référentiel *géocentrique*<sup>31</sup> dont l'origine est au centre de la Terre et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel héliocentrique (supposé galiléen) n'est pas galiléen parce que la Terre a un mouvement elliptique autour du Soleil. Cependant, si une expérience est menée sur Terre pendant un laps de temps suffisamment court par rapport à la période de rotation de la Terre autour du Soleil, on peut considérer que la Terre

<sup>29</sup>Plus précisément, on dit *covariantes*.

<sup>30</sup>La conséquence importante est qu'il est *impossible de déceler le mouvement d'un référentiel galiléen par rapport à un autre par une expérience de Mécanique*.

<sup>31</sup>Appelé aussi référentiel de Galilée.

a approximativement un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel héliocentrique. Dans ces conditions, le référentiel géocentrique pourra être assimilé à un référentiel galiléen.

De même, un référentiel terrestre lié au sol n'est pas galiléen, à cause de la rotation de la Terre sur elle-même<sup>32</sup>. Comme précédemment, si l'on effectue une expérience de courte durée par rapport à la période de cette rotation (une journée), un référentiel terrestre pourra lui aussi être considéré comme galiléen. Cette approximation très courante est justifiée par le fait que les effets de rotation de la Terre sont souvent négligeables.

La relation entre force et accélération permet une mesure de l'intensité d'une force par l'étude du mouvement dont elle est la cause, et par là même permet d'en définir une unité. Cette unité (S.I.) est le *Newton* (symbole N). Par définition, le Newton est l'intensité de la force nécessaire pour communiquer à l'unité de masse (1 kg) une accélération de 1 m/s<sup>2</sup>.

## 2.7 Les notions de travail et d'énergie cinétique

### 2.7.1 Le travail - Définition

L'application d'une action sur un objet peut provoquer le déplacement de l'objet et même avoir pour conséquence sa déformation ou un changement de sa structure interne.

La force associée à cette action en caractérise l'intensité et l'orientation. Le travail, quant à lui, est plutôt associé à la notion d'effort et caractérise la qualité ou l'efficacité de l'exécution du but visé par l'action.

Dès lors, on conçoit bien qu'un travail sera d'autant plus important que seront grands, d'une part l'intensité de la force appliquée sur l'objet influencé par l'action, et d'autre part le déplacement de cet objet. Si l'objet n'est soumis à aucune force, la notion de travail perd son sens, bien évidemment. Si l'objet ne se déplace pas, il n'y a pas de travail non plus.

La qualité d'un travail peut être caractérisée algébriquement. En effet, si l'effort a pour conséquence l'accélération d'un objet, on dira que ce travail est *moteur* et que l'objet a *reçu* un travail *positif*. Par contre, si l'objet est freiné, on dira que le travail est *résistant* et que l'objet a *reçu* un travail *négatif*, pour signifier qu'il a *perdu* quelque chose. Dans le premier cas, l'action renforce un mouvement et ceci ne peut intervenir que si la force et le déplacement ont plus ou moins la même orientation. Dans le second cas, force et déplacement sont plus ou moins opposés. Il y a donc là un effet directionnel.

Ces considérations justifient la définition suivante du travail d'une force.

Soit  $\vec{F}$  une force s'exerçant sur un point matériel  $M$ . Lorsque  $M$  se déplace infiniment peu de la position  $P$  à la position  $P'$ , le travail développé par cette force est défini par le produit scalaire

$$w = \vec{F} \cdot \vec{PP'}$$

Cette expression présente toutes les propriétés mentionnées plus haut caractérisant un travail. On voit notamment que  $w$  est d'autant plus grand en valeur absolue que la norme de  $\vec{F}$  et la longueur  $PP'$  du déplacement sont grands. Si la force et le déplacement pointent vers le même demi-espace, leur produit scalaire est positif et  $w$  est positif. Dans le cas où la force et le déplacement pointent vers des directions opposées, leur produit scalaire est négatif et  $w$  est aussi négatif. On note que si la force et le déplacement sont perpendiculaires, le travail est nul. C'est un cas intermédiaire.

L'expression précédente du travail n'a été définie que pour un déplacement élémentaire du point d'application de la force, parce que la force elle-même peut dépendre de la position de son point d'application. La généralisation à un déplacement quelconque fait appel à la notion de *circulation* d'un vecteur le long d'une courbe. Si  $P$  se déplace le long d'une courbe  $\mathcal{C}$ , qui peut être la trajectoire du point matériel  $M$ , le travail développé par la force  $\vec{F}$  est

<sup>32</sup>Voir par exemple l'expérience réalisée par Foucault en 1851 au Panthéon à Paris.

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{P}$$

Dans cette expression, le produit scalaire sous le signe intégrale s'écrit

$$w = \vec{F} \cdot d\vec{P} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

où  $F_x, F_y, F_z$ , et  $dx, dy, dz$ , sont les composantes cartésiennes respectives de la force  $\vec{F}$  et du déplacement élémentaire  $d\vec{P}$ . Le calcul effectif d'une telle intégrale fait généralement appel à une représentation paramétrique de la courbe. Pour illustration, supposons que  $C$  soit la trajectoire réelle du point matériel  $M$ . On a alors les équations horaires  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , et  $z = h(t)$ , d'où l'on tire  $dx = f'(t)dt$ ,  $dy = g'(t)dt$  et  $dz = h'(t)dt$ . La date  $t$  joue dans ce cas le rôle de paramètre permettant de définir la position du point sur la trajectoire. En remplaçant dans les composantes  $F_x, F_y$ , et  $F_z$  les coordonnées  $x, y$  et  $z$  ainsi que leurs dérivées (si ces composantes en dépendent) par leurs expressions en fonction de  $t$ , on obtient pour  $w$  une expression de la forme

$$w = \mathcal{K}(t)dt$$

Si la position initiale  $P_1$  et la position finale  $P_2$  considérées sur la trajectoire correspondent respectivement aux dates  $t_1$  et  $t_2$ , on a finalement

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{K}(t)dt$$

c'est-à-dire que  $W_C$  s'exprime maintenant comme une intégrale simple d'une fonction de la seule variable  $t$ .

