

Chapitre 3

Les champs

3.1 Introduction

En Physique, on est très souvent conduit à considérer des grandeurs dont les valeurs dépendent de la position du point où on les étudie. De telles grandeurs sont appelées des *champs*. Les exemples sont nombreux.

- ◇ En Thermique : lorsque la température d'une pièce varie de point en point.
- ◇ En Météorologie : la densité de l'air ainsi que la pression varient selon la région et l'altitude.
- ◇ En Topographie : l'altitude du relief, selon la région.
- ◇ En Electricité : le potentiel électrique varie le long d'un conducteur.

Si la grandeur étudiée est définie par la donnée d'un seul nombre variable avec la position, on a affaire à un *champ scalaire*. C'est le cas des grandeurs évoquées plus haut : température, densité, pression, altitude. D'autres grandeurs, comme les forces, sont définies par la donnée de trois composantes. Une force dont les composantes varient selon la position du point d'application est un *champ de vecteurs*, ou un *champ vectoriel*¹

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude de champs dont la valeur en un point donné est indépendante du temps. Ce sont des *champs statiques*.

3.1.1 Champs scalaires

Plaçons nous dans un repère cartésien O, x, y, z . Un champ scalaire est donc une fonction à valeurs réelles (ou complexes, plus généralement) $U(x, y, z)$ des coordonnées x, y, z du point M considéré. Une façon commode de visualiser un champ scalaire est de représenter graphiquement les ensembles de points où $U(x, y, z)$ garde une valeur constante. Ces ensembles sont des *surfaces*. En effet, l'équation

$$U(x, y, z) = U_0$$

indique que l'une des variables parmi x, y et z est fonction des deux autres. Autrement dit, l'ensemble correspondant à cette valeur U_0 est un sous-espace à deux paramètres indépendants. Il s'agit bien d'une surface, appelée *surface équipotentielle* (la fonction U étant aussi appelée *potentiel*).

Soit par exemple la fonction U telle que

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = U_0$ n'a de solution réelle que si $U_0 \geq 0$. Posons alors $U_0 = R^2$, où R peut être supposé positif. L'équation précédente prend alors la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

¹On parle alors de *champ de forces*.

qui définit une sphère de centre O et de rayon R .

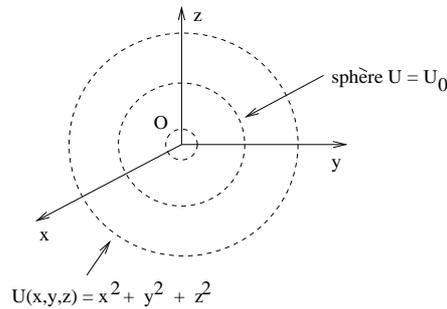


Figure 3.1

Lorsqu'on se restreint à un espace à deux dimensions (c'est le cas dans l'étude de la carte d'un relief), les ensembles d'égale valeur d'une fonction $U(x, y)$ sont des *courbes*, appelées *courbes équipotentielles*, ou encore *lignes de niveau*. Par exemple, pour la fonction telle que $U(x, y) = x^2 + y^2$, les lignes de niveau sont des cercles de centre O .

L'étude des fonctions d'une seule variable nous enseigne que le lien entre une valeur $f(x)$ d'une fonction f et la valeur $f(x + \Delta x)$ infiniment voisine lorsque Δx est suffisamment petit s'effectue au moyen de la dérivée f' de la fonction puisque, par définition de la dérivée on a alors

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x f'(x)$$

Pour les champs scalaires fonctions de plusieurs variables, ce lien se fait par l'intermédiaire d'un champ vectoriel que l'on appelle le *gradient*.

3.2 Un champ de vecteurs : le gradient

3.2.1 Définition

Soit $U(x, y, z)$ un champ scalaire, prenant la valeur U_0 en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Pour les fonctions usuelles de la Physique, on montre que la valeur $U(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ du champ scalaire en un point $M(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ infiniment voisin du point M_0 s'écrit approximativement

$$U(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) \approx U_0 + \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) dz$$

à des termes d'ordres supérieurs près en dx , dy ou dz . Plus précisément, la *partie principale* de l'accroissement $\Delta U = U(M) - U(M_0)$ est

$$dU(M_0, dx, dy, dz) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) dz$$

que l'on appelle *différentielle* de la fonction U au point M_0 , qui dépend aussi des accroissements infinitésimaux dx , dy et dz . Ces derniers sont les composantes cartésiennes du vecteur *déplacement élémentaire*

$$\vec{dM} = M_0 M = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

U étant une fonction *scalaire*, ses trois dérivées partielles par rapport aux coordonnées définissent les trois composantes d'un champ de vecteurs, appelé le *gradient* de U , et noté $\vec{\text{grad}} U$:

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

et l'on a

$$dU = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{dM}$$

La différentielle d'un champ scalaire s'exprime donc simplement comme le produit scalaire de son gradient par le vecteur déplacement élémentaire.

Les propriétés du gradient généralisent celles de la dérivée d'une fonction d'une variable, et résultent de la relation précédente.

Supposons que lorsqu'on passe du point M_0 au point M infiniment voisin, $U(M)$ est supérieur à $U(M_0)$. Alors

$$\Delta U \approx dU = \vec{\text{grad}} U(M_0) \cdot \vec{M_0M} \geq 0$$

On en déduit que, leur produit scalaire étant positif, les deux vecteurs $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ et $\vec{M_0M}$ pointent vers le même demi-espace. En d'autres termes, $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ est orienté vers les régions de *croissance* de U .

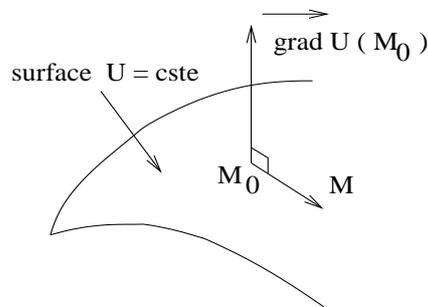


Figure 3.2

Si maintenant $U(M) = U(M_0) = U_0$, les deux points M et M_0 sont sur la même surface équipotentielle correspondant à la valeur U_0 de U . On a alors

$$dU = \vec{\text{grad}} U(M_0) \cdot \vec{M_0M} = 0$$

Comme $\vec{M_0M}$ est infinitésimal, il est dans le plan tangent à la surface équipotentielle en M_0 . La relation précédente indique que, son produit scalaire avec $\vec{M_0M}$ étant nul, $\vec{\text{grad}} U(M_0)$ lui est perpendiculaire : ce vecteur est donc perpendiculaire en M_0 au plan tangent à la surface équipotentielle, c'est-à-dire, orienté suivant la normale en M_0 à cette surface.

Il est utile ici de donner la définition des *lignes de champ* d'un champ de vecteurs. Une ligne de champ d'un champ de vecteurs quelconque $\vec{A}(M)$ est une *courbe* telle qu'en chacun de ses points M , la tangente est définie par le vecteur $\vec{A}(M)$ lui-même. Localement (c'est-à-dire au voisinage du point M), cette courbe peut être assimilée à une droite, ce qui fait que les deux vecteurs $\vec{A}(M)$ et $\vec{MM'} = \vec{dM}$, M' étant un point de cette courbe infiniment voisin de M , doivent être colinéaires. On a donc

$$\vec{dM} = \lambda \vec{A}(M)$$

où λ est une quantité réelle infinitésimale. Projetant cette équation vectorielle sur les trois axes cartésiens, et éliminant λ des équations, on obtient les équations *différentielles* de la ligne de champ, exprimées au moyen des coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}$$

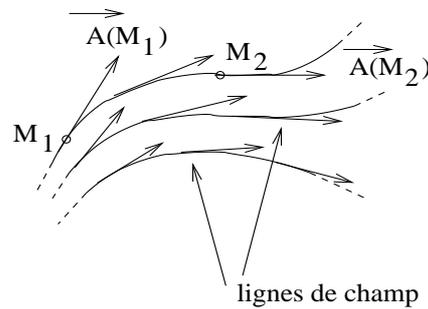


Figure 3.3

En tout point où le champ scalaire U et son gradient sont définis, il passe une surface équipotentielle et une ligne de champ du gradient de U . On en déduit que l'ensemble des surfaces équipotentielles d'une part, et l'ensemble des lignes de champ du gradient d'autre part, sont deux ensembles géométriques orthogonaux.

Par exemple, la fonction $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a pour gradient

$$\vec{\text{grad}} U = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 2z \vec{k} = 2 \vec{OM}$$

Les lignes de champ de ce gradient sont toutes les demi-droites issues du point origine O , qui sont bien toutes perpendiculaires à toutes les sphères de centre O , équipotentielles de U .

Enfin, justifions l'appellation de *lignes de plus grandes pentes* données aussi aux lignes de champ du gradient. Deux points P et P' étant infiniment voisins, on a

$$U(P') - U(P) = \Delta U \approx dU = \vec{\text{grad}} U(P) \cdot \vec{PP'} = \|\vec{\text{grad}} U(P)\| \|\vec{PP'}\| \cos \alpha$$

α étant l'angle entre $\vec{\text{grad}} U(P)$ et $\vec{PP'}$. De cette relation on déduit les deux résultats suivants. D'une part, à partir du point P , et pour une distance PP' donnée, on obtient la *plus grande variation* de U en prenant le vecteur $\vec{PP'}$ selon la même orientation que celle de $\vec{\text{grad}} U(P)$, c'est-à-dire, pour $\alpha = 0$. D'autre part, pour une variation donnée de U , le *plus court chemin* pour obtenir cette variation doit être effectué selon la direction et le sens du gradient.

Ces résultats peuvent être illustrés simplement en considérant, dans le plan xOy la fonction telle que $U(x, y) = x$. Son gradient est $\vec{\text{grad}} U(M) = \vec{i}$. Les lignes de niveau de cette fonction sont toutes les droites parallèles à l'axe $y'y$ tandis que les lignes de champ de son gradient sont toutes les droites parallèles à l'axe $x'x$. Il est manifeste que le plus court chemin pour passer d'une valeur de U à une autre, c'est-à-dire, en fait, pour passer d'une valeur de x à une autre, est selon l'axe $x'x$.

3.2.2 Composantes du gradient dans les divers systèmes de coordonnées

Nous venons de définir le gradient d'une fonction scalaire par ses composantes cartésiennes. Cependant, le repérage des points au moyen des coordonnées cartésiennes n'est pas toujours le plus approprié. Deux autres modes de repérage sont très utiles pour de nombreux problèmes. Il s'agit de celui des coordonnées dites *cylindriques* et de celui des coordonnées dites *sphériques*.

