PROBLÈMES DE RELATIVITÉ RESTREINTE (L2-L3)

Christian Carimalo

I - La transformation de Lorentz

Dans tout ce qui suit, $R(O,x,y,z,t)$ et $R'(O',x',y',z',t')$ sont deux référentiels galiléens dont les axes des repères d'espace correspondants sont parallèles et les axes Ox et $O'x'$ superposés. La vitesse de O' mesurée dans R est donnée par $\overrightarrow{u} = u\,\overrightarrow{e_x}$, u étant constant. L'origine des dates dans les deux référentiels correspond à la coïncidence de O et O'.

A/

1°) Rappeler les équations de transformation de Galilée entre ces deux référentiels.

2°) En déduire la loi de composition des vitesses correspondante.

B/ Dans le référentiel R, on observe un signal lumineux d'amplitude $\psi(x,t)$ se propageant dans le vide à la vitesse c parallèlement à Ox. On montre que l'équation décrivant la propagation de ce signal dans R est

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

On admettra que dans la transformation de R vers R', l'amplitude du signal reste la même.

1°) Montrer que la transformation de Galilée ne permet pas d'obtenir une équation de propagation dans R' ayant la même forme que (1).

2°) a) Montrer que les équations de propagations valables respectivement dans R et dans R' ont la même forme si la transformation de R vers R' s'écrit

$$x' = a\,x + b\,x_0\ ,\quad y' = y\ ,\quad z' = z\ ,\quad x'_0 = b\,x + a\,x_0 \tag{2}$$

où $x_0 = ct$, $x'_0 = ct'$, a et b étant deux paramètres indépendants des coordonnées avec $|a| \neq |b|$.

b) Quelle est alors la vitesse de propagation du signal dans R' ?

C/ On admet dorénavant le caractère absolu de la célérité de la lumière dans la vide et que la transformation de R vers R' est donnée par (2). Puis on considère dans R les deux événements suivants :

i) passage de O' en O ;

ii) passage de O' en un point d'abcisse x à la date $t > 0$.

1°) Déterminer toutes les coordonnées des deux événements dans R et dans R'.

2°) En utilisant la loi (2), en déduire une relation entre a, b, u et c.

D/ Un miroir M solidaire du référentiel R' est placé en un point de l'axe $O'y'$ d'ordonnée Y' et perpendiculaire à cet axe. Un signal lumineux est émis depuis O' à la date $t' = 0$ (événement (1)). Ce signal atteint le miroir (événement (2)), est réfléchi instantanément, et revient vers O' (événement (3)).

1°) Dessiner la trajectoire du signal lumineux entre les événements (1) et (3), telle qu'elle est vue depuis R et R' (on rappelle que dans le vide la lumière se propage en ligne droite à la vitesse c).

2°) Soient D et D' les distances parcourues par le signal dans R et dans R', respectivement.

a) Exprimer les durées Δt et $\Delta t'$ séparant ces deux événements dans R et dans R' respectivement, en fonction de D et D'.

b) Trouver une relation entre ces durées. Commenter le résultat puis déduire l'expression de a.

II - Interprétation géométrique de la transformation de Lorentz

1°) On pose $\tanh \chi = \dfrac{u}{c}$.

a) Définir le domaine de variation de χ.

b) Ecrire les formules de transformation de Lorentz à l'aide de $\cosh \chi$ et $\sinh \chi$.

2°) On pose maintenant, de façon formelle, $\varphi = j\chi$ ($j^2 = -1$). A l'aide du nouveau paramètre φ, écrire les formules permettant de passer des variables (x, jct) aux variables (x', jct'). Interpréter géométriquement le résultat.

3°) Donner les formules définissant la transformation inverse de R' vers R.

4°) Soient deux événements E_1 et E_2 dont les coordonnées dans R sont respectivement (x_1, y_1, z_1, t_1) et $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1, z_1 + \Delta z_1, t_1 + \Delta t_1)$

a) Montrer que $\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ est un invariant relativiste.

b) Si $\Delta s^2 < 0$, les deux événements E_1 et E_2 peuvent-ils correspondre à des points de passage d'un signal quelconque ?

c) Quelle est la valeur de Δs^2 correspondant à des points de passage d'un signal lumineux se propageant dans le vide ?

d) A l'aide de l'invariant Δs^2, établir la formule de dilatation des durées.

III - Ralentissement des horloges

A/ Cas non-relativiste

Un voyageur effectue le trajet Paris-Lyon en TGV à la vitesse de 300 km/h. On supposera que la totalité du voyage se fait à vitesse constante par rapport aux deux gares. Il mesure d'une part son temps biologique et, d'autre part, celui donné par les horloges des gares de départ et d'arrivée, ces horloges étant par ailleurs supposées parfaites et infiniment précises. Quel a été son *rajeunissement relatif* au cours du voyage ?

B/ Cas ultra-relativiste

La collision d'un faisceau de protons avec une cible produit une grande quantité de mésons π parmi lesquels on sélectionne ceux ayant acquis une énergie cinétique donnée. Le référentiel R' est lié à ces mésons et le coefficient de Lorentz correspondant est $\gamma = 1000$. Ces mésons sont rassemblés en un faisceau pouvant parcourir en ligne droite dans un tunnel une distance de $L_0 = 3$ km entre leur lieu de production et l'endroit où on les détecte. Le référentiel R est lié à ce tunnel. Les mésons ont une durée de vie moyenne *propre* $\tau_0 = 2,6\ 10^{-8}$ s.

a) Calculer la durée de vie moyenne τ des mésons dans R.

b) Dans R, quel est le temps mis par les mésons pour parcourir la distance L_0 ?

c) Les mésons se désintègrent en vol. Dans R, la relation entre le nombre N_0 de mésons à l'entrée du tunnel à $t = 0$ et le nombre $N(t)$ de ceux restant encore à la date $t > 0$ est $N(t) = N_0 \exp[-t/\tau]$. Quelle est la proportion de mésons arrivant jusqu'au détecteur ?

d) On se place dans R'. Calculer la proportion de mésons arrivant au détecteur. Est-il différent de celui trouvé précédemment ?

IV - Durée de vie des muons

Le muon (μ) est une particule élémentaire de charge électrique égale à celle de l'électron, mais de masse plus élevée ($m_\mu/m_e = 206,7$) et de durée de vie très courte. Dans un repère R' où l'on voit initialement N_0 muons au repos, on observe qu'au bout d'un temps t' le nombre de muons qui ne se sont pas encore désintégrés est égal à $N(t') = N_0\ \exp[-t'/\tau']$ où $\tau' = 2,2\,10^{-6}$ s est la durée de vie propre du muon.

Des muons peuvent être produits dans la haute atmosphère terrestre sous l'action du rayonnement cosmique. On considère un flux de muons arrivant verticalement depuis la haute atmosphère avec des vitesses proches de celle de la lumière. Un premier détecteur D_1 placé à la hauteur $h = 1907\,\text{m}$ détecte $n_1 = 563 \pm 10$ muons par heure, ayant pour vitesse $v = 0,9952\,c$. Un second détecteur D_2 au sol ($z = 0$) détecte n_2 muons par heure ayant la même vitesse. Déterminer n_2 :

a) par un calcul non relativiste ;

b) par un calcul relativiste.