On appelle *puissance instantanée* développée par une force  $\vec{F}$  lorsque son point d'application est animé de la vitesse  $\vec{v}$  le produit scalaire

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

C'est donc une quantité de travail fournie par unité de temps :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

L'unité S.I. de travail est le *Joule*, de symbole J, et l'unité de puissance (1 J/s) est le *Watt*, de symbole W.

### 2.7.2 Théorème de l'énergie cinétique

Etablissons maintenant le *théorème de l'énergie cinétique*. Le travail développé entre deux dates infiniment voisines  $t$  et  $t + dt$  par la résultante  $\vec{F}$  des forces appliquées sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement est

$$w = \vec{F} \cdot d\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt = dE_c$$

où

$$E_c = \frac{m \vec{v}^2}{2}$$

est l'*énergie cinétique* du point matériel. On obtient donc les résultats suivants

- ♠ La puissance instantanée développée par la résultante des forces appliquées sur un point matériel  $M$  en mouvement est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du point matériel. ;

♣ *Le travail total développé entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  par l'ensemble des forces appliquées sur un point matériel  $M$  en mouvement est égal à la variation de l'énergie cinétique de  $M$  entre ces deux dates.*

Ainsi, en suivant le mobile  $M$  au cours de son mouvement, on a

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

C'est le théorème de l'énergie cinétique.

Ces résultats se généralisent à un système de points matériels, l'énergie cinétique du système étant simplement la somme des énergies cinétiques de ses constituants.

## 2.8 Applications

La relation fondamentale de la Dynamique est à la base de toute prédiction dans les phénomènes de la Mécanique Classique. Les exemples qui suivent illustrent ce pouvoir prédictif<sup>33</sup>

### 2.8.1 Chute libre

Un objet  $M$ , assimilable à un point matériel de masse  $m$ , est lâché sans vitesse initiale d'un point situé à la cote  $h$  au dessus du sol terrestre (voir figure). Sous l'effet de la force de gravitation entre cet objet et la Terre, ce qu'on appelle communément le poids de l'objet, celui-ci va tomber (c'est-à-dire, va se diriger vers le sol). Quelles sont les lois horaires régissant ce mouvement ? Pour les établir, nous appliquerons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre local  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ , en admettant que pendant la durée de la chute de l'objet, ce référentiel peut être considéré comme galiléen. Dans  $\mathcal{R}$ , la seule force agissant sur l'objet, lorsque ce dernier est lâché, est son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  (voir le paragraphe 2.5.1). La relation fondamentale s'écrit donc ici

$$m \vec{a} = m \vec{g} = -mg \vec{k}$$

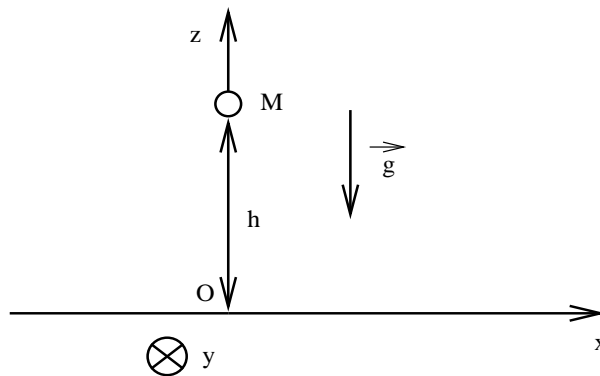


Figure 2.14

En projetant cette équation vectorielle sur les trois axes cartésiens  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  et après simplification du facteur masse, on obtient alors *trois équations différentielles*

<sup>33</sup>Il est conseillé de visiter le site web suivant  
<http://www.uel-pcsm.education.fr/consultation/presentation/index.html>

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Ces trois équations différentielles sont du *second ordre* car elles font intervenir les *dérivées secondes* des coordonnées par rapport au temps. Pour obtenir les équations horaires  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , et  $z = z(t)$  à partir de ces équations, il faudra *intégrer* ces dernières par rapport à  $t$ . Chaque intégration faisant apparaître une *constante d'intégration*, nous obtiendrons finalement 6 constantes d'intégration. Ces constantes ne peuvent être arbitraires, car le protocole de l'expérience est bien défini, et on ne peut obtenir ici qu'une seule solution<sup>34</sup>. L'ajustement des constantes aux circonstances de l'expérience se fait en appliquant les *conditions initiales* (à  $t = 0$ , instant du lâchage). Ces conditions doivent être au nombre de 6. On se donne alors les *trois* coordonnées du point de départ ainsi que les *trois* composantes du vecteur vitesse initiale de l'objet. Ainsi, nous devons satisfaire les 6 contraintes

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = h, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0$$

Intégrant l'équation pour  $x$ , on obtient, successivement,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = C_1$$

mais puisque  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ , la constante  $C_1$  est nulle; d'où

$$x(t) = \text{constante} = C_2$$

mais puisque  $x(0) = 0$ , la constante  $C_2$  est aussi nulle; d'où

$$x(t) = 0 \text{ pour tout } t.$$

Procédant de façon analogue pour obtenir  $y(t)$ , on obtient :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \text{constante} = C_3 = \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

puis

$$y(t) = \text{constante} = C_4 = y(0) = 0, \quad \text{soit } y(t) = 0 \text{ pour tout } t$$

Enfin, l'intégration de l'équation pour  $z$  conduit à

$$\frac{dz}{dt}(t) = -gt + C_5$$

mais

$$\frac{dz}{dt}(0) = C_5 = 0, \quad \text{d'où } \frac{dz}{dt}(t) = -gt$$

puis

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_6$$

or  $z(0) = C_6 = h$ , donc

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

De ces relations, on déduit notamment que le mouvement de chute de l'objet s'effectue suivant la verticale locale ( $x$  et  $y$  restent nuls), et que l'objet atteint le sol à la date (on a alors  $z = 0$ )

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

avec la vitesse

$$v_s = \sqrt{2gh}$$

Les premières expériences sur la chute des corps ont été réalisées par Galilée dès 1604. Mais ce n'est que vers 1632 que Galilée a énoncé avec précision les lois qui leur correspondent<sup>35</sup>.