Définissons tout d'abord les coordonnées sphériques (voir figure). Ce sont finalement les coordonnées qui semblent les plus naturellement associées à un observateur. Elles mériteraient le nom de *variables égocentriques*. En effet, imaginons un observateur O étudiant l'évolution d'un point matériel M . La variable à laquelle O est le plus sensibilisé de prime abord est la distance $r = OM$, car la plus

pertinente, de façon évidente, pour répondre à la question cruciale : à quelle distance M se trouve-t-il ? Se pose immédiatement après cette autre question tout aussi cruciale : vers où M se dirige-t-il ? Pour y répondre, O a alors besoin d'un système d'axes annexe $Oxyz$ qu'il va définir par rapport à son proche environnement afin de repérer l'orientation du vecteur \overrightarrow{OM} et observer son évolution. Cette orientation sera caractérisée à l'aide de deux angles : θ , angle entre le vecteur \overrightarrow{OM} et l'axe $z'z$, et ϕ , angle entre le projeté orthogonal de \overrightarrow{OM} dans le plan xOy et l'axe $x'x$.

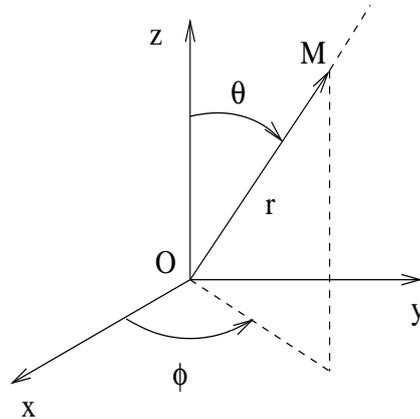


Figure 3.4

Pour couvrir tout l'espace au moyen de ces coordonnées, celles-ci doivent varier dans les intervalles respectifs suivants

$$0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

En fonction de ces coordonnées, les coordonnées cartésiennes ont pour expressions

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

On remarquera que les deux angles ne varient pas tous les deux dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. S'il en était ainsi, on pourrait passer d'un point $M(r, \theta, \phi)$ à son symétrique par rapport à l'axe des z soit en faisant varier θ de $2(\pi - \theta)$, r et ϕ étant fixés, soit en faisant varier ϕ de π , r et θ étant fixés. Dans ce cas, en faisant varier les angles θ et ϕ chacun dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, un même point pourrait être obtenu pour des valeurs différentes des angles : il n'y aurait pas correspondance unique entre un point et les valeurs des angles. C'est pour éviter le double comptage des points que l'on restreint l'un des intervalles angulaires. Par convention, l'angle θ est restreint à l'intervalle $[0, \pi]$

On remarquera aussi que ces coordonnées sont dites sphériques parce que en faisant varier les angles dans leurs intervalles complets en gardant r fixe, on engendre une sphère de centre O et de rayon r : cette façon de repérer les points de l'espace correspond à un découpage de l'espace au moyen de sphères.

Les trois courbes dites *courbes coordonnées* sont les courbes suivant lesquelles le point d'étude peut se déplacer lorsque deux de ses coordonnées sont fixées. Ici, la plus simple est celle pour laquelle les deux angles θ et ϕ sont fixés. A partir d'une position M , le point d'étude est alors astreint à se déplacer suivant la demi-droite OM : c'est la courbe coordonnée suivant laquelle on doit déplacer le point M pour faire varier sa coordonnée r , les variables angulaires étant fixées. A cette courbe correspond le vecteur unitaire

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

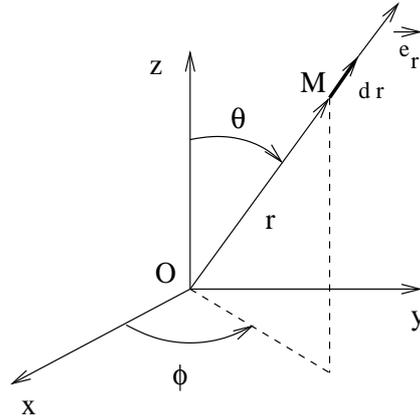


Figure 3.5

Le déplacement élémentaire obtenu dans cette direction en faisant varier r de dr a pour expression vectorielle

$$\vec{dM}_{\theta, \phi} = dr \vec{e}_r$$

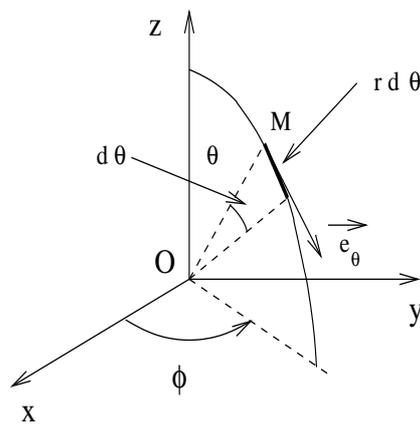


Figure 3.6

Lorsqu'on fixe r et l'angle ϕ , le point d'étude doit se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon r situé dans le plan perpendiculaire au plan xOy et faisant l'angle ϕ avec le plan xOz . C'est une seconde courbe coordonnée. Lorsqu'on fait varier l'angle θ de $d\theta$, le point d'étude se déplace sur ce cercle d'un élément d'arc égal à $rd\theta$. Le déplacement élémentaire vectoriel est porté par la tangente à ce cercle au point de départ M , dont le vecteur unitaire est donné par

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_r(\theta + \pi/2, \phi) = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

et l'on a

$$\vec{dM}_{r, \phi} = rd\theta \vec{e}_\theta$$

Enfin, si l'on fixe r et θ , la cote $z = r \cos \theta$ du point d'étude ainsi que sa distance à l'axe des z , soit $HM = r \sin \theta$ sont fixés. La courbe coordonnée obtenue est le cercle situé dans le plan de cote z parallèle au plan xOy , centré au projeté orthogonal H du point M sur l'axe des z , et dont le rayon est $r \sin \theta$. Lorsqu'on fait varier ϕ de $d\phi$, le point d'étude se déplace sur ce cercle d'un élément d'arc égal à $r \sin \theta d\phi$, selon la tangente en M à ce cercle dont le vecteur unitaire a pour expression

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

et le vecteur déplacement élémentaire correspondant est

$$d\vec{M}_{r, \theta} = r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

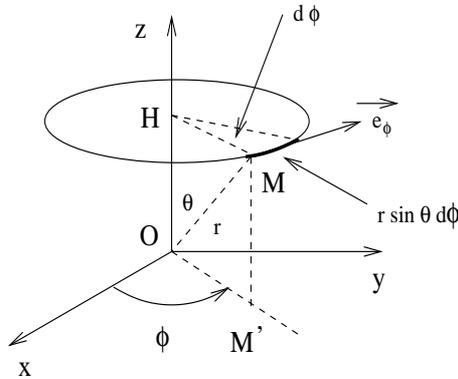


Figure 3.7

Le vecteur déplacement élémentaire le plus général est la somme vectorielle des trois vecteurs déplacements élémentaires ainsi considérés

$$d\vec{M} = d\vec{M}_{\theta, \phi} + d\vec{M}_{r, \phi} + d\vec{M}_{r, \theta} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

Il est à noter que cette expression est rigoureusement équivalente à celle obtenue pour le vecteur déplacement élémentaire exprimé en coordonnées cartésiennes, soit

$$d\vec{M} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Pour le montrer à partir de cette dernière expression, on calcule les différentielles de x , y et z considérés comme des fonctions de r , θ et ϕ :

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

Puis on les reporte dans l'expression de $d\vec{M}$ en cartésiennes et l'on rassemble les termes respectivement associés à dr , $d\theta$ et $d\phi$.

Le calcul des composantes sphériques du gradient repose sur l'identité

$$dU = \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{M}$$

Considérons en effet un déplacement élémentaire suivant \vec{e}_r . On aura

$$dU_{\theta, \phi} = \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{M}_{\theta, \phi} = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_r dr$$

Le rapport

$$\left(\frac{dU}{dr} \right)_{\theta, \phi}$$

représente le taux de variation de U lorsque r varie, θ et ϕ étant fixés. Il s'agit tout simplement de la dérivée partielle de la fonction U par rapport à r . Or, le produit scalaire

$$\vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_r$$

est la composante du gradient de U selon la direction définie par \vec{e}_r . Notant $\vec{G} = \vec{\text{grad}} U$, on obtient ainsi

$$G_r = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

Considérant ensuite un déplacement suivant \vec{e}_θ , il vient

$$G_\theta = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_\theta = \left(\frac{dU}{rd\theta} \right)_{r, \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

La dernière composante s'obtient par le même procédé :

$$G_\phi = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_\phi = \left(\frac{dU}{r \sin \theta d\phi} \right)_{r, \theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

Définissons ensuite les *coordonnées cylindriques* d'un point M . Ce sont, par rapport à un repère $Oxyz$ (voir figure), la distance $\rho = HM$ séparant le point M de l'axe des z (H est le projeté orthogonal de M sur cet axe), la cote z de M , et l'angle ϕ introduit précédemment. Ces coordonnées sont qualifiées de cylindriques car lorsqu'on fait varier z entre $-\infty$ et $+\infty$ et ϕ entre 0 et 2π tout en gardant ρ fixé, on engendre une surface cylindrique d'axe $z'z$ et de rayon ρ . Il s'agit donc ici d'un mode de repérage des points de l'espace au moyen de cylindres.

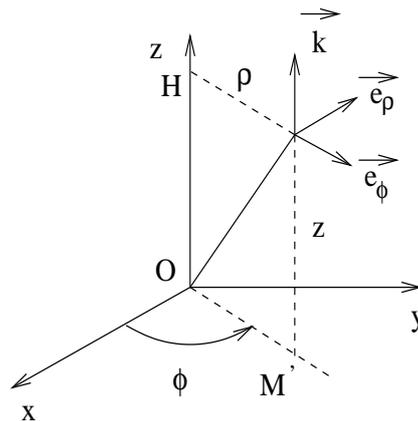


Figure 3.8

Il est facile de voir que dans ce système de coordonnées on a

$$d\vec{M}_{z, \phi} = d\rho \vec{e}_\rho$$

avec

$$\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$$

puis

$$d\vec{M}_{\rho, z} = \rho d\phi \vec{e}_\phi$$

avec

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

et

$$dM_{\rho, \phi} = dz \vec{k}$$

d'où

$$d\vec{M} = dM_{z, \phi} + dM_{\rho, z} + dM_{\rho, \phi} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{k}$$

Suivant le même procédé que celui utilisé pour les coordonnées sphériques, on en déduit les composantes cylindriques du gradient d'une fonction $U(\rho, \phi, z)$:

$$G_\rho = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho}$$

$$G_\phi = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

$$G_z = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{k} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

3.3 Le champ électrostatique

3.3.1 Définition

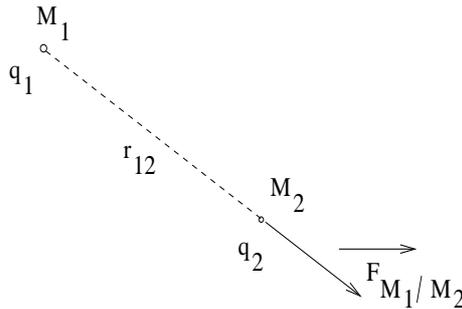


Figure 3.9

Rappelons la loi de Coulomb donnant la force électrostatique s'exerçant entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées en M_1 et M_2 respectivement :

$$\vec{F}_{M_1/M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r_{12}^2}$$

où $r_{12} = M_1 M_2$ et où \vec{u}_{12} est le vecteur unitaire porté par la droite $M_1 M_2$, dans le sens de M_1 vers M_2 :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{r_{12}}$$

Plus précisément, l'expression précédente donne la force que la charge q_1 en M_1 exerce sur la charge q_2 en M_2 .