La valeur expérimentale de n_2 est de 408 ± 9 muons/heure. Conclusion.

V - Contraction relativiste des longueurs

Une règle rigide au repos dans R a pour longueur L et fait l'angle θ avec Ox.

1°) Pour un observateur de R', quels sont la longueur de cette règle et l'angle qu'elle fait avec $O'x'$?

2°) Examiner les cas $\theta = 0\,;\theta = \pi/2\,;\theta = \pi$.

VI - Mesures de positions - Relativité de simultanéité

On envisage l'expérience de pensée suivante. Le référentiel R' a la vitesse $u = c\sqrt{3}/2$. Le référentiel R dispose d'un système optique constitué d'un laser situé en O et de deux miroirs A et B situés sur l'axe Ox de part et d'autre de O à 60 m et inclinés à 45° par rapport à Ox.

A $t = t' = 0$, quand O et O' coïncident, le laser émet un bref signal lumineux en direction des deux miroirs. Aussitôt que les signaux sont réfléchis par les miroirs, ils laissent une marque sur l'axe $O'x'$ de R'. Soit A' la marque laissée en face du miroir A (événement E_1) et B' celle correspondant au miroir B (événement E_2). On prendra $c = 3\,10^8$ m s^{-1}.

a) Peut-on dire que les deux événements E_1 et E_2 sont simultanés dans l'un, l'autre ou aucun des deux référentiels ? Calculer le temps qui sépare les deux événements dans R et R'.

b) Déterminez la position des marques dans R et dans R'. Commentez les résultats en termes de contraction relativiste des longueurs.

VII - Loi de composition des vitesses en Relativité

A l'aide des formules de transformation de Lorentz des coordonnées, trouver les formules de composition des vitesses en Relativité. Retrouver la transformation de Galilée dans le cas des vitesses faibles devant c.

VIII - Désintégration du méson K^0

Un méson K^0 se désintègre en deux mésons π qui, dans le référentiel lié au K^0, se déplacent à une vitesse d'environ $0,83\,c$. Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du K^0 est de $0,9\,c$. Calculer les vitesses maximum et minimum que peuvent atteindre les mésons π dans le laboratoire.

Rép. : $0,99\,c\,; 0,227\,c$.

IX - Dans le référentiel R, deux particules P_1 et P_2 sont lancées l'une vers l'autre suivant Ox à la vitesse $v = 0,9\,c$.

1°) Quelle est la vitesse relative des deux particules dans R ? Commenter.

2°) Quelle est la vitesse de P_1 dans le référentiel lié à P_2 ? Commenter.

X - Un vaisseau spatial se déplace par rapport à la Terre à la vitesse $u = 0,7\,c$ suivant l'axe Ox. Un missile est tiré de l'arrière du vaisseau vers l'avant de celui-ci. La vitesse du missile mesurée par le pilote du vaisseau est $v = 0,6\,c$. Le pilote mesure également la longueur de son vaisseau et trouve 123 m. Les événements sont observés depuis trois référentiels : le premier est lié à la Terre, le second au vaisseau, le troisième au missile. Pour chacun de ces référentiels, calculer :

a) la longueur du vaisseau ; dans quel référentiel mesure-t-on sa *longueur propre* ?

b) la vitesse du missile ;

c) le temps mis par le missile pour atteindre l'avant du vaisseau ; dans quel référentiel mesure-t-on le *temps propre* ?

d) la distance parcourue par le missile pendant ce temps.

XI - Un observateur se déplace dans R à la vitesse constante u le long de Ox. Il observe un corps de volume propre $\mathcal{V}_0$ qui se déplace à la vitesse constante v lui aussi le long de Ox. Montrer que l'observateur mesure pour le corps le volume apparent

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{\frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - uv)^2}}$$

XII - On considère deux référentiels galiléens $R(O, x, y, z, t)$ et $R'(O', x', y', z', t')$ dont les axes des repères d'espace correspondants sont parallèles et les axes Ox et $O'x'$ superposés.

La vitesse de O' mesurée dans R est donnée par $\overrightarrow{u} = u\ \overrightarrow{e_x}$, u étant constant. L'origine des dates dans les deux référentiels correspond à la coïncidence de O et O'.

A la date $t_1 > 0$ de R, une particule P passe en O. Elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme le long de Ox avec la vitesse $v > u$. A la date t_2 de R, P rattrape O'.

$\mathbf{1}^\circ$) a) Quelle est l'abcisse de O' dans R à la date t_2 ?

b) En calculant la distance parcourue par P dans R entre t_1 et t_2, déduire t_2 en fonction de t_1, u et v.

$\mathbf{2}^\circ$) Calculer, en fonction de t_1, t_2, u et c les dates t'_1 et t'_2 de R' correspondant respectivement :

a) au passage de P en O ;

b) au passage de P en O'.

$\mathbf{3}^\circ$) Dans R', quelle est la distance L' séparant O de O' à la date t'_1 ? L'exprimer en fonction de t'_1, t'_2 et de la vitesse v' de P mesurée dans R'.

$\mathbf{4}^\circ$) Déduire v' des résultats précédents.

$\mathbf{5}^\circ$) Vérifier que le résultat obtenu est conforme à celui donné par la formule de composition relativiste des vitesses.

XIII - L'extrêmité A d'une règle AB au repos dans R est placée en O et l'autre extrêmité B sur l'axe Ox à la distance L de O. Dans R, une particule parcourt la règle à la vitesse $v > u$, en partant de A à $t = 0$ (événement E_0). Elle arrive en B à la date t_1 (événement E_1), fait demi-tour instantanément et rejoint O' (événement E_2).

$\mathbf{1}^\circ$) Déterminer les intervalles de temps et les distances mesurés dans R qui séparent les événements E_1 et E_0, E_2 et E_0. Les exprimer en fonction de L, v et u.

$\mathbf{2}^\circ$) Quel intervalle de temps mesuré dans R' sépare E_2 et E_0 ? En donner la valeur numérique pour $u = 0,6\,c$, $v = c$, $L = 1$m.

XIV - Une fusée quitte la Terre avec la vitesse $3\,c/5$. Quand une horloge dans la fusée indique qu'une heure s'est écoulée, la fusée envoie un signal lumineux vers la Terre.

$\mathbf{1}^\circ$) Pour les horloges terrestres, quand le signal a-t-il été envoyé ?

$\mathbf{2}^\circ$) Pour les horloges terrestres, combien de temps après le départ de la fusée le signal atteint-il la Terre ?

$\mathbf{3}^\circ$) Pour les horloges de la fusée, combien de temps après le départ de la fusée le signal atteint-il la Terre ?

$\mathbf{4}^\circ$) Comparer les résultats du $\mathbf{2}^\circ$) et du $\mathbf{3}^\circ$).

