

CALCUL SPINORIEL

en Physique des Particules

Christian Carimalo

Chapitre 1

Formalisme d'hélicité

1.1 Spin-Hélicité

Le spin, ou l'hélicité selon le cas, d'une particule est défini à l'aide de l'opérateur de Pauli-Lubanski

$$W_\mu(p) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu J^{\rho\sigma} \quad (1.1)$$

où p est la 4-impulsion¹ de la particule et $J^{\rho\sigma}$ la représentation hermitique des générateurs du groupe de Lorentz L_+^\uparrow dans l'espace des états de la particule. Les opérateurs $W_\mu(p)$ sont simplement les générateurs du *petit groupe* de p , qui laisse ce vecteur invariant. Sous L_+^\uparrow , ils se transforment selon

$$U(\Lambda) W_\mu(p) U(\Lambda)^{-1} = W_\mu(\Lambda p) \quad (1.2)$$

Λ étant une tranformation de Lorentz, $U(\Lambda)$ sa représentation (unitaire) pour la particule considérée.

Pour une particule massive réelle de masse m , son impulsion est du genre temps - futur. On a en effet $p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = p^2 = m^2 > 0$, $p^0 > 0$. On peut alors attacher à chacune des impulsions p de la particule une triade de vecteurs unitaires du genre espace, soit $n_i(p)$ avec $i = 1, 2, 3$, formant avec $n_0(p) = \hat{p} = p/m$ une base de l'espace de Minkowski :

$$\begin{aligned} n_i(p) \cdot n_j(p) &= -\delta_{ij} \ , \quad n_0(p) \cdot n_i(p) = 0 \ , \quad n_0(p)^2 = 1 \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n_0(p)^\mu n_1(p)^\nu n_2(p)^\rho n_3(p)^\sigma &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les opérateurs de spin sont alors définis comme

$$S_i(p) = -n_i(p) \cdot W(p) \quad (1.4)$$

Ils engendrent le groupe $SO(3)(p)$ des rotations dans l'hyperplan orthogonal à p et satisfont aux relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Comme

$$W_\mu p^\mu = 0 \quad (1.5)$$

l'opérateur de Pauli-Lubanski peut être écrit sous la forme

1. Dans la suite, sauf indication contraire, les termes de "impulsion" et de "vecteur" seront utilisés pour "4-impulsion" et "4-vecteur", respectivement.

$$W(p) = \sum_{i=1}^3 n_i(p) S_i(p) \quad (1.6)$$

et l'invariant $W^2 = W^\mu W_\mu$ s'exprime en fonction du spin s de la particule comme

$$W^2 = -m^2 \overrightarrow{S}^2(p) = -m^2 s(s+1) \quad (1.7)$$

Les divers petits groupe $SO(3)(p)$ se déduisent les uns des autres par des transformations de L_+^\uparrow , soit, symboliquement,

$$U(\Lambda) SO(3)(p) U(\Lambda)^{-1} = SO(3)(\Lambda p) \quad (1.8)$$

mais les opérateurs $S_i(p)$ ont, en général, une loi de transformation compliquée :

$$U(\Lambda) S_i(p) U(\Lambda)^{-1} = -\sum_j [n_j(\Lambda p) \cdot \Lambda n_i(p)] S_j(\Lambda p) \quad (1.9)$$

du fait qu'il n'y a pas a priori de relation simple entre les vecteurs $n_j(\Lambda p)$ de la triade associée à Λp et les transformés $\Lambda n_i(p)$ des vecteurs de la triade associée à p . Ici, les $S_j(\Lambda p)$ sont les opérateurs de spin associés à Λp , définis par

$$S_j(\Lambda p) = -n_j(\Lambda p) \cdot W(\Lambda p) \quad (1.10)$$

Lorsque la masse de la particule est nulle ($p^2 = 0$, $p_0 > 0$), son impulsion p ne peut plus être utilisée pour définir elle-même un vecteur unitaire de base et la démarche précédente ne convient plus. On associe alors à p , d'une part, deux vecteurs unitaires du genre espace $n_i(p)$ ($i = 1, 2$) orthogonaux entre eux et orthogonaux à p et, d'autre part, un vecteur unitaire du genre temps $n_0(p)$ orthogonal aux $n_i(p)$:

$$n_i(p) \cdot n_j(p) = -\delta_{ij}, \quad n_i(p) \cdot p = 0, \quad n_i(p) \cdot n_0(p) = 0, \quad n_0^2(p) = 1$$

Pour une telle particule, on a maintenant

$$W_\mu(p) = \lambda(p) p_\mu + \sum_{i=1}^2 n_i(p)_\mu W_i(p) \quad \text{avec} \quad W_i(p) = -n_i(p) \cdot W(p) \quad (1.11)$$

On montre que les trois opérateurs $\lambda(p)$, $W_1(p)$ et $W_2(p)$ constituent un ensemble isomorphe à l'algèbre de Lie de $P(2)$. On a en effet

$$[W_1, W_2] = 0, \quad [\lambda, W_1] = iW_2, \quad [\lambda, W_2] = -iW_1$$

Le sous-groupe abélien invariant et engendré par W_1 et W_2 s'appelle le "groupe de jauge" de p . Ses représentations physiques sont telles que W_1 et W_2 y prennent la valeur zéro (jauge invariante). On a alors

$$W(p) = \lambda(p) p, \quad W^2(p) = 0, \quad U(\Lambda) \lambda(p) U^{-1}(\Lambda) = \lambda(\Lambda p) \quad (1.12)$$

où Λ est une transformation de L_+^\uparrow et $U(\Lambda)$ sa représentation unitaire dans l'espace des états de la particule. La dernière relation dans 1.12 montre que $\lambda(p)$ est un opérateur *scalaire* qui représente donc un invariant relativiste.

Une particule de masse nulle est associée à une valeur propre particulière λ de cet opérateur ou, dans le cas du photon, à deux valeurs propres opposées, à savoir $+1$ et -1 . Le nombre λ , appelé *hélicité* ou encore, polarisation circulaire de la particule, est conservé dans les transformations

de L_+^\uparrow , celles-ci se réduisant alors à une simple multiplication des états de la particule par des facteurs de phase $e^{-i\lambda\psi}$ et à la transformation de p en Λp . Il représente en quelque sorte le “spin” de la particule et caractérise complètement celle-ci du point de vue du groupe de Lorentz.

Alors que l'hélicité d'une particule de masse nulle est un invariant relativiste, une composante de spin $S_i(p)$ pour une particule massive seule n'est jamais invariante. Pour qu'elle le fût, il aurait fallu, d'après 1.9, que l'on eût

$$\Lambda \{n_i(p)\} = n_i(\Lambda p) \quad (1.13)$$

relation qui impose au vecteur $n_i(p)$ de satisfaire à une certaine covariance sous L_+^\uparrow .

Pour une particule unique, c'est-à-dire lorsqu'on ne dispose que d'une seule impulsion, celle de la particule, on ne peut satisfaire cette relation. En revanche, lorsqu'on effectue, au minimum, un produit tensoriel de deux espaces d'états à une particule chacun et que l'on peut alors disposer de deux impulsions, il est possible de construire à partir de celles-ci et pour chacune des particules un vecteur ayant la covariance requise. C'est le principe du *couplage d'hélicité*, pour deux particules réelles². Les composantes de spin suivant ces vecteurs particuliers, appelées aussi *hélicités*, sont des invariants relativistes dans l'espace produit tensoriel. Cette circonstance se rencontre tout particulièrement en théorie quantique des champs où la description de processus élémentaires fait intervenir des *vertex* à trois particules impliquant de tels produits tensoriels.

1.2 Vertex à trois particules - Tétrades d'hélicité

Considérons d'une manière générale un vertex comportant trois “lignes entrantes” d'impulsions P_1 , P_2 et P_3 , correspondant chacune à une particule, réelle ou virtuelle (fig 1.1).

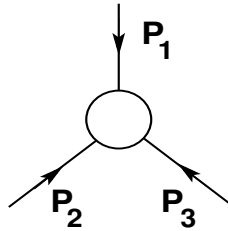


FIGURE 1.1 – Vertex à trois lignes entrantes

La conservation de l'impulsion à ce vertex sera exprimée sous la forme

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (1.14)$$

Pour simplifier, nous supposons que les normes des impulsions sont différentes de zéro

$$P_i^2 = (P_{i0})^2 - (\vec{P}_i)^2 = s_i \neq 0 \quad (1.15)$$

Notons $P_{ij} = -P_k$ ($i \neq j \neq k$) la somme des impulsions P_i et P_j et par \hat{P}_{ij} le vecteur unitaire correspondant. En introduisant la “fonction signe” $\varepsilon(x)$, on a

2. Voir : P. Moussa, R. Stora, *Methods in subnuclear Physics*, Hercegnovi 1966, vol II, p. 265 (Gordon and Breach); P. Moussa, *Thèse d'état*, Orsay (1968); G. Mahoux, cours de 2nde année de troisième cycle de Physique théorique, faculté d'Orsay, 1970-1971.

$$\hat{P}_{ij} = -\hat{P}_k = -\frac{P_k}{\sqrt{|s_k|}}, \quad \hat{P}_{ij}^2 = \varepsilon(s_k), \quad \hat{P}_i^2 = \varepsilon(s_i) \quad (1.16)$$

Nous définirons ensuite “l'impulsion relative” de P_i et P_j de la manière habituelle :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ P_i - P_j + \frac{s_i - s_j}{s_k} P_k \right\} = P_i - \frac{P_i \cdot P_k}{s_k} = -P_j + \frac{P_j \cdot P_k}{s_k} = -Q_{ji} \quad (1.17)$$

Ce vecteur, que nous appellerons aussi “vecteur d'hélicité” de P_k , est orthogonal à P_k et sa norme est

$$Q_{ij}^2 = -\frac{1}{4s_k} \Lambda(s_1, s_2, s_3) \quad (1.18)$$

où $\Lambda(x, y, z)$ est la fonction symétrique en ses trois arguments x, y et z , définie par

$$\Lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \quad (1.19)$$

On notera que

$$\Lambda(s_1, s_2, s_3) = 4 \{ (P_1 \cdot P_2)^2 - s_1 s_2 \} \quad (1.20)$$

et que, de l'orthogonalité de Q_{ij} et P_k on déduit les relations

$$Q_{ij} \cdot P_i = Q_{ij} \cdot P_j = Q_{ij}^2, \quad Q_{ij} \cdot Q_{ik} = \frac{(P_i \cdot P_j)}{4s_j s_k} \Lambda(s_1, s_2, s_3) \quad (1.21)$$

Nous ne considérerons que les cas où la fonction Λ (eq. 1.19) prend une valeur positive ou à la limite nulle. Le vecteur unitaire porté par le vecteur d'hélicité 1.17 aura alors pour norme $-\varepsilon(s_k)$. Par suite, l'un des deux vecteurs \hat{Q}_{ij} ou \hat{P}_k sera du genre temps et l'autre du genre espace. Au besoin, nous changerons le signe du vecteur du genre temps afin que celui-ci pointe vers le futur et nous le noterons provisoirement $e_{t,k}$ tandis que le vecteur du genre espace sera noté $e_{s,k}$.

Introduisons ensuite deux nouveaux vecteurs réels, e_1 et e_2 , unitaires et du genre espace, orthogonaux entre eux et orthogonaux à $e_{t,k}$ et $e_{s,k}$ et formant avec ceux-ci une base orthogonale, normée et directe de l'espace-temps. Par la suite, nous utiliserons plutôt les vecteurs de “polarisation circulaire”

$$e^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [e_1 \pm ie_2] \quad (1.22)$$

Pour désigner la tétrade ainsi formée, nous adopterons également la notation générale $e_k^{(\lambda)}$ et écrirons alors les relations d'orthogonalité et de fermeture de cette base sous la forme

$$e_k^{(\lambda')\star} \cdot e_k^{(\lambda)} = \eta_\lambda \delta_{\lambda'\lambda}, \quad \sum_\lambda \eta_\lambda e_k^{(\lambda)\star\mu} e_k^{(\lambda)\nu} = g^{\mu\nu} \quad (1.23)$$

où $\eta_\lambda = 1$ pour $\lambda = 0_t$ et $\eta_\lambda = -1$ pour $\lambda = 0_s, \pm 1$, $\lambda = 0_t$ ou $= 0_s$ signifiant que λ prend effectivement la valeur 0 lorsque le vecteur correspondant est du genre temps (t) ou du genre espace (s), respectivement. La raison de cette notation vient du fait bien connu que la tétrade $e_k^{(\lambda)}$ est associée à la représentation quadri-vectorielle du groupe de Lorentz. L'indice λ correspond aux valeurs propres de l'opérateur $W(e_{t,k}) \cdot e_{s,k}$, où $W(e_{t,k})$ est la représentation quadri-vectorielle de l'opérateur de Pauli-Lubansky correspondant au vecteur $e_{t,k}$, soit

$$\{W_\mu(e_{t,k})\}_{\alpha\beta} = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e_{t,k}^\nu \quad (1.24)$$

On a en effet

$$W_{\alpha\beta} = \{W(e_{t,k}) \cdot e_{s,k}\}_{\alpha\beta} = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e_{s,k}^\mu e_{t,k}^\nu, \quad \text{et} \quad W(e_k^{(\lambda)}) = \lambda e_k^{(\lambda)}$$

La triade $(e_{s,k}, e^{(\pm)}_k)$ est quant à elle associée à une représentation unitaire de spin 1 du petit groupe de $e_{t,k}$, tandis que ce dernier vecteur est associé à une représentation scalaire de ce même petit groupe.

Remarquons que puisque les vecteurs $e^{(\pm)}$ sont orthogonaux aux vecteurs P_k et Q_{ij} , ils sont également orthogonaux aux deux autres impulsions P_i et P_j ainsi qu'aux impulsions relatives. Par suite, tous les vecteurs de polarisations circulaires $e_i^{(\pm)}$ ($i = 1, 2, 3$) des diverses impulsions sont situés dans le biplan orthogonal au plan défini par les impulsions, appelé "plan du vertex", et ne diffèrent donc entre eux que par des rotations qui se réduisent ici à de simples multiplications par des facteurs de phase $e^{-i\lambda\psi}$.

Nous appellerons de manière générale "tétrades d'hélicité" les tétrades ainsi définies. Nous verrons par la suite la signification de cette dénomination.

1.3 Les couplages d'hélicité

Revenons au vertex à trois "particules", réelles ou virtuelles de la figure 1.1, chacune ayant une impulsion donnée et correspondant à une représentation particulière du groupe de Lorentz.

Nous dirons que nous effectuons un *couplage d'hélicité* entre ces trois particules si nous attribuons à chacune d'elles sa propre tétrade d'hélicité, où les vecteurs de polarisation circulaire ne pourront différer que par un signe global d'une tétrade à une autre. Nous examinerons ici les trois situations suivantes :

- ♣ celle où les trois impulsions P_1, P_2 et $-P_3$ sont du genre temps futur ;
- ♣ celle où les deux impulsions P_1 et $-P_2$ sont du genre temps futur, P_3 étant du genre espace ;
- ♣ enfin, celle où P_1 et P_2 sont du genre espace, $-P_3$ étant du genre temps.

1.3.1 Premier cas (fig 1.2)

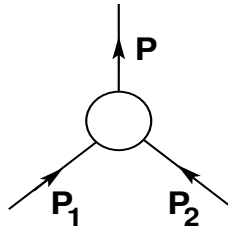


FIGURE 1.2 – Vertex à deux particules entrantes réelles

Nous supposons que les lignes entrantes 1 et 2 représentent ici deux particules réelles, d'impulsions données, chacune étant caractérisée par un espace de représentation irréductible $[m, s, \eta]$ du

groupe de Poincaré, m étant la masse, supposée non nulle, de la particule considérée, s son spin et η sa parité. Nous poserons

$$-P_3 = p = p_1 + p_2, \quad p_i^2 = m_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad p^2 = s > 0 \quad (1.25)$$

Le couplage envisagé ici est le couplage usuel entre deux particules réelles 1 et 2 dans l'espace E , produit tensoriel des espaces d'états associés respectivement à chacune des particules. On peut également le qualifier de "couplage d'hélicité dans la voie s ". Nous allons l'expliciter brièvement, en renvoyant, pour plus de détails, le lecteur aux travaux déjà cités de P. Moussa et R. Stora, dont nous adoptons les notations.

Un état d'une particule d'impulsion p et de composante de spin σ , valeur propre de l'opérateur $S_3(p)$, dépend du choix de l'axe $n_3(p)$ sur lequel est mesuré le spin, c'est-à-dire, en fait, de la triade de vecteurs que l'on associe à p . Pour cette raison, cet état est noté $|[p], \sigma\rangle$, où $[p]$ est, modulo \pm , la matrice 2×2 de $SL(2, \mathbb{C})$ représentant la transformation de Lorentz $\Lambda_{\vec{p} \rightarrow p}$ qui permet de passer d'une tétrade de référence, choisie une fois pour toutes et pour laquelle p est orientée suivant l'axe des temps :

$$p \equiv \vec{p} = (m, 0, 0, 0) = n_0(\vec{p}), \quad n_i(\vec{p}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.26)$$

en une tétrade particulière associée à p , définie comme

$$\Lambda_{\vec{p} \rightarrow p}(n_\alpha(\vec{p})) = n_\alpha(p), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (1.27)$$

Dans $SL(2, \mathbb{C})$, cette dernière relation est traduite sous la forme

$$[p] n_\alpha(\vec{p}) [p]^\dagger = n_\alpha(p) \quad (1.28)$$

Dans cette notation, $\underset{\sim}{x}$ est une matrice 2×2 associée à un vecteur x définie par

$$\underset{\sim}{x} = x_0 \tau_0 + \vec{x} \cdot \vec{\tau} \quad (1.29)$$

τ_0 étant la matrice 2×2 unité et $\vec{\tau}$ l'ensemble des trois matrices de Pauli :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Par définition, on a $[\vec{p}] = \tau_0$. Par extension, la matrice $[p]$ sera aussi appelée *tétrade de p* . Les états de la particule sont définis par

$$|[p], \sigma\rangle = U([p]) |[\vec{p}], \sigma\rangle \quad (1.31)$$

où $U([p])$ est, dans l'espace des états de la particule, la représentation unitaire de $[p]$. Pour simplifier les notations, nous identifierons par la suite une transformation de Lorentz $\Lambda(A)$ avec sa représentation A dans $SL(2, \mathbb{C})$.

Soit $U(a, A)$ la représentation unitaire de la transformation (a, A) du groupe de Poincaré restreint, a étant une translation des vecteurs et A une transformation de Lorentz. On a

$$U(a, A) |[p], \sigma\rangle = e^{ia \cdot Ap} \mathcal{D}^s(R_A)_{\sigma' \sigma} |[Ap], \sigma'\rangle \quad (1.32)$$

où

$$R_A = [Ap]^{-1} A [p] \quad (1.33)$$

est la *rotation de Wigner* associée à A , et qui appartient au petit groupe de p , et \mathcal{D}^s sa représentation agissant sur les variables de spin de la particule.

