

Chapitre 4

Energie potentielle et Energie mécanique

4.1 Condition d'existence

Pour commencer, nous considèrerons le cas d'un système constitué de deux points matériels M_1 et M_2 dont l'interaction à distance est décrite par les vecteurs forces

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{M_1/M_2}, \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{M_2/M_1} = -\vec{F}_1$$

Lorsque les deux points matériels M_1 et M_2 subissent des déplacements infinitésimaux

$$d\vec{M}_1 = dx_1 \vec{e}_x + dy_1 \vec{e}_y + dz_1 \vec{e}_z$$

et

$$d\vec{M}_2 = dx_2 \vec{e}_x + dy_2 \vec{e}_y + dz_2 \vec{e}_z$$

respectivement, le travail total (infinitésimal) développé par ces forces intérieures au système est

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{M}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{M}_2$$

soit, explicitement, en fonction des composantes cartésiennes des forces et des déplacements infinitésimaux

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = F_{1x}dx_1 + F_{1y}dy_1 + F_{1z}dz_1 + F_{2x}dx_2 + F_{2y}dy_2 + F_{2z}dz_2$$

Cette expression est ce qu'on appelle une *forme différentielle*. Ici, il s'agit d'une forme différentielle relativement aux six variables que sont les coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ des deux points M_1 et M_2 (les composantes des forces en dépendent) et à leurs différentielles $dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2$.

On dit qu'un tel système possède une *énergie potentielle* s'il existe une fonction $E_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ des coordonnées des points matériels en interaction telle que le travail élémentaire $w_{\text{tot}}^{\text{int}}$ développé par les forces intérieures lors de déplacements infinitésimaux de leurs points d'application respectifs puisse s'écrire comme l'opposé de la différentielle de cette fonction, qui est la partie principale de sa variation consécutive à ces déplacements :

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = -dE_p$$

Cette fonction $E_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, si elle existe, est appelée *énergie potentielle* du système considéré. Elle décrit entièrement les interactions entre les points matériels constituant le système. Les forces intérieures se déduisent notamment de cette fonction par des dérivations partielles. On dit alors qu'elles *dérivent d'une énergie potentielle*. On a ainsi, dans le cas présent

$$F_{1x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, \quad F_{1y} = -\frac{\partial E_p}{\partial y_1}, \quad F_{1z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z_1}$$

et

$$F_{2x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_2}, \quad F_{2y} = -\frac{\partial E_p}{\partial y_2}, \quad F_{2z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z_2}$$

Ecrivons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une telle fonction. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous omettons de mentionner les inévitables conditions mathématiques de régularité (dérivabilité, continuité) des fonctions mises en jeu et admettons le résultat suivant. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme différentielle à n variables

$$D = A_1(u_1, \dots, u_n)du_1 + A_2(u_1, \dots, u_n)du_2 + \dots + A_n(u_1, \dots, u_n)du_n$$

soit la différentielle d'une fonction $F(u_1, \dots, u_n)$ (c'est-à-dire $D = dF$) sont les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\frac{\partial A_i}{\partial u_j} = \frac{\partial A_j}{\partial u_i}, \quad \text{avec } 1 \leq i < j \leq n$$

S'il en est ainsi, on dit que la forme différentielle D est une *forme différentielle totale exacte*.

Insistons ici sur le fait que s'il existe une fonction énergie potentielle, celle-ci ne dépend que des coordonnées des points matériels en interaction et *en aucun cas des vitesses*. On peut même être plus précis concernant la dépendance vis-à-vis des coordonnées. En effet, d'après le principe de l'action et de la réaction, on a $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, et par suite

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_2 \cdot d\vec{M}_1M_2 = F_{2x}d(x_2 - x_1) + F_{2y}(dy_2 - dy_1) + F_{2z}(dz_2 - dz_1)$$

ce qui montre qu'en fait, s'il existe une énergie potentielle, celle-ci ne dépend des coordonnées des parties en interaction que par l'intermédiaire des coordonnées relatives $x_i - x_j$.

Ces résultats se transposent directement à des systèmes complexes de n points matériels en interaction, et même à des systèmes modélisables comme des milieux continus.

De fait, pour de tels systèmes, on admet couramment l'existence d'une énergie potentielle décrivant l'interaction à distance des constituants élémentaires.

4.2 Exemples

4.2.1 Cas des forces centrales

Deux points matériels M_1 et M_2 exercent l'un sur l'autre une force *centrale* si celle-ci

- ♠ est portée par la droite M_1M_2 ,
- ♠ et si son intensité ne dépend que de la distance $r = M_1M_2$.

Son expression générale est donc de la forme

$$\vec{F}_{M_1/M_2} = f(r) \vec{u}_{12}$$

où $\vec{u}_{12} = \vec{M}_1\vec{M}_2 / r$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{M}_1\vec{M}_2$. Lorsque M_1 et M_2 subissent des déplacements infinitésimaux $d\vec{M}_1$ et $d\vec{M}_2$ respectivement, le travail total (infinitésimal) développé par les forces intérieures est

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = \vec{F}_{M_1/M_2} \cdot d\vec{M}_1M_2 = f(r) \vec{u}_{12} \cdot d\vec{M}_1M_2$$

Puisque $\vec{M}_1\vec{M}_2 = r \vec{u}_{12}$, on a

$$d \overrightarrow{M_1 M_2} = dr \overrightarrow{u}_{12} + r d \overrightarrow{u}_{12}$$

Mais comme $\overrightarrow{u}_{12}^2 = 1$ (vecteur unitaire), on a aussi

$$d \overrightarrow{u}_{12}^2 = 2 \overrightarrow{u}_{12} \cdot d \overrightarrow{u}_{12} = 0$$

ce qui signifie que $d \overrightarrow{u}_{12}$ est orthogonal à \overrightarrow{u}_{12} . On en déduit