<sup>34</sup>Il existe pour ce type d'équation un théorème d'existence et d'unicité.

<sup>35</sup>En utilisant plutôt des plans inclinés, pour ralentir la chute.

### 2.8.2 Lancement d'un projectile à partir du sol terrestre

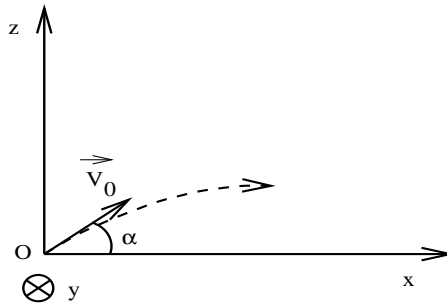


Figure 2.15

L'analyse théorique de ce type d'expérience a encore pour base les mêmes équations que celles écrites au paragraphe précédent, en admettant ici encore qu'on puisse négliger les forces de frottement dues à l'atmosphère. Cette fois cependant, la vitesse initiale du projectile n'est pas nulle. On a en effet

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_{0y} = 0, \quad V_{0z} = V_0 \sin \alpha$$

Comme précédemment nous obtenons  $y(t) = 0$ , c'est-à-dire que le mouvement du projectile s'effectue dans le plan  $xOz$ , qui est le plan vertical dans lequel se trouve le vecteur vitesse initiale.

Puis, par intégrations successives et en tenant compte des nouvelles conditions initiales

$$x(t) = V_0 t \cos \alpha, \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin \alpha$$

On obtient l'équation de la courbe sur laquelle s'inscrit la trajectoire du projectile en éliminant  $t$  des équations. Ceci conduit à la relation

$$z = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

qui est l'équation d'une *parabole*. L'altitude la plus haute atteinte par le projectile correspond à l'annulation de la composante de la vitesse suivant la verticale, ou encore, à l'annulation de la dérivée  $dz/dx$ . On a ainsi

$$\frac{dz}{dt} = -g t + V_0 \sin \alpha = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_s = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

correspondant à l'abscisse

$$x = x_s = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

et à l'altitude maximum

$$z = z_s = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Le point le plus éloigné du point de lancement correspond au point d'impact du projectile sur le sol. L'abscisse correspondante  $x_c$  s'appelle la *portée*. Son expression s'obtient à partir de l'équation  $z = 0$  :

$$z = x \left( -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \text{ (point de lancement) ou pour}$$

$$x = x_c = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2x_s$$



Le résultat  $x_c = 2x_s$  était évident a priori, du fait de la symétrie de la parabole par rapport à l'axe parallèle à  $Oz$  et passant par son sommet.

On voit que pour une intensité de vitesse initiale donnée, la portée est maximum lorsque le projectile est lancé dans une direction faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale.

### 2.8.3 Mouvement sur un plan incliné

On considère maintenant le mouvement d'un objet pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. L'objet est soumis à deux forces : son poids  $m \vec{g}$ , et la force de réaction  $\vec{R}$  du plan qui, en l'absence de frottement est perpendiculaire au plan incliné. L'objet est lâché sans vitesse initiale depuis un point  $H$  du plan incliné, situé à l'altitude  $h$  au dessus d'un point  $O$  du plan horizontal (voir figure).

La relation fondamentale s'écrit ici

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R} = -mg \vec{k} + \vec{R}$$

Il est alors judicieux de choisir les coordonnées suivantes pour définir la position de l'objet  $M$  sur le plan incliné : l'abscisse  $x' = \overline{HM}$  de  $M$  sur le plan incliné, définie par rapport au point de lâchage  $H$ ; la cote  $z'$  de  $M$  suivant la perpendiculaire au plan incliné située dans le plan  $HOA$ ; et enfin l'ordonnée  $y$  de  $M$ .

Par projection de la relation fondamentale suivant les trois axes de coordonnées correspondants ( $Hx'$ ,  $Hx'$  et  $Hy$ ), et après simplification par  $m$ , on obtient

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = g \sin \alpha, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = -g \cos \alpha + \frac{R}{m}$$

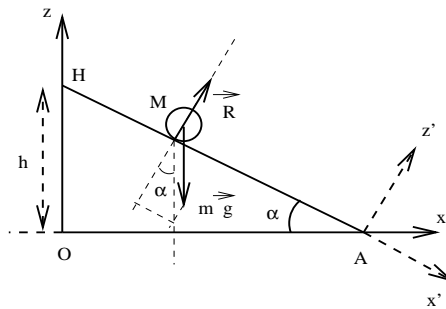


Figure 2.16

Or, tant que  $M$  reste en contact avec le plan, on a  $z'(t) = 0$ . Ceci implique alors l'égalité

$$R = mg \cos \alpha$$

Pour ce qui concerne  $y(t)$ , comme précédemment, par intégration et compte tenu des conditions initiales, on obtient  $y(t) = 0$  pour tout  $t$ .

Enfin, deux intégrations successives de l'équation vérifiée par  $x'$  donnent, compte tenu encore des conditions initiales

$$x'(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

On trouve ainsi que l'objet atteint le point  $A$  à la date  $t_A$  telle que  $x' = HA = h / \sin \alpha$ , soit

$$t_A = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

### 2.8.4 Mouvement d'une masse au bout d'un ressort

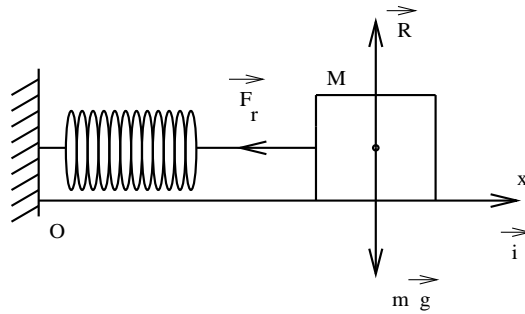


Figure 2.17

Un objet  $M$  de masse  $m$  peut se mouvoir sans frottement sur un plan horizontal. Il est accroché à une extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est fixée en un point d'un plan vertical. Nous admettrons ici qu'en fait l'objet, assimilable à un point matériel, ne se déplace que suivant une direction  $Ox$  du plan horizontal. Nous noterons  $x$  l'abscisse de  $M$ . L'objet est ici soumis à trois forces : son poids, la réaction du plan horizontal, et la force de rappel du ressort  $\vec{F}_r = -K(x - x_e) \vec{i}$ , où  $K$  est la raideur du ressort et  $x_e > 0$  sa longueur au repos.