XV - Un vaisseau spatial passe au-dessus de la Terre avec une vitesse $u = 0,8\,c$. A cet instant, des observateurs dans le vaisseau et sur Terre remarquent qu'il est 12h sur leurs horloges respectives.

$\mathbf{1}^\circ$) A 12h30 sur l'horloge du vaisseau, celui-ci passe au niveau d'une station interplanétaire, immobile par rapport à la Terre et dont l'horloge indique le temps terrestre. Quelle heure indique l'horloge de cette station ?

2°) A quelle distance de la Terre, mesurée dans le référentiel terrestre, se trouve la station ?

3°) A 12h30 sur l'horloge du vaisseau, celui-ci entreprend un voyage de retour vers la Terre à la vitesse $V = 0,8\,c$ et envoie un signal lumineux vers la Terre. A quelle heure, mesurée dans le référentiel de la Terre, celle-ci reçoit-elle le signal ?

4°) La station répond aussitôt au signal lumineux reçu en émettant un autre signal lumineux. A quelle heure dans le référentiel terrestre le vaisseau reçoit-il la réponse ? A quelle heure indiquée par l'horloge du vaisseau celui-ci reçoit-il la réponse ?

XVI - Une fusée, d'extrêmités A à l'avant et B à l'arrière est animée de la vitesse v le long de l'axe Ox du référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$. A la date $t = 0$ dans R, A passe en O, tandis qu'une horloge fixée en A indique $t' = 0$. Un drapeau D se trouve sur l'axe Ox à la distance L de O, mesurée dans R. On veut caractériser les deux événements A : "passage de A en D" puis B : "passage de B en D". La longueur propre de la fusée est ℓ'_0.

1°) A quelle date t'_A du référentiel fusée R' se produit l'événement A ?

2°) A quelle date t'_B du référentiel fusée R' se produit l'événement B ?

3°) Utiliser la transformation de Lorentz $R' \to R$ pour déterminer les dates t_A et t_B auxquelles se produisent A et B dans R, respectivement.

4°) En déduire la longueur ℓ_0 attribuée à la règle dans R.

5°) Il existe un rapport simple entre ℓ_0 et ℓ'_0 Ce résultat pouvait-il être prédit sans calcul ?

XVII - Trois astronautes A_1, O' et A_2 se trouvent dans un vaisseau spatial se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{V} = 0,8\,c\ \overrightarrow{e_x}$ par rapport au référentiel terrestre R. L'astronaute A_1 est assis en tête du vaisseau, A_2 est en queue, O' est au milieu. La longueur du vaisseau mesurée par les astronautes est $L = 96$ m.

L'événement E_1 correspond à l'émission d'un signal lumineux par A_1 en direction de O'. L'événement E_2 correspond à l'émission d'un signal lumineux par A_2 en direction de O'. Enfin, l'événement E_0 correspond à la réception de ces deux signaux par O' alors que O' passe à l'aplomb de l'observateur O dans R. On supposera qu'à cet instant où O et O' coïncident, les horloges placées en O et en O' indiquent $t_0 = t'_0 = 0$.

1°) Déterminer les coordonnées d'espace-temps de chacun des trois événements dans le référentiel R' du vaisseau. Donner les valeurs numériques correspondantes.

2°) a) Que valent les intervalles de temps séparant E_1 et E_2 dans R' et dans R ? Application numérique.

b) Commenter les résultats obtenus.

3°) Caractériser les deux distances ΔX_{12} et $\Delta X'_{12}$ séparant les positions de E_1 et E_2, respectivement mesurées dans R et R' : propre ou impropre ? Calculer numériquement ΔX_{12}.

XVIII - Une station interplanétaire (référentiel R_S) s'éloigne de la Terre (référentiel R_T) à la vitesse $u = 0,6\,c$. Après un temps de trajet $\Delta t_S = 4$ h mesuré dans R_S, la station envoie une fusée (référentiel R_F) vers la Terre. Cette fusée a la vitesse $v = 0,8\,c$ dans R_T.

1°) Pour les observateurs terrestres, combien de temps après le départ de la station celle-ci a-t-elle expédié la fusée ?

2°) Toujours pour les observateurs terrestres, combien de temps après le départ de la station la fusée arrive-t-elle sur Terre ?

3°) Quelle est la durée du trajet de la fusée, entre la station et la Terre, pour ses occupants ?

4°) Quelle est la vitesse de la fusée par rapport à la station ?

XIX - Une fusée, de longueur propre $L'_0 = 600$ m, s'éloigne de la Terre à vitesse constante u. La fusée est équipée de deux miroirs, l'un M_A situé à l'arrière, l'autre M_B à l'avant. Un signal lumineux, envoyé depuis la Terre vers la fusée est renvoyé vers la Terre par les deux miroirs. Le signal renvoyé par M_A est reçu par la Terre 200 s après son émission. Celui renvoyé par M_B arrive avec un décalage de $17,4\,\mu$s après le précédent. On note R le référentiel de la Terre, d'origine O, et R' celui de la fusée, d'origine O' que l'on place à l'arrière de la fusée. La vitesse de la fusée est parallèle aux axes Ox et $O'x'$ parallèles entre eux et orientés suivant l'axe de la fusée.

1°) A quelle distance D de la Terre se trouve la fusée lorsque le signal lumineux atteint le miroir M_A ?

On considère les quatre événements suivants :

- E_0 : coïncidence de O et O' à $t = t' = 0$;
- E_1 : émission du signal lumineux en O ;
- E_2 : arrivée du signal lumineux en M_A ;
- E_3 : arrivée du signal lumineux en M_B ;

2°) Quel est l'intervalle de temps $\Delta t'_{23}$ qui sépare E_2 et E_3 dans R' ? Quel est ce même intervalle, Δt_{23}, tel que mesuré dans R ? Exprimer Δt_{23} en fonction de L'_0. En déduire la vitesse v de la fusée dans R.

3°) Déterminer les coordonnées d'espace-temps des événement E_1 et E_2 dans chaque référentiel.

XX - Un référentiel R' se déplace par rapport à un référentiel R avec la vitesse $\overrightarrow{u} = \dfrac{c}{2}\,\overrightarrow{e_x}$. La coïncidence de leurs origines respectives O' et O est leur événement origine commun E_0 pour lequel $t' = t = 0$.

Dans le référentiel R' sont placés une cible en O' et un canon en un point C' sur l'axe $O'x'$ à la distance $O'C' = L'$. Le canon tire vers la cible un projectile ayant pour vitesse dans R' $\overrightarrow{v'} = -\dfrac{c}{4}\,\overrightarrow{e_x}$ (événement E_1). Mesuré dans R, l'événement E_1 a lieu simultanément avec l'événement E_0.

L'impact du projectile sur la cible constitue l'événement E_2. Dans la suite, tous les résultats seront donnés en fonction de L' et de c.

1°) Donner les coordonnées d'espace-temps de E_1 dans R et R'.

2°) Quelle est la distance parcourue par le projectile dans R' ? Quel est le temps mis pour effectuer ce parcours ? En déduire les coordonnées d'espace-temps de E_2 dans R'.

