

EXERCICES D'ÉLECTRICITÉ

Année 3000-3001

Christian Carimalo

Electrostatique

I. Trois charges ponctuelles q identiques sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté d .

1°) Calculer le module F de la force électrostatique s'exerçant sur chacune des charges. On donne $q = 4 \cdot 10^{-8}$ C, $d = 6$ cm.

Rep : $F = 6,93 \cdot 10^{-3}$ N.

2°) En imaginant que deux masses identiques m distantes de d exercent l'une sur l'autre une force de gravitation de même module F , quelle serait la valeur de m ? Commenter le résultat.

Rep : $m = 611,5$ kg.

II. 1°) Un proton est libre de se déplacer dans le vide entre deux plaques verticales parallèles conductrices A et B . La différence de potentiel électrique $V = V_A - V_B$ est telle que $|V| = 10^4$ Volt. Quel est le signe de V si le proton se dirige spontanément vers la plaque A (Justifier la réponse) ?

Rep : $V < 0$.

2°) Donner les caractéristiques du champ électrique \vec{E} supposé uniforme entre A et B . La distance entre les deux plaques est $d = 1$ m.

Rep : $\vec{E} = \frac{|V|}{d} \frac{\vec{BA}}{d}$; $|\vec{E}| = \frac{|V|}{d} = 10^4$ V/m.

3°) Quel est le travail de la force électrostatique lorsque le proton passe de B vers A ?

Rep : $W = 1,6 \cdot 10^{-15}$ J.

4°) Le proton part de la plaque B sans vitesse initiale. Quelle est sa vitesse lorsqu'il arrive en A ? La charge du proton est $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et sa masse est $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Rep : $v = 1,4 \cdot 10^6$ m/s.

5°) a) Quelle devrait être la valeur du champ de pesanteur, supposé uniforme, créé par un astre pour qu'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur de 100 km au dessus du sol de cet astre, acquiert en arrivant au sol une vitesse égale à celle du proton précédent (on néglige la résistance d'une éventuelle atmosphère) ?

Rep : $g \simeq 10^7$ m/s².

b) En admettant que la densité moyenne de cet astre est la même que celle de notre soleil, soit 1410 kg/m³, quel devrait être le rayon de cet astre ?

Rep : $R = 2,43 \cdot 10^{13}$ m.

c) Quel serait, en gros, le nombre d'étoiles identiques à notre soleil que pourrait contenir le volume occupé par cet astre ? Commenter les résultats.

On donne : la constante de gravitation $G = 6,6710^{-11}$ S.I. ; le rayon solaire $R_s = 700000$ km.

Rep : $N = 4,2 \cdot 10^{13}$.

III. On peut considérer qu'un gros nuage de surface $S = 2 \text{ km}^2$ situé à l'altitude $h = 400$ m forme avec le sol un condensateur plan. Au cours d'un orage, la tension entre le nuage et le sol est $V_0 = 10^6$ V.

1°) Calculer la capacité du système nuage-sol.

Rep : $C = 44,2$ nF.

2°) La décharge constituant l'éclair se fait en 1 ms. Quelle est la puissance moyenne de l'éclair, la tension V_0 restant constante ?

Rep : $P = 44,2$ MW.

**Conducteurs, résistances,
loi d'Ohm**

I. La masse atomique du cuivre est 63,6g, sa masse volumique 8800kg/m³. En admettant qu'il y ait un électron de conduction par atome de cuivre, calculer, en cm/h, la vitesse d'entraînement des électrons de conduction dans un fil de cuivre cylindrique de diamètre 2mm et traversé par un courant d'intensité 1 A.

Rep : 8,6 cm/h.

II. 1°) Pour le Cuivre dont la densité est 8,94 g/cm³ et dont le poids atomique est 63,54 g, on admet qu'un seul électron par atome participe à la conduction.

Dans un échantillon de cuivre de section droite $S = 2 \text{ mm}^2$ où circule un courant d'intensité $I = 1 \text{ A}$, calculer, en cm/h, la vitesse moyenne d'entraînement des électrons de conduction.

Rep : $v = 13,3 \text{ cm/h}$.

2°) Pour quelle densité de courant la vitesse des électrons libres dans le Cuivre atteindrait-elle 1 m/s ?