Comme l'objet est supposé rester dans le plan horizontal, la force de réaction du plan équilibre exactement le poids de l'objet. L'application de la relation fondamentale conduit alors à l'équation simplifiée suivante, obtenue par projection sur l'axe  $Ox$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x - x_e)$$

Posons  $X = x - x_e$ ; c'est l'écart de l'abscisse par rapport à la position de repos du ressort. On obtient donc l'équation

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 X$$

où  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ .

Cette équation différentielle<sup>36</sup> peut être résolue simplement de la façon suivante.

Posons  $Y = -\frac{1}{\omega} \frac{dX}{dt}$  et interprétons les deux quantités  $X$  et  $Y$  comme les coordonnées cartésiennes d'un point *fictif*  $P$  en mouvement dans un plan  $XO'Y$ . Le problème consiste à trouver les lois horaires  $X(t)$  et  $Y(t)$ . Déterminons les composantes cartésiennes de la vitesse de  $P$ . On a

$$\frac{dX}{dt} = -\omega Y, \quad \text{et} \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{1}{\omega} \frac{d^2X}{dt^2} = \omega X$$

Il est alors facile de montrer que la distance  $O'P$  reste constante. En effet

$$\frac{d}{dt}(O'P^2) = \frac{d}{dt}(X^2 + Y^2) = 2X \frac{dX}{dt} + 2Y \frac{dY}{dt} = -\omega YX + \omega XY = 0$$

Soit  $A$  la valeur constante de  $O'P$ . Exprimant les coordonnées cartésiennes de  $P$  en fonction de ses coordonnées polaires

$$X = O'P \cos \theta = A \cos \theta, \quad Y = O'P \sin \theta = A \sin \theta$$

<sup>36</sup>Aussi appelée équation différentielle de l'oscillateur harmonique libre et non amorti.

on obtient

$$\frac{dX}{dt} = -A \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\omega Y = -A\omega \sin \theta$$

Il vient alors, par identification

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

L'intégration de cette dernière équation est immédiate et donne

$$\theta(t) = \omega t + \phi$$

où  $\phi$  est une constante. On obtient ainsi

$$X(t) = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \phi)$$

autrement dit, la *solution générale* de l'équation différentielle  $\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 X$  est une *fonction sinusoidale du temps, de pulsation*  $\omega$ . Elle dépend de deux constantes,  $A$  et  $\phi$ , que l'on ajuste aux conditions initiales. Cet ajustement se fait plus aisément en réécrivant  $X$  sous la forme

$$X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

Revenant à notre problème de l'objet accroché au ressort, supposons que cet objet soit lâché depuis le point d'abscisse  $x_0$  sans vitesse initiale. On a donc

$$X(0) = x_0 - x_e = a \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dt}(0) = \frac{dx}{dt}(0) = -\omega b = 0$$

d'où  $a = x_0 - x_e$ ,  $b = 0$  et

$$x(t) = x_e + (x_0 - x_e) \cos \omega t$$

Le mouvement de l'objet est un mouvement sinusoidal d'amplitude  $x_0 - x_e$  autour de la position de repos  $x = x_e$ , et dont la période est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{m}}$$

### 2.8.5 Le pendule simple

Le pendule simple a été décrit au paragraphe 2.5.4. L'objet au bout du fil est soumis à deux forces : son poids et la force de tension du fil. A l'instant initial, il est lâché sans vitesse initiale, l'angle du fil avec la verticale étant alors  $\theta_0$ . Nous admettrons que le fil du pendule reste dans le plan vertical  $\mathcal{P}$  défini par la verticale et le vecteur position initial  $\overrightarrow{OM}_0$ . Pour étudier le mouvement ultérieur de l'objet dans ce plan, il est préférable d'utiliser ses coordonnées polaires  $OM = \ell$ , longueur du fil qui reste constante, et l'angle  $\theta$  entre le fil et la verticale. Soit  $\overrightarrow{u}$  le vecteur unitaire porté par  $\overrightarrow{OM}$  (voir figure 2.18) :

$$\overrightarrow{u} = \cos \theta \overrightarrow{k} + \sin \theta \overrightarrow{i}$$

et  $\overrightarrow{w}$  le vecteur directement perpendiculaire à  $\overrightarrow{u}$  :

$$\overrightarrow{w} = -\sin \theta \overrightarrow{k} + \cos \theta \overrightarrow{i}$$

Calculons les composantes polaires respectives du vecteur vitesse et du vecteur accélération. On a  $\overrightarrow{OM} = \ell \overrightarrow{u}$  et

$$\overrightarrow{V} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d}{dt}(\ell \overrightarrow{u}) = \ell \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \ell \frac{d\theta}{dt} \frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \ell \overrightarrow{w} \frac{d\theta}{dt}$$

et

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \ell \left( \vec{w} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d \vec{w}}{d\theta} \right)$$

soit

$$\vec{a} = \ell \left( \vec{w} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{u} \right)$$

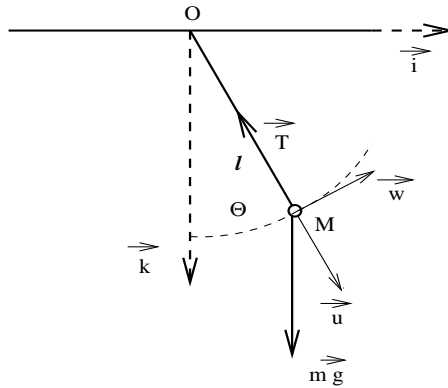


Figure 2.18

Nous avons déjà signalé que l'intensité de la force de tension n'est pas connue a priori : elle dépend du mouvement de l'objet. Il nous faut donc trouver une équation d'évolution qui ne fasse pas intervenir la force de tension. Cette équation est obtenue simplement en projetant la relation fondamentale

$$m \vec{a} = mg \vec{k} - T \vec{u}$$

suivant la direction perpendiculaire au fil, c'est-à-dire suivant  $\vec{w}$ , puisque la force de tension est dirigée suivant le fil, c'est-à-dire suivant  $\vec{u}$ . On obtient ainsi

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \vec{k} \cdot \vec{w} = -mg \sin \theta$$

soit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

C'est l'équation différentielle décrivant l'évolution du pendule simple. Contrairement aux équations rencontrées jusqu'à présent, celle-ci n'est pas *linéaire*. Cependant, si l'angle  $\theta_0$  est suffisamment petit, on peut linéariser l'équation en faisant l'approximation  $\sin \theta \approx \theta$ <sup>37</sup>.

