Chapitre 2

Notions et outils de base

Deux types de particules sont prépondérants dans l'univers des particules élémentaires. Le premier regroupe les particules dites *vectorielles* auxquelles ont assigne généralement un rôle de médiation dans les interactions. Les unes, comme le photon ou les gluons ont une masse nulle, les autres comme les bosons $W^{\pm}$ et Z^0 sont massives. On les décrit au moyen de la représentation 4-vectorielle du groupe de Lorentz, sur laquelle repose en fait la définition de ce groupe. Le second type est celui des particules que l'on décrit généralement au moyen de *spineurs de Dirac* et auquel est attachée la représentation de spin 1/2 du groupe $SL(2, C)$, groupe de revêtement universel du groupe de Lorentz. Certaines de ces particules, les leptons (tels l'électron, le muon ou les neutrinos) interviennent dans les interactions électro-faibles et sont directement observables ; d'autres, comme les quarks, n'ont jamais été observées à l'état libre mais sont considérées comme les structures incontournables à partir desquelles sont construites les particules observables hadroniques, et qui décrivent les interactions de ces dernières, régies au premier chef par la Chromodynamique Quantique.

Le but de ce chapitre est de fournir le maximum de propriétés de ces deux représentations [1]. On trouvera également à la fin du chapitre certaines notions complémentaires qu'il nous paraît utile de connaître.

2.1 La représentation 4-vectorielle du groupe de Lorentz

Dans ce qui suit, il est fait un usage intensif des propriétés du tenseur de Levi-Civita quadridimensionnel. La section (2.5) donne la définition générale et quelques propriétés des symboles de Levi-Civita d'ordres quelconques.

2.1.1 Générateurs de spin 4-vectoriels

Bien que certaines notions la concernant aient déjà été abordées au chapitre 1, nous rappelons ici certaines définitions essentielles de la représentation 4-vectorielle. Dans cette représentation, qui utilise des matrices 4×4, les générateurs $J^{\mu\nu}$ sont définis par

$$(J_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}\, g_{\mu\beta}) \tag{2.1}$$

Le lecteur vérifiera que ces opérateurs vérifient bien les relations de commutations des générateurs du groupe $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$:

1. Les notations et formules concernant les groupes de Lorentz, de Poincaré et leurs représentations sont celles des chapitres 4, 5 et 6 du cours "Introduction à la Théorie Lagrangienne", ci-après nommé ITL (http ://physique-univ.fr/physique-th-orique/lagrangien.html), et dans le chapitre 1 de ce cours.

$$[\, J_{\mu\nu}\,,\, J_{\rho\sigma}\,] = i\,(g_{\mu\sigma}\, J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\, J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\, J_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\, J_{\mu\sigma}) \tag{2.2}$$

Une transformation de Lorentz du groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ s'écrit toujours sous la forme $\Lambda = e^G$ où $G = i\,\omega_{\mu\nu}\, J^{\mu\nu}/2$, $\omega_{\mu\nu}$ étant un tenseur antisymétrique. D'après (2.1), on a simplement $G_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha\beta}$. Si Λ appartient au petit groupe d'un 4-vecteur η, on a $\Lambda(\eta) = \eta$, soit $G(\eta) = 0$ et donc $\omega^{\alpha\beta}\,\eta_\beta = 0$. Il s'ensuit que le tenseur antisymétrique $\omega_{\mu\nu}$ est plan et doit être de la forme

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, p^\rho\, \eta^\sigma \tag{2.3}$$

Dans cette expression, le 4-vecteur p peut toujours être remplacé par un 4-vecteur de la forme $\xi = p + a\eta$. Si η n'est pas du genre lumière, le scalaire a peut être déterminé de telle sorte que ξ soit orthogonal à η. Dans ce cas, on a

$$\xi^\alpha = \frac{1}{2\eta^2}\, \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\, \omega_{\mu\nu}\, \eta_\beta \tag{2.4}$$

En toute circonstance, on peut écrire

$$\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \xi^\rho\, \eta^\sigma \tag{2.5}$$

et le générateur G de la transformation est donc de la forme

$$G = i\, \xi^\mu\, W_\mu(\eta) \tag{2.6}$$

où

$$W_\mu(\eta) = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \eta^\nu\, J^{\rho\sigma}, \quad [\, W_\mu(\eta)\,]_{\alpha\beta} = i\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \eta^\nu \tag{2.7}$$

est l'opérateur de Pauli-Lubanski associé au 4-vecteur η.

① **Cas où η est du genre temps :** $\eta^2 > 0$

Posons $M = \sqrt{\eta^2}$ et définissons le 4-vecteur unitaire du genre temps $t = \pm\eta/M$, le signe étant choisi de telle sorte que t pointe vers le futur. Associons à ce 4-vecteur une triade x, y, z de 4-vecteurs du genre espace et orthogonaux entre eux se trouvant dans l'hyperplan orthogonal à t, pour former avec t une base d'orientation directe $\mathcal{B}(t)$. Ils vérifient les relations suivantes qui généralisent celles relatives aux bases de l'espace à trois dimensions.

$$\begin{gathered} t_\mu\, t_\nu - x_\mu\, x_\nu - y_\mu\, y_\nu - z_\mu\, z_\nu = g_{\mu\nu} \qquad \text{(relation de fermeture)} \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\mu\, x^\nu\, y^\rho\, z^\sigma = 1 \qquad \text{(4−volume)} \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} t_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, x^\nu\, y^\rho\, z^\sigma\;, \quad x_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\nu\, y^\rho\, z^\sigma \\ y_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\nu\, x^\rho\, z^\sigma\;, \quad z_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\nu\, x^\rho\, y^\sigma \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} t_\mu\, x_\nu - t_\nu\, x_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, y^\rho\, z^\sigma \qquad t_\mu\, y_\nu - t_\nu\, y_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, x^\rho\, z^\sigma \\ t_\mu\, z_\nu - t_\nu\, z_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, x^\rho\, y^\sigma \\ x_\mu\, y_\nu - x_\nu\, y_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\rho\, z^\sigma \qquad y_\mu\, z_\nu - y_\nu\, z_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\rho\, x^\sigma \\ z_\mu\, x_\nu - z_\nu\, x_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\rho\, y^\sigma \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^{\mu} &= -x_{\nu}\, y_{\rho}\, z_{\sigma} - x_{\rho}\, y_{\sigma}\, z_{\nu} - x_{\sigma}\, y_{\nu}\, z_{\rho} + x_{\nu}\, y_{\sigma}\, z_{\rho} + x_{\sigma}\, y_{\rho}\, z_{\nu} + x_{\rho}\, y_{\nu}\, z_{\sigma} \\
&= -\sum_{k\ell m} \epsilon_{k\ell m}\, n_{k\,\mu}\, n_{\ell\,\nu}\, n_{m\,\rho} \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, x^{\mu} &= -y_{\nu}\, z_{\rho}\, t_{\sigma} - y_{\rho}\, z_{\sigma}\, t_{\nu} - y_{\sigma}\, y_{\nu}\, t_{\rho} + y_{\nu}\, z_{\sigma}\, t_{\rho} + y_{\sigma}\, z_{\rho}\, t_{\nu} + y_{\rho}\, z_{\nu}\, t_{\sigma} \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, y^{\mu} &= z_{\nu}\, t_{\rho}\, x_{\sigma} + z_{\rho}\, t_{\sigma}\, x_{\nu} + z_{\sigma}\, t_{\nu}\, x_{\rho} - z_{\nu}\, t_{\sigma}\, x_{\rho} - z_{\sigma}\, t_{\rho}\, x_{\nu} - z_{\rho}\, t_{\nu}\, x_{\sigma} \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, z^{\mu} &= -t_{\nu}\, x_{\rho}\, y_{\sigma} - t_{\rho}\, x_{\sigma}\, y_{\nu} - t_{\sigma}\, x_{\nu}\, y_{\rho} + t_{\nu}\, x_{\sigma}\, y_{\rho} + t_{\sigma}\, x_{\rho}\, y_{\nu} + t_{\rho}\, x_{\nu}\, y_{\sigma}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

où, dans la première formule, $n_1 = x, n_2 = y, n_3 = z$. Le 4-vecteur ξ envisagé plus haut, orthogonal à t, se développe suivant les trois 4-vecteurs x, y et z :

$$
\xi = \xi^1\, x + \xi^2\, y + \xi^3\, z
$$

et le générateur des transformations du petit groupe de η s'écrit

$$
\begin{gathered}
G = \mp\, i\, M \left(\xi^1\, S_1(t) + \xi^2\, S_2(t) + \xi^3\, S_3(t)\right) \\
\text{avec} \quad S_1(t) = -x \cdot W(t)\ , \quad S_2(t) = -y \cdot W(t)\ , \quad S_3(t) = -z \cdot W(t)
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

Les trois opérateurs $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_3(t)$ sont les générateurs infinitésimaux du petit groupe associé à t. On vérifie aisément qu'ils constituent une algèbre de Lie isomorphe à su(2) [2]. Ce n'est pas étonnant, car, le 4-vecteur η étant du genre temps, les opérations du petit groupe sont des rotations dans l'hyperplan orthogonal à η. Ledit petit groupe est donc isomorphe à $SO(3)$ [3]. Soit $[\,t\,]$ une tétrade associée à t. En paramétrisant ce 4-vecteur de la façon suivante

$$
t = (\cosh\chi, \sinh\chi\, \sin\theta\, \cos\varphi, \sinh\chi\, \sin\theta\, \sin\varphi, \sinh\chi\, \cos\theta)
$$

cette tétrade pourra être choisie comme [4]

$$
[\,t\,] = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\chi/2} \end{pmatrix}
\tag{2.13}
$$

Toute autre tétrade $[\,t\,]'$ que l'on pourrait associer au même 4-vecteur t diffère de (2.13) par une matrice $[\,t\,]^{-1}\ [\,t\,]'$ faisant partie du petit groupe de $\overset{\circ}{t}$, c'est-à-dire, par une matrice de rotation R, dont on peut exprimer la forme générale au moyen des angles d'Euler (α, β, γ) :

$$
R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}
\tag{2.14}
$$

Nous avons vu qu'une transformation de Lorentz associée à une matrice A de $SL(2,C)$ induit une rotation de Wigner $[\,At\,]^{-1} A\, [\,t\,]$. Celle-ci est tout aussi bien décrite par la forme générale (2.14).

De l'expression

$$
\{S_3(t)\}_{\alpha\beta} = i\, \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, t^{\mu}\, z^{\nu} = i\ \{\, x_{\alpha}\, y_{\beta} - x_{\beta}\, y_{\alpha} \,\}
\tag{2.15}
$$

2. Ce sont alors des opérateurs de spin, pas nécessairement hermitiques.
3. Dont le groupe de revêtement $SU(2)$ a été étudié dans ITL, chap. 4.
4. Le vérifier, et vérifier aussi que le 4-vecteur z du genre espace donné par cette tétrade est $z = (\sinh\chi,\ \cosh\chi\, \sin\theta\, \cos\varphi,\ \cosh\chi\, \sin\theta\, \sin\varphi,\ \cosh\chi\, \cos\theta)$.

et des formules relatives à la base $\mathcal{B}(t)$, on tire

$$S_3(t)[t] = 0, \quad S_3(t)[z] = 0, \quad S_3(t)[x] = i\,y, \quad S_3(t)[y] = -i\,x \tag{2.16}$$

Dans l'hyperplan orthogonal à t, les 4-vecteurs

$$e^{(0)} = z, \quad e^{(\pm)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x \pm i\,y) \tag{2.17}$$

notés $e^{(\lambda)}$ avec $\lambda = 0, \pm 1$, sont vecteurs propres de $S_3(t)$ avec λ pour valeur propre respective :

$$[S_3(t)]_{\alpha\beta}\, e^{(\pm)\beta} = i\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, t^\mu\, z^\nu\, e^{(\pm)\beta} = \pm\, e^{(\pm)}_\alpha \tag{2.18}$$

Notant que

$$g_{\beta\gamma} = t_\beta\, t_\gamma - z_\beta\, z_\gamma - e^{(+)}_\beta\, e^{(+)\star}_\gamma - e^{(-)}_\beta\, e^{(-)\star}_\gamma = t_\beta\, t_\gamma - z_\beta\, z_\gamma + e^{(+)}_\beta\, e^{(-)}_\gamma + e^{(-)}_\beta\, e^{(+)}_\gamma \tag{2.19}$$

et calculant

$$[S_3(t)]_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = e^{(+)}_\alpha\, e^{(-)\gamma} - e^{(-)}_\alpha\, e^{(+)\gamma} \tag{2.20}$$

on déduit les projecteurs

$$e^{(\pm)}_\mu\, e^{(\mp)}_\nu = \frac{1}{2}\,[\, g_{\mu\nu} - t_\mu\, t_\nu + z_\mu\, z_\nu \pm i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\rho\, z^\sigma\,] \tag{2.21}$$

Les opérateurs $S_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,[\,S_1 + iS_2\,]$ et $S_- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,[\,S_1 - iS_2\,]$, qui font respectivement "monter" et "descendre" le spin, ont pour éléments de matrice non nuls les expressions

$$[S_\pm]_{\alpha\beta} = \mp\, i\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, t^\mu\, e^{(\pm)\nu} = z_\alpha\, e^{(\pm)}_\beta - z_\beta\, e^{(\pm)}_\alpha \tag{2.22}$$

Considérons les tenseurs définis par :

$$\begin{aligned}
T_{0\,\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - t_\mu\, t_\nu + z_\mu\, z_\nu = -\, e^{(+)}_\mu\, e^{(+)\star}_\nu - \, e^{(-)}_\mu\, e^{(-)\star}_\nu \\
T_{1\,\mu\nu} &= -\, e^{(+)}_\mu\, e^{(-)\star}_\nu - \, e^{(-)}_\mu\, e^{(+)\star}_\nu = e^{(+)}_\mu\, e^{(+)}_\nu + \, e^{(-)}_\mu\, e^{(-)}_\nu \\
T_{2\,\mu\nu} &= i\,\left[\, e^{(+)}_\mu\, e^{(-)\star}_\nu - \, e^{(-)}_\mu\, e^{(+)\star}_\nu \,\right] = i\,\left[\, e^{(-)}_\mu\, e^{(-)}_\nu - \, e^{(+)}_\mu\, e^{(+)}_\nu \,\right] \\
T_{3\,\mu\nu} &= -\, e^{(+)}_\mu\, e^{(+)\star}_\nu + e^{(-)}_\mu\, e^{(-)\star}_\nu \equiv S_3(t)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Le tenseur T_0 est en fait le projecteur dans le 2-plan (x, y). Quant aux tenseurs T_k $(k = 1, 2, 3)$, on peut les envisager comme des opérateurs agissant dans ce bi-plan, lequel, complexifié, est clairement isomorphe à un espace complexe à deux dimensions. Ils sont hermitiques car $T^\star_{k\,\mu\nu} = T_{k\,\nu\mu}$ et vérifient

$$T_k\, T_\ell = \delta_{k\ell}\, T_0 + i\,\epsilon_{k\ell m}\, T_m, \quad [\, T_k, T_\ell\,] = 2i\,\epsilon_{k\ell m}\, T_m \tag{2.24}$$

Ils engendrent donc une algèbre isomorphe à celle des matrices de Pauli, ce qui n'est pas étonnant, compte tenu de l'isomorphisme mentionné plus haut.

Pour être complet, écrivons également les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, z^\mu\, e^{(\pm)\nu} &= \pm\, i\, \left\{ t_\rho\, e^{(\pm)}_\sigma - t_\sigma\, e^{(\pm)}_\rho \right\} \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, (t+\epsilon\, z)^\mu\, e^{(\pm)\nu} &= \pm\, i\, \epsilon\, \left\{ (t+\epsilon\, z)_\rho\, e^{(\pm)}_\sigma - (t+\epsilon z)_\sigma\, e^{(\pm)}_\rho \right\} \quad \textsf{avec} \quad \epsilon = \pm 1
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

② **Cas où η est du genre espace :** $\eta^2 < 0$

Nous poserons ici $M = \sqrt{-\eta^2}$, puis $z = \eta/M$. Le 4-vecteur z est du genre espace et unitaire. Nous lui associerons une triade de 4-vecteurs comprenant un 4-vecteur du genre temps futur et unitaire t et deux vecteurs du genre espace et unitaires x et y de sorte à former une base orthonormée d'espace-temps $\mathcal{B}(z)$: t, x, y, z. Le 4-vecteur ξ, orthogonal à z, appartient à l'hyperplan engendré par t, x et y :

$$
\xi = \xi^0\, t + \xi^1\, x + \xi^2\, y
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
G = i\, M\, \left(\xi^0\, W^0(z) - \xi^1\, W^1(z) - \xi^2\, W^2(z)\right) \\
\text{avec} \quad W^0(z) = t \cdot W(z)\ ,\quad W^1(t) = -x \cdot W(z)\ ,\quad W^2(z) = -y \cdot W(z)
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Les opérateurs $W^0(z)$, $W^1(z)$ et $W^2(z)$, générateurs infinitésimaux du petit groupe de z, satisfont aux relations de commutation [5]

$$
[\, W^1, W^2\,] \;=\; -i\, W^0 \quad , \quad [\, W^0\, , W^1\,] \;=\; i\, W^2 \quad , \quad [\, W^0\, , W^2\,] \;=\; -i\, W^1 \tag{2.27}
$$

qui définissent l'algèbre de Lie du groupe $L(2,1)$, groupe de Lorentz pour un espace-temps ne comportant que deux dimensions spatiales. Le petit groupe associé à z est donc isomorphe à $L(2,1)$. Ce résultat était prévisible puisque les transformations du petit groupe de z agissent dans le 3-espace de Minkowsky ayant une dimension temporelle et deux dimensions spatiales. L'opérateur W^0 engendre des rotations dans le 2-plan (x,y), tandis que W^1 et W^2 engendrent des transformations de Lorentz, dans les 2-plans (t,y) et (t,x), respectivement. On montre que la forme générale des matrices M_s du petit groupe du 4-vecteur de référence (du genre espace) $\overset{\circ}{z} = (0,0,0,1)$ est

$$
\begin{aligned}
M_s &= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1+\theta_2)/2} & -\sinh\frac{\xi}{2}\, e^{-i(\theta_1-\theta_2)/2)} \\ -\sinh\frac{\xi}{2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)/2)} & \cosh\frac{\xi}{2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{encore} \\
M_s &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\xi}{2} & \sinh\frac{\xi}{2} \\ \sinh\frac{\xi}{2} & \cosh\frac{\xi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_2/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

ξ, θ_1 et θ_2 étant des réels quelconque. Soit $[\, z\,]$ une tétrade associée au 4-vecteur du genre espace z. Si ce dernier est paramétrisé comme

$$
z = (\sinh\chi,\ \cosh\chi\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ \cosh\chi\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ \cosh\chi\ \cos\theta)
$$

on peut encore choisir (2.13) pour cette tétrade, et toute autre tétrade $[\, z\,]'$ que l'on pourrait associer au même 4-vecteur z en diffère par une matrice $[\, z\,]^{-1}\ [\, z\,]'$ faisant partie du petit groupe de $\overset{\circ}{z}$ et qui est donc de la forme (2.28). De même, la transformation de Wigner $[\, Az\,]^{-1}\ A\ [\, z\,]$, où

5. Montrer que $W^0(z) = x_\mu y_\nu J^{\mu\nu}$, $W^1(z) = t_\mu y_\nu J^{\mu\nu}$, $W^2(z) = -t_\mu x_\nu J^{\mu\nu}$ et se servir des relations (2.2).

A est une matrice quelconque de $SL(2,C)$, est une matrice de la forme (2.28) et ne représente plus une rotation.