Dans l'espace produit tensoriel E des espaces des états des particules 1 et 2, l'état

$$|[p_1], \sigma_1; [p_2], \sigma_2 \rangle = |[p_1], \sigma_1 \rangle \otimes |[p_2], \sigma_2 \rangle \quad (1.34)$$

se transforme donc selon la loi

$$U(a, A) |[p_1], \sigma_1; [p_2], \sigma_2 \rangle = e^{ia \cdot A(p_1 + p_2)} \mathcal{D}^{s_1}(R_{A1})_{\sigma'_1 \sigma_1} \mathcal{D}^{s_2}(R_{A2})_{\sigma'_2 \sigma_2} |[Ap_1], \sigma'_1; [Ap_2], \sigma'_2 \rangle \quad (1.35)$$

avec

$$R_{Ai} = [Ap_i]^{-1} A [p_i], \quad i = 1, 2 \quad (1.36)$$

En général, les deux rotations de Wigner 1.36 sont différentes. Le problème de la réduction de l'espace E en sous-espaces de représentations irréductibles du type $[\sqrt{s}, J, \eta]$ consiste alors à rechercher, pour chacune des particules, des tétrades particulières telles que ces rotations soient identiques, ou, au moins, reliées simplement l'une à l'autre, de telle sorte que l'on puisse effectuer le plus simplement possible la réduction du produit tensoriel $\mathcal{D}^{s_1} \otimes \mathcal{D}^{s_2}$.

Il s'avère que l'on peut effectivement construire des tétrades de ce type. Remarquons tout d'abord qu'une identité entre les deux rotations de Wigner indique que celles-ci ne doivent plus dépendre ni de p_1 ou de p_2 , ni des tétrades qui leur sont attachées. Cette constatation suggère de construire les tétrades à partir d'une tétrade arbitraire $[p]$ associée à l'impulsion totale $p = p_1 + p_2$ de l'état 1.34 en posant

$$R_{A1} = R_{A2} = R_A = [Ap]^{-1} A [p] \quad (1.37)$$

Cette dernière équation impose à la transformation $[p_i] [p]^{-1}$, qui permet de passer de la tétrade associée à p à celle associée à p_i , de satisfaire à une certaine covariance sous L_+^\uparrow , à savoir :

$$A [p_i] [p]^{-1} A^{-1} = [Ap_i] [Ap]^{-1}, \quad \text{ou} \quad A A_{p \rightarrow p_i} A^{-1} = A_{Ap \rightarrow Ap_i} \quad (1.38)$$

Or, la transformation de Lorentz pure $[\hat{p} \rightarrow \hat{p}_i]$, transformant \hat{p} en \hat{p}_i , possède cette propriété. On trouve alors deux solutions au problème de la réduction.

✓ La première consiste à poser

$$[p_i] = [\hat{p} \rightarrow \hat{p}_i] [p] \quad i = 1, 2 \quad (1.39)$$

et conduit au couplage appelé *couplage $\ell - s$* , avec une définition relativiste du moment orbital; elle satisfait la relation 1.37.

✓ La seconde solution, donnant des formules de réduction plus simples, consiste à poser

$$[p_i] \equiv [p_i]_h = [\hat{p} \rightarrow \hat{p}_i] R(n_3(p) \rightarrow \hat{q}_{12}) [p] \quad (1.40)$$

q_{12} étant l'impulsion relative de p_1 et p_2 et $R(n_3(p) \rightarrow \hat{q}_{12})$ la rotation du petit groupe de p amenant $n_3(p)$ sur \hat{q}_{12} (vecteur unitaire porté par q_{12}). Posant

$$\hat{q} = [p]^{-1} \hat{q}_{12}, \quad n_3 = [p]^{-1} n_3(p) \quad (1.41)$$

on a aussi

$$[p]^{-1} R(n_3(p) \rightarrow \hat{q}_{12}) [p] = R(n_3 \rightarrow \hat{q}) \quad (1.42)$$

On voit que la transformation

$$[p]_h = R(n_3(p) \rightarrow \hat{q}_{12}) [p] \quad (1.43)$$

associe à p une tétrade d'hélicité, puisque

$$e_s(p) = [p]_h n_3 = \hat{q}_{12}, \quad e_t(p) = [p]_h n_0 = \hat{p} \quad (1.44)$$

En outre, il est facile de vérifier (voir Appendice A) que la transformation de Lorentz pure $[\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1]$ transforme \hat{q}_{12} en l'impulsion relative unitaire de $-p$ et p_2 , c'est-à-dire, en vecteur d'hélicité de p_1 :

$$e_s(p_1) = h(p_1, p) = \frac{2m_1}{\sqrt{\Lambda}} \left(-p + p_1 \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} \right) = \frac{2m_1}{\sqrt{\Lambda}} \left(-p_2 + p_1 \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1^2} \right) \\ \text{avec } \Lambda = \Lambda(s, m_1^2, m_2^2) \quad (1.45)$$

Ainsi, $[p_1]_h$ associe bien à p_1 une tétrade d'hélicité. Pour ce qui concerne la particule 2, comme $\hat{q}_{12} = -\hat{q}_{21}$, la transformation de Lorentz pure $[\hat{p} \rightarrow \hat{p}_2]$ transforme \hat{q}_{12} en l'opposé de l'impulsion relative unitaire de $-p$ et p_2 , c'est-à-dire, en vecteur d'hélicité de p_2 :

$$e_s(p_2) = [\hat{p} \rightarrow \hat{p}_2] \hat{q}_{21} = h(p_2, p) \\ = \frac{2m_2}{\sqrt{\Lambda}} \left(-p + p_2 \frac{p_2 \cdot p}{m_2^2} \right) = \frac{2m_2}{\sqrt{\Lambda}} \left(-p_1 + p_2 \frac{p_1 \cdot p_2}{m_2^2} \right) \quad (1.46)$$

Aussi, d'après Jacob et Wick³, la tétrade associée à p_2 est-elle plutôt définie comme

$$[p_2] = [p_2]_h = [\hat{p} \rightarrow \hat{p}_2] [p]_h Y \quad (1.47)$$

Y étant la rotation d'angle π autour de l'axe $n_2(\hat{p}) = n_2$, qui renverse donc n_3 et permet d'obtenir ainsi $n_3(p_2) = h(p_2, p)$. En outre, les vecteurs de polarisation circulaire de la tétrade de p sont conservés dans les deux transformations $[\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1]$ et $[\hat{p} \rightarrow \hat{p}_2]$, ce qui fait que :

$$e^{(\pm)}(p_1) = e^{(\pm)}(p) = e^{(\mp)}(p_2) \quad (1.48)$$

Ainsi, cette définition des tétrades correspond bien à un couplage d'hélicité entre les trois lignes du vertex. L'intérêt majeur de celui-ci réside dans les deux faits suivants :

☞ Bien que les deux rotations de Wigner 1.36 ne soient pas identiques, elles sont néanmoins reliées simplement puisqu'elles sont inverses l'une de l'autre :

$$R_{A1} = R_{A2}^{-1} = R^{-1}(\hat{q}_A) R_A R(\hat{q}) = [Ap]_h^{-1} A [p]_h \\ \text{avec } R_A = [Ap]^{-1} A [p], \quad \hat{q}_A = R_A \hat{q} \\ R(\hat{q}) = R(n_3 \rightarrow \hat{q}), \quad R(\hat{q}_A) = R(n_3 \rightarrow \hat{q}_A) \quad (1.49)$$

♠ R_{A1} est une rotation d'angle ψ_A dans le bi-plan (n_1, n_2) et conserve donc n_3 . Par conséquent, on a

3. M. Jacob, G. C. Wick, Ann. Phys. 7, 404 (1959).

$$\mathcal{D}_{\lambda'_1 \lambda_1}^{s_1}(R_{A1}) = \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} e^{-i\lambda_1 \psi_A}, \quad \mathcal{D}_{\lambda'_2 \lambda_2}^{s_2}(R_{A2}) = \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} e^{i\lambda_2 \psi_A} \quad (1.50)$$

ce qui montre que les indices respectifs λ_1 et λ_2 des deux particules sont ici des invariants relativistes. Nous pouvons retrouver ce résultat en remarquant que les vecteurs d'hélicité $h(p_1, p)$ et $h(p_2, p)$ satisfont la relation de covariance 1.13 :

$$\Lambda\{h(p_i, p)\} = h(\Lambda p_i, \Lambda p) \quad i = 1, 2 \quad (1.51)$$

et que, comme nous l'avons indiqué plus haut, les composantes de spin suivant ces vecteurs sont des invariants relativistes dans l'espace E . C'est par analogie avec l'invariance relativiste de l'hélicité d'une particule de masse nulle que ces indices de spin particuliers sont appelés aussi *hélicités* et le couplage obtenu *couplage d'hélicité*. Par rapport au couplage $\ell - s$ standard, ce couplage présente l'immense avantage de ramener chacune des rotations de Wigner à une rotation autour de l'axe n_3 dans le référentiel où la particule considérée est au repos, auquel cas les matrices \mathcal{D}^{s_i} sont diagonales et les indices de spin correspondants de la particule apparaissent alors comme des invariants relativistes. Devant l'extrême simplification apporté par ce dernier résultat, le problème de la réduction devient secondaire et pour étudier les deux autres cas annoncés nous nous laisserons guider par ce qui vient d'être fait ici.

Sous les transformations du groupe de Poincaré restreint, les états à deux particules en couplage d'hélicité se transforment donc de la manière suivante :

$$U(a, A) |[p_1]_h, \lambda_1; [p_2]_h, \lambda_2 \rangle = e^{ia\hat{A}p} e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)\psi_A} |[Ap_1]_h, \lambda_1; [Ap_2]_h, \lambda_2 \rangle \quad (1.52)$$

En particulier, si A est une rotation dans le plan orthogonal au "plan de vertex", plan défini par les trois impulsions du vertex, les impulsions restent inchangées et, dans cette transformation, l'état des deux particules est simplement multiplié par un facteur de phase :

$$U(A) |[p_1]_h, \lambda_1; [p_2]_h, \lambda_2 \rangle = e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)\psi} |[p_1]_h, \lambda_1; [p_2]_h, \lambda_2 \rangle \quad (1.53)$$

Il s'agit ici d'une rotation des vecteurs de polarisation circulaire $e^{(\pm)}(p)$, ou encore, d'un changement de tétrade associée à p qui se traduit, dans le système du centre de masse des deux particules où \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont colinéaires à n_3 , par une rotation d'angle ψ dans le plan (n_1, n_2) .

Pour ce qui concerne les vecteurs constituant les tétrades d'hélicité, on a aussi

$$A e^{(\lambda)}(p_i) = [Ap_1]_h R_{A_i} e^{(\lambda)}(\hat{p}) = e^{-i\lambda\psi_i} e^{(\lambda)}(Ap_i) \quad (1.54)$$

avec $\psi_p = \psi_A = \psi_{p_i} = -\psi_{p_2}$. Par conséquent, l'indice λ lui-même est un invariant relativiste. Ce résultat peut être retrouvé simplement en considérant à nouveau l'équation aux valeurs propres de l'opérateur d'hélicité

$$\lambda_{\alpha\beta}(p_i) = i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} e_s(p_i)^\mu e_t(p_i)^\nu \quad (1.55)$$

opérateur qui, les deux vecteurs $e_s(p_i)$ et $e_t(p_i)$ ayant ici la covariance requise, possède lui aussi des valeurs propres invariantes relativistes. On a en particulier

$$\lambda_{\alpha\beta}(p) = i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \hat{q}_{12}^\mu \hat{p}^\nu \quad (1.56)$$

1.3.2 Deuxième cas (fig 1.3)

Nous supposons ici que la ligne entrante 1 et la ligne sortante 2 du vertex représentent encore deux particules réelles d'impulsions p_1 et p_2 respectivement, tandis que la troisième ligne sortante représente une particule virtuelle émise à ce vertex et dont l'impulsion $p = p_1 - p_2$, du genre espace : $p^2 = -t < 0$, est le quadri-transfert d'impulsion entre les deux particules 1 et 2.

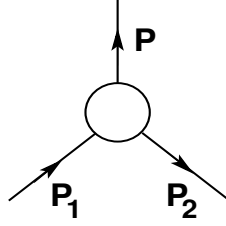


FIGURE 1.3 – Vertex à deux particules réelles, l'une entrante, l'autre sortante

Le cas envisagé ici correspond, en quelque sorte, à un “couplage d'hélicité dans la voie t ” pour les deux particules 1 et 2. Pour définir ce couplage, nous procéderons par analogie avec le cas précédent.

Ici, p est l'impulsion totale de p_1 et $-p_2$ et son vecteur unitaire \hat{p} est du genre espace

$$\hat{p} = \frac{p}{\sqrt{t}}, \quad \hat{p}^2 = -1$$

Son vecteur d'hélicité, que nous noterons encore q_{12} , est l'impulsion relative de p_1 et $-p_2$, soit

$$q_{12} = q_{21} = \frac{1}{2} \left(p_1 + p_2 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{t} p \right) = p_1 + \frac{p_1 \cdot p}{t} p \quad (1.57)$$

Il s'agit d'un vecteur du genre temps car

$$q_{12}^2 = \frac{\Lambda(-t, m_1^2, m_2^2)}{4t} > 0 \quad (1.58)$$

et qui pointe vers le futur, puisque $(q_{12} \cdot (p_1 - p_2) = 0)$ ⁴

$$q_{12} \cdot p_1 = q_{12} \cdot p_2 = \frac{1}{2} q_{12} \cdot (p_1 + p_2) = q_{12}^2 > 0 \quad (1.59)$$

Les rôles de p et q_{12} étant échangés par rapport au cas précédent, nous définirons une tétrade d'hélicité de p de la manière suivante. Choisissons en premier lieu une tétrade quelconque $[q_{12}]$ associée à q_{12} . Effectuons ensuite la rotation du petit groupe de ce vecteur qui amène $n_3(q_{12})$ sur \hat{p} . La tétrade

$$[p]_h = R(n_3(q_{12}) \rightarrow \hat{p}) [q_{12}] \quad (1.60)$$

donne

$$[p]_h n_0 = e_t(p) = \hat{q}_{12}, \quad [p]_h n_3 = e_s(p) = \hat{p} \quad (1.61)$$

4. Rappelons que si un vecteur du genre temps pointe vers le futur dans un référentiel donné, alors il pointe aussi vers le futur dans tout autre référentiel qui s'en déduit par une transformation de L_+^\uparrow . Or, la relation 1.59 montre que dans le référentiel où la particule 1 est au repos, $q_{12}^0 = q_{12} \cdot p_1 / m_1 > 0$. Par suite, q_{12} est bien du genre temps futur.

D'après une remarque précédente, pour satisfaire l'égalité entre les trois rotations de Wigner associées respectivement aux trois particules du vertex, il suffit d'utiliser des transformations de Lorentz pures appropriées. Il est facile de vérifier (voir appendice A) que celle, $[\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_1]$, transformant \hat{q}_{12} en \hat{p}_1 transforme \hat{p} en l'impulsion relative de p_2 et p , c'est-à-dire, en vecteur d'hélicité de p_1 :

$$[\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_1] \hat{p} = e_s(p_1) = h(p_1, p) = \frac{2m_1}{\sqrt{\Lambda}} \left(p - \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} p_1 \right) \quad (1.62)$$

avec $\Lambda = \Lambda(-t, m_1^2, m_2^2)$

Par ailleurs, puisque $h(p_2, -p) = -h(p_2, p)$, on a

$$[\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_2] \hat{p} = e_s(p_2) = -h(p_2, p_2 - p_1) = h(p_2, p) \quad (1.63)$$

c'est-à-dire, la transformation de Lorentz pure $[\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_2]$ transforme \hat{p} en l'impulsion relative unitaire de $-p_1$ et p , vecteur d'hélicité de p_2 . D'après 1.63, il ne sera pas nécessaire, pour construire la tétrade d'hélicité de la particule 2, de renverser les axes au départ. Nous définirons donc les tétrades d'hélicité des deux particules 1 et 2 par

$$[p_i]_h = [\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_i] [p]_h \quad i = 1, 2 \quad (1.64)$$

Cette définition conduit bien à un couplage d'hélicité entre les trois particules, pour lequel les trois rotations de Wigner sont identiques et représentent, chacune pour sa part, une rotation autour de n_3 (donc effectuée dans le bi-plan (n_1, n_2)), dans un référentiel particulier. Pour l'une et l'autre des deux particules 1 et 2, ce référentiel est celui où la particule correspondante est au repos, tandis que pour la particule virtuelle d'impulsion p , il s'agit du référentiel où q_{12} est orienté suivant l'axe des temps. Ce dernier est l'analogie du référentiel du centre de masse dans le cas précédent. Nous poserons ici

$$\hat{q} = [q_{12}]^{-1} \hat{p}, \quad R_A = [Aq_{12}]^{-1} A [q_{12}]$$

$$R(\hat{q}) = R(n_3 \rightarrow \hat{q}), \quad \hat{q}_A = R_A \hat{q} \quad (1.65)$$

On obtient donc

$$R_{A1} = R_{A2} = R_A(p) = [Ap]_h^{-1} A [p]_h = R^{-1}(\hat{q}_A) R_A R(\hat{q})$$

$$\mathcal{D}_{\lambda_i' \lambda_i}^{s_i}(R_{Ai}) = \delta_{\lambda_i' \lambda_i} e^{-i\lambda_i \psi_A} \quad (1.66)$$

la toute dernière relation traduisant le fait que les composantes de spin des particules 1 et 2 suivant leur propre vecteur d'hélicité, $\lambda(p_i) = W_i(\hat{p}_i) \cdot h(p_i, p)$, sont des invariants relativistes. Lorsque la transformation A est une rotation dans le plan perpendiculaire au plan de vertex, les impulsions sont inchangées et les états d'hélicité des deux particules sont simplement multipliés par un facteur de phase :

$$U(A) |[p_i]_h, \lambda_i \rangle = e^{-i\lambda_i \psi} |[p_i]_h, \lambda_i \rangle \quad (1.67)$$

Dans le référentiel où q_{12} est orienté suivant l'axe des temps et \hat{q} orienté suivant n_3 (\vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont alors également colinéaires à n_3), cette transformation est une rotation d'angle ψ , effectuée dans le plan (n_1, n_2) , des vecteurs de polarisation circulaire, lesquels sont identiques pour les trois tétrades :

$$e^\pm(p_1) = e^\pm(p_2) = e^\pm(p) \quad (1.68)$$

Soulignons ici que le couplage dont il vient d'être question n'a de sens qu'à condition d'envisager les transformations de Lorentz simultanément dans les deux espaces d'états associés respectivement à chacune des particules 1 et 2 réelles. Cette circonstance intervient lorsqu'on étudie des éléments de matrice de la forme

$$\langle [p_2], \sigma_2 | \mathcal{O} | [p_1], \sigma_1 \rangle \quad (1.69)$$

qui représentent des *amplitudes de vertex* pour des vertex tel celui de la figure 1.4 (a) intervenant dans un diagramme en arbre tel celui de la figure 1.4 (b) décrivant un certain processus élémentaire. L'opérateur \mathcal{O} qui y figure représente le *courant* associé à ce vertex, *couplé* à une particule virtuelle que nous avons schématisée par la ligne sortante d'impulsion p dans la figure 1.3.