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = f(r)dr$$

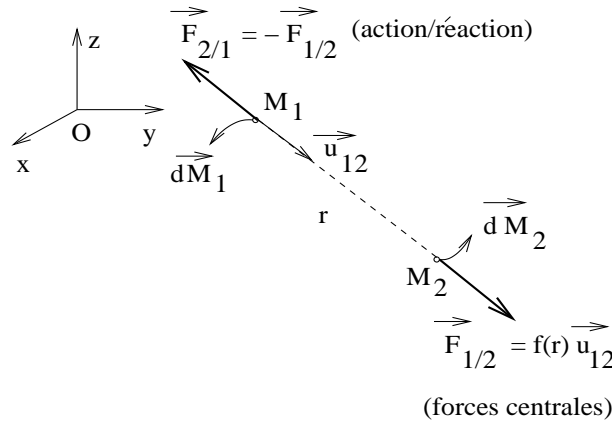


Figure 4.1

Cette dernière expression est une forme différentielle à *une seule variable* r . En admettant, pour les fonctions utilisées en Physique, le résultat mathématique selon lequel une fonction d'une variable possède toujours une primitive, il est manifeste que l'on pourra introduire ici une fonction $E_p(r)$, telle que

$$\frac{dE_p}{dr} = -f(r)$$

de sorte que

$$w_{\text{tot}}^{\text{int}} = -dE_p$$

Ainsi, un tel système possède une énergie potentielle. Cette dernière ne dépend des coordonnées x_1, y_1, z_1 de M_1 et x_2, y_2, z_2 de M_2 que par l'intermédiaire de la distance $r = M_1 M_2$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \right)_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, & \left(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \right)_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_1}, & \left(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \right)_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z_1} \\ \left(\overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \right)_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_2}, & \left(\overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \right)_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_2}, & \left(\overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \right)_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z_2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les *deux* forces intérieures $\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}$ et $\overrightarrow{F}_{M_2/M_1} = -\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}$ dérivent de la *même* fonction énergie potentielle $E_p(r)$. C'est un résultat important qu'il faut retenir.

4.2.2 Système de deux charges en Electrostatique

On a ici

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{12}}{r^2}$$

soit

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr}$$

On en déduit par intégration

$$E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{constante}$$

La généralisation à un système quelconque de N charges ponctuelles en interaction est immédiate. Un tel système possède une énergie potentielle ayant pour expression

$$E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} + \text{constante}$$

où

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Comme attendu, elle ne dépend des coordonnées que par l'intermédiaire des coordonnées relatives $x_i - x_j$.

4.2.3 Système de deux masses en Gravitation

On a ici

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

En suivant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on obtient ici l'énergie potentielle de gravitation de deux masses ponctuelles en interaction sous la forme

$$E_p(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} + \text{constante}$$

et, pour un système de N masses ponctuelles en interaction, l'énergie potentielle de gravitation

$$E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = -\sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} + \text{constante}$$

4.2.4 Le pendule simple

On étudie ici une situation particulière du cas précédent, concernant l'interaction gravitationnelle entre la masse m accrochée au bout du fil du pendule et la Terre. On sait que si l'on modélise la Terre comme une boule de centre C et rayon R dans laquelle les masses sont uniformément réparties, elle peut être considérée depuis un point à l'extérieur comme une masse ponctuelle placée en C , dont la masse est la masse totale M_T de la Terre. L'interaction entre la Terre et la masse m sera alors décrite par l'énergie potentielle

$$E_p(r) = -\frac{GM_T m}{r} + \text{constante}$$

où $r = CM$. Notant h l'altitude de la masse m , on a $r = R + h$ et comme $h \ll R$, il vient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R(1+h/R)} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

d'où

$$E_p(r) = E_p(h) = mgh + \text{constante}$$

avec $g = \frac{GM_T}{R^2}$. La constante peut être ajustée de telle sorte que l'énergie potentielle soit nulle lorsque le pendule est selon la verticale (qui, dans le modèle proposé ici, coïncide avec la direction radiale CM). Si h_0 est l'altitude correspondante de m , on aura alors

$$E_p(h_0) = 0 = mgh_0 + \text{constante}, \text{ donc } \text{constante} = -mgh_0$$

et par suite

$$E_p(h) = E_p(z) = mg(h - h_0) = mgz$$

en posant $z = h - h_0$.

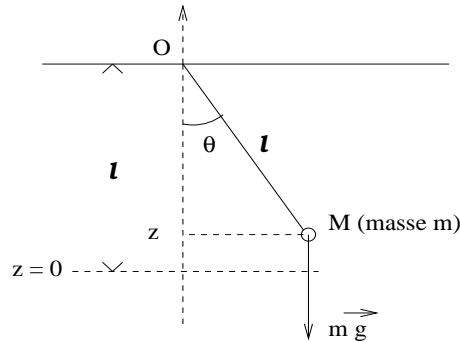


Figure 4.2

On peut retrouver directement cette expression de la façon suivante. Lors d'un déplacement infinitésimal $d\vec{M} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ de la masse m , son poids $\vec{P} = -mg \vec{k}$ produit le travail élémentaire

$$w = \vec{P} \cdot d\vec{M} = -m g dz$$

Manifestement, ce travail peut être réécrit comme la différentielle totale exacte $-d(mgz)$ et l'on peut dire que le poids de la masse m dérive de l'énergie potentielle

$$E_p(z) = mgz + \text{constante}$$

Comme précédemment, la constante peut être ajustée de telle sorte que $E_p(0) = 0$, et l'on obtient ainsi $E_p(z) = mgz$.