Rep : $J = 1,35 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2 = 1,35 \cdot 10^4 \text{ A/mm}^2$.

III. Le Cuivre et le Germanium ont pour résistivité respectives $\rho_1 = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ et $\rho_2 = 0,5 \Omega\text{m}$. Quels champs électriques respectifs faudrait-il appliquer à chacun pour obtenir une même densité de courant de 5 A/mm² ?

Rep : $E_{Cu} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$, $E_{Ge} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

IV. 1°) Un semi-conducteur contient 10²⁰ paires électron-trou par m³. Calculer sa résistivité connaissant les mobilités de chaque porteur : $\mu_n = 0,2$ et $\mu_p = 0,05$ en unité SI (valeurs absolues).

Rep : $\rho = \frac{1}{en(\mu_n + \mu_p)} = 0,25 \Omega\text{m}$.

2°) Ce semi-conducteur est soumis à un champ électrique de 0,5 V/m. Quelle est la vitesse moyenne d'entraînement de chaque type de porteur ?

Rep : $v_n = 0,1 \text{ m/s}$; $v_p = 0,025 \text{ m/s}$.

V. Le Silicium a une masse atomique de 28 g et une densité de 2,33 g/cm³. A la température considérée, il contient 10¹⁸ électrons libres par m³.

1°) Quel est le nombre d'atomes par m³ ?

Rep : $5 \cdot 10^{28} \text{ atomes/m}^3$.

2°) Combien y-a-t-il d'atomes pour 1 électron libre ?

Rep : $5 \cdot 10^{10} \text{ atomes pour 1 électron libre}$.

3°) Quelles sont la conductivité et la résistivité du Silicium pour les mobilités $\mu_n = 0,12$ et $\mu_p = 0,05$ unité SI ?

Rep : $\rho = 36,8 \Omega\text{m}$.

4°) Un fil de Silicium de 0,5 m de longueur et de 1 mm^2 de section droite est soumis à une tension de 0,5 V. Calculer la résistance de ce fil et les vitesses des deux types de porteurs.

Rep : 18,4 M Ω .

VI. 1°) La résistivité d'un alliage est $\rho = 10^{-6} \Omega\text{m}$. Quelle sera la résistance R d'un fil de cet alliage de longueur 5,5 m et de section droite circulaire de diamètre 1 mm ?

Rep : $R = 7 \Omega$.

2°) On relie par ce fil les deux bornes d'un générateur de tension de fem $E = 6 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 3 \Omega$.

a) Quelle est la chaleur Q dégagée en $T = 5 \text{ mn}$ par le passage du courant dans le fil ?

Rep : $Q = 756 \text{ J}$.

b) Si cette chaleur était intégralement cédée à 1 litre d'eau à la température ordinaire, quelle serait l'élévation de température de l'eau ? La chaleur massique de l'eau est $c = 4,18 \text{ J/g}$.

Rep : $\Delta T \simeq 0,2 \text{ K}$.

c) Quelle est la différence de potentiel U aux bornes du générateur ?

Rep : 4,2 V.

3°) Quelle résistance X faudrait-il substituer à celle du fil pour que le dégagement de chaleur obtenu en 5 mn soit de 627 J ? Il y a deux solutions. Laquelle adopteriez-vous et pourquoi ?

Rep : $X = 10,35 \Omega$; la plus grande pour une plus faible puissance débitée par le générateur.

VII. On alimente sous 120 V un moteur électrique et une résistance de 10Ω en série.

1°) Le moteur est calé. Il se dégage alors 240 cal/s dans la résistance. Quelle est l'intensité du courant ? Quelle est la résistance du moteur ?

Rep : $I \simeq 10 \text{ A}$; $R \simeq 2 \Omega$.

2°) Le moteur tourne. Le dégagement de chaleur dans la résistance n'est plus que 60 cal/s. Expliquer pourquoi. Quelle est la nouvelle intensité du courant ?

Rep : intensité $I' = 5 \text{ A}$ plus faible.

3°) Quelle est la fem du moteur ? Quelle est sa puissance ? Quelle est la tension aux bornes du moteur ? Quelle est le rendement du moteur ?

Rep : $E = 60 \text{ V}$; $P = 300 \text{ W}$; $V = 70 \text{ V}$; $r = 0,5$.