D'après cette loi, le vecteur $\vec{F}_{M_1/M_2} / q_2$ est indépendant de la valeur de la charge q_2 , que nous qualifierons de *charge d'essai*, placée au *point d'observation* M_2 . Il ne dépend, en fait, que de la valeur de la charge q_1 , que nous appellerons *charge source*, et de la position relative de M_2 vis-à-vis du point source M_1 . On est alors conduit à interpréter l'interaction entre les deux charges de la façon suivante.

Du fait de la présence de la charge source q_1 en M_1 , la structure de l'espace s'est modifiée : il est apparu un *Champ Electrique*, qui est de nature vectorielle. Au point d'observation M_2 , ce vecteur champ électrique $\vec{E}(M_2)$ est donné par l'expression :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r_{12}^2}$$

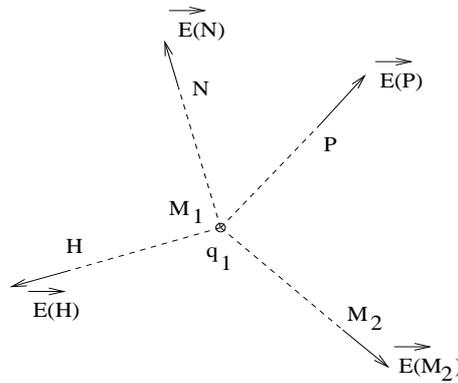


Figure 3.10

Cette modification de l'espace se manifeste lorsqu'une charge d'essai q_2 est placée en M_2 : celle-ci est alors soumise à la force

$$\vec{F}(M_2) = q_2 \vec{E}(M_2) = \vec{F}_{M_1/M_2}$$

La notion de champ électrique est fondamentale en Electricité. Elle peut sembler artificielle en *Electrostatique*, puisqu'en fait, les forces seules suffisent alors pour décrire l'effet électrique. De plus, la notion de champ y est aussi indissociable des *charges sources*. Il en va tout autrement dans la théorie des ondes électromagnétiques où la seule donnée des charges est insuffisante pour décrire la propagation du champ électromagnétique. On doit alors en conclure que ce champ a ses propres degrés de liberté qui se révèlent pleinement en régime variable.

3.3.2 Les distributions de charges

La généralisation à un système \mathcal{S} de n charges sources ponctuelles q_i ($i = 1, \dots, n$) situées aux points S_i ($i = 1, \dots, n$) est la suivante. D'après les principes mêmes de la Mécanique Classique, l'effort total exercé par \mathcal{S} sur une charge d'essai Q placée en M est décrit par un vecteur force $\vec{F}(M)$ qui est la résultante vectorielle des divers vecteurs forces $\vec{F}_i(M)$ décrivant les efforts individuels des diverses charges q_i sur la charge Q :

$$\vec{F}(M) = \sum_i \vec{F}_i(M) = Q \sum_i \vec{E}_i(M)$$

où $\vec{E}_i(M)$ est le vecteur champ électrique créé au point M par q_i . Le vecteur $\vec{F}(M)/Q$ est indépendant de la valeur de Q . Il définit le champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé en M par \mathcal{S} . On a donc

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{S_i M^2}$$

où $\vec{u}_i = \vec{S}_i M / S_i M$.

La règle de calcul du champ électrique total suit celle utilisée pour calculer une force totale : le vecteur champ électrique total en un point est la *résultante vectorielle* des champs électriques individuels en ce point.

D'une façon générale, la somme vectorielle ci-dessus est très compliquée, elle dépend de la répartition des charges sources. Ceci fait que la variation du champ total vis-à-vis des coordonnées du point d'observation peut être très différente d'une loi en $1/r^2$. En particulier, pour certaines distributions de charges sources, on peut obtenir un champ uniforme (ou quasiment uniforme sur une grande étendue). Un champ est dit uniforme si sa direction, son sens et son module sont les mêmes en tout point.

Lorsque les charges sont en très grand nombre, on est amené à définir une *densité de charge*. Selon la forme du support contenant ces charges, qui peut être une courbe, une surface ou un volume, on définit, respectivement, une densité *linéique*, une densité *surfaccique* ou une densité *volumique*.

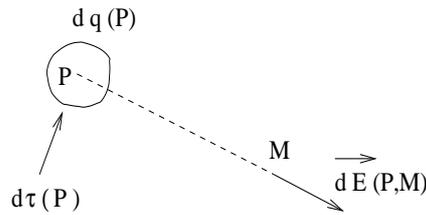


Figure 3.11

Envisageons d'abord le cas d'une distribution volumique, plus proche de la réalité physique. Autour d'un point P de cette distribution, construisons un élément de volume d'extension infinitésimale $d\tau(P)$ (identique à $dx dy dz$ en coordonnées cartésiennes). Ce volume, bien qu'étant considéré comme infinitésimal à notre échelle, peut déjà contenir un très grand nombre de charges élémentaires. Soit $dq(P)$ la charge contenue² dans cet élément de volume. On définit la densité volumique de charges au point P par le rapport³.

$$\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau(P)}$$

C'est aussi un *champ scalaire*, qui s'exprime en C/m^3 dans le système S.I.. A l'échelle macroscopique, la charge $dq(P)$ est considérée comme ponctuelle. Elle est la source au point M d'un champ électrostatique *élémentaire*

$$d \vec{E} (P, M) = \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

où, dans la dernière expression le vecteur unitaire \vec{u} définissant l'orientation de \vec{PM} a été exprimé comme $\frac{\vec{PM}}{PM}$.

Le champ total créé par la distribution \mathcal{D}_V au point M est la somme vectorielle de tous les champs élémentaires provenant des diverses charges infinitésimales telles que $dq(P)$, le point P courant dans tout le volume \mathcal{V} où se trouvent les charges. Cette somme s'exprime ici comme une *intégrale triple* sur les coordonnées du point courant P :

$$\vec{E} (M) = \int \int \int \mathcal{V} d \vec{E} (P, M) = \int \mathcal{V} \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

²Il s'agit ici d'une moyenne

³Pour se convaincre qu'une telle quantité représente déjà une grandeur macroscopique, il suffit de songer qu'un millimètre cube de cuivre contient déjà environ 10^{20} atomes, et qu'une goutte d'eau de 1 mm de diamètre contient environ $2 \cdot 10^{16}$ molécules H_2O !

Selon la distribution étudiée, le système de coordonnées le plus approprié peut être celui

♡ des coordonnées cartésiennes x, y, z , pour lequel

$$d\tau(P) = dx dy dz$$

♡ ou des coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z , pour lequel

$$d\tau(P) = \rho d\rho d\phi dz$$

♡ ou des coordonnées sphériques r, θ, ϕ , pour lequel

$$d\tau(P) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Si l'une des dimensions du volume \mathcal{V} est très petite devant les deux autres, ce volume mince est modélisable par une surface S , et la distribution volumique de charges qu'il contient apparaît comme une distribution *superficielle* de charges sur cette surface S .

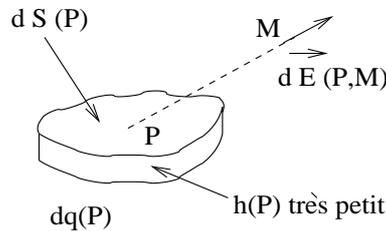


Figure 3.12

Soit un point P de cette surface et $h(P)$ l'épaisseur du volume mince en ce point. Autour de P construisons un élément de surface d'extension infinitésimale $dS(P)$. Revenant à la distribution volumique, l'élément de volume autour de P a pour extension $h(P)dS(P)$ et contient la charge $dq(P)$. La densité superficielle (ou surfacique) de charges au point P est définie par le rapport

$$\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS(P)}$$

Cette densité s'exprime en C/m² dans le système S.I.. Elle est reliée à la densité volumique de la distribution à l'intérieur du volume mince par la relation

$$\sigma(P) = h(P)\rho(P)$$

Cette fois, le champ total de la distribution superficielle s'exprime comme une intégrale *double*

$$\vec{E}(M) = \iint_S d\vec{E}(P, M) = \iint_S \frac{\sigma(P)dS(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

sur les deux coordonnées définissant la position du point courant P sur la surface S .

Enfin, si une autre dimension du volume est elle aussi petite, il s'agira alors d'une sorte de tuyau, on le modélisera par une courbe \mathcal{C} , et la distribution de charges sera assimilée à une distribution linéique. Au voisinage d'un point P de la courbe et le long de celle-ci, construisons un élément de longueur d'extension infinitésimale $d\ell(P)$. Notons $h(P)$ et $h'(P)$ les deux petites dimensions transversales du volume filiforme au point P . Au point P , nous avons un élément de volume d'extension $d\tau(P) = h(P)h'(P)d\ell(P)$ contenant la charge $dq(P)$. La densité linéique de charges au point P est alors définie par le rapport

$$\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell(P)}$$

Cette densité s'exprime en C/m dans le système S.I.. Elle est liée à la densité volumique de la distribution à l'intérieur du volume filiforme par la relation

$$\lambda(P) = h(P)h'(P)\rho(P)$$

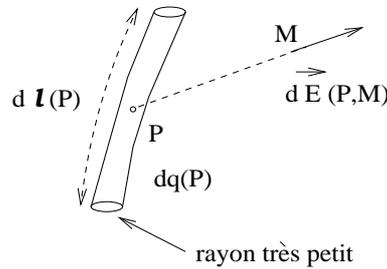


Figure 3.13

Pour cette distribution linéique, le champ total de la s'exprime comme une intégrale *simple*

$$\vec{E}(M) = \int_C d\vec{E}(P, M) = \int_C \frac{\lambda(P)dS(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

sur la coordonnée qui définit la position du point courant P sur la courbe C (abscisse curviligne par exemple).