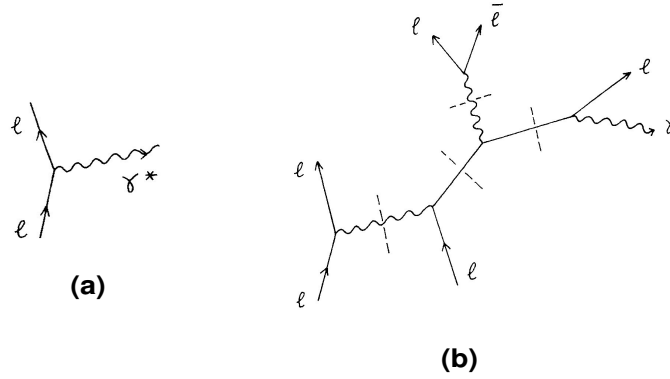


FIGURE 1.4 – Vertex (a) dans le diagramme en arbre (b)

L'introduction du couplage d'hélicité dans la voie t entre les particules 1 et 2 permet d'obtenir de nouvelles amplitudes de vertex dont la loi de transformation est, d'après 1.66, beaucoup plus simple que celle de 1.69 où les tétrades seraient choisies arbitrairement. En effet, A étant une transformation de Lorentz, on a dès lors

$$\begin{aligned} & \langle [p_2]_h, \lambda_2 | U^{-1}(A) U(A) J U^{-1}(A) U(A) | [p_1]_h, \lambda_1 \rangle = \\ & e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)\psi_A} \langle [Ap_2]_h, \lambda_2 | J_A | [Ap_1]_h, \lambda_1 \rangle \end{aligned} \quad (1.70)$$

où J est le courant du vertex et $J_A = U(A) J U^{-1}(A)$ le courant transformé dont l'expression dépend de la représentation de Lorentz associée à ce courant, c'est-à-dire, en fait, de celle de la particule virtuelle à laquelle il est couplé, puisque, d'après les principes généraux de la théorie des champs, lesdites représentations doivent être identiques.

C'est en projetant ces amplitudes de vertex avec couplage d'hélicité sur les fonctions d'onde d'hélicité de la particule virtuelle que l'on obtient ce qu'on appelle des *amplitudes d'hélicité*, caractéristiques du vertex considéré et qui sont *invariantes relativistes*.

On notera que chacun des vecteurs $e^{(\lambda)}(p)$ de la tétrade d'hélicité de p est vecteur propre, avec la valeur propre λ , de l'opérateur d'hélicité quadri-vectorielle

$$\lambda_{\alpha\beta}(p) = i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \hat{p}^\mu \hat{q}_{12}^\nu \quad (1.71)$$

qui peut être considéré comme le *prolongement analytique* de l'opérateur similaire 1.56 du cas précédent

$$\lambda_{\text{cas 1}}(p_1 + p_2) \rightarrow -\lambda_{\text{cas 2}}(p_1 - p_2) \quad (1.72)$$

On peut d'ailleurs relier facilement les vecteurs e_t et e_s obtenus dans l'un et l'autre cas par la substitution $p_2 \rightarrow -p_2$

$$e_t^{\text{cas 1}}(p_1 + p_2) \rightarrow e_t^{\text{cas 2}}(p_1 - p_2), \quad e_s^{\text{cas 1}}(p_1 + p_2) \rightarrow e_s^{\text{cas 2}}(p_1 - p_2) \quad (1.73)$$

Rappelons ici que les générateurs du petit groupe d'un vecteur p du genre espace sont donnés par

$$J(p) = n_0(p) \cdot W(p), \quad W_1(p) = -n_1(p) \cdot W(p), \quad W_2(p) = -n_2(p) \cdot W(p) \quad (1.74)$$

$W(p)$ étant l'opérateur de Pauli-Lubansky 1.1 et (n_0, n_1, n_2, \hat{p}) une base orthonormale de l'espace-temps ($n_0^2(p) = 1$, $n_1^2(p) = n_2^2(p) = -1$). L'ensemble de ces trois opérateurs satisfait aux relations de commutation de $L(2, 1)$ et $J(p)$ engendre le groupe des rotations dans le plan (n_1, n_2) . C'est précisément ce groupe de rotations que l'on retrouve aussi bien lorsque p est du genre temps que lorsque p est du genre espace : dans le premier cas, $J(p)$ est la composante du spin suivant $n_3(p)$, tandis que dans le second cas, c'est la composante du spin suivant $n_0(p)$. Dans les deux cas, $J(p)$ a le même ensemble de valeurs propres. Si la projection se fait suivant un vecteur d'hélicité de p , la composante $J(p)$ obtenue est l'opérateur d'hélicité de la particule, dont les valeurs propres possèdent alors l'invariance relativiste.

En remarque finale, notons aussi que les états de spin d'un photon virtuel sont décrits dans le cadre de la représentation quadri-vectorielle du groupe de Lorentz. Aussi, lorsque la particule virtuelle est un photon, l'hélicité quadri-vectorielle 1.56 ou 1.71 représente effectivement l'hélicité du photon. Les vecteurs propres $e^{(\lambda)}(p)$ de cet opérateur, qui constituent la tétrade de p , représentent quant à eux les *fonctions d'onde d'hélicité* de ce photon.

1.3.3 Troisième cas (figs 1.2, 1.5)

Considérons maintenant le cas où les deux particules entrantes 1 et 2 du vertex de la figure 1.2 sont virtuelles et du genre espace. La troisième ligne, sortante, dont l'impulsion du genre temps est la somme des impulsions des particules 1 et 2, représente soit un état quantique réel quelconque X comme dans la figure 1.5 (a), type de vertex que l'on trouve notamment dans le processus décrit par le diagramme de la figure 1.5, soit une particule virtuelle (du genre temps). Nous poserons ici

$$p_1^2 = -t < 0, \quad p_2^2 = -t', \quad p = p_1 + p_2, \quad p^2 = s > 0 \quad (1.75)$$

En fait, ce troisième cas diffère peu du premier quant au principe du couplage. Nous procéderons encore par analogie avec les deux cas précédents.

❶ Pour l'impulsion totale p :

$$[p]_h = R(n_3(p) \rightarrow \hat{q}_{12}) [p] \quad (1.76)$$

où $[p]$ est une tétrade arbitraire associée à $[p]$. Le vecteur d'hélicité q_{12} représente ici encore l'impulsion relative des particules 1 et 2 :

$$q_{12} = -q_{21} = p_1 - \frac{p_1 \cdot p}{s} p = -p_2 + \frac{p_2 \cdot p}{s} p \quad (1.77)$$

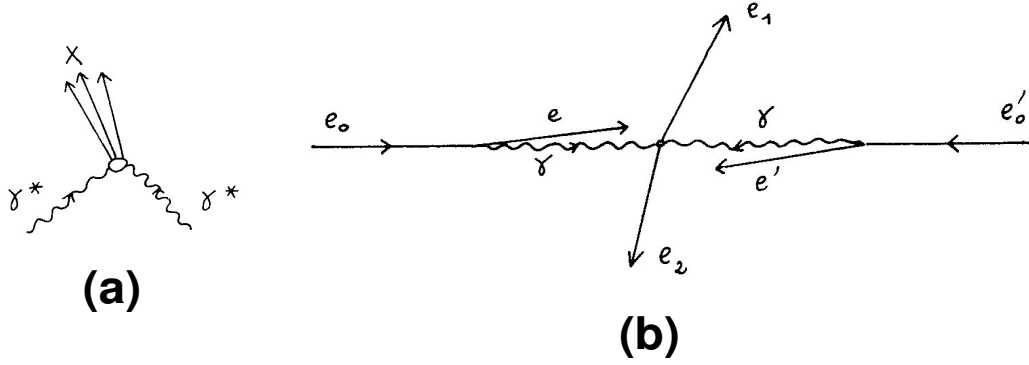


FIGURE 1.5 – (a) vertex à deux particules virtuelles entrantes ; (b) exemple

On a ici

$$q_{12}^2 = -\frac{\Lambda}{s}, \quad \text{avec } \Lambda = \Lambda(s, -t, -t'), \quad \hat{q}_{12}^2 = -1$$

❶ Pour la particule 1 du genre espace :

$$[p_1]_h = [\hat{p} \rightarrow h_1] [p]_h \quad (1.78)$$

h_1 étant l'impulsion relative unitaire de p et $-p_2$:

$$h_1 = h(p_1, p) = e_t(p_1) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\Lambda}} \left(p + \frac{p_1 \cdot p}{t} p_1 \right), \quad h_1^2 = 1, \quad h_1^0 > 0 \quad (1.79)$$

Il est facile de vérifier que l'on a

$$[\hat{p} \rightarrow h_1] \hat{q}_{12} = \hat{p}_1 \quad (1.80)$$

❷ Pour la particule 2 du genre espace :

Soit h_2 l'impulsion relative unitaire de p et $-p_1$, vecteur d'hélicité de p_2 :

$$h_2 = h(p_2, p) = e_t(p_2) = \frac{2\sqrt{t'}}{\sqrt{\Lambda}} \left(p + \frac{p_2 \cdot p}{t'} p_2 \right), \quad h_2^2 = 1, \quad h_2^0 > 0 \quad (1.81)$$

dans la transformation de Lorentz pure amenant \hat{p} sur ce vecteur, \hat{q}_{12} est transformé en $-\hat{p}_2$: $[\hat{p} \rightarrow h_2] \hat{q}_{12} = -\hat{p}_2$. Donc, ici également, il sera nécessaire de renverser au départ l'axe n_3 par la rotation Y introduite précédemment, de façon à obtenir $n_3(p_2) = \hat{p}_2$. La tétrade associée à la particule 2 sera donc définie par

$$[p_2]_h = [\hat{p} \rightarrow h_2] [p]_h Y \quad (1.82)$$

Il est clair que ces définitions conduisent bien à un couplage d'hélicité entre les trois particules. On obtient ici encore

$$e^{(\pm)}(p_1) = e^{(\pm)}(p) = e^{(\mp)}(p_2), \quad R_{A1} = R_A(p) = R_{A2}^{-1} = [Ap]_h A [p]_h$$

Du fait que l'on ne dispose plus d'espace d'états de particules réelles pour les particules 1 et 2, ce couplage doit être envisagé dans l'espace produit tensoriel des deux espaces de fonctions d'onde décrivant les états de spin respectifs de l'une ou l'autre de ces deux particules virtuelles.

1.3.4 Extension aux états à $N \geq 3$ particules du genre temps⁵

Lorsqu'on dispose de plus de deux particules, et donc de plus de deux impulsions, il devient possible de construire, à partir de ces impulsions, des bases complètes d'espace-temps, dont les vecteurs se transforment comme les impulsions, c'est-à-dire, des vecteurs possédant la propriété de covariance 1.13⁶. Dès lors, les projections des spins des particules sur l'un *quelconque* de ces vecteurs seront invariantes. Cette possibilité vient du fait que dans le référentiel du centre de masse du système des $N \geq 3$ particules, on peut former, avec les $N - 1$ tri-impulsions indépendantes, un véritable solide rigide à trois dimensions, auquel on peut attacher un système d'axes pouvant servir de base tri-dimensionnelle, ce qui ne peut être réalisé pour un état à une seule particule (tri-impulsion nulle dans le référentiel de la particule au repos) ou un état à deux particules (une seule tri-impulsion dans ce cas). Cela est évident pour $N \geq 4$ ($N - 1 \geq 3$). Pour $N = 3$, on note qu'à deux tri-vecteurs indépendants \vec{p}_1 et \vec{p}_2 formant un triangle on peut adjoindre le vecteur $\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2$ perpendiculaire à ce triangle pour former un tétraèdre.

Considérons justement le cas $N = 3$. A titre d'exemple, définissons la tétrade d'hélicité de l'impulsion totale $P = p_1 + p_2 + p_3$ de la manière suivante :

$$T = \hat{P} = \frac{P}{\sqrt{s}}, \quad \text{avec } s = P^2, \quad Y_\mu = N_y \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma, \quad Z = N_z \left\{ p_3 - \frac{P \cdot p_3}{s} P \right\}$$

$$X_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^\nu Y^\rho Z^\sigma \quad (1.83)$$

où l'on note que dans l'échange $1 \leftrightarrow 2$, T et Z sont symétriques tandis que Y et X sont antisymétriques⁷. On vérifie sans peine que ces vecteurs sont bien orthogonaux deux à deux. Les facteurs N_y et N_z assurent la normalisation de Y et de Z , respectivement ($Y^2 = Z^2 = -1$). On les évalue le plus simplement en se plaçant dans le référentiel du centre de masse des trois impulsions où

$$Y = (0, \vec{Y}), \quad \vec{Y} = N_y \left[\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2 \right]_{CM} = N_y \left[\vec{p}_2 \wedge \vec{p}_3 \right]_{CM} = N_y \left[\vec{p}_3 \wedge \vec{p}_1 \right]_{CM},$$

$$Z = (0, \vec{Z}), \quad \vec{Z} = N_z (\vec{p}_3)_{CM} \quad (\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)_{CM}$$

d'où l'on déduit immédiatement (à un signe près)

$$N_y^{-1} = \{p_1 p_2 | \sin \Theta_{12}\}^{CM} = \{p_2 p_3 | \sin \Theta_{23}\}^{CM} = \{p_3 p_1 | \sin \Theta_{31}\}^{CM}, \quad \text{et } N_z^{-1} = p_3^{CM}$$

où, dans ledit référentiel, Θ_{ij} est l'angle entre les tri-impulsions des particules i et j et les p_i^{CM} sont les modules de ces tri-impulsions :

$$p_i^{CM} = \frac{\Lambda^{1/2}(s, m_i^2, W_{k\ell}^2)}{2\sqrt{s}}, \quad i \neq k \neq \ell$$

$W_{k\ell}^2 = (p_k + p_\ell)^2$ étant la carré de la masse invariante du sous-système (k, ℓ) . Tenant compte de la relation

5. Cette extension est présentée sous sa forme la plus générale dans : M. Kummer, J. Math. Phys. 7, 997 (1966) ; J. Werle, "Relativistic Theory of Reactions", North-Holland Pub. Comp., Amsterdam (1966) ; P. Moussa, Thèse d'état, Orsay (1968) ; pour le cas $N = 3$, voir aussi : S. M. Berman, M. Jacob, Phys. Rev. 139 B, 1023 (1965).

6. Remarquons ici qu'il peut être utile de choisir les éléments de la base en fonction de leurs propriétés de symétrie vis-à-vis du groupe des permutations S_N .

7. En fait, sous une permutation quelconque de S_3 , T est complètement symétrique et Y complètement antisymétrique.

$$\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\varepsilon^{\sigma\alpha\beta\gamma} = -\{\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\rho^\gamma + \delta_\nu^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\mu^\gamma + \delta_\rho^\alpha\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\gamma - \delta_\mu^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\nu^\gamma - \delta_\rho^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\mu^\gamma - \delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta\delta_\rho^\gamma\}$$

on trouve le vecteur X sous la forme

$$X = \frac{N_y N_z}{\sqrt{s}} \left\{ [s p_2 \cdot p_3 - P \cdot p_2 P \cdot p_3] \left(p_1 - \frac{P \cdot p_1}{s} P \right) - [s p_1 \cdot p_3 - P \cdot p_1 P \cdot p_3] \left(p_2 - \frac{P \cdot p_2}{s} P \right) \right\}$$

ou encore

$$X = \frac{N_y N_z}{\sqrt{s}} \left\{ [p_2 \cdot p_3 P \cdot p_3 - m_3^2 P \cdot p_2] \left(p_1 - \frac{p_3 \cdot p_1}{m_3^2} p_3 \right) - [p_1 \cdot p_3 P \cdot p_3 - m_3^2 P \cdot p_1] \left(p_2 - \frac{p_3 \cdot p_2}{m_3^2} p_3 \right) \right\}$$

Dans le référentiel du centre de masse global, ce vecteur s'écrit

$$X = (0, \vec{X}), \quad \text{avec} \quad \vec{X} = \frac{\vec{p}_3 \wedge \left\{ \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2 \right\}}{\left| \vec{p}_3 \wedge \left\{ \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2 \right\} \right|} \Big|_{CM}$$

A partir de cette tétrade $[P]_h$, les tétrades d'hélicité des particules seront ensuite définies comme

$$[p_i]_h = [\hat{P} \rightarrow \hat{p}_i] [P]_h$$

ce qui conduit à l'égalité des rotations de Wigner. On obtient ainsi les tétrades suivantes⁸.

① Particule 1

$$\begin{aligned} T_1 &= \hat{p}_1 = \frac{p_1}{m_1}, \quad Y_1 = Y \\ Z_1 &= N_z \left\{ p_3 - \frac{p_3 \cdot p_1}{m_1^2} p_1 + \frac{1}{1 + \xi_1} \left\{ \frac{p_1 \cdot p_3}{m_1 \sqrt{s}} + \frac{P \cdot p_3}{s} \right\} \left[-P + \frac{P \cdot p_1}{m_1^2} p_1 \right] \right\} \\ X_1 &= \frac{N_y N_z}{\sqrt{s}} \left\{ [s p_2 \cdot p_3 - P \cdot p_2 P \cdot p_3] \frac{m_1}{\sqrt{s}} \left(-P + \frac{P \cdot p_1}{m_1^2} p_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + [P \cdot p_1 P \cdot p_3 - s p_1 \cdot p_3] \left[p_2 - \frac{p_2 \cdot p_1}{m_1^2} p_1 + \frac{1}{1 + \xi_1} \left(\frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 \sqrt{s}} + \frac{P \cdot p_2}{s} \right) \left(-P + \frac{P \cdot p_1}{m_1^2} p_1 \right) \right] \right\} \\ &\quad \text{avec} \quad \xi_1 = \cosh \chi_1 = \frac{P \cdot p_1}{m_1 \sqrt{s}} \end{aligned}$$

② Particule 2

$$\begin{aligned} T_2 &= \hat{p}_2 = \frac{p_2}{m_2}, \quad Y_2 = Y \\ Z_2 &= N_z \left\{ p_3 - \frac{p_3 \cdot p_2}{m_2^2} p_2 + \frac{1}{1 + \xi_2} \left\{ \frac{p_2 \cdot p_3}{m_2 \sqrt{s}} + \frac{P \cdot p_3}{s} \right\} \left[-P + \frac{P \cdot p_2}{m_2^2} p_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

8. Le vérifier.

$$\begin{aligned}
 X_2 = & -\frac{N_y N_z}{\sqrt{s}} \left\{ [s p_1 \cdot p_3 - P \cdot p_1 P \cdot p_3] \frac{m_2}{\sqrt{s}} \left(-P + \frac{P \cdot p_2}{m_2^2} p_2 \right) \right. \\
 & \left. + [P \cdot p_2 P \cdot p_3 - s p_2 \cdot p_3] \left[p_1 - \frac{p_1 \cdot p_2}{m_2^2} p_2 + \frac{1}{1 + \xi_2} \left(\frac{p_2 \cdot p_1}{m_2 \sqrt{s}} + \frac{P \cdot p_1}{s} \right) \left(-P + \frac{P \cdot p_2}{m_2^2} p_2 \right) \right] \right\} \\
 & \text{avec } \xi_2 = \cosh \chi_2 = \frac{P \cdot p_2}{m_2 \sqrt{s}}
 \end{aligned}$$

③ Particule 3

$$\begin{aligned}
 T_3 = \hat{p}_3 = & \frac{p_3}{m_3}, \quad X_3 = X, \quad Y_3 = Y \\
 Z_3 = N_z \frac{m_3}{\sqrt{s}} & \left\{ -P + \frac{P \cdot p_3}{m_3^2} p_3 \right\}
 \end{aligned}$$

Comme on le voit, le choix 1.83 privilégie en fait la particule 3 par rapport aux deux autres, Z_3 prenant la forme d'un vecteur d'hélicité, selon la définition 1.17 que nous lui avons donnée. Comme le vecteur Y est perpendiculaire à l'hyperplan formé par les trois impulsions, un autre choix, plus symétrique bien qu'inusuel, consisterait à redéfinir l'hélicité des particules comme projection de leurs spins respectifs sur cet axe commun. On peut également opter pour le couplage d'hélicité suivant, symétrique lui aussi, qui présente l'avantage de s'adapter à un nombre quelconque de particules, mais qui ne donne pas l'égalité des rotations de Wigner.

Plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse global des N particules, de base

$$\hat{P} \Big|_{CM} = \vec{T} = (\sqrt{s}, \vec{0}), \quad \vec{X} = (0, \vec{e}_x), \quad \vec{Y} = (0, \vec{e}_y), \quad \vec{Z} = (0, \vec{e}_z) \quad (1.84)$$

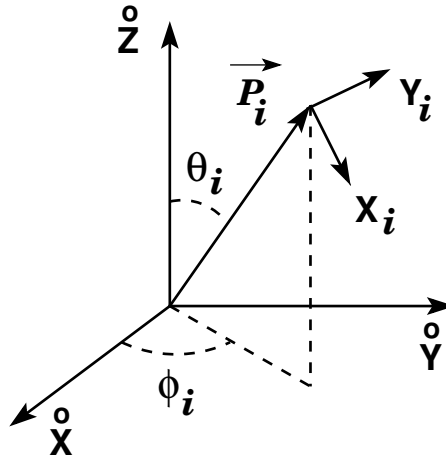


FIGURE 1.6 – Paramétrisation d'une tri-impulsion dans le référentiel du centre de masse

Utilisant la paramétrisation des coordonnées sphériques (voir figure 1.6), la tri-impulsion de la particule i sera écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{i CM} = \hat{p}_i \vec{e}_{ri}, \quad \text{avec} \\
 \vec{e}_{ri} = \cos \theta_i \vec{e}_z + \sin \theta_i \left(\cos \varphi_i \vec{e}_x + \sin \varphi_i \vec{e}_y \right)
 \end{aligned}$$

où θ_i est l'angle orbital et φ_i l'angle azimutal de la particules. Introduisons aussi les vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\theta_i} &= -\sin \theta_i \vec{e}_z + \cos \theta_i \left(\cos \varphi_i \vec{e}_x + \sin \varphi_i \vec{e}_y \right) \\ \vec{e}_{\varphi_i} &= -\sin \varphi_i \vec{e}_x + \cos \varphi_i \vec{e}_y\end{aligned}$$

et notons

$$X_i|_{CM} \equiv (0, \vec{e}_{\theta_i}), \quad Y_i|_{CM} \equiv (0, \vec{e}_{\varphi_i}), \quad Z_i|_{CM} = (0, \vec{e}_{r_i}) \quad (1.85)$$

Les quatre vecteurs $T = \hat{P}$, X_i , Y_i , Z_i forment une base reliée à la base standard 1.84 par la matrice de rotation

$$\mathcal{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \varphi_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ 0 & \cos \theta_i \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ 0 & -\sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

On notera que le vecteur Z_i peut être exprimé comme

$$Z_i = \frac{1}{\hat{p}_i} \left(p_i - \frac{P \cdot p_i}{s} P \right) \quad (1.87)$$

$$\text{avec } \hat{p}_i = \frac{\Lambda^{1/2}(s, m_i^2, W_i^2)}{2\sqrt{s}}, \quad W_i^2 = (P - p_i)^2$$

et représente donc pour P un vecteur d'hélicité, dans un couplage d'hélicité entre le système global et la particule i . Nous noterons

$$[P]_{hi} = \mathcal{R}_i [\hat{P}] \quad (1.88)$$

la tétrade correspondante, que l'on peut appeler tétrade d'hélicité de P *relativement à la particule* i . A partir de cette tétrade, celle relative à p_i sera obtenue par la transformation de Lorentz pure $[\hat{P} \rightarrow \hat{p}_i]$:

$$[p_i]_h = [\hat{P} \rightarrow \hat{p}_i] [P]_{hi} :$$

$$\hat{p}_i = t_i = \cosh \chi_i T + \sinh \chi_i Z_i, \quad z_i = \sinh \chi_i T + \cosh \chi_i Z_i$$

$$x_i = X_i, \quad y_i = Y_i, \quad \cosh \chi_i = \frac{P \cdot p_i}{m_i \sqrt{s}}$$

$$\text{et donc } z_i = \frac{2m_i}{\Lambda^{1/2}(s, m_i^2, W_i^2)} \left(-P + \frac{p_i \cdot P}{m_i^2} p_i \right) \quad (1.89)$$

ce qui correspond bien à un couplage d'hélicité entre les tétrades de P et p_i .

Pour terminer, remarquons que ce formalisme peut être étendu sans difficulté au cas où certaines particules sont virtuelles et du genre espace.

1.4 Fonctions d'onde des particules virtuelles

Mis à part le cas spécial des particules, qui, telles le photon, ont une masse réelle nulle, cas qui requiert généralement une étude particulière, la construction explicite de ces fonctions d'onde, aussi appelées *amplitudes spinorielles*⁹, ne pose pas de problème majeur lorsque l'impulsion p de la particule virtuelle est du genre temps. Pour les obtenir, il suffit en effet d'effectuer un prolongement analytique des fonctions d'onde de la particule *sur-couche*, c'est-à-dire, lorsque son impulsion (du genre temps futur) vérifie $p^2 = m^2$ où m est sa masse réelle, en remplaçant partout m par $\sqrt{s} = \sqrt{p^2}$, grandeur qui représente alors la masse de la particule *hors-couche*. Ainsi, les fonctions d'onde d'un électron, resp. d'un positron, virtuel du genre temps sont simplement les spineurs $U_\sigma([p])$, resp. $V_\sigma([p])$, décrivant les états de spin d'un électron, resp. d'un positron, de masse \sqrt{s} . Ces spineurs vérifient les équations de Dirac

$$(\not{p} - \sqrt{s}) U_\sigma([p]) = 0, \quad (\not{p} + \sqrt{s}) V_\sigma([p]) = 0 \quad (1.90)$$

où $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$, les γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ étant les quatre matrices de Dirac. Elles sont aussi vecteurs propres, avec la valeur propre $\sigma = \pm 1/2$, de la composante suivant $n_3(p)$ de l'opérateur de polarisation qui prend ici l'expression

$$W_\mu(\hat{p}) = \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{p}^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (1.91)$$

Pour une particule de spin J quelconque, les fonctions d'onde de la *représentation spinorielle* correspondant à ce spin sont des spineurs à $2(2J+1)$ composantes. Ils vérifient une équation analogue à l'équation de Dirac¹⁰ :

$$[\Gamma(\hat{p}) - 1] U_\sigma([p]) = 0, \quad \text{avec}$$

$$\Gamma(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^J(\hat{\tilde{p}}) \\ \mathcal{D}^J(\tilde{\hat{p}}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \tilde{\hat{p}} = \hat{p}^{-1} \hat{p}^2 = \tilde{\tilde{\hat{p}}}^{-1} \quad (1.92)$$

les \mathcal{D}^J étant des matrices carrées $(2J+1) \times (2J+1)$.

Les fonctions d'onde des particules virtuelles du genre espace peuvent être construites dans le même espace de représentation spinorielle que celui correspondant à la particule virtuelle du genre temps. Elles seront alors définies comme étant les vecteurs propres de la composante de l'opérateur de polarisation de cette représentation suivant le vecteur unitaire du genre temps futur $n_0(p)$. Comme nous l'avons déjà noté, cet opérateur et l'opérateur $S_3(p)$ pour la particule du genre temps sont les mêmes, au signe près, et possèdent donc le même ensemble de valeurs propres. Cependant, selon la valeur J du spin de la représentation, une difficulté se présente concernant l'équation de Dirac généralisée à laquelle doivent en principe satisfaire les fonctions d'onde. En effet, l'extension la plus immédiate de 1.92 est la suivante :

$$[\Gamma(\hat{p}) - 1] \Psi(p) = 0 \quad (1.93)$$

où cette fois \hat{p} est le vecteur unitaire du genre espace porté par p : $\hat{p} = p/\sqrt{t}$, $t = -p^2 > 0$. Mais puisque $\Gamma^2(\hat{p})\Psi(p) = \Gamma(\hat{p})\Psi(p) = \Psi(p)$ et que $\Gamma^2(\hat{p}) = (-1)^{2J}$, l'équation 1.93 ne peut être valable que si J est entier et ne peut donc être retenue pour les valeurs demi-entières du spin. Par exemple, dans le cas d'un électron, l'équation serait

9. Voir P. Moussa, R.Stora, loc. cit. ; voir aussi S. Weinberg, Phys. Rev. 133, B1318 (1964).

10. Et qui revient à 1.90 pour $J = 1/2$.

$$\left(\not{p} - \sqrt{t}\right) \Psi(p) = 0$$

d'où l'on déduirait

$$\left(\not{p} + \sqrt{t}\right) \left(\not{p} - \sqrt{t}\right) \Psi(p) = -2t\Psi(p) = 0$$

ce qui conduirait à la solution triviale (et inutile) $\Psi(p) = 0$.

Pour remédier à cette difficulté, il peut s'avérer très commode d'introduire, ainsi que l'a fait P. Kessler ¹¹, le nombre $\hat{1}$, dont les propriétés sont les suivantes :

$$\hat{1}^* = \hat{1}, \quad \hat{1}^2 = -1 \tag{1.94}$$

L'emploi de ce nombre évite celui des nombres complexes et permet d'effectuer simplement certains prolongements analytiques. En particulier, la "masse" de la particule virtuelle peut être définie par

$$\sqrt{p^2} = \hat{1} \sqrt{t} \tag{1.95}$$

et le vecteur unitaire du genre espace \hat{p} peut être transformé en un vecteur unitaire du genre temps par la substitution

$$\hat{p} \rightarrow \frac{p}{\sqrt{p^2}} = \frac{p}{\hat{1}\sqrt{t}} = \hat{p}' \tag{1.96}$$

On généralisera dès lors l'équation 1.92 au cas "genre espace- spin demi-entier" par

$$[\Gamma(\hat{p}') - 1] \Psi(p) = 0 \tag{1.97}$$

Par exemple, pour un électron ou un positron, on aura maintenant

$$\left(\not{p} - \hat{1}\sqrt{t}\right) U_\sigma([p]) = 0, \quad \left(\not{p} + \hat{1}\sqrt{t}\right) V_\sigma([p]) = 0$$

Notons également que si l'on transforme simultanément le vecteur unitaire du genre temps associé à p en un vecteur unitaire du genre espace par la substitution

$$n_0(p) \rightarrow n'_0(p) = \frac{n_0(p)}{\hat{1}} \tag{1.98}$$

la tétrade $(\hat{p}', n_1(p), n_2(p), n'_0(p))$ constitue cette fois une base orthonormée et directe de l'espace-temps, ayant \hat{p}' pour vecteur unitaire du genre temps.

Dans $SL(2, C)$, on peut représenter la transformation permettant d'échanger les rôles des vecteurs n_0 et n_3 d'une tétrade de référence par la matrice

$$a = \sqrt{\hat{1}} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.99}$$

qui est telle que

$$a\tau_0a = \frac{\tau_3}{\hat{1}}, \quad a\tau_3a = \frac{\tau_0}{\hat{1}}, \quad a\tau_ia = \tau_i \quad i = 1, 2 \tag{1.100}$$

11. P. Kessler : Nucl. Phys. B 15, 253 (1970). Voir aussi A. Jaccarini, Canadian Journ. of Phys. 51, 1304 (1973) ; Thèse d'Etat, Université Laval, Québec, Canada (1975).

Dès lors, la transformation qui permet d'amener la tétrade de référence sur celle associée à \hat{p}' définie ci-dessus pourra être représentée par la matrice

$$[p'] = [p] a \quad (1.101)$$

$[p]$ étant la tétrade de p , définie de la façon habituelle par

$$[p] \begin{matrix} n_\alpha \\ \sim \end{matrix} [p]^\dagger = n_\alpha(p) \quad , \quad n_3(p) = \hat{p} \quad (1.102)$$

L'avantage que l'on retire de ces définitions est qu'elles permettent de prolonger analytiquement les fonctions d'onde d'une particule du genre temps lorsque celle-ci devient du genre espace. Ceci peut être vérifié dans le cas très simple de l'électron, pour lequel les spineurs pour $p^2 < 0$ s'obtiennent à partir des spineurs pour $p^2 > 0$ par la transformation :

$$\{U_\sigma([p])\}_{p^2>0} \rightarrow \{U_\sigma([p'])\}_{p^2<0} \quad (1.103)$$

ces spineurs étant, l'un et l'autre, normalisés à l'unité.

1.5 Première application : la méthode d'hélicité généralisée

La méthode dont il sera question ici s'appuie sur le formalisme des couplages d'hélicité¹². Elle permet de clarifier grandement le calcul de certains processus élémentaires décrits par des diagrammes de Feynman du type "arbre". Elle conduit à une factorisation de la section efficace relative à un tel diagramme en divers *facteurs dynamiques* ou *taux de vertex*, dont chacun caractérise la dynamique d'un vertex particulier du diagramme. Plus précisément, elle fournit le moyen de définir sans ambiguïté des facteurs dynamiques, caractéristiques, soit de chaque vertex, soit de chaque échange de particule virtuelle dans ce diagramme, et d'exprimer directement la section efficace (différentielle) correspondante comme un produit, en général de nature tensorielle, de ces divers facteurs. Il en résulte une très grande clarification des formules, qui se prêtent ainsi à une meilleure interprétation physique.

1.5.1 Processus avec échange d'un électron du genre espace

Le processus envisagé est schématisé par le diagramme de la figure 1.7. En mettant à part les constantes de couplage et le dénominateur du propagateur de l'électron échangé, l'amplitude de transition correspondante s'écrit

$$T = \overline{X'} (\not{p} + m) X \quad (1.104)$$

m étant la masse de l'électron sur-couche; X et X' sont les amplitudes de vertex, de nature spinorielle, se rapportant respectivement au vertex "de gauche" et au vertex "de droite" du diagramme; $\overline{X} = X^\dagger \gamma_0$ est le spineur adjoint de X .

Décomposons tout d'abord le propagateur de l'électron suivant les fonctions d'onde de cet électron virtuel. On obtient :

$$\not{p} + m = \sum_\sigma \{u U_\sigma([p']) \overline{U}_\sigma([p']) + v V_\sigma([p]) \overline{V}_\sigma([p])\} \quad , \quad V = \gamma_5 U \quad (1.105)$$

où

12. Voir P. Kessler, loc. cit

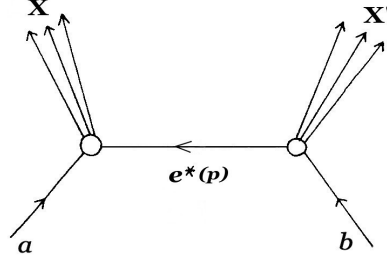


FIGURE 1.7 – Diagramme d'un processus avec échange d'un électron virtuel

$$u = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{m^*}\right), \quad v = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{m^*}\right), \quad m^* = \sqrt{p^2} = \hat{1}\sqrt{t}$$

les spineurs étant ici normalisés selon $\bar{U}_\sigma U'_\sigma = 2m^* \delta_{\sigma\sigma'}$

La tétrade $[p']$ peut être choisie arbitrairement, puisque la somme figurant dans 1.105 ne dépend pas de ce choix. Aussi, nous la prendrons comme étant la tétrade d'hélicité de p , définie relativement au vertex de gauche. Mais pour préserver la symétrie entre les deux vertex, nous exprimerons, en une deuxième étape, les spineurs adjoints \bar{U} et \bar{V} en fonction des spineurs adjoints \bar{U}' et \bar{V}' correspondant à la tétrade d'hélicité de p définie cette fois relativement au vertex de droite :

$$\bar{U}_\lambda = \sum_{\lambda'} r_{\lambda\lambda'}^* \bar{U}'_{\lambda'} \quad (1.106)$$

La matrice $r_{\lambda\lambda'}$ effectuant ce changement de tétrade représente, en fait, la transformation de Lorentz du petit groupe de p , amenant le plan du vertex de gauche sur le plan du vertex de droite ("rotation d'angle imaginaire" autour de p). Explicitement, on a (λ en indice de ligne, λ' en indice de colonne)

$$\{r_{\lambda\lambda'}(\theta)\} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

On obtient ainsi

$$\not{p} + m = \sum_{\lambda, \lambda'} r_{\lambda\lambda'}^* (u U_\lambda \bar{U}'_{\lambda'} + v V_\lambda \bar{V}'_{\lambda'}) \quad (1.108)$$

Une telle décomposition du propagateur permet d'exprimer l'amplitude de transition en fonction d'amplitudes d'hélicité relatives à chacun des deux vertex :

$$T = \sum_{\lambda, \lambda'} r_{\lambda\lambda'}^* \left\{ u J_\lambda J_{\lambda'}^* + v \bar{J}_\lambda \bar{J}_{\lambda'}^* \right\} \quad (1.109)$$

ces amplitudes étant définies par

$$J_\lambda = \bar{X}U_\lambda, \quad \bar{J}_\lambda = \bar{X}V_\lambda \quad (1.110)$$

pour le vertex de gauche et par

$$J'_{\lambda'} = \overline{X'}U'_{\lambda'} , \quad \overline{J'}_{\lambda'} = \overline{X'}V'_{\lambda'} \quad (1.111)$$

pour le vertex de droite. Supposons que les matrices densités de spin des particules externes du diagramme soient diagonales. Le *taux d'interaction* relatif au diagramme est alors donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{\chi, \chi'} \sum_{g, d} \left\{ u J_{\lambda} J'_{\lambda'}^* + v \overline{J}_{\lambda} \overline{J'}_{\lambda'}^* \right\} r_{\lambda\lambda'}^* \times r_{\chi\chi'} \left\{ u J_{\chi} J'_{\chi'} + v \overline{J}_{\chi} \overline{J'}_{\chi'} \right\} \\ &= \sum_{\lambda\chi} \sum_{\lambda'\chi'} r_{\lambda\lambda'}^* r_{\chi\chi'} \left\{ u^2 \left\{ \sum_g J_{\lambda} J_{\chi}^* \right\} \left\{ \sum_d J'_{\lambda'} J'_{\chi'} \right\} + v^2 \left\{ \sum_g \overline{J}_{\lambda} \overline{J}_{\chi} \right\} \left\{ \sum_d \overline{J'}_{\lambda'} \overline{J'}_{\chi'} \right\} \right. \\ &\quad \left. + uv \left\{ \sum_g J_{\lambda} \overline{J}_{\chi} \right\} \left\{ \sum_d J'_{\lambda'} \overline{J'}_{\chi'} \right\} + uv \left\{ \sum_g \overline{J}_{\lambda} J_{\chi} \right\} \left\{ \sum_d \overline{J'}_{\lambda'} J'_{\chi'} \right\} \right\} \quad (1.112) \end{aligned}$$

où les symboles \sum_g et \sum_d signifient que l'on somme sur les indices de spin des particules externes des vertex de gauche et de droite, respectivement.