Cette approximation conduit à l'équation simplifiée

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \theta$$

semblable à celle rencontrée au paragraphe précédent. Posons

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

<sup>37</sup>On peut noter ici que cette approximation est vérifiée à moins de 10 % près jusque 45°.

$\tau$  est la période du pendule simple. Comme nous l'avons vu, la solution générale de cette équation est sinusoidale, de pulsation  $\omega$ . Compte tenu des conditions initiales, on trouve ainsi

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$$

Le pendule évolue d'un mouvement périodique, sinusoidal dans le cas des petits angles, autour de la position de repos correspondant à la verticale ( $\theta = 0$ ).

Ayant trouvé la loi d'évolution du pendule, nous pouvons exprimer l'intensité de la tension du fil au cours de cette évolution. Pour ce faire, nous projetons maintenant la relation fondamentale sur la direction radiale, c'est-à-dire suivant  $\vec{u}$ . On obtient ainsi

$$-m\ell \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg \vec{k} \cdot \vec{u} - T = mg \cos \theta - T$$

ou

$$T = m\ell \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg \cos \theta$$

d'où, en utilisant l'approximation  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , et compte tenu de la loi horaire  $\theta(t)$  trouvée précédemment

$$T = mg + m \left( \ell \omega^2 \theta_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{g}{2} \theta_0^2 \cos^2 \omega t \right)$$

soit encore (puisque  $\omega^2 = g/\ell$ )

$$\frac{T}{mg} = 1 + \theta_0^2 \left( \sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \right)$$

Cette dernière relation montre explicitement que la tension du fil n'a pas une valeur donnée a priori, mais dépend du mouvement du pendule. Il faut cependant noter que l'écart par rapport à la valeur de cette tension à l'équilibre, soit  $mg$  n'est que du *second ordre* en  $\theta_0$ .

Lorsque l'angle  $\theta_0$  est plus important, le mouvement du pendule n'est plus sinusoidal. Il est cependant encore périodique, et la période des oscillations effectuées de part et d'autre de la verticale est donnée par la formule approchée

$$\tau' = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Ce n'est que dans le cas d'oscillations de faible amplitude que la période est indépendante de cette amplitude : c'est ce qu'on appelle l'*isochronisme des petites oscillations*, phénomène qui fut remarqué pour la première fois par Galilée<sup>38</sup>.

## 2.8.6 Mouvement dans un champ de gravitation

Nous étudierons le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation de la Terre, en nous plaçant du point de vue du repère géocentrique  $\mathcal{G}$ , supposé galiléen. Nous admettrons que nous pouvons décrire l'interaction gravitationnelle entre l'objet et la Terre comme s'il s'agissait de deux points matériels,  $M$  de masse  $m$  pour l'objet,  $O$  de masse  $M_T$  pour la Terre. Ceci sera justifié ultérieurement.

Dans le référentiel  $\mathcal{G}$  d'origine  $O$ , la seule force s'exerçant sur  $M$  est la force de gravitation

$$\vec{F}_M = -GmM_T \frac{\vec{u}}{r^2}$$

<sup>38</sup>En 1583, à l'âge de 19 ans. Les lois du pendule simple ne furent explicitement données par Galilée que dans ses écrits de 1632. C'est vers 1655 que Huygens utilisa le pendule pour réguler le mécanisme des horloges :

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule\\_simple](http://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple) ;

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/periode\\_pendule.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.html)

où  $r = OM$  et  $\vec{u} = \vec{OM} / r$ . La relation fondamentale s'écrit

$$\vec{a}_M = \vec{F}_M / m = -GM_T \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Utilisons l'expression intrinsèque de l'accélération. On obtient la relation

$$-GM_T \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

où, rappelons-le,  $\vec{v} = v \vec{T}$  est le vecteur vitesse instantanée de l'objet,  $v$  sa norme,  $\vec{T}$  le vecteur unitaire tangent à la trajectoire,  $R$  le rayon de courbure de la trajectoire et  $\vec{N}$  le vecteur unitaire de la normale principale, au point considéré.

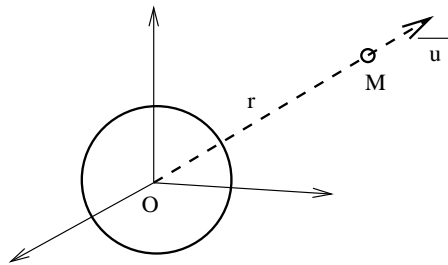


Figure 2.19

Cette dernière relation montre que les trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  sont, à chaque instant, dans un même plan, ou encore, que les trois vecteurs  $\vec{OM}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont dans un même plan, à chaque instant. Montrons que ce plan est fixe. Pour cela il suffit de montrer que le plan en question est le même à une date  $t$  et à la date infiniment voisine  $t + dt$ . Or, par définition des dérivées, on a

$$\vec{OM}(t + dt) = \vec{OM}(t) + dt \vec{v}(t), \quad \text{et} \quad \vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + dt \vec{a}(t)$$

ce qui montre

- ◇ que  $\vec{OM}(t + dt)$  est contenu dans le plan défini par  $\vec{OM}(t)$  et  $\vec{v}(t)$ ;
- ◇ que  $\vec{v}(t + dt)$  est contenu dans le plan défini par  $\vec{v}(t)$  et  $\vec{a}(t)$ , qui est aussi celui défini par  $\vec{OM}(t)$  et  $\vec{v}(t)$  puisque, d'après la relation fondamentale,  $\vec{a}(t)$  est parallèle à  $\vec{OM}(t)$ .