VIII. Deux résistances R_1 et R_2 sont associées soit en série, soit en parallèle. Dans un premier cas on obtient une résistance équivalente de 1000Ω et dans l'autre cas une résistance équivalente de 160Ω .

1°) En justifiant les réponses, préciser à quelle résistance équivalente correspond l'une ou l'autre association.

Rep : 1000Ω , série ; 160Ω , parallèle.

2°) Déterminer R_1 et R_2 .

Rep : $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 800\Omega$.

IX.

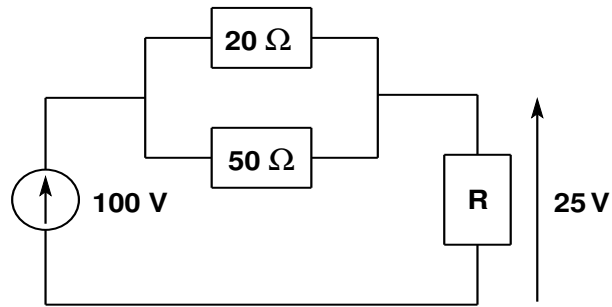


FIGURE 1 –

Quelle est la valeur de la résistance R ? Rep : $R = \frac{100}{7}\Omega \simeq 4,76\Omega$.

Résistances équivalentes

I. Un fil conducteur de résistance $1 \Omega/\text{m}$ a la forme d'un cercle de centre O et de rayon 1 m .

Deux points diamétralement opposés A et B sont connectés par un fil conducteur rectiligne de résistance $1 \Omega/\text{m}$. Un courant d'intensité $I = 1 \text{ A}$ se partage entre les trois branches AMB , ANB et AOB (figure 2).

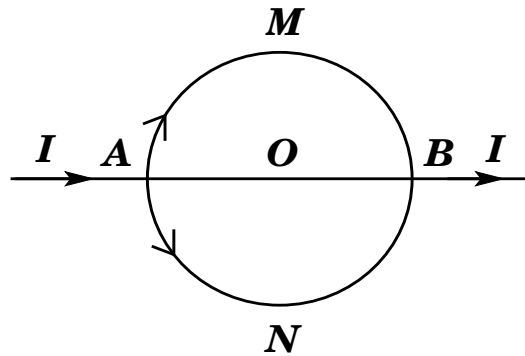


FIGURE 2 –

1°) Calculer l'intensité du courant dans chacune des branches et la résistance de l'ensemble.

$$\text{Rep : } i_{AOB} = \frac{\pi I}{4 + \pi}, i_{AMB} = i_{ANB} = \frac{2I}{4 + \pi}, R = \frac{2\pi}{4 + \pi}.$$

2°) Même question pour le dispositif suivant (montrer que $i = i'$).

$$\text{Rep : } i = i' = \frac{I(\pi + 2 - \alpha)}{4 + \pi}, i_{COD} = \frac{I(\pi - 2\alpha)}{4 + \pi}, R = \frac{2}{4 + \pi}(\pi + \alpha(\pi - \alpha)).$$

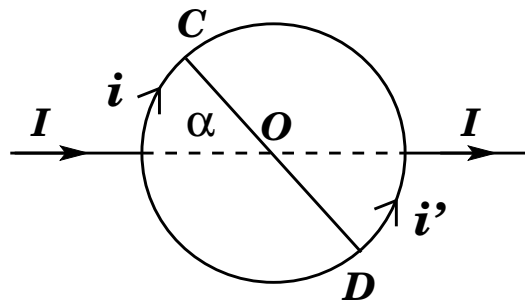


FIGURE 3 –

Application numérique : $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

II. Calculer la résistance apparente du dipôle (AD). Les fils de liaison AC et BD sont sans résistance.

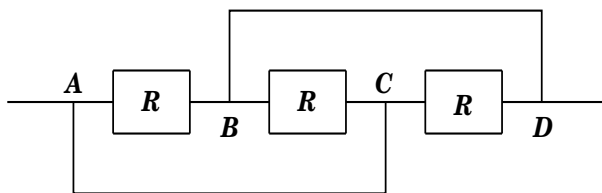


FIGURE 4 -

Rep : $\frac{R}{3}$.