Il est utile de donner ici l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ entre le fil du pendule et la verticale. On a (voir figure) $z = \ell - \ell \cos \theta$, d'où

$$E_p(z) = E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta)$$

4.2.5 Système masse-ressort

Lorsque la longueur du ressort est $\ell = \ell_0 + x$, la force de rappel a pour expression (voir figure)

$$\vec{F}_r = -k x \vec{i}$$

Lors d'une élongation du ressort égale à $d x \vec{i}$ à partir de cette longueur, la force de rappel exerce le travail

$$w_r = \vec{F}_r \cdot d x \vec{i} = -k x d x = -d \left(\frac{kx^2}{2} \right)$$

On voit ainsi que la force de rappel dérive de l'énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{kx^2}{2}$$

en convenant de prendre $E_p(0) = 0$.

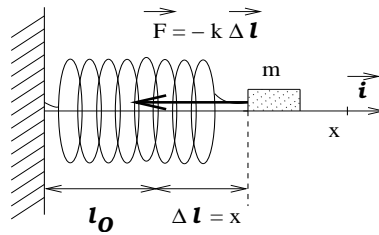


Figure 4.3

4.3 Energie de constitution d'un système

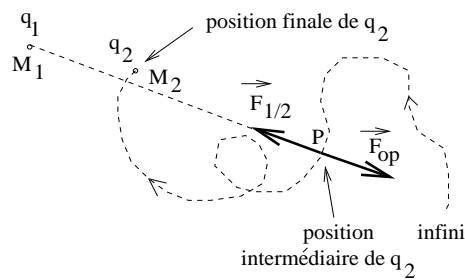


Figure 4.4

Pour illustrer le concept d'énergie de constitution d'un système, considérons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en interaction, et situées en M_1 et M_2 respectivement. Imaginons tout d'abord la configuration où les deux charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre. On peut alors admettre que leur interaction est quasiment nulle. Supposons la charge q_1 fixée à sa position actuelle M_1 alors que la charge q_2 se trouve à distance infinie. Pour amener cette charge q_2 depuis l'infini à la position finale

M_2 , ce qui correspond à la configuration finale envisagée pour le système des deux charges, faisons appel à un opérateur (fictif ou non). Celui-ci déplacera petit à petit la charge q_2 , de façon *quasistatique*, en compensant à chaque étape la force que q_1 exerce sur q_2 , de telle sorte que cette dernière se trouve à l'équilibre à chaque moment. Bien entendu, cette opération ne peut être réalisée physiquement, car elle devrait être de durée infinie pour qu'il y ait constamment équilibre de q_2 . Néanmoins, elle peut toujours être envisagée sur le plan théorique.

Pour déplacer infiniment peu de \vec{dP} la charge q_2 qui se trouvait initialement en un point P , l'opérateur devra fournir le travail

$$w_{\text{op}} = \vec{F}_{\text{op}} \cdot \vec{dP}$$

La charge q_2 étant constamment à l'équilibre, on doit avoir

$$\vec{F}_{\text{op}} = - \vec{F}_{q_1/q_2}(P) = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{M_1 \vec{P}}{M_1 P^3}$$

d'où

$$w_{\text{op}} = - \vec{F}_{q_1/q_2}(P) \cdot \vec{dP}$$

Or \vec{F}_{q_1/q_2} dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{M_1 P} + \text{constante}$$

C'est-à-dire que pour M_1 fixé, on a

$$\vec{F}_{q_1/q_2}(P) \cdot \vec{dP} = -dE_p$$

On en déduit

$$w_{\text{op}} = +dE_p$$

Le travail total que devra fournir l'opérateur pour amener ainsi la charge q_2 depuis l'infini jusque sa position actuelle M_2 est égal à

$$W_{\text{op}}^{\text{tot}} = \Delta E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{M_1 M_2}$$

A une constante près, la dernière expression représente l'énergie potentielle du système des deux charges q_1 et q_2 lorsque celles-ci occupent les positions M_1 et M_2 respectivement. Il s'agit donc bien du travail, ou de l'énergie nécessaire pour constituer le système à partir d'une configuration où les constituants sont infiniment éloignés l'un de l'autre. Cette énergie peut d'ailleurs être positive ou négative.

Envisageons ensuite un système constitué d'une distribution de charges \mathcal{D} produisant le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$ au point M où est située une charge ponctuelle Q . Répétant la même procédure que celle imaginée précédemment, on trouve que le travail que doit fournir un opérateur pour amener la charge Q depuis l'infini à sa position actuelle M , la distribution de charges \mathcal{D} étant supposée fixée est

$$W_{\text{op}}^{\text{tot}} = \int_{\infty \rightarrow M} \vec{F}_{\text{op}} \cdot \vec{dP} = -Q \int_{\infty \rightarrow M} \vec{E}(P) \cdot \vec{dP} = Q \int_{\infty \rightarrow M} dV(P)$$

soit

$$W_{\text{op}}^{\text{tot}} = Q(V(M) - V(\infty)) = \Delta E_p$$

Si l'on convient de prendre $V(\infty) = 0$ et $E_p(\infty) = 0$, on obtient

$$W_{\text{op}}^{\text{tot}} = E_p = QV(M)$$

La quantité $E_p = QV(M)$ représente bien l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre la distribution \mathcal{D} et la charge Q . Lorsque la distribution \mathcal{D} est de caractère "macroscopique", c'est-à-dire si elle a une extension plus importante que celle de la charge Q et est par là-même plus complexe que cette dernière, on parle plutôt, pour des raisons de "préséance", de l'énergie potentielle de la charge Q "plongée dans le champ créé par la distribution \mathcal{D} ". Un exemple plus évident est celui de l'interaction gravitationnelle entre la Terre et une balle de ping-pong : il paraît plus naturel de parler de l'énergie potentielle de la balle dans le champ de gravitation de la Terre plutôt que de l'inverse. Et pourtant...

4.4 Energie mécanique d'un système

4.4.1 Définition

Considérons un système Σ constitué de N points matériels évoluant dans un référentiel galiléen. Nous distinguerons ici deux types de forces. Tout d'abord les forces \vec{F}_i^{int} intérieures au système Σ qui décrivent les interactions entre ses constituants, et les forces \vec{F}_i^{ext} extérieures qui décrivent l'action sur les constituants de Σ d'un système Σ' extérieur à Σ .