Dans le diagramme de la figure 1.7, les lignes entrantes a et b représentent habituellement deux particules allant entrer en collision, d'impulsion et de spin p_a, s_a et p_b, s_b , respectivement. Nous choisirons pour leurs tétrades celles qui réalisent le couplage d'hélicité au vertex de gauche et au vertex de droite, respectivement. Quant aux lignes sortantes X et X' , elles peuvent a priori représenter des états finals quelconques résultant de la collision, mais nous supposerons en premier lieu que ces derniers sont des états à une particule chacun, d'impulsion et de spin p_X, s_X et $p_{X'}, s_{X'}$, respectivement, et nous leur attribuerons également leurs tétrades d'hélicité respectives au vertex où ils interviennent. Ainsi, on a, par exemple,

$$J_{\lambda} = \langle X | \overline{\eta}(0) | a \rangle U_{\lambda} \equiv [p_X]_h, \lambda_X | \overline{\eta}(0) | [p_a]_h, \lambda_a \rangle U_{\lambda} ([p]_h) \quad (1.113)$$

avec $\overline{\eta}(0) = \eta^{\dagger}(0)\gamma_0$ où $\eta(0)$ est un certain opérateur de champ, pris au point d'espace-temps $x = 0$, qui appartient à la même représentation du groupe de Lorentz que celle de l'électron, c'est-à-dire, celle de spin 1/2. Sous une transformation de Lorentz Λ représentée par la matrice (2×2) A de $SL(2, C)$, on a

$$\begin{aligned} U(A)\eta(x)U^{-1}(A) &= S^{-1}(A) \eta(\Lambda x) , \quad \text{soit } U(A)\eta(0)U^{-1}(A) = S^{-1}(A) \eta(0) \\ \text{et } U(A)\overline{\eta}(0)U^{-1}(A) &= \overline{\eta}(0) S(A) \end{aligned} \quad (1.114)$$

où, dans la représentation standard des matrices γ de Dirac¹³, la matrice 4×4 $S(A)$ a pour expression

$$S(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + A^{\dagger-1} & A - A^{\dagger-1} \\ A - A^{\dagger-1} & A + A^{\dagger-1} \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

Tenant compte de l'unitarité de $U(A)$ ($U^{-1}(A) = U^{\dagger}(A)$) et de

13. C'est-à-dire : $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 & 0 \\ 0 & -\tau_0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{pmatrix}$

$$S(A)U_\lambda([p]) = \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^{1/2}(R_A)U_{\lambda'}([Ap])$$

écrivons

$$J_\lambda = \langle X|U^{-1}(A)U(A)\bar{\eta}(0)U^{-1}(A)U(A)|a \rangle U_\lambda = \\ \left[\mathcal{D}_{\lambda'_X \lambda_X}^{s_X}(R_{AX}) \right]^* \mathcal{D}_{\lambda'_a \lambda_a}^{s_a}(R_{Aa}) \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^{1/2}(R_A) \langle [Ap_X], \lambda'_X | \bar{\eta}(0) | [Ap_a], \lambda'_a \rangle U_{\lambda'}([Ap])$$

Or, en couplage d'hélicité (dans la voie t),

$$R_{AX} = R_{Aa} = R_A, \quad \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^J(R_A) = \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\lambda\varphi}$$

d'où il résulte que

$$J_\lambda \equiv e^{i(\lambda_X - \lambda_a - \lambda)\varphi} \langle [Ap_X]_h, \lambda_X | \bar{\eta}(0) | [Ap_a]_h, \lambda_a \rangle U_\lambda([Ap]_h) \quad (1.116)$$

En considérant une rotation dans le bi-plan orthogonal au plan de vertex, $Ap_X = p_X$, $Ap_a = p_a$, $Ap = p$ et l'on trouve alors

$$J_\lambda \equiv e^{i(\lambda_X - \lambda_a - \lambda)\varphi} J_\lambda \quad (1.117)$$

ce qui implique la *conservation de l'hélicité* au vertex considéré :

$$\lambda = \lambda_X - \lambda_a \quad (1.118)$$

On en déduit par exemple que $\sum_g J_\lambda J_\lambda^* \propto \delta_{\lambda\lambda}$ et des propriétés similaires pour les autres grandeurs tensorielles apparaissant dans 1.112. Combinant 1.116 et 1.118 on en déduit

$$J_\lambda(p_X, p_a) = J_\lambda(Ap_X, Ap_a) \quad (1.119)$$

et que par conséquent cette amplitude est invariante relativiste et ne dépend donc que d'invariants relativistes du vertex de gauche ($\lambda_X, \lambda_a, t, W, m_a$, etc). Posons ensuite

$$I_\lambda = \sum_g |J_\lambda|^2, \quad I'_{\lambda'} = \sum_d |J'_{\lambda'}|^2, \quad \bar{I}_\lambda = \sum_g |\bar{J}_\lambda|^2, \quad \bar{I}'_{\lambda'} = \sum_d |\bar{J}'_{\lambda'}|^2 \\ K_\lambda = \sum_g J_\lambda J_\lambda^*, \quad K'_{\lambda'} = \sum_d \bar{J}'_{\lambda'}^* J'_{\lambda'}, \quad R_{\lambda\lambda'} = (r_{\lambda\lambda'})^2$$

Si l'on suppose de plus que la parité est conservée à chaque vertex, on a les relations¹⁴

$$I_{1/2} = I_{-1/2} = I, \quad I'_{1/2} = I'_{-1/2} = I', \quad \bar{I}_{1/2} = \bar{I}_{-1/2} = \bar{I}, \quad \bar{I}'_{1/2} = \bar{I}'_{-1/2} = \bar{I}' \\ K_{1/2} = -K_{-1/2} = K, \quad K'_{1/2} = -K'_{-1/2} = K'$$

D'où, tous calculs faits,

$$\mathcal{T} = 2 \{ u^2 I I' + v^2 \bar{I} \bar{I}' + 2uv \cos \theta \operatorname{Re}(K K'^*) \} \quad (1.120)$$

14. Voir P. Kessler, loc. cit.

C'est la formule de factorisation annoncée, où sont clairement séparés des "taux de vertex" tels I, I' etc, caractéristiques de la dynamique propre à chaque vertex, et le facteur $\cos \theta$ qui, lui, se rattache à la propagation de l'électron virtuel.

Ce résultat peut être étendu dans une certaine mesure au cas où les états finals X et X' comportent plus d'une particule, et dont les états quantiques se construisent dans l'espace produit tensoriel des espaces relatifs aux particules impliquées. Il suffit en effet de procéder à la décomposition de cet espace en représentations irréductibles du groupe de Poincaré. L'état $|X\rangle$ par exemple sera alors exprimé comme une superposition d'états ("ondes partielles") attachés chacun à une telle représentation irréductible, avec des nombres quantiques, masse, spin, hélicité, parité, etc, bien définis au regard du groupe de Poincaré, comme pour une particule unique, et auquel pourra donc être appliqué le résultat précédent. On pourra ensuite rattacher les taux de vertex obtenus aux sections efficaces d'électro-production virtuelle à chaque vertex.

Notons que, l'électron échangé étant du genre espace, le facteur $\cos \theta$ est en fait un cosinus hyperbolique. Son expression générale se trouve en calculant le produit scalaire des deux vecteurs d'hélicité

$$q_g = \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda^{1/2}(W^2, m_a^2, -t)} \left(p_a + \frac{p_a \cdot p}{t} p \right), \quad q_d = \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda^{1/2}(W'^2, m_b^2, -t)} \left(p_b + \frac{p_b \cdot p}{t} p \right) \quad (1.121)$$

soit

$$\cos \theta = q_a \cdot q_b = \frac{t(2s - t - W^2 - m_a^2 - W'^2 - m_b^2) - (W^2 - m_a^2)(W'^2 - m_b^2)}{\Lambda^{1/2}(W^2, m_a^2, -t)\Lambda^{1/2}(W'^2, m_b^2, -t)} \quad (1.122)$$

$$\text{avec } s = (p_a + p_b)^2, \quad m_a^2 = p_a^2, \quad m_b^2 = p_b^2, \quad W^2 = p_X^2, \quad W'^2 = p_{X'}^2, \quad t = -p^2$$

1.5.2 Processus avec échange d'un photon du genre espace

Appliquons maintenant le formalisme d'hélicité au diagramme de la figure 1.8 qui décrit la réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ dans laquelle un photon du genre espace est échangé.

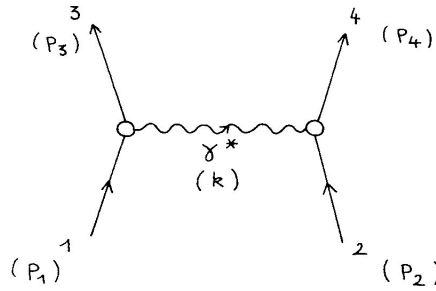


FIGURE 1.8 – Diagramme d'un processus avec échange d'un photon virtuel

Dans un premier temps, nous supposons que les deux lignes sortantes 3 et 4 de l'état final, représentent, tout comme les lignes entrantes 1 et 2 de l'état initial, des états à une seule particule réelle. Nous poserons

$$k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2, \quad k^2 = -t < 0, \quad p_1^2 = m^2, \quad p_2^2 = m'^2$$

$$p_3^2 = W^2, \quad p_4^2 = W'^2, \quad s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

L'élément de matrice de transition du diagramme s'écrit

$$T_{fi} = \frac{e^2}{t} J_\mu J'^\mu \quad (1.123)$$

e étant la valeur absolue de la charge de l'électron ; J_μ et J'_μ sont les vecteurs de courant respectifs du vertex de gauche $(1, 3, \gamma^*)$ et du vertex de droite $(2, 4, \gamma^*)$:

$$J_\mu = \langle [p_3], \sigma_3 | J_\mu(0) | [p_1], \sigma_1 \rangle, \quad J'_\mu = \langle [p_4], \sigma_4 | J_\mu(0) | [p_2], \sigma_2 \rangle \quad (1.124)$$

$J_\mu(0)$ étant l'opérateur courant électromagnétique au point d'espace-temps $x = 0$. Ici aussi, nous supposons que les particules initiales ne sont pas polarisées et qu'on ne cherche pas à mesurer les polarisations des particules finales. Le calcul de la section efficace du processus considéré passe par celui de

$$\mathcal{T} = \sum |T_{fi}|^2 = \frac{e^4}{t^2} I, \quad \text{avec } I = I_{\mu\nu} I'^{\mu\nu} \quad (1.125)$$

où le symbole \sum signifie que l'on effectue une sommation sur tous les indices de spin de toutes les particules entrantes et sortantes. Les tenseurs

$$I_{\mu\nu} = \sum_g J_\mu J_\nu^*, \quad I'^{\mu\nu} = \sum_d J'_\mu J'^\nu{}^* \quad (1.126)$$

relatifs au vertex de gauche et au vertex de droite respectivement sont des sommes sur les indices de spin des particules qui y sont impliquées. Ces sommes sont évidemment indépendantes du choix des tétrades choisies pour les particules¹⁵. Nous choisirons donc pour celles-ci les tétrades d'hélicité adéquates, lesquelles, comme on le sait déjà, apportent une grande simplification.

Compte tenu de l'équation de conservation du courant électromagnétique, les courants de vertex J_μ et J'_μ sont orthogonaux à l'impulsion k du photon virtuel. Ils peuvent donc être développés suivant une triade quelconque de vecteurs orthogonaux à k et formant avec ce vecteur une base de l'espace-temps. Pour des raisons évidentes de simplicité, nous choisirons pour ces triades les triades d'hélicité appropriées pour l'un et l'autre vertex. Pour le courant de gauche, on obtient ainsi

$$J_\mu = \sum_{\lambda=0_t, \pm 1} \eta_\lambda e^{(\lambda)}(k) J_\lambda, \quad \text{avec } \eta_{0_t} = +1, \quad \eta_\pm = -1$$

$$\text{et } J_\lambda = \langle [p_3]_h, \lambda_3 | e^{(\lambda)*} J_\mu(0) | [p_1]_h, \lambda_1 \rangle \quad (1.127)$$

et de façon similaire,

$$J'_\mu = \sum_{\lambda'=0_t, \pm 1} \eta_{\lambda'} e^{(\lambda')}(k) J'_{\lambda'}, \quad \text{avec } \eta_{0_t} = +1, \quad \eta_\pm = -1$$

$$\text{et } J'_{\lambda'} = \langle [p_4]_h, \lambda_4 | e^{(\lambda')*} J'_\mu(0) | [p_2]_h, \lambda_2 \rangle \quad (1.128)$$

Utilisant la même technique que celle du paragraphe précédent, on trouve facilement la loi de conservation de l'hélicité à chacun des vertex :

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_3, \quad \lambda' = \lambda_2 - \lambda_4 \quad (1.129)$$

15. Un changement de tétrade laisse invariant un projecteur tel que $\sum_\sigma |[p], \sigma \rangle \langle [p], \sigma|$.

et que, les amplitudes J_λ et $J'_{\lambda'}$ sont des invariants relativistes (voir 1.118, 1.119). Ecrivons ceux-ci sous la forme

$$J_\lambda = \delta_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_3} J_{\lambda_1 \lambda_3}, \quad J'_{\lambda'} = \delta_{\lambda', \lambda_2 - \lambda_4} J'_{\lambda_2 \lambda_4}$$

Le tenseur $I_{\mu\nu}$ dans 1.126 prend alors la forme

$$I_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} e_{\mu}^{(\lambda)}(k) e_{\nu}^{(\lambda)*}(k) F_{\lambda}, \quad \text{avec } F_{\lambda} = \sum_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_3} |J_{\lambda_1 \lambda_3}|^2$$

La *conservation de la parité* dans les interactions électromagnétiques, combinée avec la conservation de l'hélicité, implique la relation (voir Appendice B) $F_{-\lambda} = F_{\lambda}$. Posons alors

$$F_+ = F_- = T, \quad F_0 = L \quad (1.130)$$

puis utilisons la relation de fermeture des tétrades de k :

$$-\sum_{\lambda=\pm 1} e_{\mu}^{(\lambda)}(k) e_{\nu}^{(\lambda)*}(k) = g_{\mu\nu} - \hat{q}_{13\mu} \hat{q}_{13\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{t} \quad (1.131)$$

pour obtenir

$$I_{\mu\nu} = (T + L) \hat{q}_{13\mu} \hat{q}_{13\nu} - T \left(g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{t} \right) \quad (1.132)$$

Les grandeurs T et L sont les taux de vertex du vertex de gauche. Elles peuvent s'obtenir directement à partir de projections du tenseur 1.132 :

$$L = \hat{q}_{13\mu} I^{\mu\nu} \hat{q}_{13\nu}, \quad T = e_{\mu}^{(\pm)} I^{\mu\nu} e_{\nu}^{(\pm)}, \quad g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = L - 2T \quad (1.133)$$

Suivant l'interprétation des vecteurs d'hélicités de k comme fonctions d'onde du photon virtuel, et compte-tenu des relations précédentes, ces taux de vertex s'interprètent comme des taux d'interaction¹⁶ de la réaction virtuelle $\gamma^* + 1 \rightarrow 3$ avec un photon polarisé soit longitudinalement (pour L) soit transversalement (pour T).

Considérons ensuite le cas où les deux lignes sortantes 3 et 4 figurent des états quantiques comportant un nombre quelconque de particules. Le diagramme 1.8 représente alors, d'une façon générale, un processus à échange d'un photon du genre espace, avec deux vertex *inélastiques*.

Ecrivons la section efficace différentielle qui s'y rapporte sous la forme

$$d\sigma = \frac{1}{\Lambda^{1/2}(s, m^2, m'^2)} \frac{e^4}{t^2} \frac{I}{nn'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p_3 - p_1) d^4k \delta^{(4)}(k + p_2 - p_4) d\rho d\rho' \quad (1.134)$$

à partir de laquelle on obtient la section efficace différentielle usuelle en effectuant l'intégration sur k . Dans cette formule, n et n' sont les nombres d'états de spin respectifs des particules entrantes 1 et 2; I est défini par 1.125; $d\rho$ et $d\rho'$ désignent les éléments d'espace des phases de 3 et 4 respectivement :

$$d\rho = \prod_{i=1}^N \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 q_i^0}$$

16. C'est-à-dire, une somme, sur les états de polarisation des particules externes, du carré du module d'une amplitude de transition.