③ Cas où η est du genre lumière : $\eta^2 = 0$

Il est toujours possible de trouver une base $\mathcal{B}(t)$ ayant un vecteur z convenablement orienté, de telle sorte que η prenne la forme $\eta = \kappa(t+z)$, avec $\kappa = t \cdot \eta$. Relativement à cette base, les composantes de l'opérateur de Pauli-Lubanski $W(t+z)$ sont [6]

$$W^1 = -x \cdot W = -(t+z)_\mu \, y_\nu \, J^{\mu\nu} \quad , \quad W^2 = -y \cdot W = (t+z)_\mu \, x_\nu \, J^{\mu\nu}$$
$$W^0 = t \cdot W = W^3 = x_\mu \, y_\nu \, J^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

Elles vérifient les relations de commutation

$$[\, W^1 \, , \, W^2 \,] = 0 \quad , \quad [\, W^0 \, , \, W^1 \,] = i \, W^2 \quad , \quad [\, W^0 \, , \, W^2 \,] = -i \, W^1 \tag{2.30}$$

Comme mentionné précédemment, cette algèbre est celle du groupe $P(2)$ des déplacements dans un 2-plan euclidien, l'opérateur W^1 jouant le rôle de $-i\partial_x$, générateur de translation suivant l'axe des x de ce plan, W^2 celui de $-i\partial_y$, générateur de translation suivant l'axe des y, et W^0 celui de $-i(x\partial_y - y\partial_x)$, générateur de rotations dans ledit plan. L'opérateur W^0 est encore le générateur infinitésimal des rotations dans le 2-plan physique (x, y). Compte tenu de (2.1) et des relations

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; x^\mu \; (t+z)^\nu = (t+z)_\rho \; y_\sigma - y_\rho \; (t+z)_\sigma$$
$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; y^\mu \; (t+z)^\nu = x_\rho \; (t+z)_\sigma - (t+z)_\rho \; x_\sigma \tag{2.31}$$

on a

$$(W^1)_{\alpha\beta} = -i\,[(t+z)_\alpha \; y_\beta - y_\alpha \; (t+z)_\beta] \quad , \quad (W^2)_{\alpha\beta} = i\,[(t+z)_\alpha \; x_\beta - x_\alpha \; (t+z)_\beta] \tag{2.32}$$

d'où l'on déduit l'action de l'opérateur $T = e^{i(a\,W^1 + b\,W^2)}$ sur la base $\mathcal{B}(t)$:

$$T(t) = t + bx - ay + \frac{a^2+b^2}{2}\;(t+z) \quad , \quad T(z) = z - bx + ay - \frac{a^2+b^2}{2}\;(t+z)$$
$$T(x) = x + b(t+z) \qquad , \qquad T(y) = y - a(t+z) \tag{2.33}$$

Les 4-vecteurs u appartenant à l'hyperplan orthogonal à η sont nécessairement de la forme $u = u^1 x + u^2 y + u^0(t+z)$, $(u^0 = u^3)$. Pour ceux-ci, on a

$$T(u) = u + (t+z)(bu^1 - au^2) \tag{2.34}$$

et l'effet sur ces 4-vecteurs du sous-groupe abélien engendré par W^1 et W^2 est de les translater parallèlement à η [7]. C'est pourquoi on l'appelle *groupe de jauge* de η.

Les matrices M_ℓ de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe du 4-vecteur du genre lumière de référence $\mathring{\eta} = (1, 0, 0, 1)$ ont pour forme générale

$$M_\ell = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & \beta \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} = M_\ell(\zeta, e^{i\psi/2})$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \zeta' = \zeta \; e^{-i\psi} \tag{2.35}$$

6. Comme $(t+z) \cdot W(t+z) = 0$, on a $W^0 = W^3$.
7. Et notamment $e^{(-)} = \dfrac{x - iy}{\sqrt{2}} \to e^{(-)} + \dfrac{b + ia}{\sqrt{2}}\;(t+z)$.

où $\zeta = \beta e^{-i\psi/2}$ est un nombre complexe quelconque. Elles ont pour loi de composition

$$M_\ell(\zeta, e^{i\psi/2})\ M_\ell(\zeta', e^{i\psi'/2}) = M_\ell(\zeta + \zeta' e^{i\psi}, e^{i[\psi+\psi']/2}) \tag{2.36}$$

qui est bien celle des déplacements dans le plan, assimilé au plan complexe (addition du complexe ζ, représentant une translation, suivie d'une multiplication par $e^{i\alpha}$, représentant une rotation). Notons $\mathring{\ell} = \kappa\,(1,0,0,1)$ (κ étant réel) un 4-vecteur de référence du genre lumière, et $[\,\ell\,]$ une tétrade permettant de passer de $\mathring{\ell}$ à un autre 4-vecteur du genre lumière ℓ. Si l'on utilise la paramétrisation

$$\ell = \kappa(1,\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ \cos\theta)$$

un exemple de telle tétrade est donné par

$$[\,\ell\,] = \sqrt{\kappa}\ \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

conduisant à la base d'espace-temps associée :

$$\begin{gathered} t(\ell) = (1,0,0,0)\ ,\quad x(\ell) = (0, \cos\theta\ \cos\varphi, \cos\theta\ \sin\varphi, -\sin\theta) \\ y(\ell) = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\ ,\quad z(\ell) = (0, \sin\theta\ \cos\varphi, \sin\theta\ \sin\varphi, \cos\theta) \end{gathered}$$

Toute autre tétrade $[\,\ell\,]'$ associée au même 4-vecteur ℓ diffère de (2.37) d'une matrice $[\,\ell\,]^{-1}[\,\ell\,]'$ qui, appartenant au petit groupe de $\mathring{\ell}$, est nécessairement de la forme (2.35). Ici aussi, une transformation de Wigner $[\,A\ell\,]^{-1}\ A\ [\,\ell\,]$ n'est pas une rotation, mais une matrice M_ℓ du petit groupe de $\mathring{\ell}$, donc de la forme (2.35). Sous l'action de cette opération, les 4-vecteurs $e^{(\pm)}([\,\mathring{\ell}\,]) = \mp(0,1,\pm i,0)$ deviennent

$$E^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) = e^{i\lambda\psi}\ e^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) + c_\lambda\ \ \mathring{\ell} \qquad (\lambda = \pm 1) \tag{2.38}$$

avec $c_+ = \frac{\zeta^\star}{\sqrt{2}\kappa}$ et $c_- = -\frac{\zeta}{\sqrt{2}\kappa}$. Il s'ensuit que dans la transformation de Lorentz représentée par A, le 4-vecteur

$$e^{(\lambda)}([\,\ell\,]) = \Lambda([\,\ell\,])\ e^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) \tag{2.39}$$

qui est vecteur propre de l'opérateur W^0 avec la valeur propre λ a pour équivalent dans la tétrade $[\,A\ell\,]$

$$\begin{aligned} e^{(\lambda)}([\,A\ell\,]) &= \Lambda([\,A\ell\,])\,e^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) = \Lambda(A\,[\,\ell\,]\,M^{-1})\,e^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) \\ &= \Lambda(A\,[\,\ell\,])\,\left\{e^{i\lambda\psi}\ e^{(\lambda)}([\,\mathring{\ell}\,]) + c_\lambda\ \ \mathring{\ell}\right\} = e^{i\lambda\psi}\,\Lambda(A)\ e^{(\lambda)}([\,\ell\,]) + c_\lambda\,(A\ell) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Envisageons le cas d'un photon dont l'état est décrit par une onde plane. La direction de propagation de l'onde et l'énergie qu'elle transporte sont définies par le 4-vecteur énergie-quantité de mouvement ℓ du photon, du genre lumière. L'état de polarisation de l'onde se décrit quant à lui au moyen de deux 4-vecteurs $e^{(+)}$ et $e^{(-)}$, tels que $e^{(\pm)}\cdot\ell = 0$. Ces 4-vecteurs, dits *de polarisation*, représentent des ondes polarisées circulairement, a droite et à gauche, respectivement [8]. D'après (2.40), dans une transformation de Lorentz, ils subissent une translation parallèlement

8. ITL, §4.7.1.

à $L = \Lambda(A)(\ell)$. Or, une propriété fondamentale des équations de Maxwell est qu'elles sont *invariantes de jauge*. Au final, cela signifie que les prévisions mesurables de la théorie sont insensibles au remplacement d'un vecteur de polarisation $e^{(\lambda)}(\ell)$ par $e^{(\lambda)}(\ell) + c(\ell)\ \ell$, où $c(\ell)$ est un scalaire quelconque. Il s'ensuit que, dans ce cas, le terme $c_\lambda\ L$ est sans effet et peut être tout simplement ignoré. Tout se passe alors comme si, dans une transformation de Lorentz, les vecteurs de polarisation subissaient un simple changement de phase $e^{i\lambda\psi}$. La conséquence importante est que l'hélicité λ du photon peut être considérée comme un véritable invariant relativiste.

2.2 Les spineurs de Dirac [9]

2.2.1 Expressions générales

Les *spineurs de Dirac* sont les *bi-spineurs* de la représentation $D(\frac{1}{2},0) \oplus D(0,\frac{1}{2})$ de $SL(2,C)$. Dans la suite, nous ne considèrerons que le cas où la particule considérée, de spin 1/2, a une masse non nulle. Le cas éventuel de la masse nulle sera envisagé comme limite du précédent en faisant tendre m vers zéro, lorsque cela est possible [10]. En “représentation-p”, et dans la représentation que nous appelons “représentation initiale”, un spineur de Dirac associé à un état $|\,\Phi >$ s'exprime comme :

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) \\ \hat{\phi}(p) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

au moyen des amplitudes spinorielles

$$\phi_\sigma(p) = < p, \sigma\,|\,\Phi > \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_\sigma(p) = < \hat{p}, \sigma\,|\,\Phi > \tag{2.42}$$

où l'indice de spin σ prend les valeurs $+1/2$ et $-1/2$. Il vérifie l'équation de Dirac :

$$\Gamma(p)\,\Phi(p) = m\,\Phi(p) \tag{2.43}$$

où $\Gamma(p)$ est la matrice 4×4 donnée par [11,12]

$$\Gamma(p) = \begin{pmatrix} 0_2 & \underset{\sim}{p} \\ & \\ \widetilde{p} & 0_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \tag{2.44}$$
$$\underset{\sim}{p} = p_0 + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau}, \qquad \widetilde{p} = p_0 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau}$$

et où 0_2 est la matrice nulle 2×2. Sous une transformation (a, A) de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, le spineur (2.41) devient

$$^{(a,A)}\Phi(p) \;=\; \Phi'(p) \;=\; e^{ia\cdot p}\, S(A)\, \Phi(A^{-1}p), \quad \text{avec} \quad S(A) = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ & \\ 0_2 & A^{\dagger -1} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

tandis que la matrice $\Gamma(p)$ vérifie

9. Le lecteur trouvera dans le chapitre 7 de ITL qui leur est consacré toutes les définitions utiles concernant les spineurs et les matrices de Dirac.
10. Le cas des spineurs de Dirac associés à une particule de masse nulle est considéré dans ITL, § 7.6.
11. Rappelons que $\mathcal{D}^s(A) \equiv A$ pour $s = 1/2$.
12. $p_0 = \sqrt{m^2 + \overrightarrow{p}^2}$

$$\Gamma(p) = S(A)\,\Gamma(A^{-1}p)\,S(A)^{-1} \tag{2.46}$$

ce qui fait que l'équation de Dirac (2.43) garde exactement la même forme dans tout référentiel galiléen. Si l'on pose

$$\Gamma^0 = \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^k = -\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0_2 & -\tau_k \\ \tau_k & 0_2 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

où τ_0 est la matrice unité 2×2 et τ_k $(k = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli, la matrice (2.44) peut être exprimée sous forme de produit scalaire :

$$\Gamma(p) = p_\mu\,\Gamma^\mu = p^\mu\,\Gamma_\mu = p_0\,\Gamma^0 - \sum_k p^k\,\Gamma^k$$

En posant $q = A^{-1}p$ (ou en remplaçant A par A^{-1}), l'équation (2.46) devient

$$S(A)\,\Gamma(q)\,S(A)^{-1} = \Gamma(Aq) \tag{2.48}$$

d'où l'on déduit ($[Aq]^\nu = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\,q^\mu$, $[Aq]_\nu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_{\cdot\,\nu}\,q_\mu$ avec $\Lambda \equiv \Lambda(A)$) :

$$\boxed{S(A)\,\Gamma_\mu\,S(A)^{-1} = \Lambda^\nu_{\cdot\,\mu}\,\Gamma_\nu \quad \text{et} \quad S(A)\,\Gamma^\mu\,S(A)^{-1} = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_{\cdot\,\nu}\,\Gamma^\nu} \tag{2.49}$$

Sous la transformation définie par $\Gamma'^\mu = S(A)^{-1}\,\Gamma^\mu\,S(A)$, les matrices Γ^μ se transforment donc comme les composantes contravariantes d'un 4-vecteur. Les matrices (2.47) vérifient les relations [13]

$$\begin{gathered}(\Gamma^0)^2 = \Gamma_0^2 = 1, \quad (\Gamma^k)^2 = \Gamma_k^2 = -1 \\ \Gamma^0\,\Gamma^k = -\Gamma^k\,\Gamma^0, \quad \Gamma^k\,\Gamma^\ell = -\Gamma^\ell\,\Gamma^k \quad (k \neq \ell)\end{gathered} \tag{2.50}$$

que l'on résume par la relation fondamentale de définition des matrices de Dirac :

$$\boxed{\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\,\Gamma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}, \quad \text{ou} \quad \Gamma_\mu\,\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\,\Gamma_\mu = 2\,g_{\mu\nu}} \tag{2.51}$$

Les matrices (2.47) constituent ce que nous appelons la *représentation initiale* des matrices de Dirac, qui diffère de celle de Weyl par le signe des Γ^k. S'il existe bien une infinité de quadruplets de matrices 4×4 vérifiant la relation générale (2.51), on montre cependant que deux quadruplets possibles $\{\gamma^\mu\}$ et $\{\gamma'^\mu\}$ sont nécessairement reliés au moyen d'une matrice 4×4 inversible U via la relation [14] :

$$\boxed{\gamma'^\mu = U\,\gamma^\mu\,U^{-1}} \tag{2.52}$$

Toutes les représentations des matrices de Dirac sont *équivalentes* et toute propriété de ces matrices démontrée dans une représentation particulière est applicable à toute autre représentation.

13. ITL, section 6.12.
14. C'est le *théorème fondamental* de W. Pauli, voir *Annales de l'I.H.P.* tome 6, n° 2 (1936), p. 109.

La *représentation de Dirac* est la *représentation standard* couramment utilisée des matrices de Dirac. Elle est définie par

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 & 0_2 \\ 0_2 & -\tau_0 \end{pmatrix} = \Gamma_5\,, \quad \gamma^k = -\gamma_k = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_k \\ -\tau_k & 0_2 \end{pmatrix} = -\Gamma^k$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0_2 \end{pmatrix} = \Gamma^0 \tag{2.53}$$

et s'obtient à partir de la représentation initiale (2.47) par la matrice inversible

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & -\tau_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_0 + \Gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\gamma_0 + \gamma_5) = \mathcal{U}^{-1} \tag{2.54}$$

Notons ici qu'en vertu de l'équation (6.263), pour toute base d'espace-temps t, x, y, z, on a

$$\Gamma_5 = -i\,\Gamma(t)\,\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,\Gamma(z) \tag{2.55}$$

et que par conséquent

$$\boxed{\gamma_5 = \mathcal{U}\,\Gamma_5\,\mathcal{U}^{-1} = -i\,\gamma(t)\,\gamma(x)\,\gamma(y)\,\gamma(z)} \tag{2.56}$$

où, pour un 4-vecteur v quelconque [15],

$$\gamma(v) = v^\mu\,\gamma_\mu = v_\mu\,\gamma^\mu \tag{2.57}$$

On a notamment, pour la base d'espace-temps standard,

$$\Gamma_5 = i\,\Gamma^0\,\Gamma^1\,\Gamma^2\,\Gamma^3 \quad \text{et} \quad \gamma_5 = i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 \tag{2.58}$$

D'après (6.264), les matrices Γ_5 et γ_5 anti-commutent, respectivement, avec les matrices Γ^μ et γ^μ :

$$\Gamma_5\,\Gamma^\mu = -\Gamma^\mu\,\Gamma_5, \quad \gamma_5\,\gamma^\mu = -\gamma^\mu\,\gamma_5 \tag{2.59}$$

D'après (2.51), les matrices Γ^μ avec des indices différents anti-commutent entre elles, ce qui fait que le produit $\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^\rho\,\Gamma^\sigma$ avec les quatre indices μ, ν, ρ, σ tous différents est complètement antisymétrique suivant ces indices. En introduisant le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, on peut donc écrire ($\epsilon_{0123} = 1$)

$$\Gamma^0\,\Gamma^1\,\Gamma^2\,\Gamma^3 = \epsilon_{0123}\,\Gamma^0\,\Gamma^1\,\Gamma^2\,\Gamma^3 = \frac{1}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^\rho\,\Gamma^\sigma$$

Ceci permet de représenter les matrices Γ_5 et γ_5 sous la forme de produits contractés de tenseurs

$$\boxed{\Gamma_5 = \frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Gamma^\mu\,\Gamma^\nu\,\Gamma^\rho\,\Gamma^\sigma \quad \text{et} \quad \gamma_5 = \frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma} \tag{2.60}$$

15. Bien qu'en Physique des Particules on utilise couramment la notation "slash" de Feynman, $\not{v} = v^\mu\,\gamma_\mu$, nous utiliserons ici la notation $\gamma(v)$, pour la clarté du texte.

qui se comportent comme des scalaires sous les transformations de $SL(2,C)$. En utilisant (2.49) et en tenant compte de $\det\Lambda = 1$, on a en effet

$$S(A)^{-1}\,\Gamma_5\,S(A) = \frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda^{\mu}_{\cdot\,\mu'}\,\Lambda^{\nu}_{\cdot\,\nu'}\,\Lambda^{\rho}_{\cdot\,\rho'}\,\Lambda^{\sigma}_{\cdot\,\sigma'}\,\Gamma^{\mu'}\,\Gamma^{\nu'}\,\Gamma^{\rho'}\,\Gamma^{\sigma'}$$

$$= \frac{i}{4!}\,(\det\Lambda)\,\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\,\Gamma^{\mu'}\,\Gamma^{\nu'}\,\Gamma^{\rho'}\,\Gamma^{\sigma'} = \frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\,\Gamma^{\mu'}\,\Gamma^{\nu'}\,\Gamma^{\rho'}\,\Gamma^{\sigma'} = \Gamma_5$$

Dans la représentation standard, les spineurs de Dirac de la représentation-p prennent donc la forme

$$\Phi_{\rm st}(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) + \hat{\phi}(p) \\ \phi(p) - \hat{\phi}(p) \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

à un facteur de normalisation près et $S(A)$ est remplacé par

$$L(A) = \mathcal{U}\,S(A)\,\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + A^{\dagger-1} & A - A^{\dagger-1} \\ A - A^{\dagger-1} & A + A^{\dagger-1} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Dans la représentation standard, les spineurs de type U (énergie positive) et les spineurs de type V (énergie négative) attachés à l'état $|\,[\,p\,],\sigma >$ sont donnés par [16]

$$\boxed{\begin{aligned} U_\sigma([\,p\,]) \;&=\; \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} \left\{[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix} \\ V_\sigma([\,p\,]) \;=\; \gamma_5\,U_\sigma([\,p\,]) \;&=\; \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} \left\{[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \\ \left\{[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger-1}\right\}_{\cdot\,\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{2.63}$$

Ils vérifient les relations

$$\sum_\sigma U_\sigma\,\overline{U}_\sigma \;=\; m + \gamma(p)\,,\quad \sum_\sigma V_\sigma\,\overline{V}_\sigma \;=\; \gamma(p) - m\,,\quad \gamma(p)\,U = m\,U\,,\quad \gamma(p)\,V = -m\,V$$

$$\sum_\sigma \left[\,U_\sigma\,\overline{U}_\sigma \;-\; V_\sigma\,\overline{V}_\sigma\,\right] \;=\; 2\,m, \qquad \text{avec} \quad \overline{U} = U^\dagger\,\gamma_0,\;\; \overline{V} = V^\dagger\,\gamma_0 \tag{2.64}$$

et, conformément à l'usage, leur normalisation est telle que

$$\overline{U}_\sigma\,U_{\sigma'} = 2\,m\,\delta_{\sigma\,\sigma'}\,,\quad \overline{V}_\sigma\,V_{\sigma'} = -2\,m\,\delta_{\sigma\,\sigma'}\,,\quad \overline{U}_\sigma\,V_{\sigma'} = \overline{V}_\sigma\,U_{\sigma'} = 0 \tag{2.65}$$

Les quatre spineurs U et V ainsi définis constituent une base selon laquelle on peut développer tout vecteur unicolonne de C^4.

• Lorsque la tétrade $[\,p\,]$ correspond à un boost le long de $\overrightarrow{p}$, elle prend la forme de la matrice hermitique $\mathcal{H}$ donnée par le tableau :

16. En mettant de côté un facteur de normalisation $(2\pi)^3\,2\,p_0\,\delta\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p'}\right)$ où $p_0 = \sqrt{m^2 + \overrightarrow{p}^2}$.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1/2 & E+m+p_z & p_x - i\,p_y \\ \hline -1/2 & p_x + i\,p_y & E+m-p_z \\ \hline \end{array} \tag{2.66}$$

avec $p_x = p^1, p_y = p^2, p_z = p^3$, $E = p_0$. On obtient alors

$$\boxed{U^{\uparrow}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad U^{\downarrow}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}} \tag{2.67}$$

$$\boxed{V^{\uparrow}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{\downarrow}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E+m \end{pmatrix}} \tag{2.68}$$

où les notations $\uparrow$ (“up”) et $\downarrow$ (“down”) se réfèrent à un indice de spin σ égal à $+1/2$ et $-1/2$, respectivement.