Pour déterminer les coordonnées d'espace-temps de E_2 dans R, on utilise deux méthodes et on vérifie que les résultats concordent.

3°) Utiliser la transformation de Lorentz pour déduire de ce qui précède la position x_2 de la cible lorsque le projectile l'atteint et la date t_2 correspondante.

4°) Quelle est la vitesse $\overrightarrow{v}$ du projectile dans R ? En préciser le sens. Déterminer les coordonnées d'espace-temps e E_2 dans R d'après la donnée des vitesses du projectile et de la cible dans ce référentiel.

XXI - On veut évaluer le temps mis par un objet relativiste pour effectuer un aller-retour, tel qu'il est mesuré dans le référentiel d'un observateur donné et le référentiel de l'objet. On admettra que les phases d'accélération et de décélération de l'objet ont des durées négligeables et que seuls seront donc pris en compte les périodes durant lesquelles l'objet est aminé d'un mouvement uniforme par rapport à l'observateur.

Un vaisseau spatial (référentiel R') quitte la Terre (référentiel R) pour effectuer un voyage aller-retour vers l'étoile Sirius qui se trouve à 8,7 années-lumière de la Terre. Il effectue ce trajet à la vitesse $v = 0,75\,c$ par rapport à R.

Dans ce voyage, on distingue les quatre événements suivants :

- E_1 : le vaisseau quitte la Terre $(t_1 = t'_1 = 0,\ x_1 = x'_1 = 0)$;
- E_2 : le vaisseau atteint Sirius ;
- E_3 : le vaisseau quitte Sirius ;
- E_4 : le vaisseau est revenu sur Terre.

Entre E_2 et E_3, le vaisseau s'est posé sur une planète de Sirius et l'a explorée pendant 7 ans. Dans les questions qui suivent, les distances seront données en années-lumière et les durées en années.

1°) Au cours de son voyage aller puis de son voyage retour, le vaisseau émet chaque fois deux signaux lumineux espacés d'une année à son horloge. Quel est le temps qui sépare la réception de ces signaux sur Terre dans chacun des deux cas, à l'aller puis au retour.

2°) Quelles sont les coordonnées d'espace-temps des quatre événements dans R ?

3°) Quelle est la distance parcourue Terre-Sirius, vue depuis R et vue depuis R' ?

4°) Déterminer les intervalles de temps qui séparent E_1 et E_2 d'une part, E_3 et E_4 d'autre part, dans R' :

a) en utilisant la transformation de Lorentz ;

b) en utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps.

5°) Quelles sont les durées du voyage total mesurées par R et par R' ? Si le pilote du vaisseau et son jumeau resté sur Terre avaient tous deux 30 ans au moment du départ, quel âge ont-ils lorsqu'ils se retrouvent ?

XXII - On devra répondre aux questions de cet exercice sans utiliser la transformation de Lorentz.

Trois observateurs O, O' et O'' sont chacun munis d'une horloge d'un même type. L'observateur O' se déplace par rapport à O avec une vitesse constante v le long d'un axe Ox lié à O. Il coïncide avec O à la date $t = 0$ indiquée par l'horloge de O et O' synchronise alors son horloge avec celle de O. Par rapport à O, l'observateur O' décrit le même axe Ox en sens inverse avec la vitesse constante $-v$. Il coïncide avec O' lorsque l'horloge de O indique la date T et O' synchronise alors son horloge sur celle de O'.

On note respectivement E_1, E_2 et E_3 les événements coïncidence OO', coïncidence $O'O''$, coïncidence OO''. On admet que $t_3 > t_2 > t_1$.

1°) Quelles sont les coordonnées d'espace-temps de E_2 pour chacun des trois observateurs ?

2°) Quelles sont les indications des horloges de O et O'' lors de leur rencontre ?

3°) En supposant que O'' n'ait pas eu besoin de modifier l'indication de son horloge lors de sa rencontre avec O', quelle était l'indication t''_{10} de son horloge pour l'événement E_1 ?

4°) Donner dans un tableau les coordonnées des trois événements tels qu'ils sont vus par chacun des trois observateurs.

5°) Sans utiliser la loi de transformation relativiste des vitesses, déduire des résultats précédents : la vitesse w' de O' par rapport à O'', la vitesse w'' de O'' par rapport à O' et vérifier que $w' = -w''$.

XXIII - A la date $t = 0$ d'un référentiel R un missile B est détecté au point de coordonnée $x = 0$ de l'axe Ox de R. Ce missile se propage le long de cet axe à la vitesse $u_x = -v$ avec $v > 0$. Au même moment, un antimissile A est expédié de O avec la vitesse v en direction de B. On utilisera le référentiel R' associé à l'antimissile A, celui-ci se trouvant à l'origine O' de R'. Une horloge attachée à A indique $t' = 0$ comme date de départ.

1°) Déterminer dans R l'abcisse x_D du point D où se produit la collision entre A et B et la date t_D de cette collision.

2°) A l'aide de la transformation de Lorentz, déterminer dans R' les coordonnées x'_D et t'_D de ladite collision. Quelle est la signification de la relation liant t_D et t'_D ?

3°) Déterminer la vitesse V de B dans R'.

4°) Déterminer dans R' les coordonnées x'_0 et t'_0 de l'événement "détection de B dans R".

5°) A partir de ces résultats, trouver l'équation du mouvement de B dans R', puis la position de B dans R' lorsque $t' = 0$.

6°) En déduire la date t'_D de la collision $A - B$ et comparer le résultat à celui obtenu au **2°)**.

XXIV - Référentiel du centre de masse

Dans le référentiel galiléen R du laboratoire, on considère deux protons dont l'un P_1 est initialement au repos et l'autre P_2 a pour quantité de mouvement initiale $\overrightarrow{p_2}$ parallèle et de même sens que l'axe Ox de R. Le système des deux protons est isolé.

1°) a) Donner les composantes dans R du quadrivecteur énergie-impulsion initial de chaque proton.

b) Déterminer la vitesse initiale $\overrightarrow{v_2}$ de P_2 dans R.

$\mathbf{2}^\circ$) a) Définir le référentiel R_c du centre de masse des deux protons. Que peut-on en dire ?

b) Trouver en fonction de $\overrightarrow{v_2}$ la vitesse de translation de R_c par rapport à R, puis les paramètres β et γ de la transformation de Lorentz $R \to R_c$.

$\mathbf{3}^\circ$) a) Déterminer les composantes dans R du quadrivecteur énergie-impulsion attaché à R_c.

b) Quelle est la masse invariante du système des deux protons ?

c) Application numérique. On donne $m_0\,c^2 = 1$ GeV où m_0 est la masse (au repos) du proton ; $E_2 = 50$ GeV. Calculer l'énergie du système des deux protons dans R_c.

XXV - Par rapport à un référentiel galiléen R, un second référentiel galiléen R' se déplace avec une vitesse négative $-u$ le long de leur axe des x commun .

$\mathbf{1}^\circ$) Deux événements simultanés se produisent dans R' : l'un, A, en $x' = 0$, l'autre, B, en $x' = x'_0 > 0$. Lequel de ces deux événements se produit avant l'autre dans R ?