3.3.3 Le potentiel électrostatique

Considérons à nouveau le champ crée en un point M par une charge ponctuelle q située en un point P

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

et démontrons le "théorème" suivant

$$\frac{\vec{PM}}{PM^3} = - \text{grad} \frac{1}{PM}$$

Par rapport à un repère cartésien $Oxyz$, on a

$$PM = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}$$

x, y, z et x_P, y_P, z_P étant les coordonnées cartésiennes de M et de P respectivement dans ce repère. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{PM} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} = \\ &= - \frac{(x - x_P)}{[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2]^{3/2}} = - \frac{(x - x_P)}{PM^3} \end{aligned}$$

et des relations similaires pour les dérivations par rapport aux autres coordonnées de M . Le théorème est ainsi démontré.

Posons alors

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} + \text{constante}$$

Ce champ scalaire $V(M)$ est le *potentiel électrostatique* crée au point M par la charge q en P , et, d'après le théorème précédent, on a la relation fondamentale

$$\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$$

c'est-à-dire, le champ électrostatique d'une charge ponctuelle dérive d'un potentiel.

Ce résultat peut être généralisé à une distribution de charges quelconque. En effet, de l'addition vectorielle des vecteurs champs électrostatiques résulte l'addition algébrique des potentiels. Par exemple, le potentiel créé en un point M par une distribution de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{P_i M} + \text{constante}$$

La généralisation au cas des distributions continues, volumique, surfacique ou linéique est immédiate

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(P)d\tau(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{volumique})$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(P)dS(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{surfacique})$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P)d\ell(P)}{PM} + \text{constante} \quad (\text{linéique})$$

Dans chaque cas, la relation "champ-potential" $\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$ est vérifiée.

On déduit de cette relation les propriétés suivantes.

- ♣ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe quelconque C joignant deux points donnés A et B est indépendante de la forme de cette courbe : elle est égale à la différence de potentiel $V(A) - V(B)$:

$$\int_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = V(A) - V(B)$$

- ♣ Le potentiel électrique $V(M)$ est une fonction continue des coordonnées du point M .
- ♣ La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée quelconque est toujours égale à zéro.
- ♣ Le champ électrostatique est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants.

Notons aussi que le potentiel $V(M)$ n'est défini qu'à une constante additive près. Cette constante peut être ajustée en choisissant arbitrairement le point ou la région où le potentiel sera pris égal à zéro, sous réserve, bien entendu, que le potentiel n'y ait pas de singularité. Dans le cas d'un système de charges confinées dans une région finie de l'espace, on peut choisir le zéro du potentiel à distance infinie des charges.

3.3.4 Les symétries

D'une façon générale, la somme vectorielle entrant dans la définition du champ est très compliquée. Elle dépend de la répartition des charges sources, ce qui fait que la variation du champ total vis-à-vis des coordonnées du point d'observation P peut être très différente d'une loi en $1/r^2$ comme dans la loi de Coulomb. En particulier, pour certaines distributions de charges sources, on peut obtenir un champ uniforme (ou quasiment uniforme sur une grande étendue). Un champ est dit *uniforme* si sa direction, son sens et son module sont les mêmes en tout point.

Pour calculer le champ, on a toujours intérêt à faire une étude préalable des symétries que pourrait présenter la distribution de charges étudiée. En effet, on peut penser à juste titre qu'une symétrie de la distribution doit avoir une répercussion sur la structure du champ qu'elle crée, qui en simplifie par là même son étude. Ce point de vue résulte de multiples observations de phénomènes satisfaisant cette règle de symétrie et a été érigé en *principe général d'invariance* dont la simplicité ne peut qu'emporter l'adhésion de tout scientifique.

Soit \mathcal{A} un système "actif" exerçant une action A sur un système "test" B . Le principe d'invariance peut s'énoncer ainsi :

si \mathcal{A} possède une quelconque symétrie, celle-ci se répercute sur son action A

Ce principe est aussi appelé *principe de Curie*, du nom de Curie qui a été le premier à étudier les conséquences de la présence de symétries sur les phénomènes naturels.

Pour ce qui nous concerne, le système actif est une distribution de charges dont l'action est représentée par son champ électrostatique.

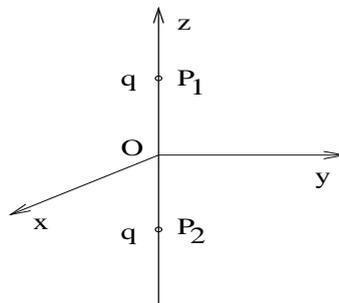


Figure 3.14

Pour illustrer le principe d'invariance, considérons un système de deux charges ponctuelles identiques q placées aux points P_1 et P_2 respectivement. Soit à calculer le champ $\vec{E}(M)$ créé par ces charges en un point M . Tout d'abord, la position du point M doit être localisée par rapport à un repère à définir. Quel choix faire? On constate qu'il y a une direction privilégiée dans le système des deux charges : c'est la droite P_1P_2 . Prenons cette direction comme axe $z'z$. Ensuite, quelle origine choisir? Manifestement, le point O , milieu de P_1P_2 , paraît tout désigné : c'est le point le plus *symétrique* dans cette distribution de charges. Il reste à définir des axes Ox et Oy . Là, nous avons une *infinité* de choix possibles, tous équivalents, dans le plan perpendiculaire à P_1P_2 passant par O . Dans ce plan, aucun choix n'est privilégié. Ceci résulte d'une certaine symétrie de la distribution qui fait qu'il y a *invariance par rotation* autour de P_1P_2 . On dit aussi que ce système possède la *symétrie cylindrique* autour de P_1P_2 .

Ayant fait un choix particulier d'axes Ox et Oy , plaçons-nous alors dans le plan xOz . Ce plan constitue ce qu'on appelle un *plan de symétrie positive* pour la distribution de charges. Cette appellation se réfère à une opération de symétrie géométrique, en l'occurrence une symétrie par rapport à un plan. Dans le cas présent, l'opération de symétrie par rapport à xOz consiste à faire le changement suivant sur les coordonnées

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z,$$

Mais ici, comme les charges *appartiennent* au plan xOz , elle restent tout simplement en place dans cette opération. Ceci fait que cette transformation laisse inchangée, on dit aussi laisse *invariante*, la distribution de charges.

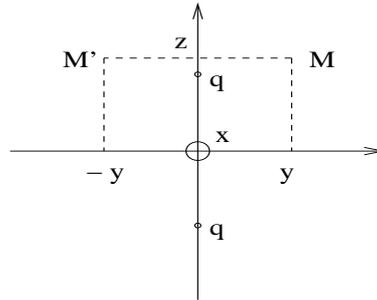


Figure 3.15

Quelle est la conséquence sur le champ $\vec{E}(M)$ en un point M du plan xOz ($y = 0$) ? Par addition vectorielle des champs créés par les deux charges, on voit facilement que le champ résultant est contenu dans le plan xOz . Nous sommes là en présence d'un résultat général :

en tout point d'un plan de symétrie positive d'une distribution de charges, le champ électrostatique crée par cette distribution est contenu dans ce plan.

Ici, le champ $\vec{E}(M)$ a pour expression

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{P}_1 M}{P_1 M^3} + \frac{\vec{P}_2 M}{P_2 M^3} \right)$$

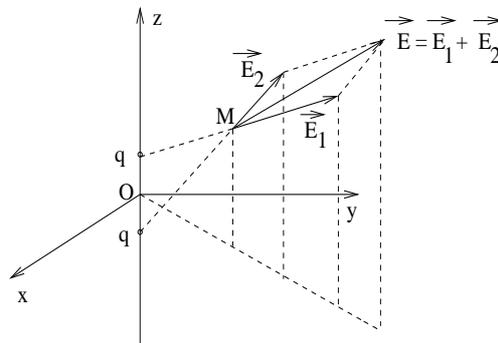


Figure 3.16

Posons $P_1 P_2 = 2a$. Pour un point $M(x, 0, z)$ du plan xOz , on a

$$\vec{P}_1 M = x \vec{i} + (z + a) \vec{k}, \quad \vec{P}_2 M = x \vec{i} + (z - a) \vec{k}$$

et les composantes du champ en M sont données par

$$E_x(x, z) = x \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[x^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y(x, z) = 0$$

$$E_z(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z - a}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + \frac{z + a}{[x^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right)$$

A partir de ces expressions, on constate les propriétés suivantes

$$E_x(-x, z) = -E_x(x, z), \quad E_x(x, -z) = E_x(x, z)$$

$$E_z(-x, z) = E_z(x, z), \quad E_z(x, -z) = -E_z(x, z)$$

C'est-à-dire que $E_x(x, z)$ est une fonction *impaire* vis-à-vis de x et *paire* vis-à-vis de z , tandis que $E_z(x, z)$ est une fonction *paire* vis-à-vis de x et *impaire* vis-à-vis de z .

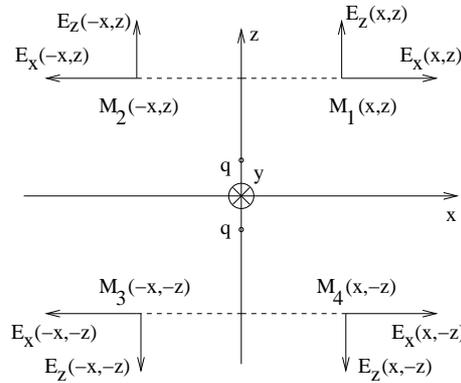


Figure 3.17

Ces propriétés résultent du fait que le plan xOy est aussi un plan de symétrie positive pour ce système de charges. A la différence du cas précédent, dans une opération de symétrie par rapport au plan xOy , les deux charges ne restent pas en place. Cependant, comme elles sont échangées l'une en l'autre, et que les valeurs de leurs charges sont identiques, la distribution se retrouve *globalement inchangée* dans cette opération : elle est symétrique par rapport au plan xOy .

D'une façon *générale*, les conséquences sur les composantes d'un champ \vec{E} d'une symétrie positive par rapport à un plan \mathcal{P} , dit plan de symétrie positive et que nous noterons \mathcal{P}_+ , sont les suivantes. Notant M' le point symétrique de M par rapport à ce plan,

- ♠ Les composantes du champ suivant les directions parallèles au plan restent inchangées :

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{//} = \left[\vec{E}(M) \right]_{//}$$

- ♠ La composante du champ suivant la direction perpendiculaire au plan change de signe

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{\perp} = - \left[\vec{E}(M) \right]_{\perp}$$

A cela, on peut rajouter une autre propriété importante se référant à une symétrie par rapport à un point. Si Π est un point par rapport auquel la distribution étudiée est symétrique, alors, dans une opération géométrique de symétrie par rapport à ce point, dans laquelle un point M est transformé en M'' , on a

$$\vec{E}(M'') = - \vec{E}(M)$$

Ces propriétés du champ électrostatique sont en fait la conséquence directe de la nature de l'interaction des charges au niveau élémentaire, telle qu'elle est décrite par la loi de Coulomb : elles sont *radiales*, c'est-à-dire que la force d'interaction entre deux charges ponctuelles est portée par la droite qui relie les charges. Ce fait fondamental confère au champ électrostatique toutes les propriétés de symétrie énoncées plus haut et qui sont finalement tout à fait analogues à celles d'un vecteur "position" tel que \vec{OM} :

♠ Dans une symétrie par rapport au plan xOz par exemple, on a

$$\vec{OM} \rightarrow \vec{OM}' = x \vec{i} - y \vec{j} + z \vec{k}$$

et les composantes de \vec{OM} dans les directions parallèles au plan xOz , soit x et z restent inchangées, alors que la composante dans la direction perpendiculaire à ce plan, soit y , change de signe.