2.2.2 Opérateurs de spin et projecteurs

Dans la représentation standard des spineurs de Dirac, les générateurs de $SL(2,C)$ sont les matrices $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Posant $t = p/m$, l'opérateur de Pauli-Lubanski associé à la 4-impulsion p s'écrit donc

$$W_\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, t^\alpha\, \sigma^{\beta\gamma} = i\, t^\nu\, \sigma_{\mu\nu}\, \gamma_5 \quad \text{soit}$$
$$W_\mu = -\frac{1}{4}\,[\,\gamma_\mu\,,\gamma_\nu\,]\, t^\nu\, \gamma_5 \tag{2.69}$$

Notons x, y et z les trois 4-vecteurs du genre espace associé à t dans la tétrade $[\,p\,]$ et formant avec t une base d'espace-temps orthonormée et d'orientation directe. Les générateurs du petit groupe de p (opérateurs de spin engendrant un groupe de rotations) sont représentés par les matrices [17]

$$S_x = -x \cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(x)\,\gamma(t)\,\gamma_5, \quad S_y = -y \cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(y)\,\gamma(t)\,\gamma_5,$$
$$S_z = -z \cdot W = \frac{1}{2}\,\gamma(z)\,\gamma(t)\,\gamma_5 \tag{2.70}$$

et, posant $U_\sigma \equiv U_\sigma([\,p\,])$, $V_\sigma \equiv V_\sigma([\,p\,])$, $S_\pm = S_x \pm iS_y$, on a

17. A l'aide de (2.56), montrer que les matrices S_x, S_y et S_z vérifient bien les relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SU(2)$.

$$
\begin{aligned}
&S_z\, U_\sigma = \sigma\, U_\sigma, \quad S_z\, V_\sigma = \sigma\, V_\sigma \\
&S_+\, U^\uparrow = 0\,, \quad S_+\, U^\downarrow = U^\uparrow\,, \quad S_+\, V^\uparrow = V^\downarrow \quad S_+\, V^\downarrow = 0 \\
&S_-\, U^\uparrow = U^\downarrow\,, \quad S_-\, U^\downarrow = 0\,, \quad S_-\, V^\uparrow = V^\downarrow \quad S_-\, V^\downarrow = 0
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Ces formules conduisent aussi aux suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\gamma(z)\, U^{\uparrow,\downarrow} = \pm V^{\uparrow,\downarrow}, \quad \gamma(z)\, V^{\uparrow,\downarrow} = \mp U^{\uparrow,\downarrow} \\
&\gamma(x+iy)\, U^\uparrow = 0, \quad \gamma(x+iy)\, U^\downarrow = 2\, V^\uparrow \\
&\gamma(x-iy)\, U^\downarrow = 0, \quad \gamma(x-iy)\, U^\uparrow = 2\, V^\downarrow
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

En appliquant $\gamma(z)$ ou $\gamma(x \pm iy)$ soit sur les projecteurs soit sur la relation de fermeture de (2.64), on en déduit alors :

$$
\begin{aligned}
2\, m\, \gamma(z) &= V^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow + U^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow \\
2\, \gamma(z)\, \gamma(p) &= V^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow \\
m\, \gamma(x+iy) &= V^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow + U^\uparrow\, \overline{V}^\downarrow, \quad 2\, \gamma(x+iy)\, \gamma(p) = V^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\, \overline{V}^\downarrow \\
m\, \gamma(x-iy) &= V^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{V}^\uparrow, \quad 2\, \gamma(x-iy)\, \gamma(p) = V^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{V}^\uparrow
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Montrons maintenant comment l'utilisation conjointe des relations (2.71) et (2.64) permet d'exprimer simplement certains projecteurs au moyen des matrices γ. En additionnant

$$
S_+\, U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow = 0\,, \quad \text{et} \quad S_+\, U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow = U^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow\,, \quad \text{on obtient}
$$

$$
U^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow = S_+\, (U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow) = S_+\, [\, \gamma(p) + m\,]
$$

soit, puisque $\gamma(t)\, [\, \gamma(p) + m\,] = [\, \gamma(p) + m\,]$,

$$
\boxed{U^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow = \frac{1}{2}\, \gamma_5\, \gamma(x+iy)\ [\, \gamma(p) + m\,]}
\tag{2.74}
$$

Suivant un procédé similaire, ou bien en opérant la conjugaison hermitique de (2.74), on obtient

$$
\boxed{U^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow = \frac{1}{2}\, \gamma_5\, \gamma(x-iy)\ [\, \gamma(p) + m\,]}
\tag{2.75}
$$

Comme

$$
2\, S_z\, \left[U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow \right] = U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow\,, \ \text{et} \quad U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow = \gamma(p) + m
$$

on a

$$
2\, U^{\uparrow,\downarrow}\, \overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = [\, 1 \pm 2\, S_z\,]\ [\, \gamma(p) + m\,] \quad \text{soit au final}
$$

$$
\boxed{U^{\uparrow,\downarrow}\, \overline{U}^{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{2}\ [\, 1 \pm \gamma_5\, \gamma(z)\,]\ [\, \gamma(p) + m\,]}
\tag{2.76}
$$

2.2.3 Spineurs propres de $S_z = \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{p} / |\overrightarrow{p}|$

Le lecteur vérifiera[18] que les spineurs (2.67) sont vecteurs propres de la projection du vecteur polarisation (2.69) selon le 4-vecteur z (orthogonal à p) ayant pour composantes

$$z_0 = \frac{p_z}{m}, \quad z_x = \frac{p_z p_x}{m(E+m)}, \quad z_y = \frac{p_z p_y}{m(E+m)}, \quad z_z = 1 + \frac{p_z^2}{m(E+m)} \tag{2.77}$$

et dont la partie spatiale n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{p}$. Pour obtenir une composante de spin S_z correspondant à une projection du spin selon $\overrightarrow{p}$, il faut préalablement effectuer une rotation amenant l'axe des z selon la direction de ce 3-vecteur. Notant respectivement θ et φ l'angle orbital et l'angle azimutal de $\overrightarrow{p}$, la matrice 2×2 représentant cette rotation s'écrit

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z(\varphi)\, \mathcal{R}_y(\theta)\, \mathcal{R}_z^{-1}(\varphi) \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Il est facile de vérifier que l'on a bien

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi)\, \tau_3\, \mathcal{R}^{-1}(\theta, \varphi) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau} \qquad (\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}/p, \quad p = \sqrt{E^2 - m^2})$$

La tétrade correspondante s'écrit

$$[\,p\,] = \mathcal{H}\, \mathcal{R}(\theta, \varphi) \tag{2.79}$$

et conduit à

$$\underset{\sim}{z}(p) = [\,p\,]\, \tau_3\, [\,p\,] = \mathcal{H}\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau}\; \mathcal{H} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau}\; \mathcal{H}^2 = \frac{1}{m}\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau}\; \left(E + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau}\right) \quad \text{soit}$$

$$\underset{\sim}{z}(p) = \frac{1}{m} \left(p + E\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau}\right) \tag{2.80}$$

Le 4-vecteur $z(p)$ ainsi obtenu a pour composantes

$$z_0 = \frac{p}{m}, \quad \overrightarrow{z} = \frac{E}{m}\, \overrightarrow{u} \tag{2.81}$$

et sa partie spatiale est colinéaire à $\overrightarrow{p}$. On a alors

$$S_z = \frac{1}{2m^2}\, \gamma_5 \left(p\, \gamma_0 - E\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\gamma}\right) \left(E\, \gamma_0 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\gamma}\right) = \frac{1}{2} \gamma_5\, \gamma_0\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\gamma} \qquad \text{soit}$$

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau} & 0_2 \\ 0_2 & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\tau} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\; \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau} / p \tag{2.82}$$

Ce choix de tétrade correspond donc bien à la projection de spin suivant la direction du 3-vecteur $\overrightarrow{p}$. D'après la formule générale (2.63), et compte tenu de

18. Par exemple, en calculant $\mathcal{H}\, \tau_3\, \mathcal{H}$.

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\tau}\ \mathcal{R}(\theta,\varphi)\ = \mathcal{R}(\theta,\varphi)\,\tau_3 \quad \tau_3\,\chi_0^{\uparrow,\downarrow} = \pm\chi_0^{\uparrow,\downarrow}, \quad \chi_0^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\,p\,] + [\,p\,]^{\dagger -1} = \left(\mathcal{H}+\mathcal{H}^{-1}\right)\,\mathcal{R}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E+m}\,\mathcal{R}(\theta,\varphi),$$

$$[\,p\,] - [\,p\,]^{\dagger -1} = \left(\mathcal{H}+\mathcal{H}^{-1}\right)\,\mathcal{R}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E+m}\,\Delta\,\mathcal{R}(\theta,\varphi)\,\tau_3, \quad \text{avec} \quad \Delta = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}}$$

les spineurs propres de type U associés sont donnés par

$$\boxed{U_\sigma = \sqrt{E+m}\,\begin{pmatrix} \{\mathcal{R}(\theta,\varphi)\}_{.\,\sigma} \\ \\ 2\,\sigma\,\Delta\,\{\mathcal{R}(\theta,\varphi)\}_{.\,\sigma} \end{pmatrix}} \tag{2.83}$$

Explicitement,

$$\boxed{U^{\uparrow} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \\ \Delta\,\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \Delta\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad U^{\downarrow} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \Delta\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ -\Delta\,\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \tag{2.84}$$

Ces spineurs admettent des limites finies lorsque $m \to 0$ qui représentent les spineurs d'énergie positive associés à des particules de masse nulle :

$$\boxed{U_0^{\uparrow} = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad U_0^{\downarrow} = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi} \\ -\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \tag{2.85}$$

Ils correspondent, le premier, $U_0^{\uparrow}$, à une particule (de masse nulle) d'hélicité $+\dfrac{1}{2}$, le second, $U_0^{\downarrow}$, à une particule (elle aussi de masse nulle) d'hélicité $-\dfrac{1}{2}$, laquelle particule peut éventuellement être l'anti-particule de la première. Dans le cas des masses nulles, l'hélicité h est un invariant relativiste caractérisant la particule considérée et peut être représentée [19] par l'opérateur $\dfrac{1}{2}\gamma_5$. On vérifie ici que

$$\gamma_5\,U_0^{\uparrow} = +\,U_0^{\uparrow}\,, \quad \gamma_5\,U_0^{\downarrow} = -\,U_0^{\downarrow} \tag{2.86}$$

19. ITL, Eq. 7.180.

2.2.4 Expressions “covariantes” des tétrades

Une transformation $\Lambda = \Lambda(A)$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ peut être regardée comme celle transformant une base d'espace-temps T, X, Y, Z en la base t, x, y, z. On démontre [20] que la matrice A de $SL(2, C)$ qui lui correspond (au signe près) peut être exprimée sous la forme

$$\boxed{A = \frac{1}{2\,(\mathrm{Tr}\,A)^\star}\left(\underset{\sim}{t}\,\widetilde{T} - \underset{\sim}{x}\,\widetilde{X} - \underset{\sim}{y}\,\widetilde{Y} - \underset{\sim}{z}\,\widetilde{Z}\right)} \tag{2.87}$$

avec $|\mathrm{Tr}\,A|^2 = \mathrm{Tr}\,\Lambda$, et que la matrice $A^{\dagger -1}$ est donnée par :

$$\boxed{A^{\dagger -1} = \frac{1}{2\ \mathrm{Tr}\,A}\left(\widetilde{T}\,\underset{\sim}{t} - \widetilde{X}\,\underset{\sim}{x} - \widetilde{Y}\,\underset{\sim}{y} - \widetilde{Z}\,\underset{\sim}{z}\right)} \tag{2.88}$$

En posant $\mathrm{Tr}\,A = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et en utilisant (2.62), on trouve alors l'expressions suivante pour la représentation $L(A)$ de $\Lambda(A)$ dans l'espace des spineurs de Dirac [21] :

$$\boxed{\begin{aligned} L(A) &= \frac{1}{2\,\rho}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\gamma_5\,]\ [\,\gamma(t)\,\gamma(T) - \gamma(x)\,\gamma(X) - \gamma(y)\,\gamma(Y) - \gamma(z)\,\gamma(Z)\,] \\ &= \frac{1}{2\,\rho}\,[\cos\theta + i\sin\theta\,\gamma_5]\ \gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\Lambda_{\mu\nu} \end{aligned}} \tag{2.89}$$

Le terme en γ_5 de cette expression n'est absent que si $\mathrm{Tr}\,A$ est réel. Comme

$$2\,(\mathrm{Tr}\,A)^\star = \pm\sqrt{4 + (\mathrm{Tr}\Lambda)^2 - \mathrm{Tr}(\Lambda^2) + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma}} \tag{2.90}$$

ceci est réalisé pour toute transformation $\Lambda(A)$ vérifiant $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_{\mu\nu}\,\Lambda_{\rho\sigma} = 0$, c'est-à-dire, si ladite transformation est *plane*. C'est le cas pour une transformation de Lorentz pure qui laisse invariants les vecteur d'un 2-plan du genre espace, ou encore celui d'une rotation laissant invariants les vecteurs d'un 2-plan du genre hyperbolique. Dans ce cas, la matrice (2.89) s'écrit simplement

$$\boxed{L(A) = \frac{1}{2\,\mathrm{Tr}\,A}\ [\,\gamma(t)\,\gamma(T) - \gamma(x)\,\gamma(X) - \gamma(y)\,\gamma(Y) - \gamma(z)\,\gamma(Z)\,]} \tag{2.91}$$

D'après (2.62), on a alors $\mathrm{Tr}\,L(A) = 2\,\mathrm{Tr}\,A$ (car $\mathrm{Tr}\,A^{\dagger -1} = \left(\mathrm{Tr}\,A^{-1}\right)^\star = (\mathrm{Tr}\,A)^\star = \mathrm{Tr}\,A$) et par suite [22,23]

$$(\mathrm{Tr}\,A)^2 = t\cdot T - x\cdot X - y\cdot Y - z\cdot Z \tag{2.92}$$

① Considérons le cas d'une <u>rotation dans le plan (X, Y)</u> pour laquelle $t \equiv T$, $z \equiv Z$ et

$$x = \cos\varphi\,X + \sin\varphi\,Y\,, \quad y = -\sin\varphi\,X + \cos\varphi\,Y$$

20. ITL, Eqs. 5.204, 7.23.
21. Voir aussi ITL, §7.3.5.
22. Pour les formules de traces de produits de matrices γ, voir ITL, Section 7.3.
23. Dans la suite, nous faisons le choix $\mathrm{Tr}\,A > 0$.

Il vient

$$\gamma(x)\,\gamma(X) = -\cos\varphi + \sin\varphi\,\gamma(Y)\,\gamma(X) = -\gamma(y)\,\gamma(Y)\,, \quad \gamma(t)\,\gamma(T) = -\gamma(z)\,\gamma(Z) = 1$$

$$\mathrm{Tr}\,A = \sqrt{2\,(1 - x\cdot X)} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} L(A) = R_Z(\varphi) &= \frac{1-\gamma(x)\,\gamma(X)}{\sqrt{2\,(1-x\cdot X)}} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\,\gamma(X)\,\gamma(Y) \\ &= \cos\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\,S_Z(T) \end{aligned}} \tag{2.93}$$

Dans la dernière expression, on a fait apparaître le générateur $S_Z(T) = \dfrac{i}{2}\,\gamma(X)\,\gamma(Y)$ de la rotation [24]. Par celle-ci, un spineur $U_\sigma([T])$ de la tétrade $[T]$ associée à T est transformé en un spineur $U_\sigma([\,t\,])$ de la tétrade $[\,t\,] = R_Z(\varphi)[T]$ associée à t, tel que

$$U_\sigma([\,t\,]) = R_Z(\varphi)\,U_\sigma([T]) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - 2i\sigma\sin\frac{\varphi}{2}\right)\,U_\sigma([T]) = e^{-i\sigma\varphi}\,U_\sigma([T]) \tag{2.94}$$

② Envisageons ensuite une rotation dans le plan (X, Z) pour laquelle $t \equiv T$, $y \equiv Y$ et

$$z = \cos\varphi\,Z + \sin\varphi\,X\,, \quad x = -\sin\varphi\,Z + \cos\varphi\,X$$

On a cette fois

$$\begin{aligned} L(A) = R_Y(\varphi) &= \frac{1-\gamma(z)\,\gamma(Z)}{\sqrt{2\,(1-z\cdot Z)}} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\,\gamma(Z)\,\gamma(X) \\ &= \cos\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\,S_Y(T) \end{aligned} \tag{2.95}$$

Comme [25]

$$S_Y(T)\,U_\sigma([T]) = i\sigma\,U_{-\sigma}([T]) \tag{2.96}$$

il vient

$$U_\sigma([\,t\,]) = R_Y(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}\,U_\sigma([T]) + 2\sigma\sin\frac{\varphi}{2}\,U_{-\sigma}([T]) \tag{2.97}$$

En particulier, pour $\varphi = \pi$,

$$\boxed{U_\sigma([\,t\,]) = 2\sigma\,U_{-\sigma}([T]) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\,U_{-\sigma}([T])} \tag{2.98}$$

où ici $[\,t\,] = R_Y(\pi)\,[T]$.

24. Compte tenu de la relation (2.56) $\gamma_5 = i\,\gamma(X)\,\gamma(Y)\,\gamma(Z)\,\gamma(T)$ et de (2.70), on a $\gamma(X)\,\gamma(Y) = -i\,\gamma(Z)\,\gamma(T)\,\gamma_5$.
25. Voir ITL, Eq. 4.35.

③ Dans le cas d'une transformation de Lorentz pure, pour laquelle $x \equiv X$ et $y \equiv Y$ et

$$t = \cosh\alpha\, T + \sinh\alpha\, Z\,, \quad z = \sinh\alpha\, T + \cosh\alpha\, Z$$

on a

$$\gamma(t)\,\gamma(T) = \cosh\alpha + \sinh\alpha\,\gamma(Z)\,\gamma(T) = -\gamma(z)\,\gamma(Z)\,, \quad \gamma(x)\,\gamma(X) = \gamma(y)\,\gamma(Y) = -1$$

$$\mathrm{Tr}\,A = \sqrt{2\,(1 + t\cdot T)} = 2\cosh\frac{\alpha}{2}$$

et par suite,

$$\boxed{L(A) = S_{T\to t} = \frac{1 + \gamma(t)\,\gamma(T)}{\sqrt{2\,(1 + t\cdot T)}} = \cosh\frac{\alpha}{2} + \sinh\frac{\alpha}{2}\,\gamma(Z)\,\gamma(T)} \tag{2.99}$$

Montrons que, au signe près, la matrice $\frac{i}{2}\,\gamma(Z)\,\gamma(T)$ représente le générateur de cette transformation. Cette dernière laissant X invariant doit appartenir au petit groupe de ce vecteur. Or, l'opérateur de Pauli-Lubanski associé à X est

$$W_\mu(X) = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,X^\alpha\,\sigma^{\beta\gamma} = -\frac{1}{4}[\,\gamma_\mu\,, \gamma_\nu\,]\,X^\nu\,\gamma_5$$

et parmi les trois composantes de cet opérateur, celle qui préserve le vecteur Y est

$$N_Y(X) = -Y\cdot W(X) = -\frac{1}{2}\,\gamma(X)\,\gamma(Y)\,\gamma_5 = \frac{i}{2}\,\gamma(Z)\,\gamma(T)$$

On peut aussi envisager la transformation comme un élément du petit groupe de Y. Dans ce cas, on trouve pour générateur $N_X(Y) = -N_Y(X)$.

Notant que $\gamma(Z)\,\gamma(T) = 2S_Z(T)\,\gamma_5$, la matrice (2.99) transforme le spineur $U_\sigma([T])$ en un spineur $U_\sigma([\,t\,])$ associé à la tétrade $[\,t\,] = [\,T \to t\,][T]$ et tel que

$$\boxed{U_\sigma([\,t\,]) = S_{T\to t}\,U_\sigma([T]) = \cosh\frac{\alpha}{2}\,U_\sigma([T]) + 2\sigma\sinh\frac{\alpha}{2}\,V_\sigma([T])} \tag{2.100}$$

2.3 Produits tensoriels de spineurs

Dans leurs modélisations de la structure en quarks des hadrons, certains auteurs ont utilisé des amplitudes du type $T_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}U_\delta$, où T est un tenseur du deuxième ordre suivant des indices de composantes d'un spineur de Dirac, construit à partir de produits de matrices de Dirac [26] . Ces formes tensorielles doivent être considérées comme composantes d'éléments des espaces $E\otimes E$ et $E\otimes E\otimes E$ respectivement, E étant l'espace vectoriel à quatre dimensions des spineurs de Dirac. L'objet de cette section est de montrer, à l'instar de ce qui a été fait au paragraphe 2.2.2 pour les

26. C. H. Llewellyn Smith, Ann. Phys. (N.Y.) 53 (1969) 327 ; V.L. Chernyak, A.R. Zhitnitsky, Phys. Rep. 112 (1984), 173-318 ; C. Carimalo, "On the spinor structure of the Proton wave function", J.Math.Phys. 34, (1993), 4930-4963 ; LPC-92-24 App. B. ; G. Eichmann, Dissertation, Université de Graz (2009), arXiv :0909.0703 [hep-ph].

projecteurs de spineurs, comment on peut exprimer ces formes tensorielles au moyen des produits tensoriels de spineurs constituant des bases de ces espaces.