En intégrant sur l'ensemble des espaces de phases finals, on obtient

$$d\sigma = \frac{1}{\Lambda^{1/2}(s, m^2, m'^2)} \frac{e^4}{t^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{I}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}^{\mu\nu} \mathcal{I}'_{\mu\nu} \quad \text{avec} \\ \mathcal{I}_{\mu\nu} &= \frac{1}{n} \sum \int J_\mu J_\nu^* d\text{Lips}, \quad \mathcal{I}'_{\mu\nu} = \frac{1}{n'} \sum \int J'_\mu J'^*_\nu d\text{Lips}' \end{aligned} \quad (1.135)$$

dans ces expressions, le signe \sum représente une sommation sur tous les états de spin des particules initiales et finales du vertex considéré; $d\text{Lips}$ sont les éléments d'espace de phase incluant les facteurs de conservation de l'énergie-impulsion¹⁷. Compte tenu de la relation

$$d^4k = \frac{dW^2 dt dW'^2 d\psi}{4\Lambda^{1/2}(s, m^2, m'^2)} \quad (1.136)$$

où ψ est l'angle azimutal du photon échangé. En intégrant sur cet angle, il vient

$$\frac{d\sigma}{dW^2 dt dW'^2} = \frac{1}{64\pi^3} \frac{1}{\Lambda^{1/2}(s, m^2, m'^2)} \frac{e^4 \mathcal{I}}{t^2} \quad (1.137)$$

Il est facile de montrer que, l'état final à un vertex étant indifféremment à une ou plusieurs particules, les tenseurs 1.135 ont une structure similaire à celle de 1.132. On a en effet

$$\mathcal{I}_{\mu\nu} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda_1} \langle [p_1]_h, \lambda_1 | J_\mu(0) \mathcal{P} J_\nu(0) | [p_1]_h, \lambda_1 \rangle$$

où

$$\mathcal{P} = \int \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N} d\text{Lips} | [q_1], \sigma_1; [q_2], \sigma_2; \dots; [q_N], \sigma_N \rangle \langle [q_1], \sigma_1; [q_2], \sigma_2; \dots; [q_N], \sigma_N |$$

est le projecteur sur tous les états possibles du système 3. Comme il a déjà été suggéré au paragraphe précédent, ce projecteur peut être décomposé en une somme de projecteurs dont chacun correspond à une représentation irréductible du groupe de Poincaré, ce qui conduit à une décomposition du tenseur 1.135 en ondes partielles auxquelles on peut appliquer à chacune le traitement valable lorsque le système 3 est réduit à une seule particule. Aussi, peut-on écrire

$$\begin{aligned} n \mathcal{I}_{\mu\nu} &= (T + L) \hat{q}_{13\mu} \hat{q}_{13\nu} - T \left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{t} \right) \\ n' \mathcal{I}'_{\mu\nu} &= (T' + L') \hat{q}_{24\mu} \hat{q}_{24\nu} - T' \left(g_{\mu\nu} + \frac{k'_\mu k'_\nu}{t} \right) \end{aligned} \quad (1.138)$$

Effectuant le produit scalaire de ces deux tenseurs, on obtient

$$\begin{aligned} n n' \mathcal{I} &= (1 + \cosh^2 \chi) T T' + \sinh^2 \chi (T L' + L T') + \cosh^2 \chi L L' \\ &\quad \text{avec} \quad \cosh \chi = \hat{q}_{13} \cdot \hat{q}_{24} \end{aligned} \quad (1.139)$$

17. Lips signifiant *Lorentz Invariant Phase Space*.

χ étant le paramètre de la transformation de Lorentz amenant le plan du vertex de gauche (p_1, p_3, k) sur le plan du vertex de droite (p_2, p_4, k) , et dont l'expression se déduit de 1.122.

Envisageons maintenant la réaction de photoproduction virtuelle $1 + \gamma^* \rightarrow 3$, avec un photon polarisé soit transversalement, soit longitudinalement. L'amplitude de transition correspondante s'écrit

$$-e e_{\mu}^{(\lambda)*}(k) J^{\mu}$$

où J_{μ} est le courant du vertex de gauche et $\lambda = 0_t, \pm 1$. Les matrices de polarisation des particules des systèmes 1 et 3 étant supposées diagonales, la section efficace totale correspondant à ce processus est

$$\sigma_{\lambda} = \frac{e^2}{2(W^2 - m^2)} e_{\mu}^{(\lambda)*}(k) e_{\nu}^{(\lambda)}(k) \mathcal{I}^{\mu\nu} \quad (1.140)$$

où a été introduit un "facteur de flux" $1/(W^2 - m^2)$ conformément à la définition des sections efficaces virtuelles donnée par L.N. Hand¹⁸. Les sections efficaces "transversale" et "longitudinale" seront donc définies par

$$\sigma_T = \sigma_+ = \sigma_- = \frac{e^2}{2n(W^2 - m^2)} T, \quad \sigma_L = \sigma_0 = \frac{e^2}{2n(W^2 - m^2)} L \quad (1.141)$$

Les sections efficaces relatives au vertex de droite sont définies de façon similaire. A l'aide de ces grandeurs, 1.137 prend la forme

$$\frac{d\sigma}{dW^2 dt dW'^2} = \frac{(W^2 - m^2)(W'^2 - m'^2)}{16\pi^3 \Lambda^{1/2}(s, m^2, m'^2)} \frac{1}{t^2} \times \quad (1.142)$$

$$\{(1 + \cosh^2 \chi) \sigma_T \sigma'_T + \sinh^2 \chi (\sigma_T \sigma'_L + \sigma_L \sigma'_T) + \cosh^2 \chi \sigma_L \sigma'_L\}$$

Cette formule de factorisation de la section efficace est d'une très grande transparence physique. Elle est particulièrement bien adaptée pour effectuer de façon invariante des approximations de type "Williams-Weizsäcker"¹⁹.

Bien entendu, une démarche analogue à celle du paragraphe précédent aurait pu être utilisée ici pour aboutir à 1.142, en décomposant le numérateur du propagateur du photon suivant les fonctions d'onde d'hélicité de celui-ci :

$$g_{\mu\nu} = \sum_{m,n} e_{\mu}^{(m)}(k) r_{mm'}^{(1)*} e'_{\nu}{}^{(m')*}(k) \eta_m \eta_{m'}$$

Puisque les courants de vertex sont orthogonaux à k il suffit de ne considérer dans cette somme que les termes correspondant aux valeurs $0_t, \pm 1$ des hélicités ; $r_{mm'}^{(1)}$ est la matrice 3×3 représentant, pour un spin de valeur 1, la transformation de Lorentz $\hat{q}_{13} \rightarrow \hat{q}_{24}$:

$$r_{mm'}^{(1)} = e^{(m)}(k) \cdot e'^{(m')*}(k)$$

Le produit scalaire des deux courants s'écrit donc

$$J^{\mu} g_{\mu\nu} J'^{\nu} = \sum_{m,m'} \eta_m \eta_{m'} J_m r_{mm'}^{(1)*} J'_{m'}$$

18. Phys. Rev. **129**, 1834 (1963).

19. Voir notamment : C. Carimalo, G. Cochard, P. Kessler, J. Parisi, B. Roehner, Phys. Rev. D **10**, 1561 (1974) ; C. Carimalo, P. Kessler, J. Parisi, Phys. Rev. D **14**, 1819 (1976).

et le taux d'interaction est

$$I = \sum \eta_m \eta_{m'} \eta_n \eta_{n'} J_m J_n^* r_{mm'}^{(1)*} r_{nn'}^{(1)} J_{m'}^* J_n'$$

où la sommation est effectuée sur tous les états de polarisation des particules externes et sur celles du photon. La loi de conservation de l'hélicité à chaque vertex implique les contraintes $m = n$, $m' = n'$ et conduit à l'expression simplifiée de I :

$$I = \sum_{m,m'} F_m F_{m'} |d_{mm'}^{(1)}(\theta)|^2$$

où les $d_{mm'}^{(1)}(\theta)$ sont les éléments de la rotation d'angle imaginaire $\theta = i\chi$ autour du vecteur "charnière" k . Explicitement, avec $m = +1, 0, -1$ et $m' = +1, 0, -1$ en indices de ligne et de colonne respectivement et dans cet ordre des valeurs,

$$d_{mm'}^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1 - \cos \theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1 + \cos \theta}{2} \end{pmatrix}$$

En effectuant les multiplications matricielles et en tenant compte de la conservation de l'hélicité et de la parité à chaque vertex, on aboutit à la formule de factorisation 1.139, en prenant garde à la transformation des fonctions trigonométriques \cos et \sin en fonctions hyperboliques \cosh et \sinh .

A ce point, il est intéressant de noter que, d'après des principes généraux, le taux d'interaction $I(s, -t)$ (1.139) est a priori prolongeable analytiquement suivant les deux variables s et $-t$ ²⁰. Ainsi, en échangeant s et $-t$ dans 1.139 on obtient le taux d'interaction $I'(s, -t) = I(-t, s)$ du diagramme de la figure 1.9 décrivant la "voie s" de la réaction $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$, $\bar{3}$ et $\bar{2}$ étant les anti-particules de 3 et 2 respectivement, tandis que celui de la figure 1.8 en représente la "voie t". Ainsi,

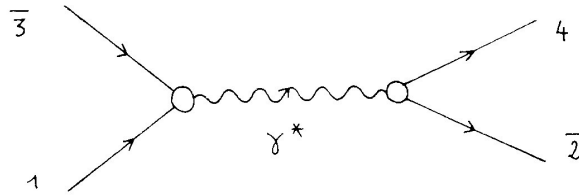


FIGURE 1.9 – Processus avec échange d'un photon du genre temps

$$I' = (1 + \cos^2 \theta) T T' + \sin^2 \theta (T L' + L T') + \cos^2 \theta L L'$$

où θ , qui est maintenant un angle réel, est simplement l'angle de diffusion des particules sortantes 2 et 4 dans le référentiel du centre de masse de la voie s. On a

$$\cos[\theta(s, -t)] = -\hat{q}_{1\bar{3}} \cdot \hat{q}_{\bar{2}4} = -\cosh[\theta(-t, s)]$$

20. Concernant les vertex impliquant des particules hadroniques, c'est sous réserve qu'on puisse réaliser un tel prolongement des facteurs de forme éventuellement présents.

$\cosh[\theta(-t, s)]$ étant défini par le second membre de 1.122.

La méthode d'hélicité directement appliquée au diagramme de la figure 1.9 confirme la validité du prolongement analytique. Ce résultat suggère d'uniformiser le traitement des diagrammes à échange d'une particule, que celle-ci soit du genre espace ou du genre temps. C'est précisément ce point de vue qui fut adopté par P. Kessler (loc. cit.) qui développa à cet effet une trigonométrie unifiée de l'espace-temps, utilisant abondamment le nombre $\hat{1}$.

1.5.3 Processus avec échange de deux photons virtuels du genre espace : exemple de double factorisation

Envisageons ensuite le processus décrit par le diagramme de la figure 1.10. Les états initiaux 1 et 2 d'impulsions respectives p_1 et p_2 du genre temps sont deux particules entrant en collision. Celle-ci s'effectue par un échange de deux photons virtuels γ_1 et γ_2 , d'impulsions respectives k_1 et k_2 , du genre espace. Les émissions de ces photons, le premier au vertex de gauche, le second au vertex de droite, sont accompagnées par la production simultanée des états finaux 3 et 4, d'impulsions du genre temps p_3 et p_4 respectivement, ces états pouvant être à une seule ou plusieurs particules. Les deux photons virtuels entrent ensuite en collision (virtuelle) donnant lieu à la production d'un état central K d'impulsion K du genre temps.

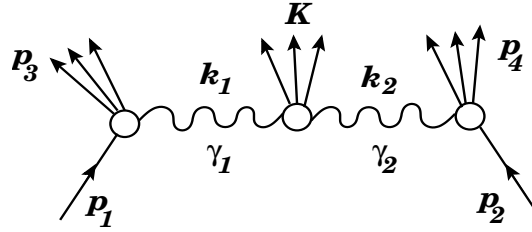


FIGURE 1.10 – Processus avec échange de deux photons virtuels du genre espace

Les notations sont les suivantes.

$$\begin{aligned} k_1 &= p_1 - p_3, \quad k_1^2 = -t_1 < 0; \quad k_2 = p_2 - p_4, \quad k_2^2 = -t_2 < 0 \\ p_1^2 &= m_1^2, \quad p_3^2 = W_3^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \quad p_4^2 = W_4^2 \\ P &= p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + K, \quad s = (p_1 + p_2)^2, \quad K^2 = M^2 \end{aligned}$$

Définissons ensuite les diverses tétrades d'hélicité qui vont intervenir.

☞ Vertex central

① Base attachée à K

$$T = \frac{K}{M}, \quad Z = \epsilon^{(0)}(K) = \frac{2M}{\Lambda_c^{1/2}} \left(k_1 - \frac{K \cdot k_1}{M^2} K \right)$$

$$\text{avec } \Lambda_c = \Lambda(M^2, -t_1, -t_2) = M^4 + 2M^2(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2)^2$$

Les impulsions des photons se décompose relativement à ces vecteurs comme :

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega_1 T + k Z, \quad k_2 = \omega_2 T - k Z \quad \text{avec} \\ \omega_1 &= \frac{M^2 - t_1 + t_2}{2M}, \quad \omega_2 = \frac{M^2 - t_2 + t_1}{2M}, \quad k = \frac{\Lambda_c^{1/2}}{2M} \end{aligned}$$

Le vecteur Y de la base est ensuite choisi comme étant :

$$Y_\mu = Y_\mu(K) = N \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu k_1^\rho q^\sigma$$

où q est l'impulsion de l'une quelconque des particules produite dans l'état final du vertex central ; N est le facteur de normalisation tel que

$$N^{-1} = M k \hat{q} \sin \theta$$

où θ est, dans le référentiel du centre de masse de K avec \vec{k}_1 selon l'axe des z , l'angle d'émission de ladite particule par rapport à ce dernier axe, et \hat{q} le module de sa tri-impulsion dans ce référentiel.

Finalement, le vecteur X de la base se déduit par la formule usuelle $X_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^\nu Y^\rho Z^\sigma$ et l'on définit les vecteurs de polarisations circulaires

$$\epsilon^{(\pm)} = \epsilon^{(\pm)}(K) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X \pm i Y)$$

② Base attachée à k_1

$$T_1 = \epsilon_1^{(0)} = \epsilon^{(0)}(k_1) = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda_c^{1/2}} \left(K + \frac{k_1 \cdot K}{t_1} k_1 \right), \quad Z_1 = \frac{k_1}{\sqrt{t_1}}$$

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad \text{soit } \epsilon_1^{(\pm)} = \epsilon^{(\pm)} \quad (1.143)$$

③ Base attachée à k_2

$$T_2 = \epsilon_2^{(0)} = \epsilon^{(0)}(k_2) = \frac{2\sqrt{t_2}}{\Lambda_c^{1/2}} \left(K + \frac{k_2 \cdot K}{t_2} k_2 \right), \quad Z_2 = \frac{k_2}{\sqrt{t_2}}, \quad \epsilon_2^{(\pm)} = \epsilon^{(\mp)} \quad (1.144)$$

☞ Vertex de gauche

On effectue un couplage d'hélicité entre p_1 , p_3 et k_1 , d'où les vecteurs de base suivants.

$$\epsilon'_1{}^{(0)} = \epsilon'_1{}^{(0)}(k_1) = T'_1 = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda_g^{1/2}} \left(p_1 + \frac{k_1 \cdot p_1}{t_1} k_1 \right), \quad Z'_1 = Z_1$$

avec $\Lambda_g = \Lambda(W_3^2, m_1^2, -t_1)$

$$Y'_{1\mu} = N_g \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu k_2^\rho k_1^\sigma, \quad X'_1 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_1'^\nu Y_1'^\rho Z_1'^\sigma \quad (1.145)$$

La disposition des tri-impulsions \vec{q} , \vec{k}_1 et \vec{p}_1 dans le référentiel du centre de masse du vertex central est indiquée à la figure 1.11. Le facteur de normalisation N_g est tel que

$$N_g^{-1} = M k \hat{q} \hat{p}_1 \sin \theta_1$$

où, dans ledit référentiel, θ_1 est l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{k}_1 , $\hat{p}_1 = |\vec{p}_1|$ et φ_1 est l'angle azimutal relatif entre \vec{p}_1 et \vec{q} ²¹. On note que Y'_1 s'exprime simplement comme

$$Y'_1 = -\sin \varphi_1 X + \cos \varphi_1 Y \quad (1.146)$$

Exprimons T'_1 dans la base T_1, X_1, Y_1, Z_1 . Nous poserons

21. Comme $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{k}_1$, on a aussi bien $\hat{p}_3 \sin \theta_3 = \hat{p}_1 \sin \theta$, $\varphi_3 = \varphi_1$.

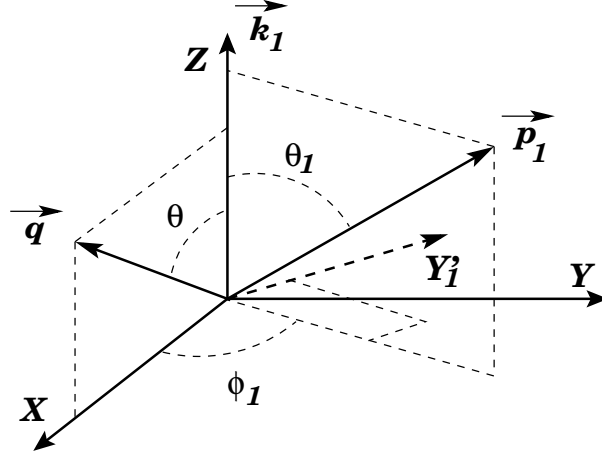


FIGURE 1.11 – Disposition des tri-impulsions dans le référentiel du centre de masse central

$$\cosh \alpha_1 = T'_1 \cdot T_1$$

Comme $(T'_1)^2 = 1$ et $T'_1 \cdot Z_1 = 0$, il vient

$$(T'_1 \cdot X_1)^2 + (T'_1 \cdot Y_1)^2 = (T'_1 \cdot T_1)^2 - 1 = \sinh^2 \alpha_1$$

Or, $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ et $(X_1 \text{ ou } Y_1) \cdot T'_1 = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda_g^{1/2}} (X \text{ ou } Y) \cdot p_1$. D'après la figure 1.11, ceci donne

$$(X \text{ ou } Y) \cdot T'_1 = -\frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda_g^{1/2}} \dot{p}_1 \sin \theta_1 (\cos \varphi_1 \text{ ou } \sin \varphi_1)$$

Par suite, comme $\sinh \alpha_1 = \sqrt{(T'_1 \cdot X_1)^2 + (T'_1 \cdot Y_1)^2}$, on obtient

$$\sinh \alpha_1 = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda_g^{1/2}} \dot{p}_1 \sin \theta_1 \quad (1.147)$$

et finalement,

$$T'_1 = \cosh \alpha_1 T_1 + \sinh \alpha_1 (\cos \varphi_1 X + \sin \varphi_1 Y) \quad (1.148)$$

Utilisant 1.145, 1.146 et 1.148, on en déduit aisément

$$X'_1 = \sinh \alpha_1 T_1 + \cosh \alpha_1 (\cos \varphi_1 X + \sin \varphi_1 Y) \quad (1.149)$$

Ces résultats peuvent être réexprimés sous la forme suivante

$$T'_1 = \cosh \alpha_1 T_1 + \epsilon^{(-)} e^{i\varphi_1} \frac{\sinh \alpha_1}{\sqrt{2}} - \epsilon^{(+)} e^{-i\varphi_1} \frac{\sinh \alpha_1}{\sqrt{2}} \quad (1.150)$$

$$\epsilon'^{(\pm)} = \mp \frac{\sinh \alpha_1}{\sqrt{2}} T_1 + \epsilon^{(-)} e^{i\varphi_1} \frac{1}{2} (1 \mp \cosh \alpha_1) + \epsilon^{(+)} e^{-i\varphi_1} \frac{1}{2} (1 \pm \cosh \alpha_1)$$

Vertex de droite

Procédant de façon similaire pour le vertex de droite tout en choisissant Y'_2 comme

$$Y'_2 = -(-\sin \varphi_2 X + \cos \varphi_2 Y) \quad (1.151)$$

et donc

$$X'_2 = \sinh \alpha_2 T_2 + \cosh \alpha_2 (\cos \varphi_2 X + \sin \varphi_2 Y) \quad (1.152)$$

on obtient

$$T'_2 = \cosh \alpha_2 T_2 + \epsilon^{(-)} e^{i\varphi_2} \frac{\sinh \alpha_2}{\sqrt{2}} - \epsilon^{(+)} e^{-i\varphi_2} \frac{\sinh \alpha_2}{\sqrt{2}} \quad (1.153)$$

$$\epsilon'_2{}^{(\pm)} = \mp \frac{\sinh \alpha_2}{\sqrt{2}} T_2 - \epsilon^{(-)} e^{i\varphi_2} \frac{1}{2} (1 \pm \cosh \alpha_2) - \epsilon^{(+)} e^{-i\varphi_2} \frac{1}{2} (1 \mp \cosh \alpha_2)$$