♠ Dans une symétrie par rapport au point O

$$\vec{OM} \rightarrow \vec{OM}'' = - \vec{OM}$$

Un champ de vecteurs qui possède ces propriétés de transformation est ce qu'on appelle un *champ de vecteurs polaire*.

Revenons au système des deux charges identiques. Des relations précédentes, on déduit que $E_x(0, z) = 0$, c'est-à-dire qu'en un point du plan zOy , le champ est contenu dans ce plan. Cela est normal, puisque ce plan est un \mathcal{P}_+ . Nous ferons ici une remarque importante concernant une déduction du type précédent, à savoir :

“en tout point d'un \mathcal{P}_+ la composante normale du champ à ce plan est nulle”.

Ceci n'est en fait vérifié que si et seulement si cette composante est bien définie dans ce plan, c'est-à-dire en fait est continue lorsqu'on s'approche de ce plan. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas et qu'en particulier, le champ présente effectivement des discontinuités dans le cas de distribution superficielles.

Dans le cas du système des deux charges, les variables les plus appropriées pour étudier le champ $\vec{E}(M)$ sont en fait les coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z de M . Relativement à ce système de coordonnées le champ électrostatique admet la décomposition

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, \phi, z) \vec{e}_\rho + E_\phi(\rho, \phi, z) \vec{e}_\phi + E_z(\rho, \phi, z) \vec{e}_z$$

Or, pour la distribution étudiée, le plan contenant l'axe $z'z$ et le point M est un \mathcal{P}_+ . On en déduit que

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = 0$$

En outre, l'invariance par rotation autour de $z'z$ fait que l'angle ϕ est en fait défini de façon arbitraire, le choix des axes $x'x$ et $y'y$ étant arbitraire du fait de la symétrie cylindrique du système de charges étudié. On dit que ϕ n'est pas une *variable sensible*. Les composantes E_ρ et E_z du champ qui caractérisent un phénomène physique, à savoir l'intensité d'une force qui s'exercerait sur une charge unité placée en M , ne peuvent en aucun cas dépendre d'une variable dont la définition arbitraire est laissée au libre choix de l'expérimentateur étudiant le système de charges. Il s'ensuit que ces composantes sont nécessairement indépendantes de ϕ . Un autre argument décisif en faveur de ce résultat nous est fourni par la loi naturelle selon laquelle le champ électrostatique dérive d'un potentiel. En effet, puisque E_ϕ est nul, cette loi nous indique que

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

et que par conséquent le potentiel $V(\rho, \phi, z)$ est nécessairement indépendant de ϕ . Il en résulte que les dérivées partielles

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

sont elles aussi indépendantes de ϕ , ce qui est conforme à l'idée que l'on se fait de la symétrie cylindrique de la distribution, idée qui n'est donc pas en contradiction avec les lois de l'électrostatique, ce qui est rassurant et conforte la justesse des principes d'invariance.

On peut noter à ce propos qu'il serait plus judicieux d'appliquer les principes d'invariance directement au potentiel électrostatique, ce qui allègerait singulièrement les raisonnements, puisque ceux-ci ne

feraient alors appel qu'à *une seule fonction scalaire*, au lieu des *trois fonctions* que sont les composantes du vecteur champ électrostatique. Ainsi, si la distribution étudiée possède la symétrie cylindrique, ce qui est le cas pour le système des deux charges étudié ici, nous dirons que le potentiel ne doit pas dépendre de la variable ϕ qui est alors définie arbitrairement, ce qui répercute cette symétrie directement sur le potentiel. On en déduit immédiatement que les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axes $z'z$, et que, d'une part

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

et que, d'autre part, les composantes restantes E_ρ et E_z du vecteur champ électrostatique sont indépendantes de ϕ .

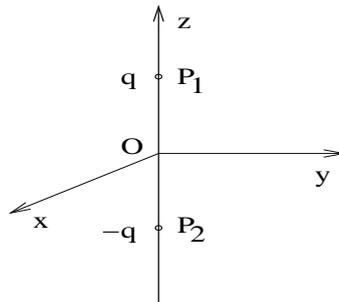


Figure 3.18

Considérons maintenant le cas de deux charges opposées, $+q$ située en P_1 et $-q$ située en P_2 . Ici encore, de façon évidente, nous choisirons un système d'axe dont l'origine est au milieu du segment P_1P_2 , dont l'axe des z est la droite P_1P_2 , les axes Ox et Oy étant dans le plan perpendiculaire à P_1P_2 passant par O . Comme précédemment, pour tout point M , le plan contenant M et l'axe des z est un plan de symétrie positive, ce qui fait que le champ électrostatique en M est contenu dans ce plan. Par contre, le plan xOy est cette fois-ci un plan de *symétrie négative*, on dit aussi *plan d'antisymétrie*. En effet, dans une opération de symétrie par rapport à ce plan, les deux charges sont échangées et tout se passe comme si l'on avait changé le signe de ces charges en les laissant sur place.

Or, d'après l'expression générale d'un champ électrostatique, lorsqu'on change le signe de toutes les charges, ce champ est changé en son opposé. Il s'agit là d'une symétrie interne des distributions de charges.

D'une façon générale, les conséquences sur les composantes d'un champ électrostatique \vec{E} d'une symétrie négative par rapport à un plan \mathcal{P}_- , que nous noterons alors \mathcal{P}_- , sont les suivantes. Notant M' le point symétrique de M par rapport à ce plan,

- ♠ Les composantes du champ suivant les directions parallèles au plan changent de signe :

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{//} = - \left[\vec{E}(M) \right]_{//}$$

- ♠ La composante du champ suivant la direction perpendiculaire au plan reste inchangée :

$$\left[\vec{E}(M') \right]_{\perp} = \left[\vec{E}(M) \right]_{\perp}$$

On en déduit en particulier qu'en tout point d'un \mathcal{P}_- , le champ en ce point est perpendiculaire à ce plan. Il s'ensuit qu'un \mathcal{P}_- est une équipotentielle.

Pour notre système des deux charges opposées, les propriétés de symétrie nous permettent de déduire rapidement, de façon qualitative, quelle est l'orientation générale du champ et par là même celle des

lignes de champ dans un plan quelconque contenant l'axe des z . Cette distribution possède la symétrie cylindrique autour de l'axe des z . Du fait de cette symétrie, le potentiel doit être indépendant de ϕ . On en déduit que la composante orthoradiale $E_\phi(\rho, \phi, z)$ du champ est nulle en tout point, et que les composantes restantes E_ρ et E_z sont indépendantes de l'angle ϕ .

Ceci fait que pour étudier la structure générale du champ, il suffit de se placer dans un plan quelconque contenant l'axe des z . Définissant dans ce plan des coordonnées x et z , on a alors les propriétés suivantes, qui résultent du fait que d'une part le plan xOz ainsi défini est un \mathcal{P}_+ et que le plan xOy est un \mathcal{P}_- :

$$\begin{aligned} E_x(-x, z) &= -E_x(x, z), & E_x(x, -z) &= -E_x(x, z) \\ E_z(-x, z) &= E_z(x, z), & E_z(x, -z) &= E_z(x, z) \end{aligned}$$

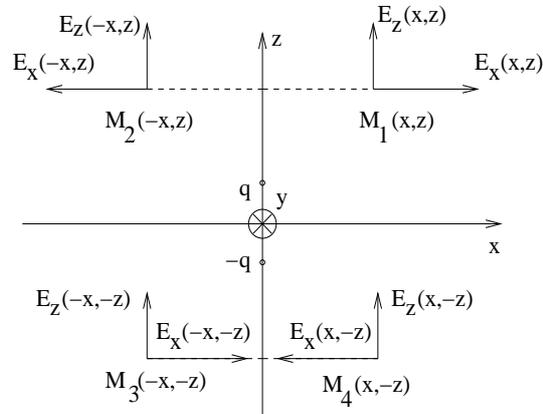


Figure 3.19

c'est-à-dire qu'ici, $E_x(x, z)$ est une fonction impaire de x et de z , tandis que $E_z(x, z)$ est une fonction paire de ces deux variables. Dans ce plan xOz , on en déduit l'allure qualitative des lignes de champ.

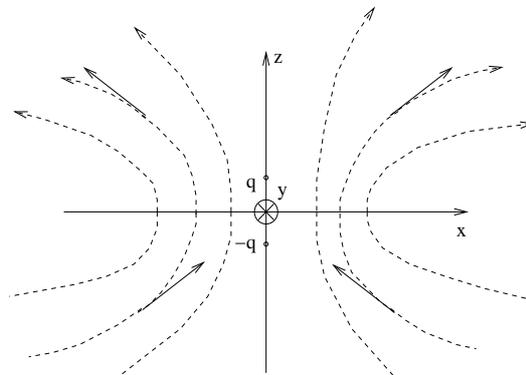


Figure 3.20

3.4 Quelques calculs de champs électrostatiques

3.4.1 Le fil rectiligne uniformément chargé

Considérons un fil rectiligne infiniment long sur lequel une infinité de charges sont disposées de façon uniforme. C'est le cas typique d'une distribution linéique de charges. Ici, la densité linéique de charges λ de cette distribution est donc supposée constante.

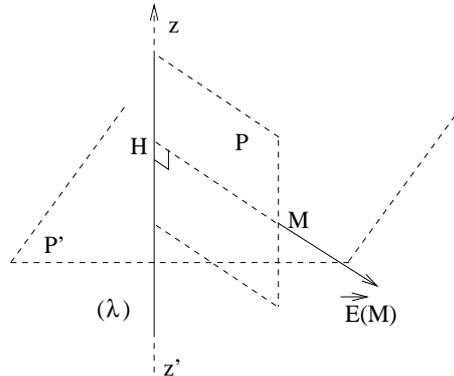


Figure 3.21

Définissons l'axe $z'z$ comme étant selon le fil. Du fait que la distribution est uniforme, quelque soit le point M considéré, celui-ci appartient à deux plans de symétrie positive de la distribution. Il s'agit d'une part du plan P contenant M et l'axe $z'z$ et d'autre part du plan P' contenant M et perpendiculaire à l'axe $z'z$. Cette dernière symétrie mérite d'être explicitée. Elle est due, d'une part, à l'uniformité de la distribution, et, ce qui est tout aussi crucial, au fait que puisque la distribution est d'extension infinie selon $z'z$, chacune de ses charges a une charge symétrique par rapport à P' . Il en résulte que dans une symétrie par rapport à P' , la distribution reste globalement inchangée. Ce plan P' est donc bien un plan de symétrie positive de la distribution étudiée.