Chacun des constituants de Σ est donc soumis à la force résultante

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

Lors de l'évolution de Σ entre deux dates infiniment voisines t et $t + dt$, ses constituants effectuent des déplacements infinitésimaux $d\vec{M}_i$, d'où il résulte un travail total développé par l'ensemble des forces agissant sur les constituants de Σ égal à

$$w = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{M}_i$$

Ce travail se décompose en un travail w^{ext} dû aux actions extérieures et un travail w^{int} dû aux forces intérieures. Nous supposons que le système Σ possède une énergie potentielle E_p^Σ décrivant les interactions entre ses constituants, de sorte que

$$w^{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{int}} \cdot d\vec{M}_i = -dE_p^\Sigma$$

Or, d'après le théorème de l'énergie cinétique, w est égal à la variation d'énergie cinétique du système Σ entre les deux dates t et $t + dt$

$$w = dE_c^\Sigma = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

On en déduit

$$d(E_c^\Sigma + E_p^\Sigma) = w^{\text{ext}}$$

On appelle *énergie mécanique* du système Σ la quantité

$$E^\Sigma = E_c^\Sigma + E_p^\Sigma$$

Au moyen de cette définition, le théorème de l'énergie cinétique est transformé en *théorème de l'énergie mécanique*, selon lequel

La variation d'énergie mécanique d'un système est égale au travail total développé par les forces extérieures appliquées au système au cours de l'évolution de celui-ci :

$$\Delta E = W^{\text{ext}}$$

4.4.2 Energie mécanique d'un système isolé

Dans les évaluations précédentes des travaux "intérieur" et "extérieur", il importe de bien préciser le contenu du système étudié, afin qu'il n'y ait aucune ambiguïté sur ce que l'on entend par "forces intérieures" et par "forces extérieures" à ce système.

A cet égard, considérons l'ensemble Σ'' constitué par la réunion des deux systèmes Σ et Σ' et supposons qu'il n'y ait pas de système extérieur à Σ'' susceptible d'exercer sur lui une action. Ce "super-système" peut donc être considéré comme un *système isolé*, et de son point de vue il n'existe que des forces intérieures. Nous admettons ici encore que toutes les forces intérieures à Σ'' dérivent d'énergie potentielles, pouvant d'ailleurs décrire des interactions de natures différentes (électrostatiques, gravitationnelles ou autres). Notons $E_p^{\Sigma''}$ la somme de toutes les énergies potentielles en jeu. Alors, au cours de l'évolution du système global Σ'' , on a, d'après le théorème de l'énergie cinétique et la définition de l'énergie potentielle,

$$\Delta E_c^{\Sigma''} = W_{\text{tot}}^{\text{int}\Sigma''} = -\Delta E_p^{\Sigma''}$$

où $E_c^{\Sigma''}$ est l'énergie cinétique associée à Σ'' . Il en résulte que la somme

$$E^{\Sigma''} = E_c^{\Sigma''} + E_p^{\Sigma''}$$

qui représente l'énergie mécanique totale du système Σ'' reste *constante* au cours de l'évolution de Σ'' . On aboutit ainsi au théorème suivant

Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un système isolé se conserve.

Ce résultat, qui a été obtenu à partir du principe fondamental de la Dynamique Classique peut en fait être érigé en un grand principe de conservation de l'énergie :

L'énergie de l'Univers est une constante.

A présent, nous avons donc à notre disposition deux grandes lois de conservation concernant les *systèmes isolés dans des référentiels galiléens* :

- Conservation de la quantité de mouvement totale
- Conservation de l'énergie mécanique totale.

On retiendra que pour les systèmes isolés ou pseudo-isolés, les transferts d'énergie s'effectuent exclusivement entre énergie cinétique et énergie potentielle du système étudié.

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons que l'énergie cinétique, l'énergie potentielle comme l'énergie mécanique s'expriment en Joule dans le système d'unités S.I.

4.5 Applications

4.5.1 Vitesse de libération

Considérons l'interaction gravitationnelle entre la Terre et un corps de masse m , un engin spatial par exemple dont la masse reste constante¹. Nous admettons ici que le référentiel \mathcal{R} dont l'origine est au centre C de la Terre et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel héliocentrique peut être considéré comme galiléen. L'énergie mécanique du système engin-Terre dans ce référentiel \mathcal{R} s'écrit alors

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

où $r = CM$, M étant la position de l'engin, et v la norme du vecteur vitesse de l'engin dans \mathcal{R} .

Le système engin-Terre étant supposé isolé, cette énergie reste constante lors du mouvement de l'engin dans \mathcal{R} . Supposons que l'engin ait été amené par des fusées à l'altitude h puis lâché à cette altitude avec une vitesse de norme $v_i(h)$. On a donc

$$E = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R+h}$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 - GM_T m \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{r} \right)$$

soit

$$v^2 = v_i^2 - 2GM_T \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{r} \right)$$

Bien entendu, l'engin peut toujours redescendre vers la Terre, auquel cas $r < R+h$, ce qui fait qu'alors $v > v_i$ et l'engin est accéléré (attraction gravitationnelle). A quelle condition l'engin peut-il accéder aux régions de plus hautes altitudes, et, à la limite, s'échapper de l'attraction terrestre ? Si l'engin peut accéder aux régions $r \rightarrow \infty$ avec une vitesse non nulle v_∞ , la relation précédente donne alors

$$v_\infty^2 = v_i^2 - 2GM_T \left(\frac{1}{R+h} \right)$$

Une telle relation n'est en fait possible que si

$$v_i^2 - 2GM_T \left(\frac{1}{R+h} \right) \geq 0$$

Cette inéquation fixe la vitesse initiale minimum à donner à l'engin pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre à partir de l'altitude de lancement h . Cette vitesse, appelée *vitesse de libération* pour cette altitude, a pour expression

$$v_{\text{lib}}(h) = \sqrt{\frac{2GM_T}{R+h}}$$

A l'altitude zéro, cette vitesse a la plus grande valeur et est donnée par

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}} = \sqrt{2gR}$$

Avec $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ et $R = 6400 \text{ kms}$, on obtient $v_{\text{lib}} \approx 11,2 \text{ km/s}$. Si, au lieu de la Terre on considérait la Lune ($M_L = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $R_L = 1700 \text{ kms}$), on obtiendrait $v'_{\text{lib}} \approx 1,9 \text{ km/s}$. Or, la vitesse d'agitation thermique des molécules d'un gaz à la température ordinaire est de cet ordre de grandeur, voire supérieure. Ce fait permet d'expliquer pourquoi la Lune n'a pas d'atmosphère...