$\mathbf{2}^\circ$) L'événement A est la création d'une particule P_A de masse au repos m_0 et qui reste immobile dans R. L'événement B est la création d'une autre particule P_B identique à la première mais immobile dans R'. Déterminer dans R et dans R' la date correspondant à la rencontre de ces deux particules (événement C). Commenter le résultat.

$\mathbf{3}^\circ$) Déterminer dans R et en fonction de β et γ la vitesse réduite β_1 du référentiel R_1 du centre de masse des deux particules.

$\mathbf{4}^\circ$) Quelle est l'énergie d'une des deux particules dans R_1 ?

$\mathbf{5}^\circ$) L'événement C est une diffusion élastique dans laquelle les deux particules ont dans R_1 une vitesse de direction orthogonale à l'axe des x. Tracer un schéma du processus dans R_1.

$\mathbf{6}^\circ$) Déterminer dans R_1 la vitesse d'une des deux particules après diffusion, en distinguant ses composantes parallèle et orthogonale à l'axe des x. Que devient cette vitesse lorsque $u \to c$?

XXVI - Diffusion élastique $p + p \to p + p$

Dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$ du laboratoire, on étudie la diffusion élastique de deux protons (figure 1)

$$p + p \to p + p$$

Les deux protons initiaux P_1 et P_2 ont pour quantités de mouvement respectives $\overrightarrow{p_1} = p_1\ \overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{p_2} = -p_2\ \overrightarrow{e_x}$ avec $p_1 > p_2 > 0$. On note E_1 et E_2 leurs énergies (totales) respectives.

L'énergie et la quantité de mouvement dans R des protons finals P'_1 et P'_2 seront notées respectivement $\left(E'_1, \overrightarrow{p'_1}\right)$ et $\left(E'_2, \overrightarrow{p'_2}\right)$. L'énergie au repos d'un proton est notée E_0.

Les directions d'émission dans R des protons finals P'_1 et P'_2 sont perpendiculaires comme indiqué à la figure 1.

$\mathbf{1}^\circ$) Ecrire dans R les équations de conservation relatives à ce processus.

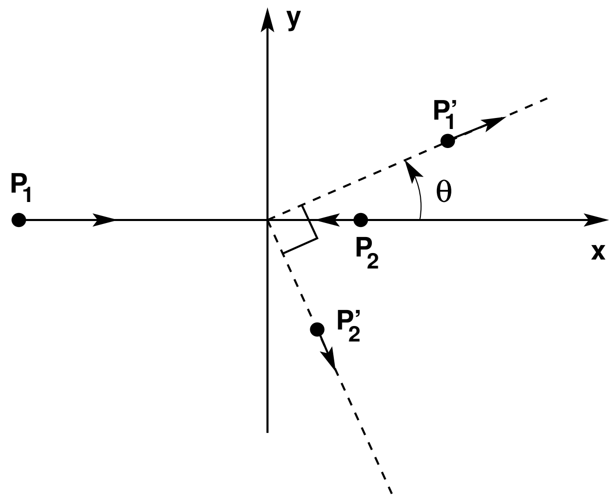

FIGURE 1 – Diffusion élastique $p + p \to p + p$

2°) Calculer la (pseudo-)norme du quadrivecteur énergie-impulsion total du système :

a) en fonction de E_0 et des données de l'état initial $(E_1,\, p_1,\, E_2,\, p_2)$;

b) en fonction de E_0 et des données de l'état final $\left(E'_1,\, p'_1 = \left|\overrightarrow{p'_1}\right|,\, E'_2,\, p'_2 = \left|\overrightarrow{p'_2}\right|\right)$;

c) En déduire la relation $E'_1 E'_2 = E_1 E_2 + p_1 p_2 c^2$.

3°) Calculer alors E'_1 et E'_2 en fonction des données initiales. On supposera que $E'_1 > E'_2$.

4°) a) Trouver, en fonction des données initiales, la vitesse de translation u_c par rapport à R du référentiel R_c du centre de masse des deux protons initiaux.

b) Exprimer dans R_c l'énergie de l'un des deux protons initiaux en fonction des données initiales et de E_0.

5°) Calculer l'énergie E''_2 du proton final P'_2 dans le référentiel propre du proton P'_1, en fonction des données initiales et de E_0.

XXVII - Dans le référentiel galiléen R du laboratoire, on considère le choc élastique de deux protons. Initialement, l'un est au repos, l'autre est animé de la vitesse $\overrightarrow{v}$. Après interaction, les deux protons s'éloignent avec des vitesses faisant les angles θ et ϕ avec $\overrightarrow{v}$.

1°) a) Calculer l'énergie totale du système des deux protons dans R et dans le référentiel R_c du centre de masse.

b) On note u la vitesse du centre de masse et on pose $\gamma = 1/\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, $\gamma_c = 1/\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$. En utilisant la formule de transformation des énergies, trouver une relation entre γ et γ_c.

2°) En utilisant les formules de transformation des quantités de mouvement, déterminer $\tan\theta$, $\tan\phi$ et montrer que

$$\tan\theta\, \tan\phi = \frac{2}{1+\gamma}$$

XXVIII - Effet Compton

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, un photon de fréquence ν entre en collision avec un électron initialement au repos. Le choc est élastique et le photon est diffusé avec une fréquence ν' dans une direction faisant l'angle θ avec celle du photon incident. On notera $\underline{p}$, $\underline{k}$, resp. $\underline{p}'$, $\underline{k}'$, les quadrivecteurs énergie-impulsion initiaux, resp. finals, de l'électron et du photon, respectivement.

1°) a) Ecrire les équations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totales lors de cette collision.

b) En déduire le quadrivecteur $\underline{p}'$ en fonction des autres quadrivecteurs.

2°) a) Que valent les (pseudo-)normes des quadrivecteurs énergie-impulsion d'un photon et d'un électron ?

b) Que valent les (pseudo-)produits scalaires de $\underline{p}$ avec $\underline{k}$ et $\underline{k}'$? Que vaut celui de $\underline{k}$ avec $\underline{k}'$?

3°) En calculant la (pseudo-)norme de $\underline{p}'$, montrer que l'énergie du photon après la collision est

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \dfrac{h\nu}{m_0 c^2}\,(1 - \cos\theta)}$$

où h est la constante de Planck et m_0 la masse de l'électron au repos.

4°) En déduire le décalage $\Delta\lambda$ observé dans le référentiel du laboratoire, entre la longueur d'onde de la radiation diffusée et celle de la radiation incidente.

XXIX - Rétro-diffusion Compton

Dans le référentiel galiléen du laboratoire un photon γ d'énergie E_γ se propage selon l'axe Ox. Il effectue une collision élastique avec un électron e d'énergie E_e se propageant dans la direction inverse. La réaction $e + \gamma \to e' + \gamma'$ produit un électron final e' et un photon final γ' d'énergie E'_γ se propageant dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe de collision Ox. On note $\underline{p}$, $\underline{k}$, resp. $\underline{p}'$, $\underline{k}'$, les quadrivecteurs énergie-impulsion initiaux, resp. finals, de l'électron et du photon, respectivement.