III. Quelle est la résistance équivalente à l'association suivante (utiliser une symétrie)?

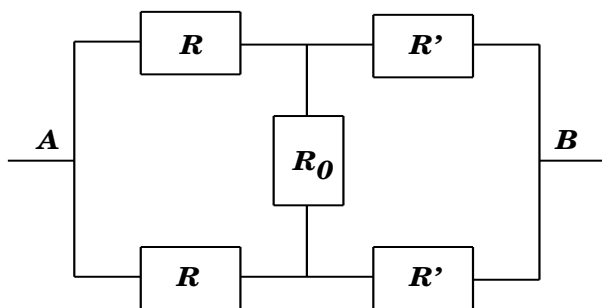


FIGURE 5 -

Rep : $\frac{R + R'}{2}$.

IV. Calculer la résistance équivalente du dipôle AB suivant (utiliser une symétrie)

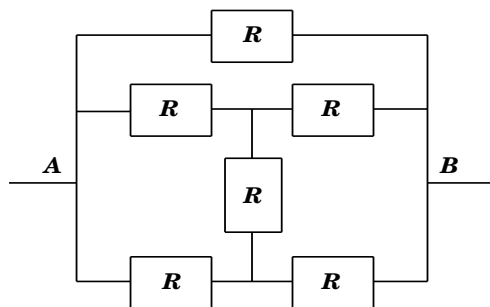


FIGURE 6 -

Rep : $\frac{R}{2}$.

V. Résistance équivalente du réseau suivant (symétries!). Le point O est un noeud.

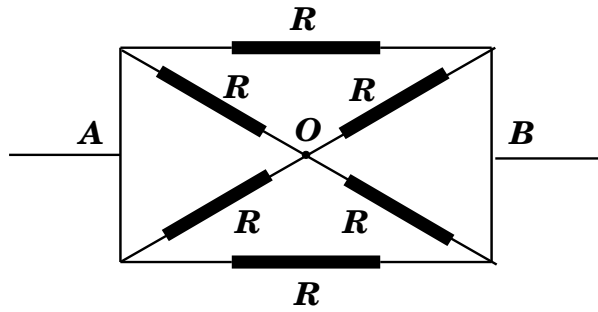


FIGURE 7 -

Rep : $\frac{R}{3}$.

VI. Résistance équivalente du réseau suivant (dédoubler la résistance OB)

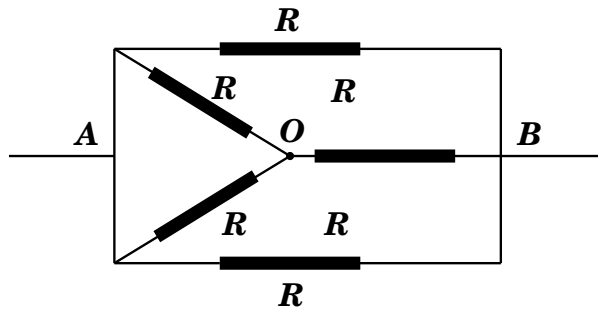


FIGURE 8 -

Rep : $\frac{7R}{8}$.

VII. Résistance équivalente du réseau suivant (dédoubler la résistance R_0 et utiliser la transformation triangle-étoile)

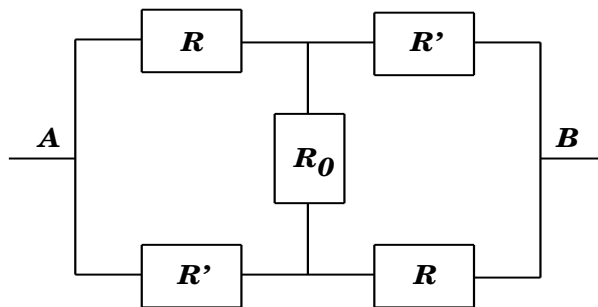


FIGURE 9 -

Rep : $R_e = \frac{R_0(R + R') + 2RR'}{R + R' + 2R_0}$.

VIII. Résistance équivalente du réseau suivant (symétrie)

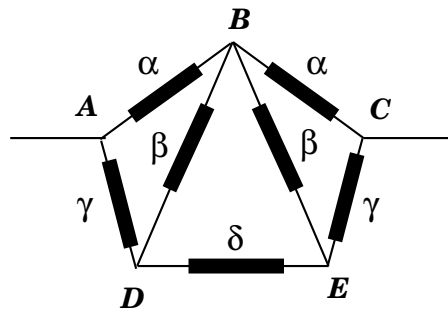


FIGURE 10 –

Rep : $R_e = 2\alpha \frac{\beta\delta + \gamma(\delta + 2\beta)}{\beta\delta + (2\beta + \delta)(\alpha + \gamma)}$.