Ainsi, le plan défini par  $\vec{OM}(t + dt)$  et  $\vec{v}(t + dt)$  est le même que celui défini par  $\vec{OM}(t)$  et  $\vec{v}(t)$ . C'est donc un plan fixe dans  $\mathcal{G}$ , qui contient en outre le point  $O$ . La trajectoire est donc plane. Une démonstration plus élégante de cet important résultat fait appel à la notion de *moment cinétique* et sera donnée dans l'UE LP102.

Pour étudier le mouvement de l'objet  $M$ , plaçons-nous dans le plan fixe de la trajectoire.

Peut-il exister pour  $M$  un mouvement uniforme, c'est-à-dire tel que  $\frac{dv}{dt} = 0$ ? Dans ce cas, la relation fondamentale donne

$$-GM_T \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

En calculant la norme de chacun des deux vecteurs entrant dans cette égalité, et tenant compte du fait que les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{N}$  sont *unitaires* (de norme égale à 1), on trouve

$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{v^2}{R}$$

et, reportant cette dernière égalité dans la première, on obtient

$$\vec{N} = -\vec{u}$$

Or,  $\vec{N}$  étant perpendiculaire à  $\vec{T}$ ,  $\vec{u}$  doit donc, pour ce type de mouvement, être perpendiculaire au vecteur tangent. On en déduit que la trajectoire est obligatoirement *circulaire*, de centre  $O$ . En effet

$$\frac{d}{dt}(OM^2) = 2 \vec{OM} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{OM}) = 2 \vec{OM} \cdot \vec{v} = 2rv \vec{u} \cdot \vec{T} = 0$$

Par conséquent,  $r = OM$  est constant. Réciproquement, si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme. En effet, on a alors  $\vec{N} = -\vec{u}$  et comme  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  sont orthogonaux, la relation fondamentale indique que la composante tangentielle de l'accélération doit être nulle, c'est-à-dire que l'on doit avoir  $\frac{dv}{dt} = 0$  : le mouvement est uniforme.

Considérons des trajectoires circulaires pour lesquels le mouvement de  $M$  est donc uniforme. On a maintenant, avec  $R = r$

$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

En introduisant la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  telle que  $v = \omega r$ , puis la *période de rotation*  $T = 2\pi/\omega$

$$\frac{GM_T}{r^2} = \omega^2 r = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

ou

$$r^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} T^2$$

On en déduit, sous une forme simplifiée, l'une des *lois de Kepler* : le cube du rayon de la trajectoire est proportionnel au carré de la période de rotation. Appliquant ce résultat à la Lune dont la période de rotation est de 27,3 jours, et en prenant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  S.I.,  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg, on trouve  $r \approx 390000$  kms. Ayant cette estimation de la distance Terre-Lune, on peut ensuite, par des observations optiques, en déduire le rayon moyen de la Lune.

Considérons ensuite le cas d'un satellite *géostationnaire*. Un tel satellite est vu immobile par tout observateur sur la Terre. Celle-ci étant en rotation sur elle-même, la trajectoire de ce satellite est nécessairement contenue dans un plan équatorial et le satellite doit avoir la même période de rotation que celle de la Terre. On trouve alors que sa distance du centre de la Terre doit être  $\approx 42000$  kms, c'est-à-dire qu'il se trouve à environ 36400 kms du sol terrestre.

Pour terminer, insistons sur le fait que la possibilité d'avoir une trajectoire circulaire de centre  $O$  résulte de ce que la force de gravitation est *attractive*, mais ne dépend pas directement de la loi de variation de l'intensité de cette force avec  $r$ . Si nous avons une loi de force du type

$$\vec{F}_M = f(r) \vec{u}, \quad \text{avec } f(r) \geq 0$$

(force centrale répulsive) la relation fondamentale donnerait, en faisant l'hypothèse d'un mouvement circulaire (pour lequel  $\vec{N} = -\vec{u}$ )

$$-f(r) \vec{N} = m \left[ \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \right]$$

d'où nous déduirions  $\frac{dv}{dt} = 0$  (mouvement uniforme), mais aussi

$$-f(r) = m \frac{v^2}{R}$$

et par suite un rayon de courbure  $R = r$  négatif, ce qui est impossible. En revanche, si la force est attractive ( $f(r) \leq 0$ ), l'égalité précédente peut être satisfaite, indépendamment de la forme explicite de  $f(r)$ <sup>39</sup>.

## 2.9 Exemples d'application du théorème de l'énergie cinétique

### 2.9.1 Chute libre sans frottement

En l'absence de frottement, la seule force qui s'exerce sur l'objet en chute libre est son poids. Entre le point  $D$  du départ de la chute et le point  $A$  d'arrivée au sol, le travail de cette force *constante* est

$$W = \vec{F} \cdot \vec{DA} = m \vec{g} \cdot \vec{DA} = mgh$$

où  $h = DA$ . D'après le théorème de l'énergie cinétique, ce travail est égal à

$$W = \Delta E_c = \frac{m}{2} (v_A^2 - v_D^2)$$

$v_A$  et  $v_D$  étant la vitesse finale en  $A$  et la vitesse initiale en  $D$  respectivement. Si l'on suppose que la vitesse initiale est nulle, on obtient alors

$$v_A^2 = 2gh, \quad \text{soit} \quad v_A = \sqrt{2gh}$$

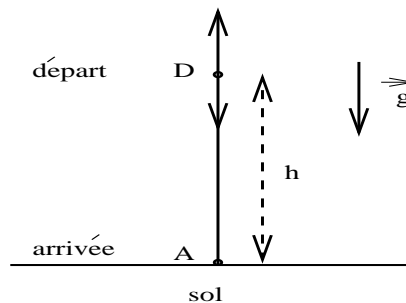


Figure 2.20

### 2.9.2 Plan incliné

En l'absence de frottement, la force de réaction du plan sur le mobile est perpendiculaire à la trajectoire du mobile et ne développe donc aucun travail. Seul le poids du mobile fournit un travail, égal à