Pour ce faire, nous ferons appel aux formules suivantes [27] . Introduisons les matrices

$$\mathcal{C} = i\,\gamma^2\,\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0_2 & C \\ C & 0_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega_c = -\gamma_5\,\mathcal{C} = -\mathcal{C}\,\gamma_5 = \begin{pmatrix} C & 0_2 \\ 0_2 & C \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

La matrice Ω_c a pour vertu de transformer les matrices γ en leurs transposées :

$$\Omega_c\,\gamma_\mu\,\Omega_c^{-1} = {}^t\gamma_\mu, \quad \Omega\,\gamma_5\,\Omega_c^{-1} = {}^t\gamma_5 = \gamma_5 \tag{2.102}$$

et est telle que

$$\Omega_c^{-1} = -\Omega_c, \quad {}^t\Omega_c = -\Omega_c, \quad \Omega_c^\star = \Omega_c, \quad \Omega_c\,\gamma_0 = \gamma_0\,\Omega_c \tag{2.103}$$

Des relations

$$\begin{aligned} U^\uparrow = \mathcal{C}\,{}^t\overline{V}^\downarrow = {}^t\!\left(\overline{V}^\downarrow\,{}^t\mathcal{C}\right) = -\,{}^t\!\left(\overline{V}^\downarrow\mathcal{C}\right), \quad U^\downarrow = {}^t\!\left(\overline{V}^\uparrow\mathcal{C}\right) \\ V^\uparrow = {}^t\!\left(\overline{U}^\downarrow\mathcal{C}\right), \quad V^\downarrow = -\,{}^t\!\left(\overline{U}^\uparrow\mathcal{C}\right) \end{aligned} \tag{2.104}$$

où les spineurs considérés ici sont attachés à la tétrade $[\,p\,]$ d'un 4-vecteur p du genre temps pointant vers le futur, on déduit

$$U^\uparrow = -\,{}^t\!\left(\overline{U}^\downarrow\Omega_c\right), \quad U^\downarrow = {}^t\!\left(\overline{U}^\uparrow\Omega_c\right), \quad V^\uparrow = {}^t\!\left(\overline{V}^\downarrow\Omega_c\right), \quad V^\downarrow = -\,{}^t\!\left(\overline{V}^\uparrow\Omega_c\right) \tag{2.105}$$

$$\text{soit encore}\quad U_\alpha^\uparrow = -\left(\overline{U}^\downarrow\Omega_c\right)_\alpha,\; U_\alpha^\downarrow = \left(\overline{U}^\uparrow\Omega_c\right)_\alpha,\; V_\alpha^\uparrow = \left(\overline{V}^\downarrow\Omega_c\right)_\alpha,\; V_\alpha^\downarrow = -\left(\overline{V}^\uparrow\Omega_c\right)_\alpha$$

2.3.1 Produits tensoriels à 2 spineurs

Posant $W^\uparrow = V^\downarrow,\ W^\downarrow = -V^\uparrow$, considérons les trois matrices

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)} &= U^\uparrow\,\overline{W}^\uparrow = U^\uparrow\,\overline{V}^\downarrow = -U^\uparrow\,\overline{U}^\downarrow\,\gamma_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\,\gamma(e^{(+)}) \\ \Psi^{(-)} &= U^\downarrow\,\overline{W}^\downarrow = -U^\downarrow\,\overline{V}^\uparrow = U^\downarrow\,\overline{U}^\uparrow\,\gamma_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\,\gamma(e^{(-)}) \\ \Psi^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^\uparrow\,\overline{W}^\downarrow + U^\downarrow\,\overline{W}^\uparrow\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^\uparrow\,\overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{V}^\downarrow\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^\uparrow\,\overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\,\overline{U}^\downarrow\right]\gamma_5 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,m+\gamma(p)\,]\,\gamma(z) \end{aligned} \tag{2.106}$$

où $e^{(\pm)} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy)$. Il est facile de montrer qu'elles forment une représentation de $\bar{\mathcal{L}}_+^\uparrow$ de spin 1. En effet, par transformation de Lorentz, chacune d'elle devient

$$\mathcal{L}(A)[\Psi(p)] = L(A)\,\Psi(A^{-1}p)\,L(A)^{-1} \tag{2.107}$$

27. ITL, §7.4.3.

ce qui implique notamment que l'action sur ces matrices du représentant de la composante de spin suivant z est donnée par [28]

$$\mathcal{S}_z[\Psi(p)] = [\, S_z\,, \Psi(p)\,] \tag{2.108}$$

Comme $S_z\, U_\sigma = \sigma\, U_\sigma$ et que

$$\overline{W}^{\uparrow}\, S_z = -\frac{1}{2}\, \overline{W}^{\uparrow}, \quad \overline{W}^{\downarrow}\, S_z = +\frac{1}{2}\, \overline{W}^{\downarrow} \tag{2.109}$$

on trouve aisément que

$$\mathcal{S}_z[\Psi^{(+)}(p)] = +\Psi^{(+)}(p), \quad \mathcal{S}_z[\Psi^{(0)}(p)] = 0, \quad \mathcal{S}_z[\Psi^{(-)}(p)] = -\Psi^{(-)}(p) \tag{2.110}$$

Les trois matrices en question peuvent ainsi servir de base pour décrire un système particule-antiparticule de spin 1. Quant à la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[U^{\uparrow}\, \overline{W}^{\downarrow} - U^{\downarrow}\, \overline{W}^{\uparrow} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\, [\, m + \gamma(p)\,]\, \gamma_5 \tag{2.111}$$

qui commute avec tous les opérateurs de spin $S_k(p)$, elle peut représenter, du point de vue du contenu en spin, un système quark-antiquark de spin 0.

De (2.64) et (2.105), on tire les formules suivantes [29].

$$\begin{aligned} (1 \times \Omega_c)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m}\left[\left(U^{\uparrow}\, \overline{U}^{\uparrow} + U^{\downarrow}\, \overline{U}^{\downarrow} - V^{\uparrow}\, \overline{V}^{\uparrow} - V^{\downarrow}\, \overline{V}^{\downarrow} \right) \Omega_c \right]_{\alpha\beta} \quad \text{soit} \\ [\, \Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m}\, [\, U^{\uparrow}\, U^{\downarrow} - U^{\downarrow}\, U^{\uparrow} + V^{\uparrow}\, V^{\downarrow} - V^{\downarrow}\, V^{\uparrow}\,]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.112}$$

Puis, successivement,

$$\begin{aligned} [\, \gamma(p)\, \Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[U^{\uparrow}\, U^{\downarrow} - U^{\downarrow}\, U^{\uparrow} - V^{\uparrow}\, V^{\downarrow} + V^{\downarrow}\, V^{\uparrow} \right]_{\alpha\beta} \\ [\, \gamma_5\, \Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[V^{\uparrow}\, U^{\downarrow} - V^{\downarrow}\, U^{\uparrow} + U^{\uparrow}\, V^{\downarrow} - U^{\downarrow}\, V^{\uparrow} \right]_{\alpha\beta} \\ [\, \gamma_5\, \gamma(p)\, \Omega_c\,]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[V^{\uparrow}\, U^{\downarrow} - V^{\downarrow}\, U^{\uparrow} - U^{\uparrow}\, V^{\downarrow} + U^{\downarrow}\, V^{\uparrow} \right]_{\alpha\beta} \\ [(\, m + \gamma(p)\,)\, \Omega_c]_{\alpha\beta} &= \left[U^{\uparrow}\, U^{\downarrow} - U^{\downarrow}\, U^{\uparrow} \right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.113}$$

Utilisant les formules [30]

$$\begin{gathered} \overline{U}^{\uparrow,\downarrow} \gamma_\mu\, U^{\uparrow,\downarrow} = 2\, p_\mu, \quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow} \gamma_\mu\, U^{\downarrow,\uparrow} = 0, \quad \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\, \gamma_\mu\, V^{\uparrow,\downarrow} = \pm 2\, m\, z_\mu, \\ \overline{U}^{\uparrow,\downarrow}\, \gamma_\mu\, V^{\downarrow,\uparrow} = \mp\, m\, \sqrt{2}\, e_\mu^{(\mp)} \end{gathered} \tag{2.114}$$

on déduit ($t_\mu = p_\mu / m$)

28. Notons ici que la définition des composantes de spin via l'opérateur de Pauli-Lubanski a pour vertu d'exclure de cette définition toute partie "orbitale" d'un moment cinétique, conférant ainsi au spin une valeur "intrinsèque". Ainsi, si l'on cherche à passer de (2.107) à (2.108) en considérant une transformation de Lorentz infinitésimale, on ne doit pas tenir compte du terme impliquant les dérivées partielles de Ψ par rapport aux composantes de p, terme dont l'apparition est usuellement attribuée à un moment cinétique "orbital".

29. Pour la clarté des formules, nous ommettons le symbole $\otimes$ des produits tensoriels.

30. Que l'on obtient à partir des formules du paragraphe 2.2.2 en calculant des traces, par exemple, $\overline{U}^{\uparrow,\downarrow} \gamma_\mu\, U^{\uparrow,\downarrow} = \mathrm{Tr}\, U^{\uparrow,\downarrow}\, \overline{U}^{\uparrow,\downarrow} \gamma_\mu$.

$$
\begin{aligned}
2\, m\, \gamma_\mu = t_\mu & \left\{ U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow + V^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow + V^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow \right\} + \\
-z_\mu & \left\{ U^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow + V^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow \right\} + \\
+\sqrt{2}\, e_\mu^{(+)} & \left\{ V^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow + U^\downarrow\, \overline{V}^\uparrow \right\} - \sqrt{2}\, e_\mu^{(-)} \left\{ U^\uparrow\, \overline{V}^\downarrow + V^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow \right\}
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

$$
\begin{aligned}
2\, m\, (\, \gamma_\mu\, \Omega_c\,)_{\alpha\beta} = t_\mu & \left\{ U^\uparrow\, U^\downarrow - U^\downarrow\, U^\uparrow - V^\uparrow\, V^\downarrow + V^\downarrow\, V^\uparrow \right\}_{\alpha\beta} + \\
-z_\mu & \left\{ V^\uparrow\, U^\downarrow + V^\downarrow\, U^\uparrow - U^\uparrow\, V^\downarrow - U^\downarrow\, V^\uparrow \right\}_{\alpha\beta} + \\
+\sqrt{2}\, e_\mu^{(+)} & \left\{ V^\downarrow\, U^\downarrow - U^\downarrow\, V^\downarrow \right\}_{\alpha\beta} - \sqrt{2}\, e_\mu^{(-)} \left\{ U^\uparrow\, V^\uparrow - V^\uparrow\, U^\uparrow \right\}_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

$$
\gamma_\mu\, U^\uparrow = t_\mu\, U^\uparrow - z_\mu\, V^\uparrow + \sqrt{2}\, e_\mu^{(+)}\, V^\downarrow
\tag{2.117}
$$

$$
\begin{aligned}
m\, \left\{ \gamma(e^{(+)})\, \Omega_c \right\}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ U^\uparrow\, V^\uparrow - V^\uparrow U^\uparrow \right\}_{\alpha\beta} \\
m\, \left\{ \gamma(e^{(-)})\, \Omega_c \right\}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ U^\downarrow\, V^\downarrow - V^\downarrow U^\downarrow \right\}_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

Le développement (2.115) permet d'obtenir le commutateur :

$$
\begin{aligned}
m\, [\, \gamma_\mu, \gamma_\nu\,] = -\left\{ t_\mu\, z_\nu - z_\mu\, z_\nu \right\} & \left\{ U^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow - V^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + V^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow \right\} + \\
-\sqrt{2} \left\{ t_\mu\, e_\nu^{(+)} - t_\nu\, e_\mu^{(+)} \right\} & \left\{ V^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow - U^\downarrow\, \overline{V}^\uparrow \right\} + \\
+\sqrt{2} \left\{ t_\mu\, e_\nu^{(-)} - t_\nu\, e_\mu^{(-)} \right\} & \left\{ V^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow - U^\uparrow\, \overline{V}^\downarrow \right\} \\
-\sqrt{2} \left\{ z_\mu\, e_\nu^{(+)} - z_\nu\, e_\mu^{(+)} \right\} & \left\{ U^\downarrow\, \overline{U}^\uparrow - V^\downarrow\, \overline{V}^\uparrow \right\} + \\
+\sqrt{2} \left\{ z_\mu\, e_\nu^{(-)} - z_\nu\, e_\mu^{(-)} \right\} & \left\{ V^\uparrow\, \overline{V}^\downarrow - U^\uparrow\, \overline{U}^\downarrow \right\} + \\
-\left\{ e_\mu^{(+)}\, e_\nu^{(-)} - e_\nu^{(+)}\, e_\mu^{(-)} \right\} & \left\{ U^\uparrow\, \overline{U}^\uparrow + V^\downarrow\, \overline{V}^\downarrow - U^\downarrow\, \overline{U}^\downarrow - V^\uparrow\, \overline{V}^\uparrow \right\}
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\, \gamma_\mu\, ,\, \gamma_\nu\,]\, U^\uparrow &= \left\{ t_\mu z_\nu - t_\nu z_\mu \right\} V^\uparrow - \left\{ e_\mu^{(+)} e_\nu^{(-)} - e_\nu^{(+)} e_\mu^{(-)} \right\} U^\uparrow + \\
&\quad -\sqrt{2} \left\{ t_\mu e_\nu^{(+)} - t_\nu e_\mu^{(+)} \right\} V^\downarrow - \sqrt{2} \left\{ z_\mu e_\nu^{(+)} - z_\nu e_\mu^{(+)} \right\} U^\downarrow
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

et

$$
\begin{aligned}
[\, \gamma_\mu\, ,\, \gamma(p)\,] = z_\mu & \left\{ U^\uparrow \overline{V}^\uparrow - U^\downarrow \overline{V}^\downarrow - V^\uparrow \overline{U}^\uparrow + V^\downarrow \overline{U}^\downarrow \right\} + \\
+\sqrt{2}\, e_\mu^{(+)} & \left\{ V^\downarrow \overline{U}^\uparrow - U^\downarrow \overline{V}^\uparrow \right\} - \sqrt{2}\, e_\mu^{(-)} \left\{ V^\uparrow \overline{U}^\downarrow - U^\uparrow \overline{V}^\downarrow \right\}
\end{aligned}
\tag{2.121}
$$

Toutes ces formules indiquent que, comme il se doit, les éléments d'une quelconque matrice 4×4, peuvent être exprimés au moyen des tenseurs-spineurs de rang deux : UU, UV, VU et VV.

2.3.2 Produits tensoriels à 3 spineurs [31]

A partir des formules précédentes, il est facile d'établir les suivantes concernant des tenseurs-spineurs de rang trois.

$$\begin{aligned}2m\,\{\,\gamma_\mu\,\Omega_c\,\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_\mu U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\uparrow_\delta \\ &- \left\{V^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow V^\uparrow - U^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\uparrow_\delta + \\ &+2\left\{V^\uparrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\downarrow_\delta\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}\{\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\nu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma^\mu\,U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\downarrow_\delta + \\ &-\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\uparrow_\delta\end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma_5\,\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\nu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\gamma^\mu\,U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{V^\uparrow V^\uparrow + U^\uparrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\downarrow_\delta + \\ &-\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow U^\downarrow + U^\downarrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\uparrow_\delta\end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned}\{\,\gamma_\mu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\bar\sigma_{\mu\nu}p^\nu\,U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{V^\uparrow U^\uparrow - U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\downarrow_\delta + \\ &+\frac{1}{2}\left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow - V^\uparrow U^\downarrow - V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\uparrow_\delta\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_5\gamma_\mu\Omega_c)_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\bar\sigma_{\mu\nu}p^\nu\,U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow U^\uparrow - V^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\downarrow_\delta + \\ &+\frac{1}{2}\left\{V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow - U^\uparrow U^\downarrow - U^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\uparrow_\delta\end{aligned} \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned}-m\,\{\bar\sigma_{\mu\nu}\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\bar\sigma^{\mu\nu}U^\uparrow\right\}_\delta &= \left\{U^\uparrow U^\downarrow + U^\downarrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\uparrow_\delta + \\ &+\left\{U^\uparrow V^\downarrow + U^\downarrow V^\uparrow + V^\uparrow U^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\uparrow_\delta + \\ &-2\left\{U^\uparrow U^\uparrow + V^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} U^\downarrow_\delta - 2\left\{V^\uparrow U^\uparrow + U^\uparrow V^\uparrow\right\}_{\alpha\beta} V^\downarrow_\delta\end{aligned} \tag{2.127}$$

où l'on a posé $\bar\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu]/2$. On peut ainsi exprimer à l'aide des tenseurs de rang trois construits à partir des spineurs U et V toute forme du type $(M\,\Omega_c)_{\alpha\beta}\,(M'U)_\delta$ où M et M' sont des matrices de la base des 16 matrices de Dirac $1,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_\mu\,\gamma_5,\ \sigma_{\mu\nu} = \dfrac{i}{4}\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Il est évident que le nombre de telles formes étant limité à 64, elles ne sont pas toutes indépendantes. On trouve par exemple la relation :

$$\begin{aligned}\{\gamma_5\,\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\mu\,\Omega_c\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma_5\gamma^\nu U^\uparrow\right\}_\delta &+ \{\,\bar\sigma_{\mu\nu}\,p^\mu\,\Omega_c\,\}_{\alpha\beta}\left\{\gamma^\nu U^\uparrow\right\}_\delta \\ &= -\frac{m}{2}\,\{\bar\sigma_{\mu\nu}\,\Omega_c\,\}_{\alpha\beta}\left\{\bar\sigma^{\mu\nu}U^\uparrow\right\}_\delta\end{aligned} \tag{2.128}$$

Inversement, tout tenseur de rang trois peut être exprimé au moyen de telles formes. Par exemple, le tenseur complètement symétrique

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{18}}\left\{\left(V^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow V^\uparrow\right) U^\uparrow + \left(U^\uparrow V^\downarrow + V^\downarrow U^\uparrow\right) V^\uparrow + \right.$$

31. V. Bargmann, E.P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sc. (USA) 34, 211 (1948) ; W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941) ; M. D. Nykerk, "Quantizing spin 3/2 fields", rapport NIKHEF-95-002 (Jan. 1995) ; I. Lovas, K. Sailer, W. Greiner, "Generalized Rarita-Schwinger equations", Heavy Ion Physics 8 (1998) 237-245.

$$+\left(V^{\uparrow}U^{\uparrow}+U^{\uparrow}V^{\uparrow}\right)V^{\downarrow}-2U^{\downarrow}V^{\uparrow}V^{\uparrow}-2V^{\uparrow}U^{\downarrow}V^{\uparrow}-2V^{\uparrow}V^{\uparrow}U^{\downarrow}\big\} \tag{2.129}$$

et le tenseur complètement antisymétrique

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\frac{1}{\sqrt{6}}\big\{&\left(U^{\uparrow}V^{\downarrow}-V^{\downarrow}U^{\uparrow}\right)V^{\uparrow}-\left(V^{\uparrow}V^{\downarrow}-V^{\downarrow}V^{\uparrow}\right)U^{\uparrow}+\\&+\left(V^{\uparrow}U^{\uparrow}-U^{\uparrow}V^{\uparrow}\right)V^{\downarrow}\big\}\end{aligned} \tag{2.130}$$

s'expriment aussi comme

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\alpha\beta\delta}&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^{\nu}\,\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma^{\mu}U^{\uparrow}\right)_{\delta}+\left(\gamma^{\mu}\,\Omega_c\,\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5\,\bar{\sigma}_{\mu\nu}\,p^{\nu}U^{\uparrow}\right)_{\delta}\right\}\\ \mathcal{A}_{\alpha\beta\delta}&=\frac{m}{\sqrt{6}}\left\{\left(\gamma^{\mu}\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_{\mu}U^{\uparrow}\right)_{\delta}-\left(\Omega_c\right)_{\alpha\beta}U^{\uparrow}_{\delta}+\left(\gamma_5\Omega_c\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5U^{\uparrow}\right)_{\delta}\right\}\end{aligned} \tag{2.131}$$

2.4 Complément I : Amplitudes spinorielles de spin 1 et 4-potentiel [32]

Il nous paraît opportun de préciser ici le lien entre la description des états d'une particule de spin 1 au moyen d'amplitudes spinorielles et celle, plus courante, à l'aide d'un 4-vecteur, appelé 4-potentiel en Electromagnétisme, s'agissant dans ce cas du photon.