1°) Démontrer la relation $\underline{p} \cdot (\underline{k} - \underline{k}') = \underline{k} \cdot \underline{k}'$

2°) Utiliser la relation du **1°)** pour montrer que

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma (E_e + cp_e)}{E_\gamma (1 - \cos\theta) + E_e + cp_e \cos\theta}$$

où $cp_e = \sqrt{E_e^2 - m^2 c^4}$, m étant la masse au repos de l'électron.

3°) a) Etudier les variations de E'_γ en fonction de θ.

b) On suppose que $E_e \gg mc^2$, $E_e \gg E_\gamma$ et $\theta = \pi - \alpha$ avec $\alpha \ll \pi$. En effectuant des approximations appropriées, montrer que l'on a alors

$$E'_\gamma \simeq \frac{E_{\max}}{1+\left(\dfrac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad E_{\max} = \frac{E_e}{1+x}\,, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{4E_\gamma}{E_e}}\,\sqrt{1+x}\,, \quad x = \frac{m^2c^4}{4E_\gamma E_e}$$

4°) Application numérique. On donne $E_e = 250$ GeV ; $mc^2 = 5,1\,10^{-4}$ GeV ; $h\,c = 1,24\,10^{-15}$ GeV m, où h est la constante de Planck ; la longueur d'onde de l'onde associée au photon est $\lambda = 10^{-6}$ m.

Calculer E_γ, $E_{\max}/E_e$ et α_0. Commenter.

XXX - Désintégration du méson π^0

Le méson π^0 est une particule neutre dont le principal mode de désintégration est celui en deux photons : $\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$. On notera : R le référentiel du laboratoire où cette désintégration est observée, R_c le référentiel du centre de masse des deux photons finals, ces deux référentiels étant supposés galiléens, m_0 la masse au repos du π^0.

Dans R, la vitesse de R_c est orientée suivant l'axe Ox, et sa norme est trouvée égale à $u = 0,974\,c$.

On prendra pour plan xOy celui contenant les directions d'émission des deux photons. L'axe $O'x'$ de R_c sera pris selon l'axe Ox de R et les axes $O'y'$ et $O'z'$ de R_c parallèles aux axes Oy et Oz de R, respectivement.

1°) Dire pourquoi la désintégration du π^0 ne peut pas donner qu'un seul photon.

2°) a) Montrer, en le justifiant, que R_c est aussi le référentiel propre du π^0. Trouver alors l'énergie E et la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ du π^0 initial dans R, en fonction de u, m_0 et c.

b) Application numérique. Calculer E en MeV, sachant que $m_0\,c^2 = 135$ MeV.

3°) Exprimer $\beta = u/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ en fonction de E et $E_0 = m_0\,c^2$.

4°) On note $(E'_1, \overrightarrow{p'_1})$, $(E'_2, \overrightarrow{p'_2})$ les énergies et quantités de mouvement respectives des photons γ_1 et γ_2 dans R_c.

a) Dans R_c, comment les directions d'émission des deux photons sont-elles orientées l'une par rapport à l'autre ?

b) Calculer E'_1, E'_2, $\left|\overrightarrow{p'_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{p'_2}\right|$ en fonction de m_0 et c.

c) Soit, dans R_c, θ'_1 et θ'_2 les angles d'émission par rapport à $O'x'$ de γ_1 et γ_2, respectivement. Exprimer θ'_2 en fonction de θ'_1.

5°) Dans R, on note $(E_1, \overrightarrow{p_1})$, $(E_2, \overrightarrow{p_2})$ les énergies et quantités de mouvement respectives des photons γ_1 et γ_2, θ_1 et θ_2 les angles d'émission par rapport à Ox de γ_1 et γ_2, respectivement.

a) En effectuant la transformation de Lorentz $R_c \rightarrow R$ pour les quadrivecteurs énergie-impulsion, établir les relations liant $(E_1, \overrightarrow{p_1})$ à $(E'_1, \overrightarrow{p'_1})$ et celles liant $(E_2, \overrightarrow{p_2})$ à $(E'_2, \overrightarrow{p'_2})$.

b) Exprimer $\sin\theta_1$, $\cos\theta_1$, $\sin\theta_2$, $\cos\theta_2$ en fonction de θ'_1, β et γ.

6°) Soit $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ l'angle que font entre elles, dans R, les directions d'émission des deux photons.

a) En notant que $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}$, calculer $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ en fonction de β, γ et θ'_1.

7°) La vitesse u étant donnée, montrer que α est nécessairement supérieur à une valeur minimum α_m que l'on calculera numériquement. A quel angle θ'_1 correspond cette valeur minimum et quelles sont les valeurs correspondantes de θ_1 et θ_2 ?

XXXI - Effet Doppler-1

Dans un référentiel galiléen R, une source S qui lui est liée émet des tops sonores (resp. des impulsions lumineuses) régulièrement espacés dans le temps de T_0. Ces signaux se propagent parallèlement à l'axe Ox de R. Ils sont captés par un détecteur D se trouvant dans un second référentiel galiléen R' qui se déplace par rapport à R à la vitesse $\overrightarrow{u}$ parallèlement à leur axe des x commun.

A l'émission périodique des signaux correspond une réception périodique dont on veut déterminer la période T.

On présentera dans un tableau les coordonnées dans R et dans R' des quatre événements suivants :

- émission par S du $n$ème signal ;

- émission par S du $(n+1)$ème signal ;

- réception par D du $n$ème signal ;

- réception par D du $(n+1)$ème signal ;

1°) <u>Cas des tops sonores</u>

a) En comparant la vitesse du son à celle de la lumière, justifier dans ce cas l'utilisation de la mécanique galiléenne.

b) Relier les coordonnées desdits événements au moyen de l'équation de propagation du signal à la vitesse v dans R et du mouvement du détecteur D.

c) En déduire T en fonction de T_0.

2°) <u>Cas des impulsions lumineuses</u>

Dans ce cas, il faut recourir à la Relativité Restreinte. Reprendre les calculs du **1°)** en précisant quelles sont les modifications à y apporter. Obtenir T en fonction de T_0 et comparer le nouveau résultat au précédent.

XXXII - Effet Doppler-2 - Aberration des étoiles

Une source lumineuse émet une radiation de fréquence ν. Le signal est enregistré par un récepteur infiniment éloigné de la source et qui est par rapport à celle-ci en mouvement rectiligne uniforme avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{u}$ faisant un angle θ avec la ligne source-récepteur.

1°) Déterminer la direction de propagation du signal lumineux dans le référentiel lié au récepteur :

a) en appliquant la loi relativiste de composition des vitesses ;

b) en appliquant la transformation de Lorentz au quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon.

c) Examiner le cas $\theta = \pi/2$.

2°) Quelle est la fréquence du signal lumineux enregistré par le récepteur (effet Doppler) ?