Dans ces formules, θ_2 , φ_2 et \hat{p}_2 sont, respectivement, l'angle orbital, l'angle azimutal et le module de \vec{p}_2 dans le référentiel du centre de masse central (avec \vec{k}_1 définissant l'axe des z , \vec{q} dans le plan (x, z)) et

$$\cosh \alpha_2 = T'_2 \cdot T_2, \quad \sinh \alpha_2 = \frac{2\sqrt{t_2}}{\Lambda_d^{1/2}} \hat{p}_2 \sin \theta_2 \quad (1.154)$$

L'amplitude de transition de la réaction considérée est de la forme

$$T_{fi} = \frac{e^4}{t_1 t_2} J_g^\mu T^{\mu\nu} J_d^\nu \quad (1.155)$$

où J_d^μ et J_d^ν sont les courants électromagnétiques caractéristiques des transitions $1 \rightarrow 3 + \gamma_1$ et $2 \rightarrow 4 + \gamma_2$ respectivement et $T^{\mu\nu}$ l'amplitude de la réaction $\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow K$. En supposant les particules externes non polarisées, le taux d'interaction correspondant est proportionnel à

$$\mathcal{I} = \mathcal{L}_{\mu\rho} F^{\mu\rho;\nu\sigma} \mathcal{R}_{\nu\sigma} \quad (1.156)$$

avec $\mathcal{L}^{\mu\rho} = \sum_g J_g^\mu J_g^{\rho*}$, $F^{\mu\rho;\nu\sigma} = \sum_c T^{\mu\nu} T^{\rho\sigma*}$, $\mathcal{R}^{\nu\sigma} = \sum_d J_d^\nu J_d^{\sigma*}$

où les diverses sommations portent sur tous les états de spin des particules externes respectivement impliquées. Dans \mathcal{I} , incorporons maintenant les relations de fermeture

$$\sum_m (-1)^m \epsilon_{1\mu}^{(m)} \epsilon_{1\rho}^{(m)*} = g_{\mu\rho} + \frac{k_{1\mu} k_{1\rho}}{t_1}, \quad \sum_n (-1)^n \epsilon_{2\nu}^{(n)} \epsilon_{2\sigma}^{(n)*} = g_{\nu\sigma} + \frac{k_{2\nu} k_{2\sigma}}{t_2}$$

dans lesquelles m et n , qui prennent les valeurs $0_t, +1, -1$, sont les indices d'hélicité respectifs de γ_1 et γ_2 , relatifs à leurs couplage d'hélicité *au vertex central*. Tenant compte du fait que, grâce à la conservation des courants électromagnétiques, les tenseurs de 1.156 sont orthogonaux, suivant leurs indices, soit à k_1 (vertex de gauche), soit à k_2 (vertex de droite), soit à k_1 et k_2 (vertex central), il vient

$$\mathcal{I} = \sum_{m, \bar{m}, n, \bar{n}} \mathcal{L}_{m\bar{m}} F_{m, \bar{m}; n, \bar{n}} \mathcal{R}_{n\bar{n}}, \quad \text{avec} \quad F_{m, \bar{m}; n, \bar{n}} = \epsilon_{1\mu}^{(m)} \epsilon_{1\rho}^{(\bar{m})*} F^{\mu\rho;\nu\sigma} \epsilon_{2\nu}^{(n)} \epsilon_{2\sigma}^{(\bar{n})*}$$

et $\mathcal{L}_{m\bar{m}} = (-1)^{m+\bar{m}} \epsilon_{1\mu}^{(m)*} \epsilon_{1\rho}^{(\bar{m})} \mathcal{L}^{\mu\rho}$, $\mathcal{R}_{n\bar{n}} = (-1)^{n+\bar{n}} \epsilon_{2\nu}^{(n)*} \epsilon_{2\sigma}^{(\bar{n})} \mathcal{R}^{\nu\sigma}$ (1.157)

Supposons maintenant que chacun des états finals 3 et 4 ou bien soit un état à une seule particule, ou bien corresponde à une onde partielle d'un état plus complexe, selon le procédé indiqué au paragraphe précédent. Les tenseurs des vertex de gauche (\mathcal{L}) et de droite (\mathcal{R}) sont alors de la forme

$$\mathcal{L}_{\mu\rho} = (\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}_1) T'_{1\mu} T'_{1\rho} - \mathcal{T}_1 \left(g_{\mu\rho} + \frac{k_{1\mu} k_{1\rho}}{t_1} \right), \quad \mathcal{R}_{\nu\sigma} = (\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_2) T'_{2\nu} T'_{2\sigma} - \mathcal{T}_2 \left(g_{\nu\sigma} + \frac{k_{2\nu} k_{2\sigma}}{t_2} \right)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{--} &= \mathcal{L}_{++} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{T}_1 (1 + \cosh^2 \alpha_1) + \mathcal{L}_1 \sinh^2 \alpha_1 \} \\ \mathcal{L}_{0+} &= -\mathcal{L}_{-0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}_1) \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_1 e^{i\varphi_1} \\ \mathcal{L}_{0-} &= -\mathcal{L}_{+0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}_1) \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_1 e^{-i\varphi_1} \\ \mathcal{L}_{+-} &= -\frac{1}{2} (\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}_1) \sinh^2 \alpha_1 e^{-2i\varphi_1}, \quad \mathcal{L}_{-+} = -\frac{1}{2} (\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}_1) \sinh^2 \alpha_1 e^{2i\varphi_1} \\ \mathcal{L}_{00} &= \mathcal{T}_1 \sinh^2 \alpha_1 + \mathcal{L}_1 \cosh^2 \alpha_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{--} &= \mathcal{R}_{++} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{T}_2 (1 + \cosh^2 \alpha_2) + \mathcal{L}_2 \sinh^2 \alpha_2 \} \\ \mathcal{R}_{0+} &= -\mathcal{R}_{-0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_2) \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_2 e^{-i\varphi_2} \\ \mathcal{R}_{0-} &= -\mathcal{R}_{+0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_2) \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_2 e^{i\varphi_2} \\ \mathcal{R}_{+-} &= -\frac{1}{2} (\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_2) \sinh^2 \alpha_2 e^{2i\varphi_2}, \quad \mathcal{R}_{-+} = -\frac{1}{2} (\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_2) \sinh^2 \alpha_2 e^{-2i\varphi_2} \\ \mathcal{R}_{00} &= \mathcal{T}_2 \sinh^2 \alpha_2 + \mathcal{L}_2 \cosh^2 \alpha_2 \end{aligned}$$

La somme exprimant \mathcal{I} dans 1.157 contient a priori $3^4 = 81$ termes. Cependant, tous ne sont pas indépendants. En effet, la conservation de la parité combinée avec celle de l'hélicité conduit aux relations

$$F_{-m-\bar{m}; -n-\bar{n}} = (-1)^{m+\bar{m}+n+\bar{n}} F_{m\bar{m}; n\bar{n}} \quad (1.158)$$

En outre, on a de façon évidente la propriété d'hermiticité

$$F_{m\bar{m}; n\bar{n}} = \{ F_{\bar{m}\bar{m}; \bar{n}\bar{n}} \}^* \quad (1.159)$$

On peut alors réorganiser ladite somme pour aboutir à une somme de 13 termes dont chacun présente une dépendance particulière vis-à-vis des angles azimutaux φ_1 et φ_2 . Avant d'écrire la formule correspondante, introduisons les notations suivantes.

$$\begin{aligned} \ell_{m\bar{m}} &= |\mathcal{L}_{m\bar{m}}|, \quad \ell_0 = \frac{\ell_{00}}{2\ell_{++}}, \quad \ell_1 = \frac{\ell_{0+}}{\ell_{++}}, \quad \ell_2 = \frac{\ell_{+-}}{\ell_{++}} \\ r_{n\bar{n}} &= |\mathcal{R}_{n\bar{n}}|, \quad r_0 = \frac{r_{00}}{2r_{++}}, \quad r_1 = \frac{r_{0+}}{r_{++}}, \quad r_2 = \frac{r_{+-}}{r_{++}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{I}}{2\mathcal{L}_{++}\mathcal{R}_{++}}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \varphi_a = -\varphi_1 \quad (1.160)$$

Dans le référentiel du centre de masse central, φ et φ_a représentent aussi bien les angles azimutaux respectifs de la particule 4 et de la particule choisie dans le système K , par rapport à celui de la particule 3. Une relation cinématique entre l'angle φ et son analogue Φ dans le référentiel du centre de masse global est donnée dans l'appendice C.

Avec ces notations, on a²²

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & F_1 - 2\ell_1 F_2 \cos \varphi_a - 2\ell_2 F_3 \cos 2\varphi_a + 2r_1 F_4 \cos(\varphi - \varphi_a) - 2r_2 F_5 \cos 2(\varphi - \varphi_a) \\ & - 2\ell_1 r_1 F_6 \cos \varphi + \ell_2 r_2 F_7 \cos 2\varphi - 2\ell_1 r_1 F_8 \cos(2\varphi_a - \varphi) + \ell_2 r_2 F_9 \cos 2(2\varphi_a - \varphi) \\ & - 2\ell_2 r_1 F_{10} \cos(\varphi + \varphi_a) + 2\ell_1 r_2 F_{11} \cos(2\varphi - \varphi_a) - 2\ell_2 r_1 F_{12} \cos(3\varphi_a - \varphi) \\ & + 2\ell_1 r_2 F_{13} \cos(3\varphi_a - 2\varphi) \end{aligned} \quad (1.161)$$

où les grandeurs F_i ($i = 1, \dots, 13$) sont des combinaisons linéaires d'éléments du tenseur d'hélicité associé au processus central $\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow K$ et sont données ci-après :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{++;++} + F_{++;--} + 2\ell_0 F_{00;++} + 2r_0 F_{++;00} + 2\ell_0 r_0 F_{00;00} \\ F_2 &= \text{Re} \{ F_{+0;++} - F_{0-;++} + 2r_0 F_{0+;00} \}, \quad F_3 = \text{Re} \{ F_{+-;++} \} + r_0 F_{+-;00} \\ F_4 &= \text{Re} \{ F_{++;+0} - F_{++;0-} + 2\ell_0 F_{00;+0} \}, \quad F_5 = \text{Re} \{ F_{++;+-} \} + \ell_0 F_{00;+-} \\ F_6 &= \text{Re} \{ F_{+0;+0} - F_{+0;0-} \}, \quad F_7 = F_{+-;+-}, \quad F_8 = \text{Re} \{ F_{+0;0+} - F_{+0;-0} \} \\ F_9 &= F_{+-;-+}, \quad F_{10} = \text{Re} \{ F_{+-;+0} \}, \quad F_{11} = \text{Re} \{ F_{+0;+-} \} \\ F_{12} &= \text{Re} \{ F_{+-;0+} \}, \quad F_{13} = \text{Re} \{ F_{0+;+-} \} \end{aligned} \quad (1.162)$$

La formule 1.161 est *exacte*, dans le sens où aucune approximation n'a été introduite pour l'établir. Ici encore, le procédé utilisé, la méthode d'hélicité, sépare clairement les grandeurs caractéristiques des différents vertex du diagramme, et par là même permet une meilleure interprétation physique des différents termes intervenant dans \mathcal{I} , contrairement à ce que pourrait donner une évaluation directe, non réfléchie, du produit tensoriel dans 1.156.

A ce propos, au regard des facteurs $1/t_1$ et $1/t_2$ dans 1.155, ceux-ci provenant des propagateurs des deux photons virtuels γ_1 et γ_2 respectivement, on doit s'attendre à ce que, de toutes les configurations cinématiques accessibles dans la réaction globale $1 + 2 \rightarrow 3 + K + 4$, celle pour laquelle les transferts t_1 et t_2 prennent leurs plus petites valeurs donne les plus forts taux de réaction et soit donc globalement dominante dans cette réaction. A condition que dans ce domaine $\sqrt{t_1}$ et $\sqrt{t_2}$ soient très petits vis-à-vis des diverses masses invariantes impliquées, les deux photons peuvent alors être considérés comme *quasi-réels*, et la réaction s'interprète alors comme un processus *quasi-réel* où les particules initiales 1 et 2 font office de simples *générateurs de photons quasi-réels*, photons que l'on fait ensuite entrer en collision pour produire l'état K . Cette possibilité de disposer virtuellement de collisions photon-photon, alors qu'il est très difficile de les réaliser avec des photons strictement réels, a été largement étudiée, et l'est encore, tant

22. On peut trouver la formule d'hélicité qui suit, ou des formes similaires, dans : C. E. Carlson, W. K. Tung, Phys. Rev. D4, 2873 (1971); R. W. Brown, I. J. Muzinich, Phys. Rev. D4, 1496 (1971); C. J. Brown, D. H. Lyth, Nucl. Phys. B53, 323 (1973); V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Medelin, V. G. Serbo, Phys. Rep. 15C, 181 (1975); C. Carimalo, P. Kessler, J. Parisi, Phys. Rev. D20, 1057 (1979); N. Arteaga, C. Carimalo, P. Kessler, S. Ong, O. Panella, Phys. Rev. 52, 4920 (1995).

théoriquement qu'expérimentalement²³. Sur ces sujets, nous renvoyons le lecteur à la littérature spécialisée²⁴. Bien entendu, dans ledit domaine des *petits transferts*, on est amené à effectuer des approximations appropriées de \mathcal{I} que l'utilisation de la formule d'hélicité 1.161 permet de bien contrôler. De ces approximations émerge une formule très simple, "lumineuse" pourrait-on dire, exprimant la section efficace différentielle par une *double factorisation*, à la *Williams-Weizsäcker* :

$$d\sigma_{1+2\rightarrow 3+K+4} \approx \mathcal{P}_1(x_1)dx_1 d\sigma_c \mathcal{P}_2(x_2)dx_2 \quad (1.163)$$

où $d\sigma_c$ est la section efficace différentielle de la réaction $\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow K$ avec des photons, *réels* cette fois²⁵, et $\mathcal{P}_1(x_1)$ et $\mathcal{P}_2(x_2)$ sont les *spectres* des photons quasi-réels issus respectivement du vertex de gauche et du vertex de droite et transportant la proportion x_1 ou x_2 de l'énergie de la *particule mère* 1 ou 2, respectivement. Ces spectres caractérisent à la fois le processus de production du photon au vertex considéré au moyen des taux de vertex \mathcal{T} et \mathcal{L} , et sa propagation depuis le plan dudit vertex à celui du vertex central par l'intermédiaire des fonctions hyperboliques de α_1 ou de α_2 , selon le cas²⁶.

23. Les travaux théoriques précurseurs sur les interactions photon-photon sont dûs à divers auteurs : F. Low, Phys. Rev. 120 (1960) 582; F. Calogero, C. Zemach, Phys. Rev. 120 (1960) 1860; P. Kessler et collaborateurs : C.R. Acad. Sc., Paris 269B, 113 (1969); Phys. Rev. D3, 1569 (1971); Phys. Rev. D4, 2927 (1971); S. Brodsky, T. Kinoshita, H. Terazawa, Phys. Rev. Lett. 25, 972 (1970); Phys. Rev. D4, 1532 (1971); V. E. Balakin, V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, Zh. Exp. Teor. Fiz. Pis'ma 11, 559 (1970) - JEPT Lett. 11, 388 (1970).

24. Sur un projet futur de collisionneur à photons, voir : "TESLA, The Superconducting Electron Positron Linear Collider with an Integrated X-Ray Laser Laboratory", Technical Design Report, Part VI : Appendices, Chapter 1 : Photon Collider at TESLA, DESY-2001-011, ECFA-2001-209 March TESLA-2001-23, TESLA-FEL-2001-05, Mars 2001; disponible via : http://tesla.desy.de/new_pages/TDR_CD/PartVI/chapter1.pdf.

25. C'est-à-dire, dans laquelle on pose $t_1 = t_2 = 0$.

26. Un premier historique du développement de l'approximation du spectre de photons équivalent, dite aussi approximation de Williams-Weizsäcker et dont on peut faire remonter l'origine dans deux articles de N. Bohr (Phil. Mag. 5, p.10 (1913); 30, p.581 (1915)), fut présenté par P. Kessler au 1er colloque international sur les collisions photon-photon qui se tint au Collège de France à Paris en 1973, et dont les comptes-rendus furent publiés dans le supplément au Journal de Physique : Tome 35, Fasc. 3 C2 (1974); voir p.97.

1.6 Appendice A : transformation de Lorentz pure $T \rightarrow T'$

1.6.1 Formule générale

Par définition, la transformation de Lorentz pure $\Lambda_{T \rightarrow T'}$ appliquée à la base d'espace-temps (T, X, Y, Z) transforme celle-ci en la base (T', X', Y', Z') telle que

$$T' = \cosh \chi T + \sinh \chi Z, \quad Z' = \sinh \chi T + \cosh \chi Z, \quad X' = X, \quad Y' = Y \quad (1.164)$$

χ étant la *rapidité* de cette transformation. La méthode la plus simple pour obtenir ses éléments de matrice est sans doute la suivante. Pour simplifier l'écriture, notons-les $\Lambda_{\mu\nu}$ et posons $c = \cosh \chi = T \cdot T'$, $s = \sinh \chi$. En utilisant la relation de fermeture

$$g_{\rho\nu} = T_\rho T_\nu - Z_\rho Z_\nu - X_\rho X_\nu - Y_\rho Y_\nu$$

écrivons²⁷

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} &= \Lambda_\rho^\nu g_{\rho\mu} = \Lambda_\mu^\rho (T_\rho T_\nu - Z_\rho Z_\nu - X_\rho X_\nu - Y_\rho Y_\nu) = T'_\mu T_\nu - Z'_\mu Z_\nu - X_\mu X_\nu - Y_\mu Y_\nu \\ &= T'_\mu T_\nu - Z'_\mu Z_\nu + g_{\mu\nu} - T_\mu T_\nu + Z_\mu Z_\nu = g_{\mu\nu} + (T' - T)_\mu T_\nu - (Z' - Z)_\mu Z_\nu \end{aligned}$$

En remarquant que

$$Z = \frac{1}{s} (T' - cT) \quad \text{et} \quad Z' = \frac{1}{s} (-T + cT'), \quad \text{donc} \quad Z' - Z = s \frac{T' + T}{c + 1}$$

il vient

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + (T' - T)_\mu T_\nu - \frac{(T' + T)_\mu}{c + 1} (T' - cT)_\nu$$

En développant et en regroupant des termes, on arrive aisément au résultat :

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{T_\mu}{1 + c} (T_\nu + T'_\nu) + \frac{T'_\mu}{1 + c} \{(2c + 1)T_\nu - T'_\nu\} \quad (1.165)$$

Cette formule permet d'obtenir l'expression du transformé d'un vecteur W , connaissant les projections de ce dernier sur T et T' :

$$\Lambda_{T \rightarrow T'}(W) = W' = W - T \frac{W \cdot T + W \cdot T'}{T \cdot T' + 1} + T' \frac{W \cdot T(2T \cdot T' + 1) - W \cdot T'}{T \cdot T' + 1} \quad (1.166)$$

A l'aide de 1.165, on vérifie facilement la propriété de covariance d'une transformation de Lorentz pure. En effet, pour une transformation de Lorentz quelconque Λ , on trouve

$$\Lambda \Lambda_{T \rightarrow T'} \Lambda^{-1} = \Lambda_{\Lambda T \rightarrow \Lambda T'} \quad (1.167)$$

On note que pour un vecteur W orthogonal à T , on a

$$\Lambda_{T \rightarrow T'}(W) = W - \frac{W \cdot T'}{T \cdot T' + 1} (T + T') \quad (1.168)$$

et que si W est aussi orthogonal à T' , alors il est conservé dans la transformation, ce qui, bien entendu, provient du fait que la transformation laisse invariant le bi-plan orthogonal au bi-plan formé par les deux vecteurs T et T' .