D'après les propriétés générales du champ électrostatique énoncées précédemment, le champ au point M doit appartenir à la fois à P et à P' , donc à leur intersection. Si H est le projeté orthogonal de M sur $z'z$, cette intersection est la droite HM .

Manifestement, l'usage de coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z sera ici encore le plus approprié. D'après ce qui vient d'être dit, la seule composante non nulle du champ est radiale et nous écrivons

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, \phi, z) \vec{e}_\rho$$

Cependant, les variables ϕ et z ne sont pas des variables sensibles. Pour ce qui concerne ϕ , ceci est dû à la symétrie cylindrique de la distribution d'où il résulte que l'on a invariance par rotation autour de $z'z$. Pour ce qui concerne z , ceci est dû à l'uniformité de λ et à l'extension infinie de la distribution, d'où il résulte que l'on a une *invariance par translation parallèle au fil*. On peut envisager cette invariance de deux façons équivalentes. Ou bien, en laissant la distribution en place, on se déplace parallèlement au fil. L'invariance se traduit par le fait qu'après ce déplacement, la distribution est vue de la même manière. Ou bien, restant en place, on déplace en bloc la distribution parallèlement à elle-même le long de $z'z$. L'invariance signifie qu'après ce déplacement la distribution est encore vue de la même manière depuis le point d'observation. Or, ce qui change dans ce dernier déplacement est la cote z du point d'observation. Dire que le déplacement n'apporte aucune modification dans le phénomène physique observé, en l'occurrence le champ électrostatique, c'est dire que la variable z n'est pas une variable sensible. En fait, puisque la répartition des charges sur le fil est uniforme, aucune position sur l'axe $z'z$ n'est privilégiée plutôt qu'une autre. Il s'ensuit que le choix d'une origine O sur cet axe est complètement arbitraire et laissé librement à l'observateur. La variable z est donc définie

arbitrairement. La grandeur physique qu'est le champ électrostatique ne peut contenir de quantités définies arbitrairement par l'observateur. En conclusion, le champ ne peut dépendre de z .

En définitive, l'expression générale du champ en un point $M(\rho, \phi, z)$ est

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$$

Calculons maintenant explicitement la composante $E_\rho(\rho)$. Plaçons-nous dans le plan P contenant M et $z'z$. Pour repérer les points de l'axe $z'z$ par une cote z , nous choisirons l'origine au point H . Soit $Q(z)$ un point de l'axe $z'z$ où est située une charge élémentaire λdz . Le champ élémentaire créé par cette charge au point M est

$$\vec{dE}(Q, M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{QM}}{QM^3}$$

et l'on a

$$\vec{E}(M) = \int \vec{dE}(Q, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{QM}}{QM^3}$$

et

$$E_\rho(\rho) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{QM^3}$$

où l'on a posé $\rho = HM$ (voir figure).

Pour effectuer l'intégration, nous introduirons l'angle α entre \vec{HM} et \vec{QM} (voir figure). On a

$$z = \rho \tan \alpha, \quad QM = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

d'où

$$dz = \rho d \tan \alpha = \rho \frac{d \tan \alpha}{d \alpha} = \rho \frac{d \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\rho dz}{QM^3} = \frac{d \alpha}{\cos \alpha} \frac{\rho^2}{QM^3} = \frac{\cos \alpha d \alpha}{\rho}$$

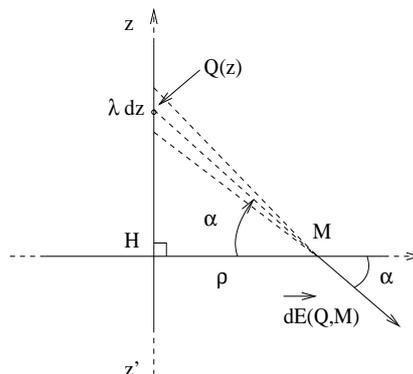


Figure 3.22

Le calcul s'en trouve alors simplifié. On obtient en effet

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

Une remarque importante s'impose ici. L'expression trouvée ci-dessus pour le champ d'un fil infini montre que les variations de ce champ vis-à-vis des coordonnées ne suivent plus une loi en $1/r^2$ comme dans le cas d'une charge ponctuelle, mais suit ici une loi en $1/\rho$. Ceci est simplement dû à la complexité de la distribution étudiée qui fait que l'addition vectorielle de champs élémentaires obéissant individuellement à la loi de Coulomb conduit à un champ résultant dont les variations peuvent sembler en contradiction avec la loi de Coulomb en $1/r^2$, mais qui bien sûr ne le sont pas !

Calculons ensuite le potentiel électrostatique $V(\rho, \phi, z)$ créée par cette distribution. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= -E_\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -E_\phi = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = 0 \end{aligned}$$

Le potentiel n'est donc fonction que de ρ (symétrie cylindrique et invariance par translation parallèle à $z'z$) et l'on a

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

d'où

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{constante}$$

A cause de la présence du logarithme, le zéro des potentiels ne peut être pris ni à distance nulle $\rho = 0$ ni à distance infinie $\rho \rightarrow \infty$ des charges. On peut néanmoins choisir ce zéro à distance finie $\rho = \rho_0$, ce qui donne

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_0 + \text{constante}$$

d'où

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

Les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axe $z'z$, l'équipotentielle $V = 0$ étant bien sur le cylindre de rayon ρ_0 .

3.4.2 Plan uniformément chargé

Considérons maintenant un système de charges distribuées uniformément sur un plan P . C'est un exemple typique de distribution superficielle de charges. Soit σ la densité surfacique de charges, supposée constante.

Étudions tout d'abord les symétries de cette distribution et ses conséquences sur la structure du champ $\vec{E}(M)$ qu'elle crée en un point M en dehors du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan P . Manifestement, tout plan contenant la droite HM est un P_+ pour la distribution. Il s'ensuit que le champ est nécessairement porté par HM . Il est tout aussi manifeste que dans toute translation effectuée parallèlement au plan P (HM est maintenu constant) la distribution est toujours vue de la même manière. Cela signifie que les coordonnées pouvant servir à définir la position de M dans des directions parallèles au plan P ne sont pas des variables sensibles. Autrement dit, le champ ne dépend que de la cote z du point M dans la direction $z'z$ perpendiculaire à P :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$$

Notons également une autre symétrie : le plan P lui-même est un P_+ pour la distribution. Dans une symétrie par rapport à P , le point M est transformé en son symétrique par rapport à P , dont la cote est $-z$. Comme E_z est la composante du champ dans la direction perpendiculaire à P , on en déduit la relation

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

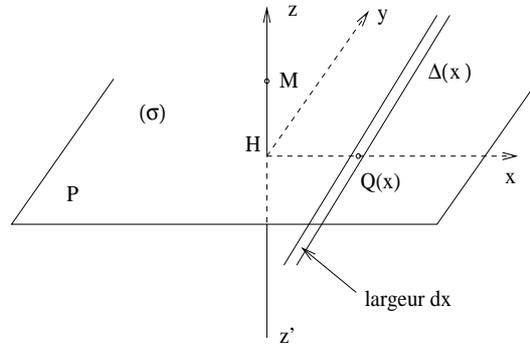


Figure 3.23

Pour déterminer $E_z(z)$, nous utiliserons l'astuce décrite ci-après. Tout d'abord, définissons dans le plan P un repère cartésien xHy d'origine H (projeté orthogonal de M sur P), et découpons le plan en une infinité de bandes parallèles à l'axe $y'Hy$, et de largeurs infinitésimales, la bande se trouvant au voisinage de l'abscisse x ayant la largeur dx . Chacune de ces bandes infiniment étroites peut être assimilée à un fil rectiligne de longueur infinie, uniformément chargé. Notons $\Delta(x)$ le fil contenant tous les points de P d'abscisse x . Considérons un point M de cote $z > 0$. Soit $Q(x)$ son projeté orthogonal sur $\Delta(x)$ et $\vec{e}_\rho(x)$ le vecteur unitaire porté par $\vec{Q(x)M}$. Soit λ la densité linéique de charges portées par $\Delta(x)$. D'après l'étude faite au paragraphe précédent, le champ créé par les charges de $\Delta(x)$ a pour expression

$$d \vec{E} (M, x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_\rho(x)}{\rho(x)}$$

où $\rho(x) = Q(x)M$. Ce champ, créé par la bande $\Delta(x)$ de largeur infinitésimale dx est lui-même infinitésimal. Le champ résultant en M sera donné par

$$\vec{E} (M) = \int_{-\infty}^{+\infty} d \vec{E} (M, x)$$

l'intégration portant sur la variable x , abscisse de $Q(x)$.

Le problème ensuite est de déterminer l'expression de la densité λ . Pour ce faire, nous ferons le bilan de la charge contenue sur une longueur ℓ de $\Delta(x)$. Du point de vue d'une distribution linéique de densité λ , cette charge est $\lambda\ell$. Cependant, dans la réalité, $\Delta(x)$ est une bande étroite de largeur dx chargée avec la densité superficielle σ . De ce point de vue, la charge cherchée vaut $\sigma dx \ell$. L'identification des deux expressions trouvées nous donne

$$\lambda = \sigma dx$$

Ainsi

$$\vec{E} (M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_\rho(x)}{\rho(x)}$$

et

$$E_z(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dx \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 \rho(x)}$$

où α est l'angle entre \vec{QM} et l'axe $z'z$.

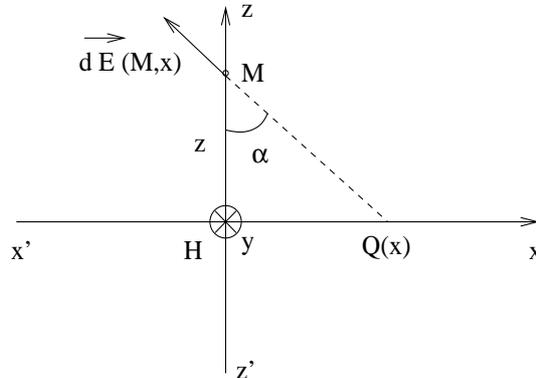


Figure 3.24

Pour effectuer l'intégration, nous utiliserons cet angle α plutôt que x . On a

$$z = \rho(x) \cos \alpha, \quad x = z \tan \alpha$$

d'où l'on déduit

$$dx \cos \alpha = z \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \rho(x) d\alpha$$

La variation de x dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ se répercute sur α par une variation dans l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$. On obtient donc

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

On obtient donc un résultat remarquable : le champ est constant. Le fait qu'il ne dépende même pas de la variable z peut être compris comme étant dû à l'extension infinie de la distribution. A distance finie, l'effet principal est dû aux charges les plus proches, mais lorsqu'on s'éloigne de la distribution, on voit apparaître de plus en plus de charges des régions éloignées. L'effet net est un champ constant.