3°) Une galaxie qui s'éloigne de la Terre dans la direction Terre-galaxie émet une lumière dont l'analyse indique qu'elle contient une radiation de longueur d'onde 7300 Å alors que la longueur d'onde de cette même radiation observée au laboratoire est de 4870 Å.

Quelle est la vitesse de la galaxie en supposant que le décalage des longueurs d'onde soit entièrement dû à l'effet Doppler ?

XXXIII - Aberration de la lumière des étoiles

Le référentiel R est le référentiel de Copernic dont l'origine O est au centre de masse du système solaire. Un observateur fixe dans R et placé en O observe une étoile dans une direction Oy perpendiculaire au plan de la trajectoire de la Terre (plan de l'écliptique). Le référentiel R', dont l'origine est au centre T de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux de R, peut, pendant une durée assez courte, être considéré comme ayant un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à R, avec une vitesse $\overrightarrow{u}$ parallèle à l'axe Tx', lui-même parallèle à un axe Ox de R ; l'axe Ty' est parallèle à Oy.

1°) Pour un observateur fixe dans R', quel est l'angle α entre la direction d'observation de l'étoile et l'axe Ty' ? Le calculer numériquement en prenant $u = 3\ 10^4$ m/s.

2°) La trajectoire de la Terre dans R s'écartant peu d'un cercle de centre O, quel est l'angle α' que fera la direction d'observation de l'étoile 6 mois plus tard ?

XXXIV - Dans le référentiel galiléen R du laboratoire un méson K^+ au repos se désintègre en un méson π^+ et un méson π^0. Les masses au repos de ces trois particules sont respectivement $m_{K^+} = 987\,m_e$, $m_{\pi^+} = 273\,m_e$, $m_{\pi^0} = 264\,m_e$, m_e étant la masse de l'électron, telle que $m_e\,c^2 = 0,5$ MeV.

1°) a) Ecrire les équations de conservation.

b) Montrer que l'énergie du π^+ formé est

$$E_{\pi^+} = c^2\,\frac{m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_{K^+}}$$

c) Quelle est la quantité de mouvement p_{π^+} du π^+ ?

d) Calculer numériquement E_{π^+} en MeV et p_{π^+} en MeV/c.

2°) Soit R' le référentiel propre du π^+. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{u}$ de ce référentiel galiléen par rapport à R.

3°) Le méson π^+ se désintègre à son tour pour donner un muon μ^+ et un neutrino ν. La masse du muon est $m_{\mu^+} = 207\,m_e$ et la masse du neutrino est supposée nulle.

a) Montrer que pour déterminer les énergies des particules émises dans cette nouvelle désintégration, il suffit d'adapter la relation du **1°**) b).

b) Déterminer alors les énergies respectives E_{μ^+} et E_ν du muon et du neutrino dans R'.

XXXV - On considère dans le référentiel galiléen R du laboratoire la réaction de photoproduction

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

par collision d'un photon γ sur un proton p immobile conduisant à l'état final constitué d'un neutron n et d'un méson π^+. On donne les masses $m_p \approx m_n = M = 940$ MeV/c^2, $m_{\pi^+} = m = 140$ MeV/c^2.

1°) On veut déterminer quelle est l'énergie-seuil E_0 du photon dans R à partir de laquelle la réaction est énergétiquement possible.

Quelle est l'énergie totale du système *au seuil de la réaction* dans le référentiel du centre de masse R_c ? En déduire E_0 et sa valeur numérique.

2°) a) Au seuil de la réaction, déterminer, en fonction des masses, l'énergie du proton dans R_c.

b) En déduire le coefficient de Lorentz Γ qui permet de passer de R à R_c. Application numérique.

3°) La durée de vie moyenne propre du π^+ est $\tau_0 = 2,603\,10^{-8}$ s. Déterminer la durée de vie moyenne du π^+ dans le laboratoire, lorsqu'il est produit au seuil de la réaction. Application numérique.

XXXVI - On considère dans le référentiel galiléen R du laboratoire la réaction de photoproduction d'une paire électron-positron sur un noyau N

$$\gamma + N \rightarrow N' + e^+ + e^-$$

à la suite de laquelle le noyau, initialement au repos, subit un recul. On note M la masse au repos du noyau, ν la fréquence du photon incident dans R. On envisage la configuration où l'electron e^- et son anti-particule, le positron e^+, sont émis dans des directions symétriques par rapport à celle du photon incident

1°) a) Ecrire les équations de conservation.

b) Quelle est la direction de recul du noyau ?

c) En utilisant la conservation de l'énergie et l'invariance de la (pseudo)-norme du quadrivecteur énergie-impulsion associé à un électron, montrer que le sens de ce recul est celui de la propagation du photon incident.

2°) Calculer l'énergie minimum que doit avoir le photon incident pour que la réaction puisse se produire. On admettra que, après le choc, la vitesse du centre de masse est pratiquement égale à celle du noyau dans R.

3°) Faire l'application numérique en admettant que la masse du noyau est très grande devant celle de l'électron.

XXXVII - On considère dans le référentiel galiléen R du laboratoire la réaction

$$p_1 + p_2 \to p + n + \pi^+$$

entre un proton p_1 se propageant parallèlement à Ox et un proton p_2 au repos, donnant un état final constitué d'un proton p, d'un neutron n et d'un méson π^+. On donne les masses au repos : $m_p = 938$ MeV/c^2, $m_n = 940$ MeV/c^2, $m_{\pi^+} = 140$ MeV/c^2.

1°) A quelle condition l'énergie totale de l'état final est-elle minimum ?

2°) Dans quel référentiel est-il possible de satisfaire cette condition ?

3°) Calculer alors l'énergie cinétique minimum T_m qu'il faut fournir au proton p_1 pour que cette réaction soit possible, p_2 étant au repos dans R.

XXXVIII - Détermination de la masse du méson π^-

Un faisceau de mésons π^- est ralenti et les mésons s'arrêtent dans une cible d'hydrogène liquide (figure 2). Les mésons sont alors capturés par les protons et gravitent autour d'eux. On pourra alors négliger l'énergie cinétique des mésons ainsi que celle des protons. Il peut ensuite se produire la réaction

$$\pi^- + p \to n + \gamma$$

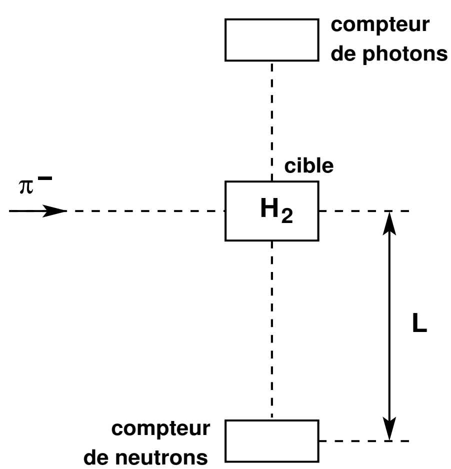

FIGURE 2 – Schéma de l'expérience

entre un méson π^- et un proton p donnant à l'état final un neutron n et un photon γ. On donne les masses au repos : $m_p = 938$ MeV/c^2, $m_n = 940$ MeV/c^2.