¹On ne considère donc pas de fusée ayant une masse variable du fait de la combustion de son carburant...

4.5.2 Le ressort

L'énergie mécanique du système (ressort + masse) est donnée par

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2$$

Supposons qu'à la date $t = 0$ la masse m soit lâchée sans vitesse initiale depuis la position $x = x_0$. Ces conditions initiales fixent l'énergie initiale à la valeur :

$$E(0) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2(0) + \frac{1}{2} k (x_0 - x_e)^2 = \frac{1}{2} k (x_0 - x_e)^2$$

En l'absence de frottement, cette énergie est conservée. On en déduit immédiatement la valeur du module de la vitesse en fonction de l'abscisse x :

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 = \frac{1}{2} k (x_0 - x_e)^2$$

soit

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = + \sqrt{\frac{k}{m} ((x_0 - x_e)^2 - (x - x_e)^2)} = \sqrt{\frac{k}{m} (x_0 - x)(x_0 + x - x_e)}$$

Ainsi, à chaque fois que la masse m repasse par la position d'équilibre $x = x_e$, le module de sa vitesse prend la valeur

$$v_e = \sqrt{\frac{k}{m}} |x_0 - x_e|$$

4.6 Les équilibres et leur stabilité

4.6.1 Considérations générales

Dans un référentiel galiléen, imaginons un système Σ maintenu en état de repos par un opérateur extérieur. On peut envisager par exemple un système de deux charges $+q$ et $-q$ qu'un opérateur maintient à distance l'une de l'autre en compensant exactement les forces électrostatiques attractives que ces deux charges exercent l'une sur l'autre. L'énergie cinétique totale du système Σ dans cet état initial est donc nulle.

Supposons qu'à une date prise comme origine $t = 0$, l'opérateur relâche ses contraintes. Comment le système Σ va-t-il évoluer ?

Supposons de plus que Σ soit *isolé* ou *pseudo-isolé*. Dans la seconde éventualité, il n'est pas isolé, mais les forces *extérieures* appliquées sur Σ se compensent exactement. On peut alors dire que l'énergie mécanique de Σ reste constante au cours de l'évolution ultérieure de ce système. On a donc

$$E = E_c + E_p = \text{constante}$$

Etant constante, cette énergie garde sa valeur initiale. Comme l'énergie cinétique initiale est nulle, il ne reste que l'énergie potentielle initiale $E_{p\text{init}}$

$$E = E_c + E_p = E_{p\text{init}}$$

Comme l'énergie cinétique E_c est une grandeur *positive*, on doit obligatoirement avoir

$$E_c = E_{p\text{init}} - E_p \geq 0$$

et par suite

$$E_p \leq E_{p\text{init}}$$

De cette inégalité découlent des conséquences importantes.

♠ Ou bien $E_p < E_{pinit}$. Dans ce cas il existe des configurations où l'énergie potentielle est inférieure à la valeur de départ et le système Σ va inmanquablement évoluer vers celles-ci.

♠ Ou bien E_p reste égal à E_{pinit} , et le système Σ reste au repos, même en l'absence de contrainte de la part d'un opérateur extérieur. Cela signifie qu'aucune force ne s'exerce sur aucune de ses parties et que l'opérateur extérieur n'avait d'ailleurs aucun effort à exercer pour maintenir le système Σ en cet état. Mais $\vec{F}_i = \vec{0}$ pour une partie quelconque de Σ revient à écrire $\vec{\text{grad}}_i E_p = \vec{0}$. Dans les cas les plus courants, une telle équation correspond à un *extremum* (maximum ou minimum) de l'énergie potentielle.

Ainsi, quand un système mécanique plongé dans un champ extérieur reste dans un état de repos perpétuel, il est en équilibre et cet équilibre correspond (le plus souvent) à un extremum de son énergie potentielle.

En fait, l'analyse de l'équation $\vec{\text{grad}}_i E_p = \vec{0}$ est compliquée par le fait qu'elle peut recouvrir des situations très différentes. Considérons de façon générale une fonction énergie potentielle $E_p(x, y, z)$. Les relations

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

peuvent par exemple être vérifiées uniquement en des points isolés. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un tel point. Il y a alors trois cas possibles.

♣ Dans un premier cas, la valeur $E_p(x_0, y_0, z_0)$ est un *maximum local* de la fonction. D'après les propriétés du gradient, les lignes de champ de $\vec{\text{grad}} E_p$ alentour convergent alors vers M_0 , et la force $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$ aura donc tendance à écarter davantage de M_0 le point matériel sur lequel elle s'applique, si ce dernier est déplacé un tant soit peu depuis M_0 dans une direction quelconque. On en déduit que la position d'équilibre M_0 est *instable*. C'est le cas par exemple pour la fonction

$$E_p(x, y, z) = K [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]$$

K étant une constante positive.