On fera attention au fait qu'il existe une dépendance cachée vis-à-vis de la variable z , en ce sens que la valeur du champ pour $z < 0$ est opposée à la valeur du champ pour $z > 0$:

$$E_z(-z) = -E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

et que par conséquent on observe une *discontinuité* du champ pour $z = 0$:

$$E_z(+0) - E_z(-0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ce fait est d'ailleurs général pour les distributions superficielles de charges. Au passage à travers une surface où est disposée une distribution superficielle de charges, la composante du champ suivant la normale à la surface subit une discontinuité égale à

$$\frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

où M est le point de traversée et $\sigma(M)$ la densité superficielle de charges en ce point.

La méthode qui vient d'être utilisée pour le calcul du champ se réfère au *principe de superposition*, selon lequel le champ créé par un système de charges \mathcal{S} est une résultante vectorielle de champs élémentaires créés par les sous-systèmes constituant \mathcal{S} . Ce principe nous a permis de calculer le champ créé par un plan uniformément chargé en considérant cette distribution comme une superposition de distributions plus simples, à savoir une infinité de fils infinis uniformément chargés, disposés parallèlement les uns aux autres.

Déterminons ensuite le potentiel de la distribution étudiée. La seule variable sensible étant la cote z , le potentiel $V(z)$ se calcule en intégrant l'équation

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{pour } z > 0$$

d'où

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_1$$

Pour $z < 0$, on a

$$\frac{dV}{dz} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

d'où

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C_2$$

Du point de vue mathématique, la fonction potentiel est une fonction *continue*, car sa dérivée existe et est donnée par le champ électrique. On en déduit pour $z = 0$ la relation $C_1 = C_2$. Fixons alors le zéro du potentiel pour $z = 0$. Les résultats précédents peuvent alors être réécrits sous la forme condensée

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|$$

où l'on voit apparaître la fonction $|z|$ qui est une fonction continue, mais dont la dérivée présente une discontinuité en $z = 0$.

3.4.3 Sphère uniformément chargée

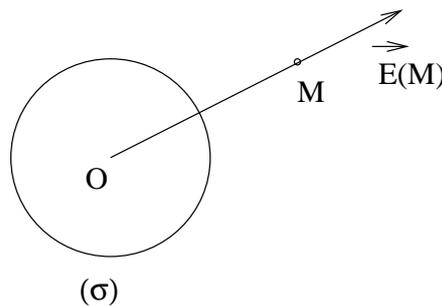


Figure 3.25

Considérons une sphère S (surface!), de centre O et de rayon R , sur laquelle des charges sont disposées uniformément avec la densité surfacique (constante!) σ . Cette distribution possède la symétrie sphérique, c'est-à-dire que puisqu'elle est vue de la même manière depuis un point d'observation quelconque situé à une distance r donnée du centre O , il y a invariance de la distribution par rapport à une

rotation quelconque autour de O . Il est utile de préciser ici que cette invariance résulte non seulement du fait que le support sur lequel se trouvent les charges a manifestement la symétrie sphérique, mais aussi parce que les charges y sont réparties de façon uniforme. Si, par exemple, les charges avaient été réparties sur la sphère avec la densité

$$\sigma(P) = \sigma_0 \cos \theta$$

en un point P de la sphère ayant les coordonnées sphériques R, θ, ϕ , la distribution obtenue n'aurait que la symétrie cylindrique autour de l'axe des z .

La symétrie sphérique fait que pour tout point M , tout plan contenant la droite OM est un P_+ et le champ électrostatique doit donc appartenir à l'intersection de tous les plans contenant OM , c'est-à-dire à la droite OM elle-même. Le champ électrostatique de cette distribution est donc radial, au sens des coordonnées sphériques construites autour de O . Il s'ensuit que le potentiel électrostatique n'est fonction que de la distance r à laquelle le point d'observation $M(r, \theta, \phi)$ se trouve vis-à-vis du centre O , puisque

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_\theta = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = -E_\phi = 0$$

En fait, nous aurions pu étudier d'emblée l'effet de la symétrie sphérique sur la fonction potentiel $V(r, \theta, \phi)$, et déduire que θ et ϕ n'étant pas des variables sensibles, cette fonction ne peut dépendre que de r .

Comme nous allons le constater très vite, il est plus aisé de calculer en premier lieu le potentiel électrostatique. Comme la distribution est confinée sur la sphère, donc limitée spatialement, l'origine des potentiels peut être choisie à distance infinie des charges, c'est-à-dire pour $r \rightarrow \infty$. Avec cette convention, le potentiel en un point M a alors pour expression

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS(P)}{PM}$$

la densité σ étant constante, P étant un point de la sphère, et $dS(P) = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ un élément de surface de cette sphère. L'intégration est une double intégration portant sur les angles θ (entre 0 et π) et ϕ (entre 0 et 2π). Pour effectuer les intégrations le plus simplement possible, choisissons un système d'axes tel que l'axe Oz soit orienté suivant \vec{OM} . Il est alors facile de voir que la distance PM est indépendante de l'angle ϕ défini à partir de cette convention. Ceci permet d'effectuer aisément l'intégration portant sur cet angle :

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{PM}$$

Or,

$$PM^2 = \vec{PM}^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 = \vec{OM}^2 + \vec{OP}^2 - 2 \vec{OM} \cdot \vec{OP}$$

Posons $OM = r$. Comme $OP = R$ et que θ est l'angle entre les deux vecteurs \vec{OM} et \vec{OP} , il vient

$$PM^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

Posons ensuite $u = \cos \theta$. Avec ce changement de variable, compte-tenu du fait que $\sin \theta d\theta = -du$, l'intégrale ci-dessus devient

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{PM} = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu}} = -\frac{1}{rR} \left[\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{rR} (R + r - |R - r|)$$

Deux cas doivent donc être considérés

◇ Soit $r < R$, auquel cas

$$\frac{1}{rR} (R + r - |R - r|) = \frac{2}{R}$$

◇ Soit $r > R$ et alors

$$\frac{1}{rR} (R + r - |R - r|) = \frac{2}{r}$$

Il s'ensuit que

◇ pour $r < R$ (M à l'intérieur de la sphère)

$$V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

et le potentiel est donc *constant* dans cette région ;

◇ pour $r > R$ (M à l'extérieur de la sphère)

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{r\epsilon_0}$$

et le potentiel décroît comme $1/r$ dans cette région.

Le vecteur champ électrostatique créé par cette distribution s'exprime comme

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$$

soit

$$E_r(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < R \quad \text{et} \quad E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour} \quad r > R$$

Comme attendu pour une distribution superficielle, le champ est discontinu à la traversée de la sphère :

$$E_r(R - 0) = 0 \quad \text{alors que} \quad E_r(R + 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On remarque aussi que pour un point extérieur à la sphère, le champ s'exprime aussi en fonction de la charge totale $Q = 4\pi R^2 \sigma$ de la distribution comme

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

et prend donc la même forme que le champ créé au point considéré par une charge ponctuelle Q placée en O . On a donc le résultat important suivant : pour un point à l'extérieur de la sphère, tout se passe comme si la charge totale de la distribution était concentrée en O . Bien sûr, ce résultat est dû à la symétrie sphérique de la distribution et n'est pas généralisable a priori à une distribution quelconque.

3.4.4 Boule uniformément chargée

Étudions enfin le cas d'une distribution volumique de charges. Le plus simple est celui de charges distribuées uniformément avec la densité volumique (constante) ρ à l'intérieur d'une boule B de rayon R et de centre O . Cette distribution D_v possède la symétrie sphérique autour de O . On en déduit (les arguments de symétrie étant les mêmes ici que ceux du paragraphe précédent) que le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par D_v en un point $M(r, \theta, \phi)$ est fonction uniquement de la distance $r = OM$ et que le vecteur champ électrostatique est radial.

Ici encore, le plus simple est de calculer tout d'abord le potentiel $V(r)$. Pour ce faire, nous utiliserons l'astuce suivante. Découpons la boule B en couronnes sphériques élémentaires. Une telle couronne est une région comprise entre deux sphères de même centre O , l'une de rayon R' et l'autre de rayon infiniment voisin $R' + dR'$, dR' étant infinitésimal et R' pouvant varier entre 0 et le rayon R de la boule B . L'épaisseur dR' de la couronne est supposée si petite que l'on pourra assimiler l'ensemble des

charges contenues dans la couronne sphérique élémentaire à une distribution superficielle de charges sur la sphère de rayon R' . La densité surfacique correspondante s'obtient en calculant de deux façons équivalentes la charge totale dQ contenue dans la couronne élémentaire. D'une part, celle-ci est calculable naturellement en utilisant la densité volumique ρ comme

$$dQ = \rho \times \text{volume de la couronne} = \rho 4\pi R'^2 dR'$$

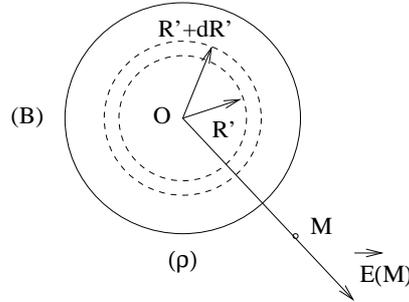


Figure 3.26

D'autre part, en interprétant la distribution dans la couronne comme une distribution superficielle de densité σ , on a

$$dQ = \sigma \times \text{surface de la sphère} = \sigma 4\pi R'^2$$

On en déduit

$$\sigma = \rho dR'$$

Appliquons ensuite le principe de superposition. La couronne élémentaire donne la contribution élémentaire dV au potentiel total créé en M par la distribution volumique D_v . D'après les résultats du paragraphe précédent, cette contribution est telle que

$$dV = \frac{\sigma R'}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} R' dR' \quad \text{pour } r < R'$$

et

$$dV = \frac{\sigma R'^2}{r\epsilon_0} = \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' \quad \text{pour } r > R'$$

Pour un point M en dehors de la boule B , on a $r \geq R$ et R' est toujours inférieur à r . Il vient alors

$$V(r) = \int_0^R \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' = \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$$

soit, en fonction de la charge totale $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ de la distribution

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Ainsi, pour un point M à l'extérieur de D_v , cette distribution se comporte comme une charge ponctuelle Q située en O .