☞ Pour commencer, nous supposerons que la particule considérée a une masse m non nulle. Du point de vue du groupe de Poincaré, les états de cette particule appartiennent à une représentation irréductible $[\,m, 1, \eta\,]$ de ce groupe (η est la parité de la particule). L'état correspondant à une 4-impulsion donnée p et à une valeur propre σ de la composante de spin suivant un 4-vecteur $z(p)$ associé à p dans une tétrade $[\,p\,]$, est noté $|\,[\,p\,], \sigma >$, σ pouvant prendre les valeurs -1, 0 ou 1 (voir Eq. 1.31 et suivantes). L'ensemble des vecteurs $|\,[\,p\,], \sigma >$ pour différentes valeurs de p et de σ formant une base de l'espace des états de la particule [33], un état quelconque $|\,\phi >$ de celle-ci est complètement déterminé par la donnée des amplitudes indépendantes :

$$\phi_\sigma([\,p\,]) \;= <\sigma, [\,p\,]\,|\,\phi > \tag{2.132}$$

Comme signalé au paragraphe 1.3.1, les états $|\,[\,p\,], \sigma >$ dépendent du choix de la tétrade $[\,p\,]$. Le changement de tétrade $[\,p\,] \to [\,p\,]'$ modifie les amplitudes (2.132) de la façon suivante [34] :

$$\phi_{\sigma'}([\,p\,]') = \mathcal{D}^1_{\sigma'\sigma}([\,p\,]'^{\,\dagger}\,[\,p\,]^{\dagger -1})\,\phi_\sigma([\,p\,]) = \mathcal{D}^1_{\sigma'\sigma}([\,p\,]'^{\,-1}[\,p\,])\,\phi_\sigma([\,p\,]) \tag{2.133}$$

la sommation sur l'indice σ étant implicite. On montre que les amplitudes

$$\varphi_\sigma(p) = \mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}([\,p\,])\,\phi_{\sigma'}([\,p\,]) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_\sigma(p) = \mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{\dagger -1})\,\phi_{\sigma'}([\,p\,]) \tag{2.134}$$

(avec sommation sur σ') sont indépendantes du choix de tétrade : ce sont les amplitudes spinorielles attachées à l'état $|\,\phi >$. Les deux types d'amplitudes ne peuvent être indépendants car, la valeur de p étant fixée, il ne doit y avoir que $2s + 1 = 3$ amplitudes indépendantes. De fait, les amplitudes spinorielles sont liées entre elles par un système d'équations analogue à l'équation de Dirac :

$$\begin{gathered} \varphi_\sigma(p) = \mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(\underset{\sim}{t}\,)\,\widehat{\varphi}_{\sigma'}(p) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_\sigma(p) = \mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(\,\widetilde{t}\,)\,\varphi_{\sigma'}(p) \\ \text{avec} \quad t = p/m, \quad \underset{\sim}{t} = \;[\,p\,]\,[\,p\,]^\dagger = t_0 + \overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{\tau}, \quad \widetilde{t} = \underset{\sim}{t}^{-1} = t_0 - \overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{\tau} \end{gathered} \tag{2.135}$$

Par une transformation (a, A) du groupe de Poincaré restreint, on a

$$\begin{gathered} {}^{(a,A)}\phi_\sigma([\,p\,]) \;=\; e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}([\,p\,]^{-1}A\,[\,A^{-1}p])\,\phi_{\sigma'}([\,A^{-1}p\,]) \\ {}^{(a,A)}\varphi_\sigma(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(A)\,\varphi_{\sigma'}(A^{-1}p), \quad {}^{(a,A)}\widehat{\varphi}_\sigma(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(A^{\dagger -1})\,\widehat{\varphi}_{\sigma'}(A^{-1}p) \end{gathered} \tag{2.136}$$

Introduisant les vecteurs unicolonnes

$$\psi([\,p\,]) = \begin{pmatrix} \phi_1([\,p\,]) \\ \phi_0([\,p\,]) \\ \phi_{-1}([\,p\,]) \end{pmatrix}, \quad \varphi(p) = \begin{pmatrix} \varphi_1(p) \\ \varphi_0(p) \\ \varphi_{-1}(p) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(p) \\ \widehat{\varphi}_0(p) \\ \widehat{\varphi}_{-1}(p) \end{pmatrix} \tag{2.137}$$

32. P. Moussa, R. Stora, loc.cit, p285.
33. Pour simplifier, nous passons ici sous silence l'existence possible d'autres nombres quantiques définissant complètement la particule.
34. $R = [\,p\,]'^{\,\dagger}\,[\,p\,]^{\dagger -1}$ étant une matrice de rotation du petit groupe de p, on a $R = R^{\dagger -1} = [\,p\,]'^{\,-1}\,[\,p\,]$.

les formules (2.133), (2.134), (2.135) et (2.136) peuvent être récrites sous forme matricielle :

$$
\begin{aligned}
&\psi([\,p\,]') = \mathcal{D}^1([\,p\,]'^{\,-1}[\,p\,])\,\psi([\,p\,])\\
&\varphi(p) = \mathcal{D}^1([\,p\,])\,\psi([\,p\,]), \quad \widehat{\varphi}(p) = \mathcal{D}^1([\,p\,]^{\dagger -1})\,\psi([\,p\,])\\
&\varphi(p) = \mathcal{D}^1(\underset{\sim}{t})\,\widehat{\varphi}(p), \quad \widehat{\varphi}(p) = \mathcal{D}^1(\widetilde{t})\,\varphi(p)\\
&{}^{(a,A)}\psi([\,p\,]) \;=\; e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1([\,p\,]^{-1}A\,[\,A^{-1}p\,])\,\psi([\,A^{-1}p\,])\\
&{}^{(a,A)}\varphi(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1(A)\,\varphi(A^{-1}p), \quad {}^{(a,A)}\widehat{\varphi}(p) = e^{ia\cdot p}\;\mathcal{D}^1(A^{\dagger -1})\,\widehat{\varphi}(A^{-1}p)
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

Donnons ici explicitement l'expression de la matrice $\mathcal{D}^1(M)$ où M est une matrice de $SL(2,C)$:

$$
M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; \mathcal{D}^1(M) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\,\alpha\,\beta & \beta^2 \\ \sqrt{2}\,\alpha\,\gamma & \alpha\,\delta+\beta\,\gamma & \sqrt{2}\,\beta\,\delta \\ \gamma^2 & \sqrt{2}\,\gamma\,\delta & \delta^2 \end{pmatrix}
\tag{2.139}
$$

Il est connu que la relation matricielle $\psi' = \mathcal{D}^1(M)\,\psi$, où ψ et ψ' sont des vecteurs à trois composantes et M une matrice 2×2 inversible, peut être transcrite en termes de matrices 2×2. Représentons en effet ψ et ψ' par les matrices

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 & -\sqrt{2}\,\psi_1 \\ \sqrt{2}\,\psi_{-1} & -\psi_0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{\Psi'} = \begin{pmatrix} \psi'_0 & -\sqrt{2}\,\psi'_1 \\ \sqrt{2}\,\psi'_{-1} & -\psi'_0 \end{pmatrix} \;; \quad \text{on a alors}\\
&\boldsymbol{\Psi'} = M\,\boldsymbol{\Psi}\,M^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

En représentant les vecteurs $\psi([\,p\,])$, $\phi(p)$ et $\widehat{\varphi}(p)$ par les matrices

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \phi_0 & -\sqrt{2}\,\phi_1 \\ \sqrt{2}\,\phi_{-1} & -\phi_0 \end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_0 & -\sqrt{2}\,\varphi_1 \\ \sqrt{2}\,\varphi_{-1} & -\varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0 & -\sqrt{2}\,\widehat{\varphi}_1 \\ \sqrt{2}\,\widehat{\varphi}_{-1} & -\widehat{\varphi}_0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.141}
$$

respectivement, les équations (2.133), (2.134), (2.135) et (2.136) prennent la forme [35] :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}([\,p\,]') = [\,p\,]'^{-1}[\,p\,]\,\boldsymbol{\Psi}([\,p\,])\,[\,p\,]^\dagger\,[\,p\,]'^{\,\dagger -1}\\
&\boldsymbol{\Phi}(p) = [\,p\,]\,\boldsymbol{\Psi}([\,p\,])\;[\,p\,]^{-1}, \quad \widehat{\boldsymbol{\Phi}}(p) = [\,p\,]^{\dagger -1}\,\boldsymbol{\Psi}([\,p\,])\;[\,p\,]^\dagger\\
&\boldsymbol{\Phi}(p) = \underset{\sim}{t}\;\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(p)\;\widetilde{t} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\Phi}(p)\;\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{t}\;\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(p)\\
&{}^{(a,A)}\boldsymbol{\Psi}([\,p\,]) = e^{ia\cdot p}\;[\,p\,]^{-1}A\,[\,A^{-1}p\,]\;\boldsymbol{\Psi}([\,A^{-1}p\,])\,[\,A^{-1}p\,]^\dagger\,A^\dagger\,[\,p\,]^{\dagger -1}\\
&{}^{(a,A)}\boldsymbol{\Phi}(p) = e^{ia\cdot p}\;A\;\boldsymbol{\Phi}(A^{-1}p)\,A^{-1}, \quad {}^{(a,A)}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(p) = e^{ia\cdot p}\;A^{\dagger -1}\;\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(A^{-1}p)\,A^\dagger
\end{aligned}
\tag{2.142}
$$

Les matrices (2.141) peuvent aussi s'écrire sous forme “cartésienne” ; on a par exemple

35. A la quatrième ligne, on tient compte du fait que $R_W = [\,p\,]^{-1}A\,[\,A^{-1}p\,]$ est une matrice de rotation : $R_W^{-1} = R_W^\dagger = [\,A^{-1}p\,]^\dagger\,A^\dagger\,[\,p\,]^{\dagger -1}$.

$$\mathbf{\Psi} = \underset{\sim}{V} = V^0 + \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\tau} \quad \text{avec} \tag{2.143}$$

$$V^0 = 0, \quad V^1 = V_x = \frac{\psi_{-1} - \psi_1}{\sqrt{2}}, \quad V^2 = V_y = -i\,\frac{\psi_{-1} + \psi_1}{\sqrt{2}}, \quad V^3 = V_z = \psi_0$$

La première des relations (2.142) montre que la matrice

$$\boxed{\underset{\sim}{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^0 + \overrightarrow{\mathcal{A}} \cdot \overrightarrow{\tau} = [\,p\,]\,\mathbf{\Psi}([\,p\,])\,[\,p\,]^\dagger} \tag{2.144}$$

est manifestement indépendante du choix de la tétrade $[\,p\,]$, tandis que la quatrième de ces relations donne sa loi de transformation :

$$\boxed{{}^{(a,A)}\underset{\sim}{\mathcal{A}}(p) = e^{ia\cdot p}\; A\; \underset{\sim}{\mathcal{A}}(A^{-1}p)\; A^\dagger} \tag{2.145}$$

de laquelle on déduit que les quatre grandeurs $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}^k$ $(k = 1, 2, 3)$ se transforment bien comme les composantes contravariantes d'un champ de 4-vecteurs $\mathcal{A}(p)$. Notons

$$e^{(0)}([\,p\,]) \equiv z, \quad e^{(\pm)}([\,p\,]) \equiv \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x \pm iy) \tag{2.146}$$

la base de tri-vecteurs associés à $t = p/m$ dans la tétrade $[\,p\,]$. Comme

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Psi} = \phi_0\,\tau_3 - \sqrt{2}\;\phi_1\,\frac{1}{2}\,[\,\tau_1 + i\tau_2\,] + \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\,\phi_{-1}\;[\,\tau_1 - i\tau_2\,] \\ \text{et que} \quad &[\,p\,]\,\tau_3\,[\,p\,]^\dagger = \underset{\sim}{e}^{(0)}([\,p\,]), \quad \mp[\,p\,]\,\frac{1}{\sqrt{2}}\;[\tau_1 \pm i\tau_2\,]\;[\,p\,]^\dagger = \;\underset{\sim}{e}^{(\pm)}([\,p\,]), \end{aligned} \tag{2.147}$$

les composantes covariantes du 4-vecteur $\mathcal{A}$ s'expriment donc sous la forme

$$\boxed{\mathcal{A}_\mu(p) = \sum_{\lambda=\pm1,0} e_\mu^{(\lambda)}([\,p\,])\;\phi_\lambda([\,p\,])} \tag{2.148}$$

montrant, d'une part, que ce 4-vecteur contient toutes les informations caractérisant l'état $|\,\phi >$ et, d'autre part, qu'il est *orthogonal à* p :

$$\boxed{p_\mu\,\mathcal{A}^\mu(p) = 0} \tag{2.149}$$

C'est le 4-vecteur "4-potentiel" recherché dont l'utilisation pour décrire les états de spin de la particule de spin 1 est équivalente à celle fournie par les amplitudes spinorielles. A partir de là, on peut définir les tenseurs antisymétriques usuels, duaux l'un vis-à-vis de l'autre et orthogonaux à p[36] :

36. A noter que le tenseur $F_{\mu\nu}(p) = -i\,[\,p_\mu\,\mathcal{A}_\nu - p_\nu\,\mathcal{A}_\mu]$ équivaut au tenseur $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\,\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\,\mathcal{A}_\mu$ dans le cas d'une onde plane $\mathcal{A}_\mu(x) = e^{-ip\cdot x}\,\mathcal{A}_\mu(p)$.

$$F_{\mu\nu} = -i\,(p_\mu\,\mathcal{A}_\nu - p_\nu\,\mathcal{A}_\mu)\,, \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\rho\sigma} = -i\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\alpha\,\mathcal{A}^\beta \tag{2.150}$$

et de plus *invariants de jauge*, c'est-à-dire, insensibles à la *transformation de jauge* consistant à effectuer le changement :

$$\boxed{\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}_\mu + c\,p_\mu} \tag{2.151}$$

c étant un nombre quelconque. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est bien orthogonal à p, on a, inversement,

$$\mathcal{A}_\mu = -\frac{i}{2m^2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,p^\nu\,G^{\alpha\beta} \tag{2.152}$$

et dans ce cas, on a aussi les relations

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}(p) = \mathbf{\Phi}(p)\,\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{t}\,\widehat{\mathbf{\Phi}}(p) \tag{2.153}$$

Pour achever de montrer l'équivalence entre la description des états de la particule au moyen de bi-spineurs construits au moyen d'amplitudes spinorielles, et celle utilisant un 4-vecteur, considérons le produit scalaire hermitique des tenseurs $F_{a\mu\nu}(p)$ et $F_{b\mu\nu}(p)$ respectivement associés aux états $|\,a>$ et $|\,b>$ de la particule :

$$F^\star_{a\,\mu\nu}\,F_b{}^{\mu\nu} = -G^\star_{a\,\mu\nu}\,G_b^{\mu\nu} = 2\,m^2\,\mathcal{A}^\star_a\cdot\mathcal{A}_b = -2\,m^2\sum_\lambda \phi^\star_{a\lambda}\,\phi_{b\lambda}$$

Dans la représentation bi-spinorielle des états de la particule [37], les bi-spineurs à 6 composantes

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_a\\ \widehat{\phi}_a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_b\\ \widehat{\phi}_b\end{pmatrix}$$

ont pour produit scalaire invariant [38]

$$\overline{\Phi}_a\,\Phi_b = \Phi_a^\dagger\,\Gamma_0\,\Phi_b = \frac{1}{2}\left\{\phi_a^\dagger\,\widehat{\phi}_b + \widehat{\phi}_a^\dagger\,\phi_b\right\} = \sum_\lambda \phi^\star_{a\lambda}\,\phi_{b\lambda}$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{1}{2m^2}\,F^\star_{a\,\mu\nu}\,F_b{}^{\mu\nu} = \mathcal{A}^\star_a\cdot\mathcal{A}_b = -\,\overline{\Phi}_a\,\Phi_b} \tag{2.154}$$

Il reste enfin à considérer le cas où l'état de la particule est lui-même un état $|\,[\,p\,],\sigma>$, pour lequel les amplitudes spinorielles contiennent une distribution de Dirac, puisqu'alors

$$\phi_{\sigma'}([\,p'\,]) = <\sigma',[\,p'\,]\,|\,[\,p\,],\sigma> = (2\pi)^2\,2\,p_0\,\delta(\overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p})\,\delta_{\sigma,\sigma'}$$

Dans ce cas, en extrayant la distribution de Dirac et d'autres facteurs, on voit que le 4-vecteur (2.148) correspondant est simplement égal au 4-vecteur de polarisation $e^{(\sigma)}([\,p\,])$.

37. ITL, Chap. 6.

38. $\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_3\\ 1_3 & 0\end{pmatrix}$ où 1_3 est la matrice 3×3 unité.

☞ Passons ensuite au cas d'une particule vectorielle de masse nulle, comme le photon. Du point de vue du groupe de Poincaré restreint, les états d'une telle particule n'appartiennent qu'à une seule des deux représentations irréductibles, donc *indépendantes*, $[\,m=0, \lambda=+1\,]$ et $[\,m=0, \lambda=-1\,]$ où λ, l'équivalent d'une projection de spin et appelé ici hélicité de la particule, ne prend pour chacune qu'une seule valeur, invariante relativiste. Cependant, l'opération de parité changeant le signe de λ, une représentation irréductible du groupe de Poincaré complet (comprenant les symétries parité, renversement du sens du temps et réflexion totale) doit être constituée par leur somme directe. C'est pourquoi le photon, pour lequel l'opération de parité est une symétrie, possède deux états d'hélicités $\lambda=-1$ et $\lambda=+1$ opposées. Dans ce qui suit, nous noterons ℓ la 4-impulsion de la particule, avec ici $\ell^2=0$. Pour un état quelconque $|\,\phi>$, il n'existe donc que deux amplitudes (2.132) :

$$\phi_1([\,\ell\,]) = <+1,[\,\ell\,]\,|\,\phi> \quad \text{et} \quad \phi_{-1}([\,\ell\,]) = <-1,[\,\ell\,]\,|\,\phi> \tag{2.155}$$

dont la dépendance vis-à-vis du choix de la tétrade $[\,\ell\,]$ est révélée par

$$\phi_\lambda([\,\ell\,]') = \mathcal{D}^1_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]'^{-1}\,[\,\ell\,])\,\phi_\lambda([\,\ell\,]) \tag{2.156}$$

Les amplitudes spinorielles, indépendantes de ce choix, sont de deux types et définies par

$$\varphi^+_\sigma(\ell) = \mathcal{D}^1_{\sigma,+1}([\,\ell\,])\,\phi_1([\,\ell\,]) \quad \text{et} \quad \varphi^-_\sigma(\ell) = \mathcal{D}^1_{\sigma,-1}([\,\ell\,]^{\dagger-1})\,\phi_{-1}([\,\ell\,]) \tag{2.157}$$

avec $\sigma=-1$, 0 ou $+1$. Elles vérifient les équations

$$\mathcal{D}^1(\,\underset{\sim}{\ell}\,)\,\varphi^+(\ell) = 0\,, \quad \mathcal{D}^1(\,\widetilde{\ell}\,)\,\varphi^-(\ell) = 0 \tag{2.158}$$

Toutes ces amplitudes ont pour lois de transformation

$$\begin{gathered} {}^{(a,A)}\phi_\lambda([\,\ell\,]) \;=\; e^{ia\cdot\ell}\;\mathcal{D}^1_{\lambda\lambda}([\,\ell\,]^{-1}A\,[\,A^{-1}\ell\,])\,\phi_\lambda([\,A^{-1}\ell\,]) \\ {}^{(a,A)}\varphi^+_\sigma(\ell) = e^{ia\cdot\ell}\;\mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(A)\,\varphi^+_{\sigma'}(A^{-1}\ell)\,, \quad {}^{(a,A)}\varphi^-_\sigma(\ell) = e^{ia\cdot\ell}\;\mathcal{D}^1_{\sigma\sigma'}(A^{\dagger-1})\,\varphi^-_{\sigma'}(A^{-1}\ell) \end{gathered} \tag{2.159}$$

(avec sommation sur σ').

Rappelons ici que le petit groupe d'un 4-vecteur du genre lumière ℓ n'est plus $SU(2)$ mais un groupe isomorphe au groupe des déplacements dans un 2-plan euclidien, $P(2)$. Agissant sur les 4-vecteurs, il comprend un sous-groupe abélien de rotations dans un 2-plan (x,y) orthogonal à ℓ et un autre sous-groupe abélien translatant parallèlement à ℓ les 4-vecteurs de ce plan (groupe de jauge de ℓ). Les matrices de $SL(2,C)$ appartenant au petit groupe du 4-vecteur isotrope de référence $\mathring{\ell} = \kappa(1,0,0,1)$ sont de la forme indiquée par la formule (2.35) :

$$M(\zeta,\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & \zeta\,e^{i\theta/2} \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

ζ étant un nombre complexe quelconque. Puisque $[\,\ell\,]'^{-1}\,[\,\ell\,]$ appartient à ce petit groupe, on a notamment $\mathcal{D}^j_{mm}(M(\zeta,\theta)) = e^{-im\theta}$. En se reportant à (2.156), on voit qu'un changement de tétrade provoque un simple changement de phase des amplitudes (2.155).