IX. Résistance équivalente du réseau suivant (transformation triangle-étoile)

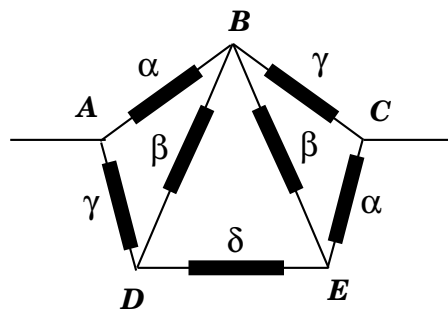


FIGURE 11 –

Rep : $R_e = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} + \beta(\alpha + \gamma) \left(\delta + \frac{\beta(\alpha + \gamma)}{\alpha + \beta + \gamma} \right) \frac{1}{\delta(\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta(\alpha + \gamma)}$.

X. Dans le réseau de la figure 12, chaque segment représente une résistance unité (1 Ω). Calculer la résistance équivalente lorsque les pôles d'entrée et de sortie sont

- a) H et F ; Rep : 1.
- b) A et O ; Rep : 7/8.
- c) A et C ; Rep : 3/2.
- d) A et B ; Rep : 5/4.
- e) H et O ; Rep : 7/12.

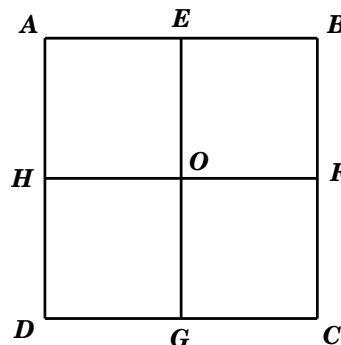


FIGURE 12 –

XI. Dans le réseau de la figure 13, chaque segment représente une résistance unité (1Ω). Calculer la résistance équivalente lorsque les pôles d'entrée et de sortie sont

- a) A et B ; Rep : $7/12$.
- c) A et C ; Rep : $3/4$.
- d) A et G ; Rep : $5/6$.

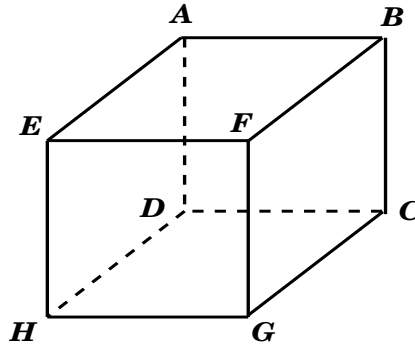


FIGURE 13 –

XII. Dans le réseau de la figure 14, déterminer les potentiels en A , B et C .

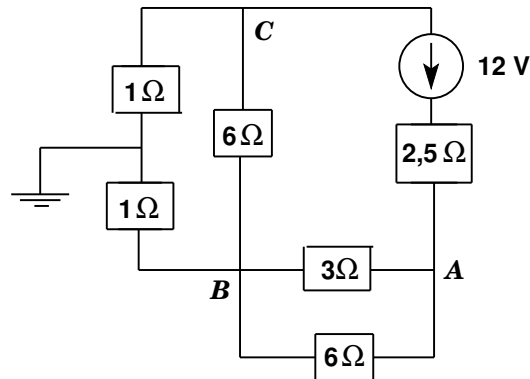


FIGURE 14 –

Rep : $V_A = 5,5 \text{ V}$; $V_B = -V_C = 1,5 \text{ V}$.

XIII. Dans le réseau de la figure 15, comment choisir la résistance R pour que la puissance dissipée dans la résistance de 5Ω soit de 20 W ?

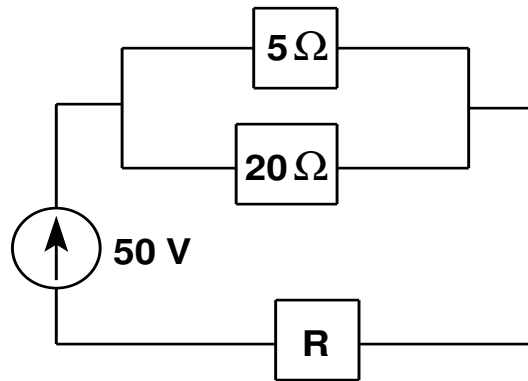


FIGURE 15 –

Rep : $R = 16 \Omega$.