$$W = m \vec{g} \cdot \vec{DA} = m \vec{g} \cdot (\vec{DO} + \vec{OA}) = m \vec{g} \cdot \vec{DO} = mgh$$

qui ne dépend donc que de l'altitude du point de départ  $D$ . Le théorème de l'énergie cinétique donne encore, pour une vitesse initiale en  $D$  nulle

$$v_A^2 = 2gh, \quad \text{soit} \quad v_A = \sqrt{2gh}$$



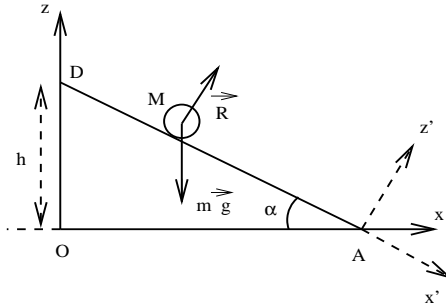


Figure 2.21

### 2.9.3 Pendule simple

Ce cas est encore semblable aux deux précédents. En effet, la force de tension du fil étant orientée suivant le fil est perpendiculaire à la trajectoire de la masse accrochée au bout du fil. Seul le poids de cette masse travaille.

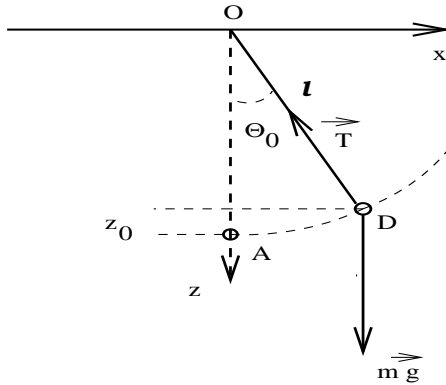


Figure 2.22

Le travail du poids entre la position de départ  $D$  et la position  $A$  correspondant au passage de la masse à la verticale est égal à

$$W = \int_{C(D,A)} m \vec{g} \cdot d\vec{M}$$

$C(D, A)$  étant l'arc de cercle  $\widehat{DA}$ . Ecrivant  $d\vec{M}$  sous la forme

$$d\vec{M} = dx \vec{i} + dz \vec{k}$$

on obtient

$$\vec{g} \cdot d\vec{M} = mgdz$$

$z$  étant défini suivant la *verticale descendante*, et l'intégration revient à

<sup>39</sup>A cet égard, on peut citer un théorème établi par J. Bertrand en 1873 : *Etant donnée une particule ponctuelle placée dans un champ de forces centrales  $\vec{F}(M) = f(r) \vec{u}$  où  $f(r)$  est une fonction continue et continuellement dérivable deux fois, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les trajectoires bornées soient fermées est que le champ de forces soit tel que  $f(r) = -Kr$  ou  $f(r) = -\frac{K}{r^2}$ ,  $K$  étant une constante positive.*

$$W = \int_{z_D}^{z_A} mgdz = mg(z_A - z_D) = mgz_0 = mg\ell(1 - \cos \theta_0)$$

D'où, en supposant encore une vitesse initiale en  $D$  nulle

$$W = \Delta E_c = \frac{m}{2} v_A^2$$

et

$$v_A^2 = 2g\ell(1 - \cos \theta_0) \approx g\ell\theta_0^2, \quad \text{soit} \quad v_A \approx \theta_0\sqrt{g\ell}$$

### 2.9.4 Ressort

Considérons à nouveau un système ressort-masse. La force de réaction du plan est perpendiculaire au plan dans lequel s'effectue le mouvement (pas de frottement) et il en est de même pour le poids de la masse. Par suite, seule la force de rappel élastique du ressort développe un travail au cours du mouvement de la masse  $M$ . Pour un déplacement  $dx$  de  $M$ , le travail élémentaire correspondant est

$$w = \vec{F}_r \cdot d\vec{M} = -K(x - x_e)dx = -d \left[ \frac{K}{2}(x - x_e)^2 \right] = \Delta E_c$$

On obtient ainsi la relation

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} (x - x_e)^2 = \text{constante}$$

Alors que la relation fondamentale lie la coordonnée  $x$  à sa *dérivée seconde*  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , cette dernière relation lie la coordonnée  $x$  à sa *dérivée première*  $\frac{dx}{dt}$ , et constitue en quelque sorte une première intégration de la relation fondamentale. Comme on le voit, une constante est apparue à la suite de cette intégration. Cette constante est ce qu'on appelle une *intégrale première* du mouvement. Comme nous le verrons plus loin, la constance de la quantité  $\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} (x - x_e)^2$  exprime la *conservation de l'énergie mécanique* du système masse-ressort en l'absence de frottement.

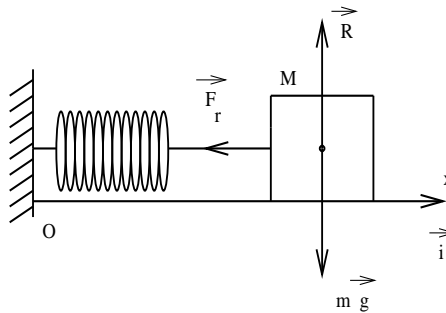


Figure 2.23

## 2.10 Généralisation de la relation fondamentale à un système quelconque - Quantité de mouvement

Prenons pour exemple un système de deux point matériels  $M_1$  et  $M_2$  en interaction, éloigné de tout autre système et situé dans un référentiel galiléen. Appliquant la relation fondamentale à chacun des deux points matériels, on obtient

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{1/2}, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{2/1}$$

d'où l'on déduit, en tenant compte du principe de l'action et de la réaction

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \right) = \vec{0}$$

On définit la *quantité de mouvement*, notée  $\vec{p}$ , d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  par

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

La quantité de mouvement *totale*  $\vec{P}$  du système des deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  est la résultante de leurs quantités de mouvement  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{V}_1$  et  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{V}_2$  :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

et l'on a

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Or, ici le système  $M_1 + M_2$  est supposé être isolé :  $\vec{F}_{1/2}$  et  $\vec{F}_{2/1}$  sont des forces intérieures. On retrouve alors le principe de l'inertie sous une autre forme :

**pour tout système isolé dans un référentiel galiléen, on a**

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

et la quantité de mouvement d'un tel système reste constante dans tout référentiel galiléen. On dit aussi qu'elle se *conserve*, ou qu'elle est *conservée*.