A l'évidence, l'équivalent pour masse nulle du 4-vecteur (2.148) doit être le suivant :

$$\boxed{\mathcal{A}_\mu(\ell) = \; e^{(+)}_\mu([\,\ell\,])\;\phi_1([\,\ell\,]) + \; e^{(-)}_\mu([\,\ell\,])\;\phi_{-1}([\,\ell\,])} \tag{2.160}$$

qui est manifestement orthogonal à ℓ. Examinons tout d'abord sa dépendance vis-à-vis du choix de tétrade. Définissons

$$\mathbf{\Psi}([\,\ell\,]) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\,\phi_1([\,\ell\,]) \\ \sqrt{2}\,\phi_{-1}([\,\ell\,]) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.161}$$

Compte tenu de ce que

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{e}^{(+)}([\,\ell\,]) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,\ell\,]\;(\tau_1 + i\tau_2)\;[\,\ell\,]^\dagger = -\sqrt{2}\,[\,\ell\,]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[\,\ell\,]^\dagger \\ \underset{\sim}{e}^{(-)}([\,\ell\,]) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,\ell\,]\;(\tau_1 - i\tau_2)\;[\,\ell\,]^\dagger = \sqrt{2}\,[\,\ell\,]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}[\,\ell\,]^\dagger \end{aligned} \tag{2.162}$$

la transcription de (2.160) en matrices 2×2 est

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}(\ell) = [\,\ell\,]\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,])\,[\,\ell\,]^\dagger \tag{2.163}$$

Posons alors

$$M = [\,\ell\,]'^{\,-1}\,[\,\ell\,] \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = e^{-i\theta/2} = \delta^\star, \quad \beta = \zeta\,\delta \tag{2.164}$$

et calculons :

$$M\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,])\,M^\dagger = \sqrt{2}\,\left(-\alpha^2\,\zeta^\star\,\phi_1 + \zeta\,\delta^2\,\phi_{-1}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2\,\sqrt{2}\,\phi_1 \\ \delta^2\,\sqrt{2}\,\phi_{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Or, d'une part, d'après (2.156), on a $\phi_1([\,\ell\,]') = \alpha^2\,\phi_1([\,\ell\,])$, $\phi_{-1}([\,\ell\,]') = \delta^2\,\phi_{-1}([\,\ell\,])$; d'autre part [39],

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa}\;\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}$$

En posant $\xi = (\zeta^\star\,\phi_1([\,\ell\,]') - \zeta\,\phi_{-1}([\,\ell\,]')/(2\kappa)$, on obtient ainsi

$$M\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,])\,M^\dagger = -\xi\;\underset{\sim}{\overset{\circ}{\ell}}\; + \;\mathbf{\Psi}([\,\ell\,]')$$

et finalement

$$\boxed{\underset{\sim}{\mathcal{A}}([\,\ell\,]') \;=\; \underset{\sim}{\mathcal{A}}([\,\ell\,]) + \xi\;\underset{\sim}{\ell}} \tag{2.165}$$

Ainsi, le changement de tétrade provoque une translation du vecteur $\mathcal{A}$ parallèlement à ℓ. Ce résultat n'est pas surprenant, compte tenu des propriétés du petit groupe de ℓ rappelées plus haut. On peut définir un 4-potentiel indépendant de la tétrade en lui imposant de rester dans le 2-plan engendré par les 4-vecteurs $e^{(+)}$ et $e^{(-)}$. Comme il est déjà orthogonal à ℓ, cela équivaut à lui imposer la condition subsidiaire

39. La tétrade $[\,\ell\,]$ est telle que $[\,\ell\,]\,[\,\ell\,]^\dagger \;=\; \underset{\sim}{t}$, $[\,\ell\,]\,\tau_3\,[\,\ell\,]^\dagger \;=\; \underset{\sim}{z}$, $\ell = \kappa(t+z)$, $\kappa = \ell\cdot t$.

$$\boxed{\mathcal{A} \cdot t = 0} \tag{2.166}$$

Les changements de tétrade reviennent alors à de simples rotations dans le 2-plan orthogonal à ℓ et t (qui est aussi celui orthogonal à t et z), ce qui équivaut aussi à poser $\zeta = 0$ dans la matrice correspondante (2.4). Dans cette transformation, le 4-vecteur $e^{(\lambda)}$ subit un changement de phase opposé à celui de l'amplitude ϕ_λ à laquelle il est associé, laissant ainsi le 4-vecteur $\mathcal{A}$ inchangé.

La loi de transformation (2.159) fait intervenir la matrice $N = [\,\ell\,]^{-1}\,A\,[\,A^{-1}\ell\,]$ qui elle aussi appartient au petit groupe de $\overset{\circ}{\ell}$. En conséquence, la transformation correspondante du 4-vecteur (2.160) provoque encore une translation parallèlement à ℓ. Le lecteur vérifiera que l'on a

$$\begin{gathered}
{}^{(a,A)}\underset{\sim}{\mathcal{A}}([\,\ell\,]) \;=\; e^{ia\cdot\ell}\;A\;\underset{\sim}{\mathcal{A}}([A^{-1}\ell\,])\,A^\dagger + \eta\;\underset{\sim}{\ell} \\
e_\mu^{(+)}([\,A\ell\,]) = \Lambda^\nu{}_\mu(A)\left[e^{i\theta}\,e_\nu^{(+)}([\,\ell\,]) + \zeta^\star\,\ell_\nu\right], \\
e_\mu^{(-)}([\,A\ell\,]) = \Lambda^\nu{}_\mu(A)\left[e^{-i\theta}\,e_\nu^{(-)}([\,\ell\,]) + \zeta\,\ell_\nu\right]
\end{gathered} \tag{2.167}$$

Ici encore, si l'on se restreint aux 4-vecteurs $\mathcal{A}$ vérifiant la condition subsidiaire (2.166), on trouve pour ceux-ci la loi de transformation usuelle des 4-vecteurs :

$$\boxed{\boxed{{}^{(a,A)}\underset{\sim}{\mathcal{A}}([\,\ell\,]) \;=\; e^{ia\cdot\ell}\;A\,\underset{\sim}{\mathcal{A}}([A^{-1}\ell\,])\,A^\dagger}} \tag{2.168}$$

Dans le cas de la masse nulle, on introduit aussi des tenseurs antisymétriques et invariants de jauge similaires à ceux définis en (2.150) où ℓ prend la place de p. Cependant, lorsqu'on veut réexprimer de façon unique le 4-vecteur $\mathcal{A}$ qui y apparaît en fonction du tenseur $G_{\mu\nu}$, il ne suffit plus ici d'imposer que $\mathcal{A}$ soit orthogonal à ℓ. En effet, comme ℓ est isotrope, la transformation de jauge $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \xi\,\ell$ conduit à un nouveau 4-vecteur $\mathcal{A}'$ admissible, puisque $\ell \cdot \mathcal{A}' = \ell \cdot \mathcal{A} = 0$. Une condition supplémentaire doit donc être introduite. Si l'on adopte (2.166), on obtient alors [40]

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{i}{2\kappa}\;\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\;t^\beta\,G^{\mu\nu} \tag{2.169}$$

La transcription des formules (2.157) et (2.158) s'effectue comme suit. Posons

$$\begin{gathered}
[\,\ell\,] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\
K_+ = \frac{1}{2}\,(1+\tau_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_- = \frac{1}{2}\,(1-\tau_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.170}$$

D'après (2.157), on a

$$\begin{gathered}
\varphi_1^+ = a^2\,\phi_1, \quad \varphi_0^+ = \sqrt{2}\,a\,c\,\phi_1, \quad \varphi_{-1}^+ = c^2\,\phi_1 \\
\varphi_1^- = [c^\star]^2\,\phi_{-1}, \quad \varphi_0^- = -\sqrt{2}\,a^\star\,c^\star\,\phi_{-1}, \quad \varphi_{-1}^+ = [a^\star]^2\,\phi_{-1}
\end{gathered}$$

ce qui se traduit par les matrices

40. $F_{\mu\nu} = -\dfrac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,G^{\rho\sigma}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^+(\ell) &= \begin{pmatrix} \varphi_0^+ & -\sqrt{2}\,\varphi_1^+ \\ \sqrt{2}\,\varphi_{-1}^+ & -\varphi_0^+ \end{pmatrix} = [\,\ell\,]\,K_+\,\mathbf{\Psi}\,K_-\,[\,\ell\,]^{-1} \\ \mathbf{\Phi}^-(\ell) &= \begin{pmatrix} \varphi_0^- & -\sqrt{2}\,\varphi_1^- \\ \sqrt{2}\,\varphi_{-1}^- & -\varphi_0^- \end{pmatrix} = [\,\ell\,]^{\dagger-1}\,K_-\,\mathbf{\Psi}\,K_+\,[\,\ell\,]^\dagger\end{aligned} \tag{2.171}$$

Posant $M = [\,\ell\,]'^{\,-1}\,[\,\ell\,]$, on trouve

$$M\,K_+\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,])\,K_-\,M^{-1} = K_+\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,]')\,K_-, \quad M^{\dagger\,-1}\,K_-\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,])\,K_+\,M^\dagger = K_-\,\mathbf{\Psi}([\,\ell\,]')\,K_+$$

d'où l'on déduit que les deux matrices $\mathbf{\Phi}^+(\ell)$ et $\mathbf{\Phi}^-(\ell)$ sont bien indépendantes du choix de la tétrade associée à ℓ. Par une transformation de Poincaré (a, A), elles deviennent [41]

$$\begin{aligned}{}^{(a,A)}\mathbf{\Phi}^+(\ell) &= e^{ia\cdot\ell}\;A\,\mathbf{\Phi}^+(A^{-1}\ell)\,A^{-1} \\ {}^{(a,A)}\mathbf{\Phi}^-(\ell) &= e^{ia\cdot\ell}\;A^{\dagger\,-1}\,\mathbf{\Phi}^-(A^{-1}\ell)\,A^\dagger\end{aligned} \tag{2.172}$$

En outre, comme

$$[\,\ell\,]\,K_+\,[\,\ell\,]^\dagger = \frac{1}{2\kappa}\,\underset{\sim}{\ell} \quad \text{soit} \quad [\,\ell\,]^{-1}\,\underset{\sim}{\ell} = 2\kappa[\,\ell\,]\,K_+ \;\text{ ou }\; \underset{\sim}{\ell}\,[\,\ell\,]^{\dagger\,-1} = 2\kappa\,[\,\ell\,]\,K_+$$

$$\text{et} \quad K_+\,K_- = K_-K_+ = 0$$

lesdites matrices satisfont les équations

$$\boxed{\mathbf{\Phi}^+(\ell)\;\underset{\sim}{\ell} = \underset{\sim}{\ell}\;\mathbf{\Phi}^-(\ell) = 0} \tag{2.173}$$

traduisant en termes de matrices les équations de Dirac (2.158) ; de plus, comme

$$[\,\ell\,]\,K_+ = \frac{1}{2\kappa}\,\underset{\sim}{\ell}\,[\,\ell\,]^{\dagger\,-1} \;\text{ ou }\; K_+\,[\ell\,]^\dagger = \frac{1}{2\kappa}\,[\,\ell\,]^{-1}\,\underset{\sim}{\ell} \quad \text{et que} \quad \widetilde{\ell}\,\underset{\sim}{\ell} = \underset{\sim}{\ell}\,\widetilde{\ell} = \ell^2 = 0$$

elles vérifient aussi

$$\boxed{\widetilde{\ell}\,\mathbf{\Phi}^+(\ell) \;=\; \mathbf{\Phi}^-(\ell)\,\widetilde{\ell} = 0} \tag{2.174}$$

☞ Rappelons enfin que dans les deux cas, masse non nulle et masse nulle, pour un observateur donné auquel est attaché une base d'espace-temps (n_0, n_1, n_2, n_3), le tenseur $F_{\mu\nu}$ est décomposable en une partie "électrique" et une partie "magnétique", égales respectivement à $n_0 \wedge E$ et ${}^\star(n_0 \wedge B)$, les 4-vecteurs "électrique" E et "magnétique" B étant donnés par [42]

$$E_\mu = -F_{\mu\nu}\,n_0^\nu, \quad B_\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,n_0^\nu\,F^{\rho\sigma} = G_{\mu\nu}\,n_0^\nu \tag{2.175}$$

41. Le vérifier.
42. ITL, §3.3.2.

2.4.1 Lien avec la représentation $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ du groupe $SL(2,C)$ [43]

Du point de vue du groupe des rotations, la représentation $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ de $SL(2,C)$ est décomposable en une représentation scalaire (spin 0) et une représentation vectorielle (spin 1), l'ensemble formant un 4-vecteur. Pour cette raison, elle est couramment considérée comme la représentation 4-vectorielle par excellence de $SL(2,C)$. On peut l'obtenir en effectuant le produit tensoriel de la représentation fondamentale $D(\frac{1}{2},0)$ de $SL(2,C)$ avec sa contragrédiente $D(0,\frac{1}{2})$, ou encore, avec sa représentation conjuguée, équivalente à la contragrédiente. Considérons donc les produits tensoriels

$$\Psi^{a\,\dot{b}} \;=\; u^a\,v^{\dot{b}} \tag{2.176}$$

des composantes contravariantes d'un spineur u d'ordre 1 de la représentation fondamentale (à 2 composantes avec indices non pointés) et d'un spineur $v^\star$ d'ordre 1 de la représentation conjuguée (lui aussi à 2 composantes, mais avec indices pointés), définissant les quatre composantes d'un tenseur mixte Ψ d'ordre 2 ayant un indice non pointé et un indice pointé. Si on l'écrit sous forme matricielle :

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} u^1\,v^{\dot{1}} & u^1\,v^{\dot{2}} \\ u^2\,v^{\dot{1}} & u^2\,v^{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{2.177}$$

sa loi de transformation par une matrice A de $SL(2,C)$ est

$$^{A}\Psi = A\,\Psi\,A^\dagger \tag{2.178}$$

Cette matrice Ψ peut être mise en relation biunivoque avec un 4-vecteur V (de composantes a priori complexes) au moyen de la formule

$$\begin{gathered} \Psi \;=\; \underset{\sim}{V} \;=\; V^0 + \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\tau} \quad \text{avec} \\ V^0 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Psi \;=\; \tfrac{1}{2}(u^1\,v^{\dot{1}} + u^2\,v^{\dot{2}}) \;\;,\quad V^3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Psi\,\tau_3 \;=\; \frac{1}{2}(u^1\,v^{\dot{1}} - u^2\,v^{\dot{2}}) \\ V^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Psi\,\tau_1 \;=\; \frac{1}{2}(u^1\,v^{\dot{2}} + u^2\,v^{\dot{1}}) \;\;,\quad V^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Psi\,\tau_2 \;=\; \frac{i}{2}(u^1\,v^{\dot{2}} - u^2\,v^{\dot{1}}) \end{gathered} \tag{2.179}$$

et ce 4-vecteur V a pour propriété d'être du genre lumière. On vérifie que sa loi de transformation est bien celle d'un 4-vecteur, puisque

$$^{A}V^\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\tau_\mu\,A\,\Psi\,A^\dagger \;=\; V^\nu\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\tau_\mu\,A\,\tau_\nu\,A^\dagger \;\equiv\; \Lambda^\mu_\nu\,V^\nu$$

où les grandeurs Λ^μ_ν sont les éléments de matrice de la transformation de Lorentz Λ associée à A.

43. ITL, §5.5.1

2.5 Complément II : Symboles de Levi-Civita [44]

Le *symbole de Levi-Civita* d'ordre N, noté $\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}$, encore appelé *symbole indicateur de volume de Kronecker*, ou encore *tenseur dualiseur*, est donné par le déterminant

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} = \begin{vmatrix} \delta_{r_1,1} & \delta_{r_1,2} & \cdots & \delta_{r_1,N-1} & \delta_{r_1,N} \\ \delta_{r_2,1} & \delta_{r_2,2} & \cdots & \delta_{r_2,N-1} & \delta_{r_2,N} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \delta_{r_{N-1},1} & \delta_{r_{N-1},2} & \cdots & \delta_{r_{N-1},N-1} & \delta_{r_{N-1},N} \\ \delta_{r_N,1} & \delta_{r_N,2} & \cdots & \delta_{r_N,N-1} & \delta_{r_N,N} \end{vmatrix} \tag{2.180}$$

$\delta_{a,b}$ étant le symbole de Kronecker. Ledit symbole est complètement antisymétrique suivant ses N indices $r_1, \cdots, r_N$, chacun courant de 1 à N, et tel que

$$\epsilon_{12\cdots N} = 1 \tag{2.181}$$

Il peut aussi s'écrire comme

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathrm{sgn}(r_j - r_i) = \sigma(P) \tag{2.182}$$

où $\mathrm{sgn}(a-b)$ le signe de la différence $a-b$, pris égal à 0 si $a = b$ et $\sigma(P)$ la signature de la permutation $[1, 2, \cdots, N] \longrightarrow [r_1, r_2, \cdots r_N]$ (soit $(-1)^p$ où p est la parité de la permutation). Par permutation de ses colonnes, le déterminant (2.180) se voit multiplié par la signature de cette permutation, et il est donc évident que l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \delta_{r_1,s_1} & \delta_{r_1,s_2} & \cdots & \delta_{r_1,s_{N-1}} & \delta_{r_1,s_N} \\ \delta_{r_2,s_1} & \delta_{r_2,s_2} & \cdots & \delta_{r_2,s_{N-1}} & \delta_{r_2,s_N} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \delta_{r_{N-1},s_1} & \delta_{r_{N-1},s_2} & \cdots & \delta_{r_{N-1},s_{N-1}} & \delta_{r_{N-1},s_N} \\ \delta_{r_N,s_1} & \delta_{r_N,s_2} & \cdots & \delta_{r_N,s_{N-1}} & \delta_{r_N,s_N} \end{vmatrix} = \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} \tag{2.183}$$

Le symbole de Levi-Civita intervient notamment dans l'expression du déterminant d'une matrice A ($N \times N$). On a les formules suivantes, utilisant la convention de sommation d'Einstein avec des indices répétés courant chacun de 1 à N.

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; A_1^{r_1} \, A_2^{r_2} \cdots A_N^{r_N} \\ \det A &= \frac{1}{N!} \, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} \; A_{s_1}^{r_1} \, A_{s_2}^{r_2} \cdots A_{s_N}^{r_N} \\ \det A \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} &= \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; A_{s_1}^{r_1} \, A_{s_2}^{r_2} \cdots A_{s_N}^{r_N} \end{aligned} \tag{2.184}$$

Du point de vue des transformations du groupe $GL(N, C)$ agissant sur un espace vectoriel complexe E_N de dimension N, le symbole de Levi-Civita représente un tenseur d'ordre N. La dernière formule dans (2.184) montre que sous l'effet d'une transformation de ce groupe représentée par la matrice A, ce tenseur est simplement multiplié par le déterminant de la matrice et reste même

44. G. Ricci-Curbastro et T. Levi-Civita, " Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", Mathematische Annalen, Springer Verlag, vol. 54, no 1-2, mars 1900, p. 125-201.

invariant si $\det A = 1$, c'est-à-dire, s'il s'agit d'une transformation du sous-groupe $SL(N, C)$. En fait, il est facile de montrer qu'à un facteur près, le tenseur de Levi-Civita est le seul tenseur d'ordre N complètement antisymétrique [45].

Développons le déterminant (2.183) suivant les éléments de sa première colonne, tout en exprimant le résultat à l'aide des symboles de Levi-Civita d'ordre $N-1$:

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}\, \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} = \left[\, \delta_{r_1 s_1}\; \epsilon_{r_2 r_3 \cdots r_N} - \delta_{r_2 s_1}\, \epsilon_{r_1 r_3 \cdots r_N} + \cdots + (-1)^{N-1}\, \delta_{r_N s_1}\, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_{N-1}} \right] \epsilon_{s_2 s_3 \cdots s_N}$$

Choisissons les indices s_k tous différents, auquel cas $\epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N}$ et $\epsilon_{s_2 s_3 \cdots s_N}$ sont différents de zéro, mais prenons tous les indices r_k dans une suite de $N-1$ valeurs différentes. Le symbole d'ordre N $\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}$ est alors nul car deux de ses indices sont certainement identiques. On en déduit la relation suivante entre symboles de Levi-Civita d'ordre $N-1$:

$$\boxed{\delta_{r_1 s_1}\; \epsilon_{r_2 r_3 \cdots r_N} - \delta_{r_2 s_1}\, \epsilon_{r_1 r_3 \cdots r_N} + \cdots + (-1)^{N-1}\, \delta_{r_N s_1}\, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_{N-1}} = 0} \tag{2.185}$$

Voici quelques autres formules générales :

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_N = 1}^{N} \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}\, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \;=\; N\,! \tag{2.186}$$

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_k = 1}^{N} \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_k r_{k+1} \cdots r_N}\, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_k s_{k+1} \cdots s_N} \;=\; k\,!\,(N-k)\,!\; \delta^{\,s_{k+1} \cdots s_N}_{\,r_{k+1} \cdots r_N} \tag{2.187}$$

où $\delta^{\,j_1 \cdots j_q}_{\,i_1 \cdots i_q}$ est un symbole de Kronecker généralisé d'ordre q donné par [46]

$$\delta^{\,j_1 \cdots j_q}_{\,i_1 \cdots i_q} = \sum_P \sigma(P)\; \delta^{j_{P(1)}}_{i_1}\; \delta^{j_{P(2)}}_{i_2} \cdots \delta^{j_{P(q)}}_{i_q} \;=\; \begin{vmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \delta^{j_1}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_1}_{i_{q-1}} & \delta^{j_1}_{i_q} \\ \delta^{j_2}_{i_1} & \delta^{j_2}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_2}_{i_{q-1}} & \delta^{j_2}_{i_q} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \delta^{j_{q-1}}_{i_1} & \delta^{j_{q-1}}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}} & \delta^{j_{q-1}}_{i_q} \\ \delta^{j_q}_{i_1} & \delta^{j_q}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_q}_{i_{q-1}} & \delta^{j_q}_{i_q} \end{vmatrix} \tag{2.188}$$

P étant une permutation de q éléments et $\sigma(P)$ sa signature. Ci-après, nous considérons plus particulièrement les cas $N = 3$ et $N = 4$.