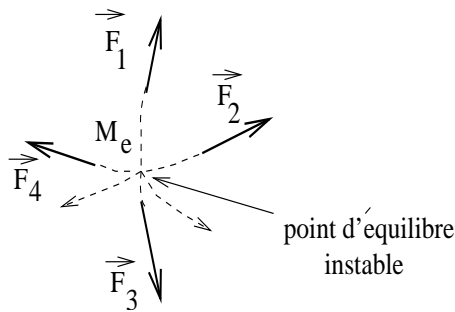


Figure 4.5

♣ Dans un second cas, la valeur $E_p(x_0, y_0, z_0)$ est un *minimum local*. Les lignes de champ de $\vec{\text{grad}} E_p$ alentour divergent alors à partir de M_0 , et la force $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$ aura tendance à ramener vers M_0 le point matériel sur lequel elle s'applique, lorsque celui-ci est déplacé depuis M_0 , et ce, quelque soit la direction de ce déplacement. Ce cas correspond à une position d'équilibre *stable* en M_0 . C'est le cas par exemple pour la fonction

$$E_p(x, y, z) = E_0 - K [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]$$

où E_0 et K sont des constantes positives.

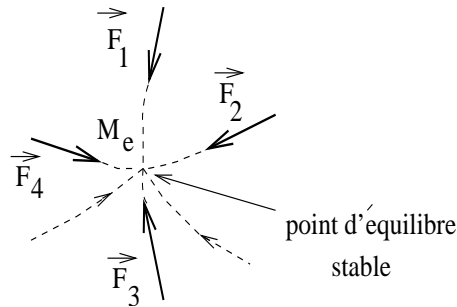


Figure 4.6

♣ Le troisième cas, plus original, est celui où M_0 ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum d'énergie potentielle. Certaines lignes de champ de $\vec{\text{grad}} E_p$ convergent alors vers M_0 tandis que d'autres divergent à partir de ce point. Ce qui veut dire qu'autour de M_0 , la force qui s'exerce sur le point matériel peut, selon la position occupée, avoir tendance à ramener ce point matériel vers M_0 ou au contraire l'en écarter. L'équilibre en M_0 ne peut être catalogué ni comme équilibre stable ni comme équilibre instable.

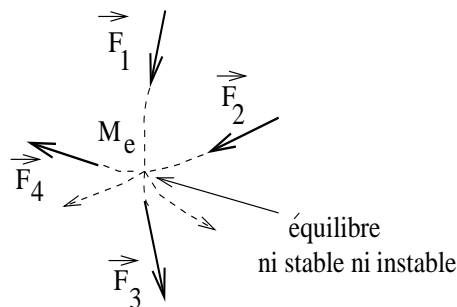


Figure 4.7

Il peut s'agir de l'analogue d'un point d'inflexion ou bien encore de ce qu'on appelle un *point selle* ou un *point col*. Ces dernières dénominations se réfèrent en fait à l'étude des fonctions à deux variables $E_p(x, y)$. En effet, lorsqu'on représente dans un espace à trois dimensions ($x, y, z = E_p$) le réseau des courbes équipotentielles $E_p(x, y) = \text{constante}$, il peut arriver que l'on obtienne une figure dont on peut dire, suivant que l'on soit turfiste ou alpiniste, qu'elle ressemble soit à une selle de cheval soit à un col dans la montagne. C'est, par exemple, ce qu'il advient pour la fonction

$$E_p(x, y) = K [x^2 - y^2], \quad \text{avec } K \text{ positif,}$$

au point origine O de coordonnées $x = 0, y = 0$. En effet, si l'on se déplace le long de l'axe $x'x$ (donc $y = 0$), la fonction prend la forme $E_p(x, 0) = Kx^2$ et le point O semble correspondre à un minimum de la fonction (dans le plan fictif zOx , cette relation est représentée par la parabole d'équation $z = Kx^2$ dont la concavité est du côté des z positifs). Cependant, si l'on se déplace selon l'axe $y'y$ (donc $x = 0$), la fonction prend alors la forme $E_p(0, y) = -Ky^2$ et cette fois le point O paraît être un maximum pour la fonction (dans le plan fictif zOy , perpendiculaire au précédent, cette relation est représentée par la parabole d'équation $z = -Ky^2$ dont la concavité est du côté des z négatifs).

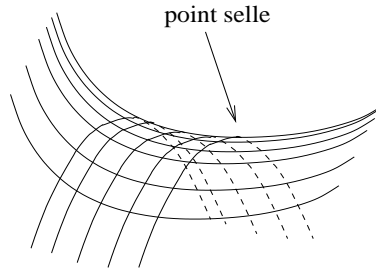


Figure 4.8

♣ Il se peut aussi que l'équation $\vec{\text{grad}} E_p = \vec{0}$ soit vérifiée pour un ensemble de points. Un exemple est celui de la fonction dont les valeurs, exprimées à l'aide des coordonnées cylindriques, sont données par

$$E_p(\rho, \phi, z) = K [z^2 + (\rho - \rho_0)^2]$$

K étant positif. Manifestement, cette fonction positive prend sa valeur minimum, ici zéro, aux points définis par $z = 0$ et $\rho = \rho_0$. Il s'agit du cercle \mathcal{C} situé dans le plan xOy , de centre O et de rayon ρ_0 . Si, à partir d'un point M_0 de ce cercle, on écarte le point matériel sur lequel s'exerce la force $-\vec{\text{grad}} E_p$ tout en restant sur le cercle, le point matériel, une fois lâché, restera dans sa nouvelle position puisque la force y est encore nulle. On a là un exemple d'*équilibre indifférent*, configuration d'équilibre qui résulte ici de la symétrie cylindrique de la fonction étudiée.