²⁷. On notera ici que ce procédé permet d'exprimer les éléments de matrice d'une transformation de Lorentz quelconque comme $\Lambda_{\mu\nu} = T'_\mu T_\nu - Z'_\mu Z_\nu - X'_\mu X_\nu - Y'_\mu Y_\nu$.

1.6.2 Cas du vertex de la figure 1.2

Appliquons la formule 1.166 pour montrer que dans la transformation de Lorentz pure $\Lambda_{\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1}$, où $p = p_1 + p_2$, l'impulsion relative unitaire \hat{q}_{12} de p_1 et p_2 est changée en vecteur d'hélicité $h(p_1, p)$ de p_1 . Comme $p \cdot q_{12} = 0$, on a

$$\Lambda_{\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1}(q_{12}) = q' = q_{12} - \frac{p_1 \cdot q_{12}}{\frac{p_1 \cdot p}{\sqrt{s}} + m_1} \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p}{\sqrt{s}} \right)$$

soit, en explicitant q_{12}

$$q' = \frac{m_1}{\sqrt{s}} \left(-p + \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} p_1 \right)$$

D'où

$$\Lambda_{\hat{p} \rightarrow \hat{p}_1}(\hat{q}_{12}) = \frac{2\sqrt{s}}{\Lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} q' = \frac{2m_1}{\Lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} \left(-p + \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} p_1 \right) = h(p_1, p) \quad (1.169)$$

qui est le résultat annoncé.

1.6.3 Cas du vertex de la figure 1.3

Ici, l'impulsion relative est donnée par 1.57. Nous voulons montrer que dans la transformation $\Lambda_{\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_1}$, \hat{p} devient le vecteur d'hélicité $h(p_1, p)$ de p_1 . Notons tout d'abord les relations utiles

$$q_{12}^2 = p_1 \cdot q_{12} = m_1^2 + \frac{(p \cdot p_1)^2}{t} = \frac{\Lambda(m_1^2, m_2^2, -t)}{4t},$$

Compte tenu de $p \cdot q_{12} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda_{\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_1}(p) &= p' = p - \frac{p \cdot \hat{p}_1}{1 + \hat{p}_1 \cdot \hat{q}_{12}} (\hat{p}_1 + \hat{q}_{12}) = p - \frac{p \cdot p_1}{m_1 + \sqrt{q_{12}^2}} \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{1}{\sqrt{q_{12}^2}} (p_1 + \frac{p_1 \cdot p}{t} p) \right) \\ &= p \left(1 - \frac{(p_1 \cdot p)^2}{t \sqrt{q_{12}^2} (m_1 + \sqrt{q_{12}^2})} \right) - p_1 \frac{p_1 \cdot p}{m_1 \sqrt{q_{12}^2}} = \frac{m_1}{\sqrt{q_{12}^2}} \left(p - \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} p_1 \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\Lambda_{\hat{q}_{12} \rightarrow \hat{p}_1}(\hat{q}) = \frac{2m_1}{\Lambda^{1/2}(m_1^2, m_2^2, -t)} \left(p - \frac{p_1 \cdot p}{m_1^2} p_1 \right) = h(p_1, p) \quad (1.170)$$

ce qui établit le résultat.

1.6.4 Cas du vertex 1.2 avec deux lignes entrantes virtuelles du genre espace

Il reste à considérer le cas où au vertex 1.2 les impulsions entrantes p_1 et p_2 sont du genre espace ($p_1^2 = -t < 0$, $p_2^2 = -t' < 0$), tandis que leur somme $p = p_1 + p_2$ est du genre temps futur ($p^2 = s > 0$). L'impulsion relative q_{12} et h_1 étant définis par 1.77 et 1.79 respectivement. On a

$$h_1 \cdot p = \frac{\Lambda^{1/2}}{2\sqrt{t}}, \quad h_1 \cdot q_{12} = -\frac{p_1 \cdot p \Lambda^{1/2}}{s \cdot 2\sqrt{t}}, \quad \frac{(p \cdot p_1)^2}{t} = \frac{\Lambda}{4t} - s, \quad \text{avec } \Lambda = \Lambda(s, -t, -t')$$

Calculons

$$q' = \Lambda_{\hat{p} \rightarrow h_1}(q_{12}) = q_{12} - \frac{q_{12} \cdot h_1}{1 + \hat{p} \cdot h_1} (h_1 + \hat{p}) = p_1 - \frac{p \cdot p_1}{s} p + \frac{p \cdot p_1}{s} \frac{\Lambda^{1/2}}{2\sqrt{t}} \frac{1}{1 + \frac{\Lambda^{1/2}}{2\sqrt{st}}} \times$$

$$\left\{ \frac{p}{\sqrt{s}} + \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda^{1/2}} \left(p + \frac{p \cdot p_1}{t} p_1 \right) \right\} = p_1 \left\{ 1 + \frac{(p \cdot p_1)^2}{ts} \frac{1}{1 + \frac{\Lambda^{1/2}}{2\sqrt{st}}} \right\} = p_1 \frac{\Lambda^{1/2}}{2\sqrt{st}}$$

On a donc bien le résultat

$$\Lambda_{\hat{p} \rightarrow h_1}(\hat{q}_{12}) = \hat{p}_1 \tag{1.171}$$

1.7 Appendice B : conservation de la parité à un vertex électromagnétique

L'opération de parité donne lieu à la loi de transformation suivante des états :

$$U(\pi)|[p_i]_h, \lambda_1 \rangle = \eta_i \mathcal{D}_{\lambda'_i \lambda_i}^{s_i}(RY)|[p_i]_h, \lambda'_i \rangle, \quad \text{avec } \underline{p}_i = (p_i^0, -\vec{p}_i) \quad (1.172)$$

$$\text{et } RY = [\underline{p}_i]_h^\dagger [p_i] = [\underline{k}]_h^\dagger [k]_h$$

où R est une rotation d'angle φ autour de n_3 ; η_i est la parité intrinsèque de la particule (i) ; Y est la rotation d'angle π autour de n_2 . On note la relation :

$$\mathcal{D}_{\lambda' \lambda}^s(RY) = (-1)^{s+\lambda} e^{i\lambda\varphi} \delta_{\lambda', -\lambda}$$

Par conservation de la parité dans les interactions électromagnétiques, on a

$$\pi J_\mu(0) = U(\pi) J_\mu(0) U^{-1}(\pi), \quad \text{avec } \pi J_0(0) = J_0(0), \quad \vec{\pi J}(0) = -\vec{J}(0) \quad (1.173)$$

Ecrivons :

$$J_\lambda = \langle [p_3]_h, \lambda_3 | e_\mu^{(\lambda)*}(k) J^\mu(0) | [p_1]_h, \lambda_1 \rangle = \langle [p_3]_h, -\lambda_3 | e_\mu^{(\lambda)*}(k) \pi J^\mu(0) | [p_1]_h, -\lambda_1 \rangle \eta$$

$$\text{avec } \eta = (-1)^{s_1+s_3+\lambda_1+\lambda_3} \eta_1 \eta_3 e^{i(\lambda_3-\lambda_1)\varphi}$$

Revenons ensuite, par application de $[\underline{k}]_h^{-1}$, au "référentiel de Breit" du vertex de gauche, dans lequel on a

$$\vec{q}_{13} = \vec{0}, \quad \hat{k} = n_3, \quad e^{(\pm)}(k) = e^{(\pm)}, \quad p_1 = \tilde{p}_1, \quad p_3 = \tilde{p}_3$$

En tenant compte de la relation

$$U(\pi) U(A) U^{-1}(\pi) = U(A^{\dagger-1})$$

il vient

$$J_\lambda = \eta \langle [\tilde{p}_3]_h, -\lambda_3 | \left([\underline{k}]_h^\dagger e_\mu^{(\lambda*)(k)} \right) \pi J^\mu(0) | [\tilde{p}_1]_h, -\lambda_1 \rangle$$

Or, on a

$$\left([\underline{k}]_h^\dagger e_\mu^{(\lambda*)(k)} \right) = RY e^{(\lambda)} = e^{i\varphi\lambda} e^{(-\lambda)} \quad \text{et} \quad e_\mu^{(\lambda)*} J^\mu(0) = (-1)^\lambda e_\mu^{(-\lambda)} J^\mu(0)$$

On obtient donc

$$J_{\lambda_1 \lambda_3} = (-1)^{s_1+s_3+\lambda_1+\lambda_3+\lambda} \eta_1 \eta_3 J_{-\lambda_1, -\lambda_3}$$

et par suite

$$|J_{\lambda_1 \lambda_3}| = |J_{-\lambda_1, -\lambda_3}| \quad (1.174)$$

d'où résulte la relation $F_+ = F_-$ dans 1.130.

1.8 Appendice C : Relation entre l'angle φ (1.160) et son homologue Φ dans le référentiel du centre de masse global

Définissons la base associée au référentiel du centre de masse global (c'est-à-dire, celui du système des deux particules 1 et 2) de la façon suivante :

$$T_0 = \frac{P}{\sqrt{s}}, \quad Z_0 = \frac{2\sqrt{s}}{\Lambda_0^{1/2}} \left(p_1 - \frac{P \cdot p_1}{s} P \right), \quad \text{avec } \Lambda_0 = \Lambda(s, m_1^2, m_2^2),$$

$$Y_{0\mu} = -N_0 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu p_3^\rho p_1^\sigma, \quad \text{avec } N_0 = \frac{2}{\Lambda_0^{1/2} p_3^\circ \sin \theta_3^\circ}, \quad X_{0\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_0^\nu Y_0^\rho Z_0^\sigma$$

Dans ce référentiel, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ est selon l'axe des z, \vec{p}_3 , de module p_3° , est dans le plan (x, z) et a pour angle orbital θ_3° . L'axe des y correspondant est donc perpendiculaire au plan des deux tri-vecteurs \vec{p}_1 et \vec{p}_3 . Explicitement, les composantes de Y_0 dans ce référentiel sont

$$Y_0 = \left(0, \frac{\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3}{|\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3|} \right) = (0, 0, 1, 0)$$

Définissons ensuite la base du référentiel du centre de masse central comme

$$T_c = \frac{K}{M}, \quad Z_c = \frac{2}{\Lambda_c^{1/2}} \left(k_1 - \frac{K \cdot k_1}{M^2} K \right), \quad Y_{c\mu} = -N_c \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu p_1^\rho k_1^\sigma, \quad \text{avec } N_c = \frac{2}{\Lambda_c^{1/2} p_1^c \sin \theta_1^c}$$

$$X_{c\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_c^\nu Y_c^\rho Z_c^\sigma$$

Dans ce second référentiel, $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ est selon l'axe des z ; les deux tri-vecteurs \vec{p}_1 et \vec{p}_3 sont dans le plan (x, z) . Leurs modules et angles orbitaux sont p_1^c, θ_1^c et p_3^c, θ_3^c , respectivement, et l'on a bien sûr (composantes selon l'axe des x)

$$p_1^c \sin \theta_1^c = p_3^c \sin \theta_3^c$$

Ici, l'axe des y correspondant à ce référentiel est perpendiculaire au plan formé par les deux tri-vecteurs \vec{p}_1 et \vec{p}_3 .

Dans le premier référentiel, le vecteur p_4 a pour composantes

$$(E_4^\circ, p_4^\circ \sin \theta_4^\circ \cos \Phi, p_4^\circ \sin \theta_4^\circ \sin \Phi, p_4^\circ \cos \theta_4^\circ)_\circ$$

tandis que ses composantes dans le second référentiel sont ²⁸ :

$$(E_4^c, p_4^c \sin \theta_4^c \cos \varphi, p_4^c \sin \theta_4^c \sin \varphi, p_4^c \cos \theta_4^c)_c$$

Ecrivons alors ²⁹

$$Y^c \cdot p_4 = -p_4^c \sin \theta_4^c \sin \varphi = -N_c \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu p_1^\rho k_1^\sigma p_4^\mu$$

Mais comme $k_1 = p_1 - p_3$ et $K = P - p_3 - p_4$, on peut faire les substitutions

²⁸. A noter que $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est aussi bien l'angle azimutal relatif entre 4 et 1.

²⁹. Ceci équivaut au calcul d'un 4-volume.

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu p_1^\rho k_1^\sigma p_4^\mu \equiv -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu p_1^\rho p_3^\sigma p_4^\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu p_3^\rho p_1^\sigma p_4^\mu = -N_0^{-1} Y_0 \cdot p_4 = N_0^{-1} p_4^\circ \sin \theta_4^\circ \sin \Phi$$

D'où la relation

$$\sin \varphi = \sin \Phi \frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Lambda_c^{1/2}} \kappa, \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{p_3^\circ \sin \theta_3^\circ p_4^\circ \sin \theta_4^\circ}{p_3^c \sin \theta_3^c p_4^c \sin \theta_4^c} = \frac{p_3^\circ \sin \theta_3^\circ p_4^\circ \sin \theta_4^\circ}{p_1^c \sin \theta_1^c p_2^c \sin \theta_2^c} \quad (1.175)$$

entre φ et Φ qui paraît donc un peu compliquée dans le cas général. Elle se simplifie énormément dans la configuration où les angles d'émission respectifs θ_3° et θ_4° des particules 3 et 4 sont très petits, où les particules externes 1, 2, 3 et 4 sont ultra-relativistes (énergie \gg masse), et où les photons γ_1 et γ_2 sont alors quasi-réels. Dans ce cas, à des termes du second ordre près suivant ces faibles angles d'émission et les faibles rapports masse/énergie, on peut faire les approximations suivantes.

Tout d'abord, on a $E_1^\circ \approx \sqrt{s}/2$, $E_2^\circ \approx \sqrt{s}/2$, $\Lambda_0^{1/2} \approx s$, $\Lambda_c^{1/2} \approx M^2$, puis

$$\begin{aligned} M^2 &= (P - p_3 - p_4)^2 = s - 2\sqrt{s}(E_3^\circ + E_4^\circ) + 2p_3 \cdot p_4 \approx s - 2\sqrt{s}(E_3^\circ + E_4^\circ) + 4E_3^\circ E_4^\circ \\ &= 4(E_1^\circ - E_3^\circ)(E_2^\circ - E_4^\circ) = 4\omega_1^\circ \omega_2^\circ \end{aligned}$$

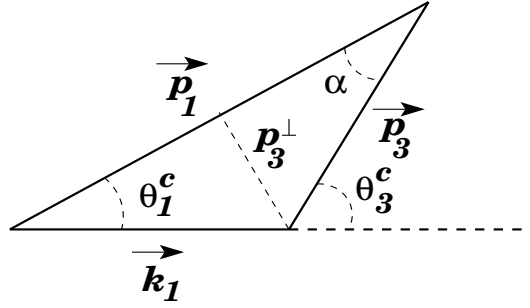


FIGURE 1.12 – Tri-impulsions dans le référentiel du centre de masse central

où ω_1° et ω_2° sont les énergies respectives des photons γ_1 et γ_2 dans le référentiel du centre de masse global. En outre, d'après la figure 1.12 représentant les tri-impulsions dans le référentiel du centre de masse central, on a

$$k_1^c \sin \theta_1^c = p_3^c \sin \alpha = p_3^\perp$$

p_3^\perp étant la projection de la tri-impulsion de la particule 3 perpendiculairement à la direction de propagation de la particule 1. A des termes du second ordre près suivant les angles θ , cette impulsion transversale se conserve dans le passage d'un référentiel à l'autre : $p_3^\perp \approx p_3^\circ \sin \theta_3^\circ (\approx E_3^\circ \theta_3^\circ)$. On a de même

$$k_2^c \sin \theta_2^c = p_4^c \sin \alpha' = p_4^\perp \approx p_4^\circ \sin \theta_4^\circ (\approx E_4^\circ \theta_4^\circ)$$

D'où

$$\kappa \approx \frac{k_1^c \sin \theta_1^c k_2^c \sin \theta_2^c}{p_1^c \sin \theta_1^c p_2^c \sin \theta_2^c} \approx \frac{M^2}{4E_1^c E_2^c}$$

Or,

$$K \cdot p_1 = ME_1^c = p_1 \cdot (P - p_3 - p_4) \approx p_1 \cdot (P - p_4) \approx 2E_1^\circ (E_2^\circ - E_4^\circ) = 2E_1^\circ \omega_2^\circ$$

$$\text{soit } E_1^c \approx E_1^\circ \sqrt{\frac{\omega_2^\circ}{\omega_1^\circ}}$$

Symétriquement, on a

$$E_1^c \approx E_1^\circ \sqrt{\frac{\omega_1^\circ}{\omega_2^\circ}}, \text{ et donc } E_1^c E_2^c \approx E_1^\circ E_2^\circ \approx s/4$$

On aboutit ainsi à

$$\frac{\Lambda_0^{1/2}}{\Lambda_c^{1/2}} \kappa \approx \frac{s}{M^2} \kappa \approx 1$$

Dans le contexte de cette approximation, la relation entre φ et Φ se simplifie donc de façon spectaculaire :

$$\sin \varphi \approx \sin \Phi, \text{ soit } \varphi \approx \Phi$$

La relation *exacte* entre φ_a et son équivalent Φ_a dans le référentiel du centre de masse global est déjà moins “simple” que 1.175. Pourtant, dans la configuration précédente des petits angles d'émission, on montre que l'on a aussi, au même ordre d'approximation :

$$\varphi_a \approx \Phi_a$$

résultat d'ailleurs prévisible puisque, comme il a été suggéré plus haut, à l'extrême limite des angles d'émission nuls des particules 3 et 4, le passage d'un référentiel à l'autre s'effectue suivant un même axe et qu'alors toutes les composantes des vecteurs qui sont transversales à cet axe restent inchangées.

Pour l'étude générale des corrélations azimutales dans les “processus photon-photon” sur la base de la formule générale 1.161, le lecteur pourra se reporter à l'article de N. Arteaga et co-auteurs déjà cité³⁰.

30. N. Arteaga, C. Carimalo, P. Kessler, S. Ong, O. Panella, Phys. Rev. 52, 4920 (1995).