① Cas de 3 dimensions euclidiennes

Comme on sait, le symbole de Levi-Civita d'ordre 3 peut s'exprimer simplement à partir d'un produit mixte. Dans une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{e_a}, \overrightarrow{e_b}, \overrightarrow{e_c}\right\}$, on a en effet

$$\epsilon_{abc} = \overrightarrow{e_a} \cdot \left(\overrightarrow{e_b} \wedge \overrightarrow{e_c}\right) = \pm 1 \tag{2.189}$$

Cette forme met clairement en évidence l'invariance du tenseur $\{\epsilon_{abc}\}$ vis-à-vis du groupe des rotations $SO(3)$: c'est une grandeur *scalaire* vis-à-vis de ce groupe. Comme on sait, le qualificatif

45. Voir H. Bacry, loc. cit. Chap. 4.
46. Ici, on ne fait aucune distinction entre les symboles δ_{ab} et δ^b_a.

de *pseudo-scalaire* qui lui est attribué vient de son comportement dans l'opération de parité. Sous celle-ci, un vecteur ordinaire se voit changer de sens [47]. Les vecteurs de base étant supposés se comporter de cette façon, leur produit mixte ϵ_{abc} change de signe dans l'opération, alors qu'un "vrai scalaire" (tel le produit scalaire de deux vrais vecteurs) ne change pas de signe.

La métrique euclidienne utilisée dans ce cas permet d'identifier les composantes contravariantes aux composantes covariantes : $\epsilon^{abc} = \epsilon_{abc}$. Dans les formules suivantes on utilise la convention de sommation d'Einstein.

$$\begin{gathered}
\epsilon_{abc}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{a\alpha}\,\delta_{b\beta}\,\delta_{c\gamma} + \delta_{a\beta}\,\delta_{b\gamma}\,\delta_{c\alpha} + \delta_{a\gamma}\,\delta_{b\alpha}\,\delta_{c\beta} \\
-\delta_{a\alpha}\,\delta_{b\gamma}\,\delta_{c\beta} - \delta_{a\gamma}\,\delta_{b\beta}\,\delta_{c\alpha} - \delta_{a\beta}\,\delta_{b\alpha}\,\delta_{c\gamma} \\
\epsilon_{abs}\,\epsilon^{c\alpha s} + \epsilon_{bcs}\,\epsilon^{a\alpha s} + \epsilon_{cas}\,\epsilon^{b\alpha s} = 0 \\
\delta_{ra}\,\epsilon_{bcd} - \delta_{rb}\,\epsilon_{acd} + \delta_{rc}\,\epsilon_{abd} - \delta_{rd}\,\epsilon_{abc} = 0 \\
\epsilon_{abc}\,\epsilon^{a\beta\gamma} = \delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma - \delta_b^\gamma\,\delta_c^\beta, \quad \epsilon_{abc}\,\epsilon^{ab\gamma} = 2\,\delta_c^\gamma, \quad \epsilon_{abc}\,\epsilon^{abc} = 6
\end{gathered} \tag{2.190}$$

② **Cas des 4 dimensions d'espace-temps**

On sait que dans ce cas, la métrique pseudo-euclidienne de signature $(+\,-\,-\,-)$ est utilisée pour passer des composantes contravariantes de tenseurs à leurs composantes covariantes (ex. : $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\beta}\,T^{\alpha\beta}$) et l'on a

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1 = -\,\epsilon^{0123}} \tag{2.191}$$

Des propriétés générales mentionnées plus haut, on déduit les formules suivantes

$$\begin{gathered}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\left[\,\delta_\mu^\alpha\,\delta_\nu^\beta\,\delta_\rho^\gamma + \delta_\nu^\alpha\,\delta_\rho^\beta\,\delta_\mu^\gamma + \delta_\rho^\alpha\,\delta_\mu^\beta\,\delta_\nu^\gamma - \delta_\mu^\alpha\,\delta_\rho^\beta\,\delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\alpha\,\delta_\mu^\beta\,\delta_\rho^\gamma - \delta_\rho^\alpha\,\delta_\nu^\beta\,\delta_\mu^\gamma\,\right] \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\left[\,\delta_\mu^\alpha\,\delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha\,\delta_\mu^\beta\,\right] \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\,\delta_\mu^\alpha\,, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24
\end{gathered} \tag{2.192}$$

$$\boxed{\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\,g_{\mu\omega} - \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}\,g_{\nu\omega} + \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}\,g_{\rho\omega} - \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,g_{\sigma\omega} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,g_{\lambda\omega} = 0} \tag{2.193}$$

La dernière relation (2.193), directement déduite de (2.185), se retrouve notamment dans le calcul de la trace d'un produit de matrices de Dirac [48].

47. Et pour cette raison est aussi appelé *vecteur vrai* ou encore *vecteur polaire*.
48. ITL, Eq. 7.56.

2.6 Complément III : Développement multipolaire d'une matrice densité de spin [49]

2.6.1 Préliminaires

① Tout espace vectoriel complexe $\mathcal{E}$ de dimension N peut être envisagé comme un espace de représentation irréductible D^j du groupe des rotations, ou plus précisément du groupe $SU(2)$, correspondant à une valeur du spin égale à $j = (N-1)/2$. Dans la base canonique de $\mathcal{E}$, la matrice correspondant à la composante J_3 du spin suivant un axe de référence z n'est pas difficile à contruire : il s'agira de la matrice diagonale dont les éléments sont, dans l'ordre, $-j, -j+1, -j+2, \cdots, j-1, j$. Chaque élément de la base canonique sera ainsi considéré comme un vecteur propre de J_3, ayant pour valeur propre m avec $-j \leq m \leq j$, et pour cette raison, sera noté $|\, j, m >$. La construction des matrices J_1 et J_2 correspondant aux composantes du spin suivant les deux autres axes x et y, formant avec z un repère cartésien, ne pose pas plus de difficulté, car on connait parfaitement les actions des matrices $J_\pm = J_1 \pm i\, J_2$ sur les vecteurs propres de J_3 :

$$J_\pm \,|\, j, m > \;=\; \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\;|\, j, m\pm 1 > \tag{2.194}$$

On obtient ainsi 3 matrices J_1, J_2 et J_3, hermitiques, de traces nulles, qui satisfont clairement les relations usuelles de l'algèbre de Lie su(2). On a notamment

$$[\, J_3\,,\, J_\pm\,] \;=\; \pm\, J_\pm, \qquad \overrightarrow{J}^{\,2} \;=\; J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = j(j+1) \tag{2.195}$$

Par l'opération $J'_k = U\, J_k\, U^\dagger$, une matrice unitaire quelconque U transforme J_1, J_2 et J_3 en J'_1, J'_2 et J'_3 respectivement. Ces nouvelles matrices sont également hermitiques, de trace nulle, possèdent vis-à-vis de su(2) les mêmes propriétés que les précédentes, mais J'_3 peut ne plus être diagonal dans la base canonique. Réciproquement, deux triplets J_1, J_2, J_3 et J'_1, J'_2, J'_3 vérifiant les relations de commutation de su(2) et $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = j(j+1)$ sont nécessairement reliés par une matrice unitaire [50].

② Suivant la base des $|\, j, m >$, une matrice $N \times N$ quelconque Q peut de façon évidente être développée comme suit :

$$Q = \sum_{m=-j}^{m=+j} \sum_{m'=-j}^{m'=+j} |\, j, m > Q_{mm'} < m', j\,| \quad \text{avec} \quad Q_{mm'} = < m, j\,|\, Q\,|\, j, m' > \tag{2.196}$$

Soit alors $U(R)$ la matrice unitaire représentant dans $\mathcal{E}$ la rotation R d'angle θ effectuée autour d'un axe de vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ dans l'espace tri-dimensionnel. Elle s'écrit

$$U(R) = \exp\left[-i\,\theta\;\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{J}\right]$$

et son action sur sur les vecteurs $|\, j, m >$ ainsi que sur les matrices $N \times N$ est donnée par [51]

$$U(R)\,|\, j, m > \;=\; \sum_{m'=-j}^{m'=+j} \mathcal{D}^j_{m'm}(R)\,|\, j, m' > \quad \text{et}$$

49. Ugo Fano : "Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operators Techniques", Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 74.

50. Etablir cette réciproque. A noter aussi que pour $SU(2)$, toute représentation est équivalente à sa contragrédiente ainsi qu'à sa conjuguée.

51. L'expression de $\mathcal{D}^j(R)$ peut être trouvée dans ITL, chapitre 4, Eq. 4.66.

$$Q' = U(R)\,Q\,U^\dagger(R) = \sum_{m_1,m_1'}\sum_{m_2,m_2'} \mathcal{D}^j_{m_1m_1'}(R)\,\left[\mathcal{D}^j_{m_2m_2'}(R)\right]^\star Q_{m_1m_2}\,|\,j,m_1'><m_2',j\,| \quad (2.197)$$

$$\text{soit} \quad Q'_{m_1'm_2'} = <m_1',j\,|\,Q'\,|\,j,m_2'> = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \mathcal{D}^j_{m_1m_1'}(R)\,\left[\mathcal{D}^j_{m_2m_2'}(R)\right]^\star Q_{m_1m_2}$$

La dernière relation met en évidence le fait que l'espace $\mathcal{E}^\star$ des matrices complexes $N\times N$ peut lui même être envisagé comme un espace de représentation de $SU(2)$, construit comme produit tensoriel de la représentation D^j et de sa représentation conjuguée $D^{j\star}$ (ou de sa contragrédiente, équivalente à cette dernière [52]). Un tel produit tensoriel est réductible par rapport à $SU(2)$ selon le schéma bien connu

$$\boxed{D^j \otimes D^{j\star} = \bigoplus_{L=0}^{L=2j} D^L} \quad (2.198)$$

On est ainsi conduit à envisager une matrice $N\times N$ quelconque Q comme une somme de matrices Q^L, L courant de 0 à $2j$, Q^L étant associée à la représentation irréductible D^L de $SU(2)$:

$$Q = \sum_{L=0}^{L=2j} Q^L \quad (2.199)$$

somme auquel on donne le nom de *développement multipolaire* de la matrice Q.

③ Une matrice complexe quelconque $N\times N$ est définie par N^2 nombres complexes a priori indépendants. Si la trace de la matrice est nulle, seuls N^2-1 de ces nombres restent a priori indépendants. De cette constatation on déduit qu'une base de l'espace $\mathcal{E}^\star$ des matrices complexes $N\times N$ peut être construite au moyen de N^2-1 matrices indépendantes, ayant chacune une trace nulle, auxquelles on adjoint la matrice identité. Dans la suite, nous montrons comment on peut construire une telle base de matrices tout en se conformant à la décomposition (2.198).

2.6.2 Développement multipolaire d'une matrice $N \times N$

① D'un point de vue technique, la décomposition (2.198) peut être menée en utilisant la représentation adjointe des matrices de $\mathcal{E}^\star$. Celle-ci, agissant sur $\mathcal{E}^\star$, est définie par l'application (Q est une matrice $N\times N$ quelconque)

$$A \longrightarrow \Delta_A : \Delta_A(Q) \;=\; [\,A,\,Q\,] \quad (2.200)$$

laquelle constitue un homomorphisme d'algèbre de Lie lorsque l'ensemble des matrices A envisagées forment elles-mêmes une algèbre de Lie. Ainsi, en utilisant l'identité de Jacobi

$$[\,A\,,[\,B,C\,]\,] + [\,B\,,[\,C,A\,]\,] + [\,C\,,[\,A,B\,]\,] = 0$$

on vérifie aisément que les opérateurs adjoints des J_k, notés $\mathcal{J}_k$ ($k=1,2,3$), satisfont les relations de commutation de su(2) :

$$\begin{aligned}[\,\mathcal{J}_a,\mathcal{J}_b\,](Q) &= [\,J_a,[\,J_b,Q\,]\,] - [\,J_b,[\,J_a,Q\,]\,] = [\,J_a,[\,J_b,Q\,]\,] + [\,J_b,[\,Q,J_a\,]\,] \\ &= [\,[\,J_a,\,J_b\,],Q\,] = i\,\epsilon_{abc}\,[\,J_c,Q\,] = i\,\epsilon_{abc}\,\mathcal{J}_c(Q) \end{aligned} \quad (2.201)$$

Une matrice Q^L_M relevant de la représentation D^L doit vérifier les équations

52. ITL, §4.3.3.

$$\overrightarrow{\mathcal{J}}^2(Q^L_M) = \sum_{a=1}^{3} [\, J_a\, [\, J_a, Q^L_M\,]\,] = L(L+1)\, Q^L_M$$

$$\mathcal{J}_3(Q^L_M) = [\, J_3, Q^L_M\,] = M\, Q^L_M \quad \text{avec} \quad -L \leq M \leq L \tag{2.202}$$

En choisissant des combinaisons linéaires adéquates de matrices dans D^L, on peut toujours trouver des matrices Q^L_M vérifiant de plus les formules standard

$$[\, J_\pm,\, Q^L_M\,] = \sqrt{L(L+1) - M(M \pm 1)}\; Q^L_{M\pm 1} \tag{2.203}$$

Selon la nomenclature consacrée, l'ensemble des matrice Q^L_M avec $-L \leq M \leq L$ constitue un *opérateur tensoriel irréductible* [53]. En raison du théorème de Wigner-Eckart, l'élément de matrice $< m', j\, |\, Q^L_M\, |\, j, m >$ est proportionnel au coefficient de Clebsch-Gordan $< j, -m\, ; j, m'\, |\, L, M >$, lui-même proportionnel à $\delta_{M, m'-m}$.

② Dans l'espace $\mathcal{E}^\star$, on définit couramment le produit scalaire hermitien de deux matrices A et B par [54]

$$\boxed{(A, B) = \mathrm{Tr}\, A^\dagger\, B} \tag{2.204}$$

Il est facile de montrer que les opérateurs $\overrightarrow{\mathcal{J}}^2$ et $\mathcal{J}_3$ sont hermitiques par rapport à ce produit scalaire. On sait qu'alors deux matrices "vecteurs propres" $Q^{L_1}_{M_1}$ et $Q^{L_2}_{M_2}$ correspondant à des valeurs propres différentes de ces opérateurs sont nécessairement orthogonales selon ledit produit scalaire. Par une normalisation convenable, on peut faire en sorte que l'on ait [55]

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left[Q^{L_1}_{M_1}\right]^\dagger Q^{L_2}_{M_2} = \delta_{L_1 L_2}\, \delta_{M_1 M_2}} \tag{2.205}$$

Chacune des représentations D^L n'apparaît qu'une seule fois dans la décomposition (2.198). Aussi, pour une base $\left\{Q^L_M\right\}$ donnée, chaque vecteur propre Q^L_M est *unique*, à un facteur de phase près [56]. Or, par conjugaison hermitique, on a

$$[\, J_3, Q^L_M\,]^\dagger = -[\, J_3, \left[Q^L_M\right]^\dagger\,] = M\, \left[Q^L_M\right]^\dagger$$

d'où il ressort que $\left[Q^L_M\right]^\dagger$ est vecteur propre de $\mathcal{J}_3$ avec la valeur propre $-M$ et, d'après ce qui précède, ne peut donc différer de Q^L_{-M} que par un facteur de phase. On peut adapter celui-ci de telle sorte à avoir, conformément à la convention standard [57],

$$\boxed{\left[Q^L_M\right]^\dagger = (-1)^M\, Q^L_{-M}} \tag{2.206}$$

53. Voir par exemple A. Messiah : "Mécanique Quantique", Dunod, Paris (1964), Tome 2, Chap. XIII, §31, 32.
54. Montrer que $\mathrm{Tr}\, F\, G = 0$ si F s'écrit sous la forme $F = [\, G, H\,]$.
55. Auquel cas, $< m', j\, |\, Q^L_M\, |\, j, m > = A_L \;\; < j, m'\, |\, j, m\, ; L, M >$ où A_L, indépendant de m et M, a pour module $\sqrt{\dfrac{2L+1}{2j+1}}$.
56. On vérifie que $\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) = (2j+1)^2$.
57. On a alors $A^\star_L = A_L$.

Enfin, la représentation D^0 correspond manifestement à la matrice identité. L'application de (2.205) où l'une des deux matrices est proportionnelle à l'identité montre que pour $L \geq 1$, les matrices Q^L_M ont donc une trace nulle. Nous définirons $Q^0_0 = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

③ Le but recherché est atteint : l'ensemble des matrices Q^L_M vérifiant (2.202), (2.203), (2.205) et (2.206) constitue une base de l'espace $\mathcal{E}^\star$, orthonormée selon le produit scalaire (2.204), et telle que tous ses éléments correspondant à $L \geq 1$ sont de trace nulle. Une matrice $N \times N$ quelconque A admet ainsi le développement multipolaire [58] :

$$\boxed{A = \sum_{L=0}^{L=2j} \sum_{M=-L}^{M=+L} A^L_M \, Q^L_M \quad \text{avec} \quad A^L_M = \mathrm{Tr}\left[Q^L_M\right]^\dagger A} \tag{2.207}$$

La norme de la matrice A, telle que définie par le produit scalaire (2.204) , prend alors la forme

$$||A|| = \sqrt{\sum_{L,M} |A^L_M|^2} \tag{2.208}$$

2.6.3 Matrice densité de spin [59]

① Admettons que l'espace $\mathcal{E}$ soit effectivement celui des vecteurs d'états de spin d'une particule massive de spin j. On sait que quel que soit l'état physique dans lequel se présente la particule, état pur ou état de mélange, en tout cas ici, état de spin, celui-ci peut toujours être décrit au moyen d'une matrice densité, ici matrice densité de spin, usuellement notée ρ. Cet opérateur, hermitique et de trace est égale à 1 permet de calculer la moyenne d'une observable ou d'un opérateur quelconque A dans ledit état physique, au moyen de la trace

$$< A > = \mathrm{Tr}\, \rho A \tag{2.209}$$

L'opérateur densité de spin n'est pas nécessairement diagonal dans la base canonique considérée précédemment. Cependant, étant hermitique, il peut être diagonalisé en prenant pour base de $\mathcal{E}$ celle de ses vecteurs propres $|\,\varphi_a >$:

$$\rho \; = \; \sum_a |\,\varphi_a > \, p_a \, < \varphi_a\,| \tag{2.210}$$

Dans cette formule, p_a est la valeur propre (dégénérée ou non) de ρ correspondant au vecteur propre $|\,\varphi_a >$. Les valeurs propres p_a sont non négatives et satisfont

$$\sum_a p_a = 1 \tag{2.211}$$

La valeur propre p_a s'interprète comme la probabilité de trouver l'état décrit par $|\,\varphi_a >$ dans l'état physique d'écrit par ρ. Lorsque la particule se trouve dans un état pur $|\,\varphi >$ normé à l'unité, la matrice densité correspondante est le projecteur

$$\rho \; = \; |\,\varphi >< \varphi\,| \tag{2.212}$$

Généralement, on a, de façon évidente

58. Ainsi nommé car il s'apparente au développement d'un champ scalaire dépendant des coordonnées sphériques r, θ, φ, selon les harmoniques sphériques $Y^\ell_m(\theta, \varphi)$, les coefficients Q^ℓ_m intervenant dans ce développement étant qualifiés de *multipôles*.

59. Voir, par exemple, J. Werle, loc. cit., Chap. III §26, Chap IV, §32.

$$\boxed{\operatorname{Tr}\rho^2 \leq 1} \tag{2.213}$$

L'égalité dans (2.213) n'est en fait réalisée que *si et seulement si* l'opérateur densité est associé à un état pur, c'est-à-dire, est de la forme (2.212) [60]. L'égalité $\operatorname{Tr}\rho^2 = 1$ représente donc un critère pour reconnaître si la particule se trouve ou non dans un état pur.

② Comme toute matrice $N \times N$, la matrice densité de spin admet le développement multipolaire :

$$\boxed{\rho = \sum_{L=0}^{L=2j} \sum_{M=-L}^{M=+L} \rho^L_M \, Q^L_M \quad \text{avec} \quad \rho^L_M = \operatorname{Tr}\left[Q^L_M\right]^\dagger \rho} \tag{2.214}$$

La matrice ρ étant hermitique, on a

$$\left[\rho^L_M\right]^\star = (-1)^M \, \rho^L_{-M} \tag{2.215}$$

Explicitons dans ce développement les termes correspondant à $L = 0$ et $L = 1$. Pour $L = 0$, il n'y a qu'un seul terme, pour lequel $Q^0_0 = 1/\sqrt{N}$, et

$$\rho^0_0 = \operatorname{Tr} Q^0_0 \, \rho = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{Tr}\rho = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \text{donc} \quad \rho^0_0 \, Q^0_0 = \frac{1}{N}$$

Si tous les états de spin de la particule sont *équiprobables*, auquel cas la particule est dite *non polarisée*, seul ce terme est présent et l'on a donc

$$\rho_{\text{np}} = \frac{1}{N} = \frac{1}{2j+1} \tag{2.216}$$

A l'aide du développement (2.214), l'inégalité générale (2.213) prend la forme

$$\frac{1}{N} \; + \; \sum_{L=1}^{L=2j} \sum_{M=-L}^{M=+L} |\, \rho^L_M \,|^2 \; \leq \; 1 \quad \text{soit} \quad N \sum_{L=1}^{L=2j} \sum_{M=-L}^{M=+L} |\, \rho^L_M \,|^2 \; \leq \; N - 1 = 2j \tag{2.217}$$

On est alors amené à définir un *degré de polarisation* par

$$\zeta \; = \; \sqrt{\frac{N}{2j} \sum_{L=1}^{L=2j} \sum_{M=-L}^{M=+L} |\, \rho^L_M \,|^2} \tag{2.218}$$

Ce paramètre est compris entre 0 et 1. Le cas $\zeta = 1$ correspond à un état pur, tandis que si $\zeta = 0$, la particule est complètement non polarisée. Si $0 < \zeta < 1$, la particule est dite *partiellement polarisée*.