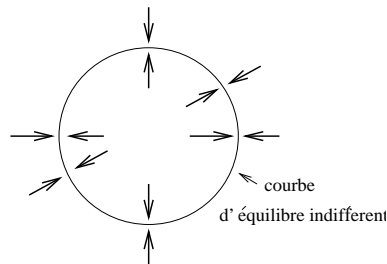


Figure 4.9

4.7 Mouvement à une dimension

Dans cette section, nous étudierons le mouvement d'un point matériel pouvant se déplacer uniquement suivant un axe $x'x$ et soumis à un champ de force $F(x)$ dépendant uniquement de l'abscisse x du point matériel, et qui de ce fait dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$. Une telle étude est motivée par le fait qu'elle recouvre de nombreux problèmes de Mécanique, et que notamment on peut ramener l'étude du mouvement d'un système de deux particules en interaction à celui d'une particule se déplaçant sur un axe, donc à un mouvement à une dimension.

4.7.1 Etude qualitative

L'étude qualitative se fonde sur l'étude du graphe représentant les variations de l'énergie potentielle $E_p(x)$, combinée avec l'exigence de positivité de l'énergie cinétique.

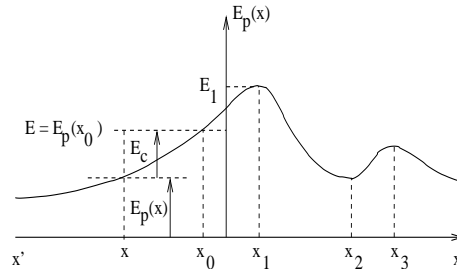


Figure 4.10

♣ Supposons par exemple que le point matériel M soit lâché sans vitesse initiale à partir d'un point d'abscisse $x_0 < x_1$ (voir figure).

L'énergie mécanique de M est

$$E = E_p(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)$$

D'après le graphe représentant les variations de la fonction énergie potentielle $E_p(x)$ en fonction de x , on voit que M ne peut acquérir de l'énergie cinétique que dans la région $] -\infty, x_0]$, puisqu'alors celle-ci qui s'exprime comme

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_p(x_0) - E_p(x)$$

est bien positive. La région $[x_0, +\infty[$ est *interdite* au point matériel M . Dans la région permise, on voit que la force

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}(x)$$

qui est *l'opposée de la pente* de la courbe représentant l'énergie potentielle, est orientée suivant l'axe xx' et va pousser M vers des x de plus en plus inférieurs à x_0 .

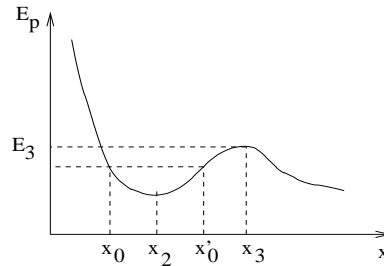


Figure 4.11

♣ Supposons maintenant que le point de lâchage de M ait une abscisse x_0 comprise entre x_1 et x_2 et que $E_p(x_0)$ soit inférieur à $E_3 = E_p(x_3)$ (voir figure).

La région permise pour les mouvements ultérieurs de M sera alors définie par

$$E_p(x) \leq E_p(x_0) \leq E_p(x_3)$$

Dans cette région se trouve un minimum d'énergie potentielle en $x = x_2$. A partir de x_0 , et ce jusqu'au point d'abscisse x_2 , la force est orientée dans le sens $x'x$ et va donc accélérer M dans ce sens. En $x = x_2$, la force s'annule. Le point matériel M ayant acquis une vitesse suffisante va dépasser cette position. Le signe de la force s'inverse à partir de là et cette dernière va ensuite décélérer M , jusqu'au point d'abscisse $x = x'_0$ où la vitesse de M va s'annuler. En effet, on a alors

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = E_p(x_0) - E_p(x'_0) = 0$$

A ce moment, le mobile M est soumis à une force orientée en sens inverse de l'axe $x'x$. Sous l'effet de cette force, il va alors se diriger à nouveau vers le point d'abscisse $x = x_2$, repasser par ce point, et revenir en $x = x_0$ où sa vitesse va encore s'annuler. Les conditions y redeviennent alors ce qu'elles étaient au moment du lâchage et le mouvement de M se répète ainsi indéfiniment, en l'absence de frottement : M effectue un mouvement périodique entre x_0 et x'_0 , de part et d'autre de la position x_2 où l'énergie potentielle est minimum. On parle alors de *puit de potentiel* dans lequel le point matériel M se trouve confiné.

Par contre, si au point de départ l'énergie potentielle $E_p(x_0)$ est plus grande que E_3 , le mobile M dépassera le point d'abscisse x_3 et, comme il est dit couramment, *franchira la barrière de potentiel* que représente E_3 . En effet, en x_3 on aura

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = E_p(x_0) - E_3 \geq 0$$

et le mobile aura donc une énergie cinétique suffisante pour accéder à la région $x \geq x_3$. A partir de x_0 il est accéléré jusque x_2 , puis décéléré jusque x_3 . Si $E_p(x_0)$ est strictement supérieur à E_3 , il dépasse la position x_3 où la force s'annule, puis est de nouveau accéléré vers les x de plus en plus grands. Si $E_p(x_0) = E_3$, M s'arrêtera en x_3 .

♣ Envisageons ensuite le cas où le mobile M est lancé depuis la région des grands x négatifs, dans le sens $x'x$, avec la vitesse initiale v_0 .

Ce type de situation se présente dans des processus de *diffusion* de particules.

Supposons que dans cette région l'énergie potentielle soit nulle, sinon négligeable. L'énergie mécanique du "projectile" M est donc

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

On voit immédiatement d'après le graphe représentant $E_p(x)$ que M ne pourra accéder à la région $x \rightarrow +\infty$ que si son énergie, et donc son énergie cinétique initiale, est plus grande que la barrière de potentiel E_1 , qui est ici la plus grande des valeurs de $E_p(x)$ car

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - E_p(x)$$

n'est positif que tant que $E_p(x)$ reste inférieur à $\frac{1}{2}mv_0^2$.