1°) Etablir une relation entre les masses du proton, du neutron, du π^- (m_{π^-}) et de la quantité de mouvement du neutron.

2°) En déduire la masse m_{π^-} en fonction de la masse du proton, de la masse du neutron et de la vitesse réduite β du neutron.

3°) Un détecteur à neutron est placé à la distance L de la cible d'hydrogène liquide. On mesure la durée Δt écoulée entre l'instant t_0 auquel se produit ladite réaction et l'instant d'arrivée t du neutron dans le détecteur ; t_0 est connu par la détection du photon émis dans la réaction. On a mesuré $L = 5,334$ m, $\Delta t = 130,79\,10^{-9}$ s. En déduire la valeur de la masse m_{π^-} (en MeV/c^2) obtenue à partir de cette *technique de mesure du temps de vol de neutrons*.

XXXIX - Dans un tube en U, on établit un courant permanent d'un liquide transparent non dispersif, d'indice de réfraction $n = 4/3$ (voir figure 3).

Le tube comporte deux branches parallèles B_1 et B_2 de longueur D délimitées par des fenêtres transparentes, A_1 et A'_1 pour B_1, A_2 et A'_2 pour B_2.

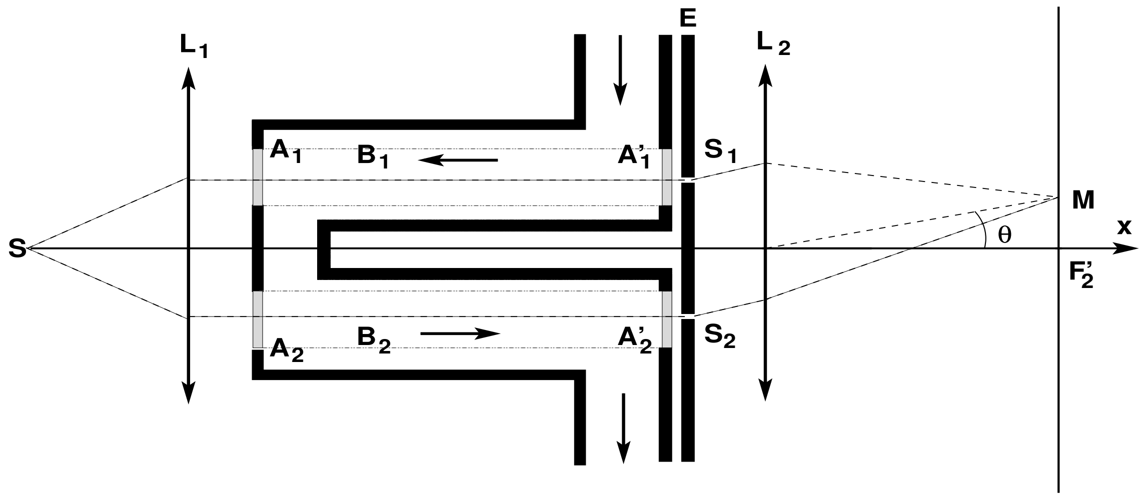

FIGURE 3 – Schéma de l'expérience

La vitesse du liquide par rapport au référentiel R du laboratoire est $\overrightarrow{V_1} = -V\ \overrightarrow{e_x}$ dans la branche B_1 et $\overrightarrow{V_2} = V\ \overrightarrow{e_x}$ dans la branche B_2. Le tube est éclairé par une source S émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide égale à λ_0. La source S est placée au foyer d'une lentille convergente L_1 d'axe optique Sx parallèle aux branches du tube. La lentille L_1 est placée devant les fenêtres A_1 et A_2.

1°) a) Calculer dans R les durées de propagation respectives Δt_1 et Δt_2 d'un signal lumineux dans B_1 et dans B_2.

b) En déduire la valeur $\delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2$ du retard pris par un signal traversant B_1 par rapport à un signal traversant B_2, tous les deux étant issus d'un même signal émis par S.

c) En donner une valeur approchée au premier ordre en V/c.

2°) Les fenêtres A'_1 et A'_2 éclairent respectivement deux trous identiques S_1 et S_2 (trous d'Young) pratiqués dans un écran opaque E. La distance entre S_1 et S_2 est notée d. Une lentille convergente L_2, de même axe optique que L_1, est placée derrière E et l'on observe dans son plan focal image la figure d'interférences résultant de la superposition des ondes issues de S_1 et de S_2. Tout se passe alors comme si l'on observait les interférences de ces ondes à l'infini.

a) Exprimer en fonction de d et θ la différence de marche δ au-delà de l'ecran E entre les ondes de S_1 et S_2 interférant en M (voir figure 3). En déduire l'avance de phase $\Delta\varphi$

correspondante de l'onde issue de S_1 sur celle issue de S_2.

b) Soit F_2' le foyer image et f la distance focale de L_2. On pose $y = \overline{F_2'M}$. On suppose $|y|$ petit devant f. Donner une expression approchée de $\Delta\varphi$ au premier ordre en y/f.

3°) Décrire en fonction de y la répartition de l'éclairement dans le plan focal de L_2 en l'absence de courant dans le tube ($V = 0$).

4°) Le retard δt induit le retard de phase $\Delta\varphi_t = \omega\delta t$ de l'onde traversant B_1 par rapport à celle traversant B_2. De quelle distance y_0 et dans quel sens s'est déplacée la frange centrale observée au **3°**) lorsque le courant de vitesse V du liquide est établi dans le tube en U.

5°) Application numérique.

Calculer y_0 avec les données suivantes : $\lambda_0 = 600\ 10^{-9}$ m ; $D = 1,5$ m ; $d = 6$ mm ; $f = 2$ m ; $V = 7$ m/s.

XL - Mouvement d'un électron dans un champ électrique uniforme

Dans un référentiel galiléen R, un électron initialement au repos au point origine O est accéléré par un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_s} = -E_s\ \overrightarrow{e_x}$ ($E_s > 0$) à partir de la date $t = 0$.

1°) En utilisant la relation fondamentale de la Dynamique, trouver la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ de l'électron à la date $t > 0$.

2°) a) Rappeler l'expression relativiste de $\overrightarrow{p}$ dans R en fonction de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'électron dans ce repère.

b) En déduire l'expression de $\overrightarrow{v}$ en fonction du temps.

3°) A partir du théorème de l'énergie cinétique, trouver l'abcisse x de l'électron en fonction du temps.

4°) Au bout d'une distance L, l'électron aura acquis l'énergie cinétique W.

a) Exprimer $v = \left|\overrightarrow{v}\right|$ en fonction de c et de $\alpha = \dfrac{W}{E_0}\dfrac{x}{L}$ où E_0 est l'énergie au repos de l'électron.

b) On donne $W = 500$ MeV, $E_0 = 0,5$ MeV, $L = 100$ m. Quelle est, à partir du point origine O, la distance au bout de laquelle l'électron aura acquis la vitesse $v = 0,99\,c$? Quelle est alors son énergie cinétique ? Commenter le résultat.