Pour $L = 1$, on doit avoir $Q^1_1 \propto J_1 + iJ_2$ et $Q^1_0 \propto J_3$. On trouve les facteurs de normalisation en calculant

$$\operatorname{Tr} J_1^2 \; = \; \operatorname{Tr} J_2^2 \; = \; \operatorname{Tr} J_3^2 \; = \; \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \overrightarrow{J}^2 \; = \; \frac{1}{3} N \, j(j+1)$$

60. Démontrer cette assertion.

On trouve ainsi

$$Q_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{2Nj(j+1)}}\,(J_1 + iJ_2)\,,\quad Q_{-1}^1 = -\left[\,Q_1^1\,\right]^\dagger = \sqrt{\frac{3}{2Nj(j+1)}}\,(J_1 - iJ_2)\,,$$

$$Q_0^1 = \sqrt{\frac{3}{Nj(j+1)}}\,J_3 \tag{2.219}$$

D'où

$$\rho_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{2Nj(j+1)}}\ < J_1 + iJ_2 >,\quad \rho_0^1 = \sqrt{\frac{3}{Nj(j+1)}}\ < J_3 > \tag{2.220}$$

Il vient alors

$$\sum_{M=-1}^{M=+1} \rho_M^1\, Q_M^1 = \frac{3}{Nj(j+1)}\ < \overrightarrow{J} > \cdot \overrightarrow{J} \tag{2.221}$$

Définissant le *vecteur de polarisation* de la particule par

$$\boxed{\overrightarrow{\xi} = \sqrt{\frac{3}{2j^2(j+1)}}\ < \overrightarrow{J} >} \tag{2.222}$$

on obtient finalement

$$\sum_{M=-1}^{M=+1} \rho_M^1\, Q_M^1 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{6}{j+1}}\ \overrightarrow{\xi} \cdot \overrightarrow{J} \qquad \text{et} \qquad \frac{N}{2j}\sum_{M=-1}^{M=+1} |\rho_M^1\,|^2 = |\,\overrightarrow{\xi}\,|^2 \tag{2.223}$$

et la relation (2.217) induit la contrainte

$$\boxed{|\,\overrightarrow{\xi}\,|^2 \leq 1} \tag{2.224}$$

③ On sait que l'opération de parité (ou réflexion d'espace) *commute* avec les rotations. L'espace $\mathcal{E}$ étant supposé être un espace de représentation irréductible du groupe des rotations, l'application du lemme de Schur [61] montre alors que ladite opération est représentée dans cet espace par un multiple de la matrice unité, et sa représentation *unitaire* est un simple facteur de phase. Il en résulte que tous les tenseurs irréductibles du développement (2.214) sont tous *pairs* vis-à-vis de l'opération de parité. Le tenseur de rang 1 notamment, qui représente un vecteur est en fait un *pseudo-vecteur*. Le vecteur de polarisation est donc un pseudo-vecteur.

④ Dans le cas où $j = 1/2$, le développement (2.214) ne comporte que les deux premiers termes correspondant à $L = 0$ et $L = 1$. On a ici $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\tau}/2$ où $\overrightarrow{\tau}$ représente l'ensemble des matrices de Pauli. La formule générale (2.222) donne ici $\overrightarrow{\xi} = < \overrightarrow{\tau} >$ et la matrice densité correspondante s'écrit

61. I. Schur : "Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochenen linearen Substitutionen", J. Reine. Angew. Math., vol. 132, 1907, p. 85-137 ; voir aussi : H. Bacry, loc. cit., p. 59.

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}\left\{1 + \overrightarrow{\xi}\cdot\overrightarrow{\tau}\right\}} \tag{2.225}$$

Elle est donc complètement déterminée par le vecteur de polarisation.

⑤ Il est clair qu'en effectuant les produits de divers ordres des opérateurs J_1, J_2 et J_3, lesquels se transforment par rotation comme les composantes d'un 3-vecteur, on peut construire des composantes d'opérateurs tensoriels irréductibles correspondant chacun à une valeur donnée de L. Ainsi, pour $L = 2$ et $j \geq 1$, on obtient [62]

$$\begin{gathered} Q_2^2 = \frac{1}{D}\,J_+^2\,, \quad Q_1^2 = -\frac{1}{D}\,(J_+\,J_3 + J_3\,J_+)\,, \quad Q_0^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{D}\left[\,3\,J_3^2 - j(j+1)\,\right], \\ \text{avec} \quad D = \sqrt{\frac{2Nj(j+1)[\,4j(j+1)-3\,]}{15}} \\ Q_{-1}^2 = -Q_1^{2\dagger}, \quad Q_{-2}^2 = Q_2^{2\dagger} \end{gathered} \tag{2.226}$$

En tenant compte du fait que $j(j+1) \equiv J_1^2 + J_1^2 + J_3^2$, le terme du développement de ρ correspondant à $L = 2$ s'écrit sous la forme

$$\begin{gathered} \rho^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,J_i\,J_j \qquad \text{avec} \\ a_{11} = \frac{1}{D}\left[\rho_2^2 + \rho_2^{2\star} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\rho_0^2\right], \quad a_{22} = -\,\frac{1}{D}\left[\rho_2^2 + \rho_2^{2\star} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\rho_0^2\right] \\ a_{33} = \frac{2}{D}\,\rho_0^2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{i}{D}\,\left[\,\rho_2^2 - \rho_2^{2\star}\,\right], \quad a_{13} = a_{31} = -\,\frac{1}{D}\,\left[\,\rho_1^2 + \rho_1^{2\star}\,\right] \\ a_{23} = a_{32} = -\,\frac{i}{D}\,\left[\,\rho_1^2 - \rho_1^{2\star}\,\right] \end{gathered} \tag{2.227}$$

On constate que les coefficients a_{ij} sont tous réels et symétriques suivant leurs indices i et j. En outre,

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0 \tag{2.228}$$

On peut tout aussi bien considérer l'espace $\mathcal{E}$ comme celui de la représentation irréductible $\mathcal{D}(j,0)$ de $SL(2,C)$, pour laquelle les générateurs de ce groupe sont représentés par les matrices $J_{k\ell} = \epsilon_{k\ell m}\,J_m$ et $J^{0k} = i\,J_k$. Dans ce contexte, une base de spin de vecteurs $|\,j,m>$ est nécessairement définie par rapport à une "tétrade" attachée à un 4-vecteur t donné, supposé ici du genre temps, pointant vers le futur, et unitaire. Cette tétrade est constituée en adjoignant à t trois 4-vecteurs n_1, n_2, n_3 du genre espace, formant avec lui une base d'espace-temps orthonormée et d'orientation directe, laquelle s'obtient à partir d'une base de référence au moyen d'une transformation de Lorentz représentée par une matrice de $SL(2,C)$ notée $[\,t\,]$, appelée aussi "tétrade". On est ainsi amené à poser

$$J_k \equiv -\,n_k\cdot W \quad (k=1,2,3) \quad \text{avec} \quad W_\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,t^\nu\,J^{\alpha\beta} \tag{2.229}$$

62. Démontrer que Tr $J_3^4 = \dfrac{Nj(j+1)}{15}\,[\,3j(j+1)-1\,]$.

les matrices $J^{\alpha\beta}$ étant les représentants des générateurs de $SL(2,C)$, définis comme indiqué ci-dessus, et W_μ l'opérateur de polarisation approprié. L'expression de $\rho^{(2)}$ peut alors être récrite sous la forme d'un produit scalaire [63]

$$\rho^{(2)} = \varphi_{\mu\nu}\, W^\mu\, W^\nu \quad \text{avec} \quad \varphi_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, n_{i\mu}\, n_{j\nu} \tag{2.230}$$

L'opérateur densité se comportant comme une grandeur scalaire sous les transformations de Lorentz :

$$U(a,A)\,\rho([\,t\,])\,U^\dagger(a,A) = \rho([\,At\,]) \tag{2.231}$$

les $\varphi_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur de rang 2. De par la symétrie des a_{ij} et les relations d'orthogonalité $t\cdot n_i = 0$, $n_i \cdot n_j = -\delta_{ij}$, ce tenseur est :

- *réel*, *symétrique* suivant ses deux indices μ et ν ;
- et vérifie $\quad t^\mu\,\varphi_{\mu\nu} = 0\,;\quad \varphi^\mu_\mu \;=\; \sum_i a_{ii} = 0.$

On notera que le terme de rang 1 (2.221) peut s'écrire sous une forme similaire :

$$\rho^{(1)} = \varphi_\mu\, W^\mu \quad \text{avec} \quad t^\mu\,\varphi_\mu \,= 0 \tag{2.232}$$

L. Michel a montré que l'on peut généraliser ce qui précède à tous les termes du développement de la matrice densité et écrire celle-ci comme [64, 65]

$$\rho = \frac{1}{2j+1}\left\{\,1 + \varphi_\mu\, W^\mu + \varphi_{\mu\nu}\, W^\mu\, W^\nu + \cdots + \varphi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}\, W^{\mu_1}\, W^{\mu_2}\cdots W^{\mu_{2j}}\,\right\} \tag{2.233}$$

Les $2j$ tenseurs $\varphi_{\mu_1\cdots\mu_q}$ $(1 \le q \le 2j)$ intervenant dans cette somme sont tous réels, symétriques, orthogonaux à t et tels que $\varphi^\mu_{\mu\mu_3\cdots\mu_q} = 0$ pour $q \ge 2$.

⑦ Ainsi que nous l'avons rappelé dans une note précédente, toute représentation irréductible D de $SU(2)$ est équivalente à sa contragrédiente ${}^tD^{-1}$, elle-même équivalente à la représentation conjuguée $D^\star$. En effet, d'une part, dans la représentation standard introduite au début de cette section, on a $J_1^\star = J_1$, $J_2^\star = -J_2$, $J_3^\star = J_3$; d'autre part, il est facile de montrer que l'opérateur unitaire $U = e^{i\pi J_2}$ est tel que $U\,J_1\,U^{-1} = -J_1$, $U\,J_2\,U^{-1} = J_2$, $U\,J_3\,U^{-1} = -J_3$, soit $U\,J_k\,U^{-1} = -J_k^\star = -\,{}^tJ_k$. Ce résultat nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ J_{k_1}\cdots J_{k_q} &\equiv \mathrm{Tr}\ J'_{k_1}\cdots J'_{k_q} = (-1)^q\ \mathrm{Tr}\ J^\star_{k_1}\cdots J^\star_{k_q} = (-1)^q\ \left[\mathrm{Tr}\ J_{k_1}\cdots J_{k_q}\right]^\star \\ &= (-1)^q\ \mathrm{Tr}\ {}^tJ_{k_1}\cdots {}^tJ_{k_q} = (-1)^q\ \mathrm{Tr}\ J_{k_q}\cdots J_{k_1}\end{aligned} \tag{2.234}$$

On en déduit notamment que la trace d'un produit d'un nombre *pair* de matrices J_k est *réelle* ; c'est un nombre *imaginaire pur* si ce produit comprend un nombre *impair* de matrices J_k ; soit encore, la trace Tr $W_{\mu_1}\cdots W_{\mu_q}$ est réelle si q est pair, imaginaire pure si q est impair.

---

63. Ici, nous ne considèrons pas le cas plus général où dans (2.196) le ket $|\,j,m>$ correspondrait au 4-vecteur t tandis que le bra $<m',j\,|$ correspondrait à un autre 4-vecteur t' et donc à une autre tétrade $[\,t'\,]$; voir P. Moussa, R. Stora, loc. cit. p.297.
64. L . Michel : "Covariant description of Polarization", Nuovo Cimento, suppl. 14, (1959), p.95.
65. Prendre garde au fait que les composantes W_μ ne commutent pas : $[\,W_\mu, W_\nu\,] = i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,t^\rho\,W^\sigma$.

⑥ Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les relations suivantes[66], où $K = \dfrac{1}{3}\, N\, j(j+1)$.

$$\mathrm{Tr}\, J_k\, J_\ell = K\ \delta_{k\ell}, \quad \mathrm{Tr}\, W_\mu\, W_\nu = K\,(\, t_\mu\, t_\nu - g_{\mu\nu}\,)$$

$$\mathrm{Tr}\, J_k\, J_\ell\, J_m = i\,\frac{K}{2}\ \epsilon_{k\ell m}, \quad \mathrm{Tr}\, W_\mu\, W_\nu\, W_\rho = i\,\frac{K}{2}\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, t^\sigma$$

$$\sum_r J_r\, J_k\, J_r = [\, j(j+1) - 1]\, J_k$$

$$\sum_r J_r\, J_k\, J_\ell\, J_r = [\, j(j+1) - 2\,]\, J_k\, J_\ell - J_\ell\, J_k + \delta_{k\ell}\, j(j+1)$$

$$\sum_r J_r\, J_k\, J_\ell\, J_m\, J_r = [\, j(j+1) - 3\,]\, J_k\, J_\ell\, J_m - J_\ell\, J_k\, J_m - J_m\, J_\ell\, J_k - J_k\, J_m\, J_\ell$$
$$+ j(j+1)\,[\,\delta_{k\ell}\, J_m + \delta_{km}\, J_\ell + \delta_{\ell m}\, J_k\,] - \delta_{km} J_\ell$$

$$\mathrm{Tr}\, J_k\, J_\ell\, J_m\, J_n = \frac{K}{10}\ \left\{2\, j\,(j+1)\,\left[\,\delta^k_m\,\delta^\ell_n + \delta^k_\ell\,\delta^m_n + \delta^k_n\,\delta^\ell_m\,\right] + \delta^k_n\,\delta^\ell_m + \delta^k_\ell\,\delta^m_n - 4\,\delta^k_m\,\delta^\ell_n\right\} \tag{2.235}$$

$$\mathrm{Tr}\, J_k\, J_\ell\, J_m\, J_n\, J_p = i\,\frac{K}{10}\ \{\, j\,(j+1)\,[\,\delta_{k\ell}\,\epsilon_{mnp} + \delta_{km}\,\epsilon_{\ell np} + \delta_{kn}\,\epsilon_{\ell mp} + \delta_{kp}\,\epsilon_{\ell mn}$$
$$+\delta_{\ell m}\,\epsilon_{nkp} + \delta_{\ell n}\,\epsilon_{mpk} + \delta_{\ell p}\,\epsilon_{mnk} + \delta_{mn}\,\epsilon_{pk\ell} + \delta_{mp}\,\epsilon_{nk\ell} + \delta_{np}\,\epsilon_{k\ell m}\,]$$
$$-\delta_{km}\,\epsilon_{\ell np} - \delta_{kn}\,\epsilon_{\ell mp} - \delta_{\ell n}\,\epsilon_{kmp} - \delta_{\ell p}\,\epsilon_{kmn} - \delta_{mp}\,\epsilon_{k\ell n}\,\}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{J}\right]^{2p+1} = 0$$

$$\mathrm{Tr}\left[\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{J}\right]^{2p} = \frac{(2p)!}{p!}\left\{\frac{d^p}{d\chi^p}\left[\frac{\sinh(\sqrt{\chi}(j+\frac{1}{2}))}{\sinh(\sqrt{\chi}/2)}\right]\right\}_{\chi=0}$$

66. Pour calculer la trace d'un produit de q matrices J_k, on peut procéder de deux façons. La première consiste à considérer la trace de $q+1$ de ces matrices, d'utiliser leurs relations de commutation pour obtenir des traces de produits de q matrices, puis de contracter le résultat par un symbole de Levi-Civita approprié. Cependant, comme cette méthode introduit inévitablement une dissymétrie, le résultat final ne devient présentable qu'au prix d'une opération de symétrisation qui alourdit notablement le calcul lorsque le nombre q de matrices est grand. La seconde est plus méthodique, plus symétrique aussi, mais devient également compliquée à mesure que q devient grand. Elle consiste à considérer la trace d'un produit de q rotations $R_k = e^{-i\theta_k\,\overrightarrow{n_k}\cdot\,\overrightarrow{J}}$. Ce produit est aussi une rotation $R = e^{-i\psi_q\,\overrightarrow{N_q}\cdot\,\overrightarrow{J}}$ dont la trace est donnée par

$$F(\psi_q^2) = \frac{\sin(\psi_q(j+\frac{1}{2}))}{\sin(\psi_q/2)} = (2j+1)\, j(j+1)\left\{1 - \frac{\psi_q^2}{3!} + \frac{\psi_q^4}{5!}\left[j(j+1) - \frac{1}{3}\right] + \cdots\right\}$$

Pour des petits angles, on a $R_k = 1 - i\theta_k\ \overrightarrow{n_k}\ \cdot\ \overrightarrow{J}$. On voit ainsi que la trace de R contient le terme $(-i)^q\,\theta_1\cdots\theta_q\,\mathrm{Tr}\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{J}\ \cdots\ \overrightarrow{n_q}\cdot\overrightarrow{J}$. L'étape suivante consiste à extraire du développement de $F(\psi_q^2)$ le terme proportionnel au produit $\theta_1\cdots\theta_q$ et d'obtenir la trace recherchée par identification. D'une part, ce calcul implique celui de $z_q = \sin(\psi_q/2) = \sqrt{1-\cos^2(\psi_q/2)}$ que l'on peut mener à bien au moyen des formules de récurrence

$$\cos\frac{\psi_{k+1}}{2} = \cos\frac{\theta_{k+1}}{2}\cos\frac{\psi_k}{2} - \sin\frac{\theta_{k+1}}{2}\,\sin\frac{\psi_k}{2}\ \overrightarrow{n}_{k+1}\cdot\overrightarrow{N_k}$$
$$\sin\frac{\psi_{k+1}}{2}\ \overrightarrow{N}_{k+1} = \cos\frac{\theta_k}{2}\sin\frac{\psi_k}{2}\ \overrightarrow{N_k} + \cos\frac{\psi_k}{2}\sin\frac{\theta_{k+1}}{2}\ \overrightarrow{n}_{k+1} + \sin\frac{\psi_k}{2}\sin\frac{\theta_{k+1}}{2}\ \overrightarrow{N_k}\wedge\overrightarrow{n}_{k+1}$$

D'autre part, il doit tenir compte du développement

$$\frac{\psi_q}{2} = z_q + \frac{1.z_q^3}{2.3} + \frac{1.3.z_q^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.z_q^7}{2.4.6.7} + \cdots$$

2.7 Complément IV : Matrice densité de spin du photon et son expression covariante

On sait qu'un photon (particule de masse nulle) de 4-impulsion donnée ne peut se trouver que dans deux états d'hélicité opposées, $+1$ ou -1. Envisageons l'espace vectoriel complexe de dimension 2 engendré par ces deux états que nous noterons $|+>$ et $|->$, respectivement. L'analogie avec la description des états de spin d'une particule de spin 1/2 apparaît clairement et l'on peut utiliser ici le même formalisme bi-dimensionnel avec les matrices de Pauli pour construire la matrice densité de spin du photon. Il est ainsi évident que dans ce schéma cette matrice doit prendre la forme (2.225) :

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{1 + \overrightarrow{\xi} \cdot \overrightarrow{\tau}\right\} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\xi} = \mathrm{Tr}\, \rho\, \overrightarrow{\tau} \tag{2.236}$$

Considérons le cas d'un photon décrit par un état pur $|\, c > = c_+ \,|+> + \; c_- \,|->$ normalisé à 1 ($|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$). On a

$$\begin{gathered} \rho = |\, c >< c\,| = \begin{pmatrix} |c_+|^2 & c_+\, c_-^\star \\ c_-\, c_+^\star & |c_-|^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \\ \xi_1 = < \tau_1 > = \; 2\,\Re[c_-\, c_+^\star], \quad \xi_2 = < \tau_2 > = 2\,\Im[c_-\, c_+^\star] \\ \xi_3 = < \tau_3 > = \; |c_+|^2 - |c_-|^2, \qquad \overrightarrow{\xi}^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \end{gathered} \tag{2.237}$$

et l'on vérifie que $\mathrm{Tr}\, \rho^2 = \dfrac{1}{2}\left[\, 1 + \overrightarrow{\xi}^2 \,\right] = 1$. Les composantes ξ_k du vecteur de polarisation sont les *paramètres de Stokes* qui caractérisent l'état pur considéré [67].

Il est facile d'établir l'expression covariante de la matrice densité du photon en tenant compte de l'isomorphisme entre les matrices 2×2 de Pauli et les tenseurs définis en (2.23). Dans cette description covariante, la matrice densité est alors un tenseur de rang 2 dont les éléments sont

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{T_{0\mu\nu} + \sum_k \xi_k\, T_{k\mu\nu}\right\} \tag{2.238}$$

Les expressions de la matrice densité données ci-dessus restent valables lorsqu'on a affaire à un mélange statistique d'états, mais la norme du vecteur $\overrightarrow{\xi}$ est dans ce cas inférieure à 1.

67. Voir ITL, section 4.7.