Si le système n'est pas isolé, mais subit de la part de systèmes extérieurs une action décrite par un vecteur force total  $\vec{F}_{\text{ext}}$ , on a la relation fondamentale

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Sous cette forme, la relation fondamentale de la Dynamique peut être généralisée aux problèmes où le paramètre de masse devient fonction de la vitesse. C'est notamment le cas des fusées perdant du carburant, mais c'est aussi ce qu'il advient en Relativité.

Donnons encore la définition du *centre de masse* ou *centre de gravité* d'un système de  $n$  points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$  respectivement. C'est un point  $G$  défini par la relation

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

Dans un repère d'origine  $O$  on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} \quad \text{où} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

$M$  représente la *masse totale* du système. Géométriquement,  $G$  est aussi le *barycentre* des  $n$  points  $M_i$ , chacun étant affecté de son coefficient de masse  $m_i$ . La vitesse du centre de masse est

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{v_i}$$

d'où l'on déduit la relation

$$M \overrightarrow{V_G} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{P_G}$$

c'est-à-dire que la quantité de mouvement totale du système est aussi la quantité de mouvement du centre de masse.

On appelle *référentiel du centre de masse* d'un système un référentiel lié à son centre de masse (et dont l'origine peut d'ailleurs être prise au centre de masse). Si le système est isolé, sa quantité de mouvement totale reste constante. D'après les relations ci-dessus, la vitesse du centre de masse par rapport à tout référentiel galiléen est alors constante elle aussi<sup>40</sup>. On en déduit que le référentiel attaché au centre de masse d'un système isolé constitue lui aussi un référentiel galiléen.

---

<sup>40</sup>La masse totale d'un système isolé reste constante, même si sa structure interne change en cours d'évolution.

## 2.11 Complément : Composantes polaires de la vitesse et de l'accélération d'un mobile $M$ en mouvement dans un plan

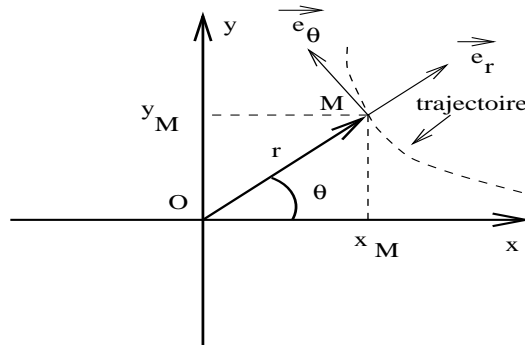


Figure 2.24

Considérons un point matériel  $M$  en mouvement dans le plan  $xOy$ . Les coordonnées polaires de  $M$  sont la distance  $r = OM$  et l'angle  $\theta$  entre le vecteur  $\vec{OM}$  et l'axe  $Ox$  (voir figure). Soit  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire porté par  $\vec{OM}$ . Relativement à la base  $\vec{i}, \vec{j}$ , il a pour expression

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

Notons  $\vec{e}_\theta$  le vecteur unitaire obtenu à partir de  $\vec{e}_r$  par une rotation de  $+\pi/2$  :

$$\vec{e}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

On note que l'on a

$$\vec{e}_\theta = \frac{d \vec{e}_r}{d\theta}$$

Les deux vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  constituent aussi une base orthonormée, mais à la différence des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  leur orientation change avec la position de  $M$  (ce sont des fonctions de  $\theta$ ). C'est pourquoi cette base est qualifiée de *base locale*, associée aux coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . Tout vecteur  $\vec{A}$  situé dans le plan peut être décomposé selon cette base :

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta$$

Les deux quantités  $A_r$  et  $A_\theta$ , sont dites *composantes polaires* du vecteur  $\vec{A}$  et s'obtiennent par projection orthogonale de ce vecteur sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  respectivement :

$$A_r = \vec{A} \cdot \vec{e}_r, \quad A_\theta = \vec{A} \cdot \vec{e}_\theta$$

On a ainsi

$$\left[ \vec{OM} \right]_r = \vec{OM} \cdot \vec{e}_r = r, \quad \left[ \vec{OM} \right]_\theta = \vec{OM} \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

ce qui montre qu'il ne faut pas confondre *coordonnées polaires* de  $M$  ( $r$  et  $\theta$ ) et *composantes polaires* du vecteur  $\vec{OM}$  ( $r$  et  $0$ ) !

Du fait du mouvement de  $M$ ,  $r$  et  $\theta$  sont fonctions du temps. Cherchons les composantes polaires du vecteur vitesse  $\vec{v}$  de  $M$ . On a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Mais

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

On obtient donc

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

Les composantes polaires du vecteur vitesse sont donc

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

Une remarque importante s'impose : les composantes polaires du vecteur vitesse *ne sont généralement pas* les dérivées par rapport au temps des composantes polaires du vecteur  $\vec{OM}$  : ce n'est vrai que dans le cas très particulier d'un mouvement rectiligne pour lequel  $\theta$  reste constant !!

Cherchons ensuite les composantes polaires du vecteur accélération. On a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Comme

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

on obtient finalement

$$\vec{a} = \vec{e}_r \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \vec{e}_\theta \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

Les composantes polaires de l'accélération sont donc

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Le second terme  $r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  dans l'expression de  $a_r$  est souvent appelé "terme centrifuge". Pour un mouvement circulaire, ( $r = \text{constante}$ ) c'est d'ailleurs le seul terme qui subsiste dans  $a_r$  et la composante tangentielle de l'accélération coïncide alors avec la composante  $a_\theta$  : on retrouve bien la relation

$$a_\theta = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = a_T$$