- ◇ Si $\frac{1}{2}mv_0^2 < E_1$, M rebrousse chemin au premier point d'abscisse x_0 rencontré, tel que $E_p(x_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Il est refoulé vers la région d'où il était parti. Il y reprend petit à petit la même vitesse qu'il avait au départ, mais en sens inverse.
- ◇ Si $\frac{1}{2}mv_0^2 = E_1$, M s'arrête en $x = x_1$.

4.7.2 Etude au voisinage d'une position d'équilibre - Conditions de stabilité

L'étude du mouvement du mobile au voisinage d'une position d'équilibre $x = x_e$ repose sur le développement de la fonction $E_p(x)$ en série de Taylor suivant les puissances de l'écart $u = x - x_e$

$$E_p(x) = E_p(x_e) + u \frac{dE_p}{dx}(x_e) + \frac{u^2}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) + \frac{u^3}{3!} \frac{d^3E_p}{dx^3}(x_e) + \dots + \frac{u^n}{n!} \frac{d^n E_p}{dx^n}(x_e) + \dots$$

développement dont nous admettrons ici la validité. Selon la fonction étudiée et la valeur de l'écart u , il peut apparaître suffisant de ne garder, par exemple, que les n premiers termes de cette série, pour

obtenir la valeur de $E_p(x)$ avec une bonne précision. On dit alors que l'on a effectué un *développement limité* de la fonction au nième ordre, ou encore que l'on a effectué un *développement asymptotique* d'ordre n de la fonction, lorsque x devient proche de x_e , l'ordre zéro correspondant à la valeur $E_p(x_e)$. Il est clair que l'approximation est d'autant plus précise s'il advient que certains des premiers termes du développement sont nuls.

Comme nous l'avons vu, une position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle, ce qu'on exprime mathématiquement par l'annulation de la dérivée première de la fonction $E_p(x)$ en $x = x_e$

$$\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$$

Ainsi, au voisinage d'un extremum, la variation de $E_p(x)$ avec x n'apparaît, a priori, qu'au *second ordre* suivant l'écart $u = x - x_e$. Si l'on se limite à un développement au second ordre, on obtient ce qu'on appelle *l'approximation harmonique* de l'énergie potentielle

$$E_p(x) \approx E_p(x_e) + K \frac{u^2}{2}$$

où $K = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e)$ est supposé être différent de zéro. Localement, la force dérivant de cette énergie potentielle prend alors la forme approchée suivante

$$\vec{F} \approx -K(x - x_e) \vec{i}$$

Supposons que le mobile M soit lâché sans vitesse initiale au voisinage immédiat d'un extremum.

Si cet extremum est un *maximum local*, alors, dès que x devient différent de x_e , l'énergie potentielle devient inférieure à $E_p(x_e)$, ce qui, d'après l'expression donnée ci-dessus, signifie que K est nécessairement une quantité *négative*

$$K = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) < 0$$

La force étant orientée vers les régions de plus basses énergies potentielles va tendre à éloigner davantage le mobile de cette position d'équilibre. Ainsi, un maximum local d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre *instable*.

Par contre, si l'extremum est un *minimum local*, dès que x devient différent de x_e , l'énergie potentielle devient supérieure à $E_p(x_e)$, ce qui signifie que K est nécessairement une quantité *positive*

$$K = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) > 0$$

Dans ce cas, la force va tendre à ramener le mobile vers cette position d'équilibre, qui correspond donc à un équilibre *stable*.

Considérons par exemple le cas du pendule simple. Nous avons précédemment exprimé l'énergie potentielle de pesanteur de la masse m accrochée au bout du fil en fonction de l'écart angulaire θ entre le fil et la verticale (paragraphe 4.2.4). En faisant cela, nous avons donc tenu compte de la liaison de la masse m avec le point d'attache O , liaison qui, dans le cas d'un mouvement plan, contraint cette masse à se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon ℓ . Nous avons écrit l'énergie potentielle sous la forme

$$E_p(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

La position d'équilibre stable du pendule correspond bien sûr à $\theta = 0$. Lorsque l'angle θ n'est pas trop grand, le pendule reste au voisinage de la position d'équilibre stable, et sous cette condition on peut faire l'approximation

$$1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}$$

L'énergie potentielle prend alors la forme

$$E_p(\theta) = mgl \frac{\theta^2}{2}$$

qui est bien conforme à une expression du type $K \frac{u^2}{2}$ avec $K = mgl > 0$, qui, comme expliqué plus haut, est valable pour toute énergie potentielle dépendant d'un paramètre, au voisinage d'une position d'équilibre stable. On note que l'abscisse curviligne qui mesure le déplacement de la masse m sur le cercle est $s = \ell\theta$. Lorsque θ est suffisamment petit, l'arc de cercle peut être confondu avec le déplacement horizontal x de la masse m . On obtient alors

$$\theta \approx \frac{x}{\ell}$$

et l'énergie potentielle s'exprime alors en fonction de ce déplacement horizontal comme

$$E_p(x) = m \frac{g}{\ell} \frac{x^2}{2}$$

Revenons au problème général et trouvons maintenant l'équation du mouvement du mobile de masse m au voisinage d'une position d'équilibre stable. Pour ce faire, on peut procéder de la façon suivante. L'énergie mécanique est alors de la forme (à une constante additive près)

$$E = E_c + E_p(x) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + K \frac{u^2}{2}$$

où $u = x - x_e$ est l'écart de position, supposé petit, par rapport à l'équilibre. En l'absence de frottement, cette énergie reste constante au cours du mouvement, ce que l'on exprime par l'équation

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Effectuant la dérivée, on obtient

$$\frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + Ku \right) = 0$$

Ecartant la solution triviale $\frac{dx}{dt} = 0$ qui correspondrait à l'absence de mouvement, on aboutit à l'équation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Ku = 0$$

soit, compte-tenu de ce que $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$ et en posant $\omega^2 = K/m$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 u$$

Nous avons déjà rencontré cette équation. Sa solution générale est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω

$$u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

avec des constantes a et b à ajuster aux conditions initiales.