Pour un point M à l'intérieur de D_v , on a $r \leq R$, et il faut distinguer deux cas, soit $R' \leq r$, soit $R' \geq r$. La contribution au potentiel des charges telles que $R' \leq r$ est donnée par

$$V_{<}(r) = \int_0^r \frac{\rho}{r\epsilon_0} R'^2 dR' = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

tandis que celle des charges telles que $R' \geq r$ est

$$V_{>}(r) = \int_r^R \frac{\rho}{\epsilon_0} R' dR' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

Le potentiel en un point M à l'intérieur de la boule est donc

$$V(r) = V_{<}(r) + V_{>}(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

Quant au vecteur champ électrostatique en M , il est donné par

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$$

soit

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{pour} \quad r < R$$

et

$$E_r(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad \text{pour} \quad r > R$$

On remarquera que cette fois le champ électrostatique est une fonction continue de r . On démontre de façon plus générale que *le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une distribution volumique quelconque est une fonction continue des coordonnées du point M* . Rappelons que le potentiel, quant à lui, est en toute circonstance une fonction continue.

3.5 Le champ de gravitation

A l'instar de ce qui a été fait en électrostatique, le *champ de gravitation* créé en un point M par une masse ponctuelle m placée en un point S est défini par le rapport de la force de gravitation que cette masse exerce sur une masse d'essai m' placée en M , et cette masse m'

$$\vec{G}(M) = \frac{1}{m'} \vec{F}_{M_1/M_2} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}$$

où $r = SM$, et $\vec{u} = \vec{SM}/r$. Du fait que les lois de Newton pour la gravitation et de Coulomb pour l'électrostatique sont à l'identique quant à la variation spatiale en $\frac{e_r}{r^2}$ pour des constituants ponctuels, tout ce qui a été fait en électrostatique peut être appliqué ici, moyennant les changements

charge $q \rightarrow$ masse m

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G \quad (\text{attention au signe!})$$

densités de charges \rightarrow densités de masses

champ électrostatique $\vec{E}(M) \rightarrow$ champ de gravitation $\vec{G}(M)$

potentiel électrostatique $V(M) \rightarrow$ potentiel de gravitation $\Phi(M)$

Le champ de gravitation dérive d'un potentiel de gravitation

$$\vec{G}(M) = -\vec{\text{grad}} \Phi(M)$$

Le potentiel de gravitation créé par une masse ponctuelle est ainsi donné par

$$\Phi(M) = -\frac{Gm}{r} + \text{constante}$$

Notons ici un résultat important. Considérons une boule massive de centre O , de rayon R et de masse m , à l'intérieur de laquelle les masses sont réparties uniformément avec la densité volumique

$$\mu = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

En transposant à la gravitation le résultat établi en électrostatique en faisant le changement

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -Gm \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi G\mu$$

on trouve que le potentiel et le champ de gravitation créé par cette boule en un point M tel que $OM = r$ sont donnés par

$$\Phi(M) = -2\pi G\mu \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{4\pi G\mu r}{3} \vec{e}_r \quad \text{pour} \quad r \leq R$$

$$\Phi(M) = -\frac{Gm}{r} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{pour} \quad r \geq R$$

où l'on a choisi la convention $\Phi(M) \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$. Le résultat intéressant est que si l'on assimile un astre⁴ à une telle distribution sphérique uniforme, on peut alors dire qu'en un point à l'extérieur de l'astre tout se passe comme si toute la masse de celui-ci était concentrée en son centre. C'est une hypothèse souvent utilisée en Mécanique.

⁴Par exemple la Terre, en identifiant μ à la densité moyenne des masses

3.6 Complément : calcul du champ de gravitation d'un mur

Envisageons un mur d'épaisseur e et de dimensions transversales si grandes qu'on puisse les considérer comme infinies. Nous supposons que les masses sont uniformément réparties à l'intérieur du mur avec la densité volumique μ . Nous définirons le plan xOz comme le plan médiateur du mur, de sorte que les faces du mur, parallèles à ce plan, se trouvent aux ordonnées $y = -e/2$ et $y = +e/2$ respectivement. Nous calculerons le potentiel de gravitation créé par ce mur en un point $M(x, y, z)$ en utilisant une superposition astucieuse. Découpons en effet le mur en murs élémentaires d'épaisseurs infinitésimales, chacun d'eux se trouvant entre deux plans d'ordonnées y et $y + dy$ respectivement, y variant de 0 à e . Chaque mur élémentaire à l'ordonnée y pourra être assimilé à un plan sur lequel des masses sont uniformément réparties avec la densité superficielle $\sigma = \mu dy$. En effet, si l'on calcule la masse dm contenue dans un parallélépipède rectangle de base S parallèle à xOz et de hauteur dy , on trouve $dm = \sigma S$ à l'aide de σ et $dm = \mu S dy$ à l'aide de μ . On a donc

$$\sigma = \mu dy$$

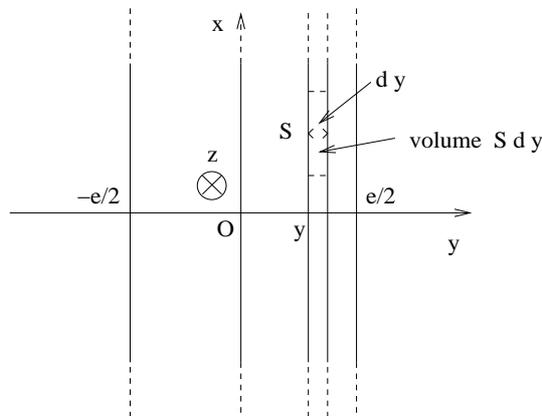


Figure 3.27

Dans le paragraphe 3.5.2, nous avons obtenu l'expression du potentiel électrostatique créé par un plan uniformément chargé :

$$V(M) = -\frac{\sigma|y'|}{2\epsilon_0}$$

avec la convention $V = 0$ pour $y' = 0$, et où l'on a fait le changement $z \rightarrow y'$, y' représentant l'ordonnée du point considéré *par rapport à ce plan*. Transposons ce résultat au potentiel de gravitation créé par l'un des murs élémentaires d'épaisseur infinitésimale dy , en faisant les changements suivants : $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi G\mu dy$ (électrostatique \rightarrow gravitation), et $y' \rightarrow h - y$ où h est l'ordonnée du point d'étude par rapport au plan xOz , y étant celle du mur élémentaire par rapport à ce même plan.

La contribution du mur élémentaire au potentiel de gravitation du mur entier est ainsi

$$d\Phi(M) = 2\pi G\mu |h - y| dy$$

Comme le plan xOy est un P_+ de la distribution de masses du mur, il nous suffit d'étudier le potentiel dans la région $h \geq 0$, le potentiel total devant être une fonction paire de h . Considérons tout d'abord le cas le plus simple où $h \geq e/2$. On a alors $h \geq y$ et

$$\Phi(M) = 2\pi G\mu \int_{-e/2}^{e/2} (h - y) dy = 2\pi G\mu eh$$

Le vecteur champ de gravitation dans cette région est donc

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = - \vec{j} \frac{d\Phi}{dh}(M) = - \vec{j} 2\pi G\mu e$$

Il est donc *uniforme*, orienté bien sûr vers le mur.

Dans la région $0 \leq h \leq e/2$, le potentiel est donné par

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= 2\pi G\mu \left[\int_{-e/2}^h (h-y) dy + \int_h^{e/2} (y-h) dy \right] = \\ &= \pi G\mu [(h+e/2)^2 + (e/2-h)^2] = 2\pi G\mu [h^2 + e^2/4] \end{aligned}$$

et le champ de gravitation par

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = - \vec{j} 4\pi G\mu h$$

Dans la région $-e/2 \leq h \leq 0$ le potentiel et le champ sont donnés par

$$\Phi(M) = 2\pi G\mu [h^2 + e^2/4] \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = - \vec{j} 4\pi G\mu h$$

(et $\vec{\mathcal{G}}(M)$ y a le même sens que \vec{j} puisque $h \leq 0$), tandis que dans la région $h \leq -e/2$, on a

$$\Phi(M) = -2\pi G\mu eh \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{j} 2\pi G\mu e$$

On observe que, comme cela était attendu puisqu'on a affaire à une distribution volumique, le champ est une fonction continue de h , ordonnée du point d'étude, et qu'il est nul pour $h = 0$. On aurait pu prévoir ce résultat directement de la façon suivante. D'une part, du fait des symétries de la distribution, le champ doit être de la forme

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{j} \mathcal{G}(h) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(-h) = -\mathcal{G}(h)$$

En considérant la limite $h \rightarrow 0$, de la dernière égalité on déduit

$$\mathcal{G}(-0) = -\mathcal{G}(+0)$$

Mais comme ici le champ doit être une fonction continue,

$$\mathcal{G}(-0) = \mathcal{G}(+0) = \mathcal{G}(0)$$

d'où $\mathcal{G}(0) = 0$.

A partir de ce modèle du mur, il est facile de comprendre pourquoi un champ électrostatique ou gravitationnel subit apparemment une discontinuité lorsqu'on a affaire à des distributions superficielles. En effet, considérons le mur depuis un point d'observation à l'extérieur du mur (ce qui est somme toute plus physique...) et tel que $|h| \gg e$. Depuis un tel site, un observateur voit le mur sans épaisseur, c'est à dire comme une surface. Pour lui, la région interne du mur n'existe pas et n'a de toute façon aucun intérêt pour lui puisqu'il ne peut y accéder... Etudiant les symétries de la distribution, cet observateur en déduira les propriétés déjà énoncées :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{j} \mathcal{G}(h) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(-h) = -\mathcal{G}(h)$$

et, en modélisant le mur comme une distribution superficielle de masses avec la densité constante σ , trouvera⁵

$$\mathcal{G}(h) = -2\pi G\sigma \quad \text{pour} \quad h > 0$$

et

$$\mathcal{G}(h) = 2\pi G\sigma \quad \text{pour} \quad h < 0$$

⁵A partir des formules du paragraphe 3.5.2, faire le changement $1/\epsilon_0 \rightarrow -4\pi G$ et $\sigma_{\text{charges}} \rightarrow \sigma_{\text{masses}}$

S'il veut extrapoler ces résultats vers les régions proches du mur ($h \rightarrow 0$ pour lui, mais en fait il s'agit des limites $h \rightarrow \pm e/2$), il trouvera une discontinuité du champ égale à

$$\mathcal{G}(+0) - \mathcal{G}(-0) = -4\pi G\sigma$$

En fait, cette différence est plutôt égale à

$$\mathcal{G}(+e/2) - \mathcal{G}(-e/2) = -4\pi G\mu e$$

En identifiant ces deux expressions, comme il se doit, on retrouve la relation entre densité superficielle et densité volumique :

$$\sigma = \mu e$$

déjà mentionnée au paragraphe 3.4.2.