XIV. Un générateur parfait de tension continue E débite dans une résistance R un courant d'intensité I sous une tension U_0 . On intercale ensuite entre ce générateur et la résistance une cellule "en π " comme indiqué à la figure 16. La tension aux bornes de R devient alors U_1 .

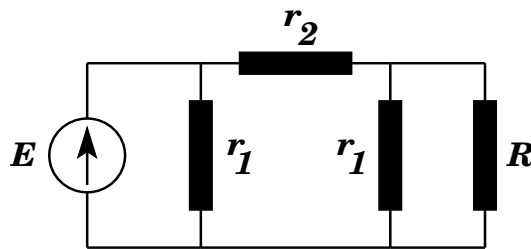


FIGURE 16 –

1°) Quelle doit être la valeur $f(r_1, r_2)$ de R pour que l'intensité du courant débité par le générateur garde la valeur I ?

Rep : $R = r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_2 + 2r_1}}$.

2°) La relation $R = f(r_1, r_2)$ étant vérifiée, exprimer r_1 et r_2 en fonction de R et de $\alpha = U_1/U_0$.

Rep : $r_1 = R \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$; $r_2 = R \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha}$.

3°) A la suite de la cellule en π , on en place une seconde et R est placée à la sortie de la chaîne. Quelle est alors l'intensité du courant débité par le générateur ?

XV. On veut mesurer une résistance R en se fondant sur la loi d'Ohm $V = RI$ où, a priori, V est la différence de potentiel aux bornes de la résistance et I l'intensité du courant qui la traverse. Pour cela, on dispose d'une pile E fournissant le courant, d'un voltmètre de

résistance r_v et d'un ampèremètre de résistance r_a . Comme le montre la figure 17, deux montages sont possibles. Dans le premier, dit "montage amont", le voltmètre est placé en amont de l'ampèremètre. Dans le second, dit "montage aval", le voltmètre se trouve en aval de l'ampèremètre. Dans chaque cas, soit V le voltage indiqué par le voltmètre et I l'intensité donnée par l'ampèremètre.

1°) Calculer le rapport V/I pour l'un et l'autre montage et préciser pour chaque cas l'erreur commise sur l'évaluation de R .

2°) Selon l'ordre de grandeur de la résistance à mesurer, quel est le montage le plus approprié minimisant l'erreur commise?

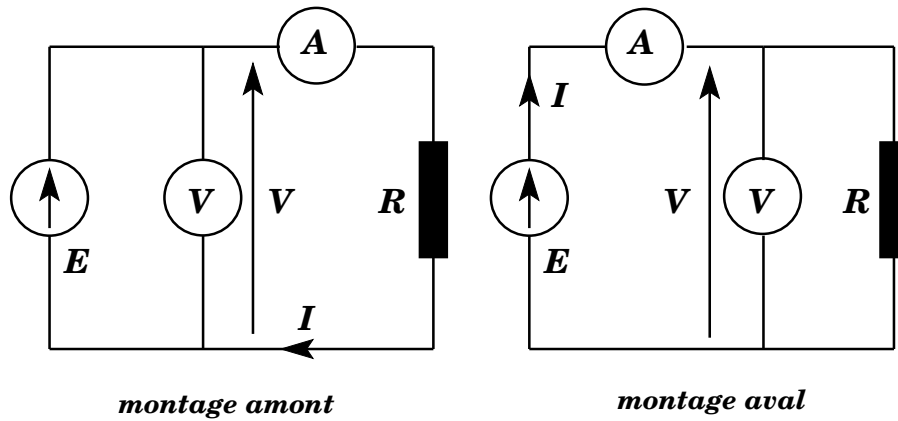


FIGURE 17 –

Caractéristiques, point de fonctionnement

I. La caractéristique courant-tension d'un électrolyseur est ($e' > 0, g > 0$)

$$\begin{aligned} i &= g(u - e') & \text{si } u &\geq e' \\ i &= 0 & \text{si } |u| &\leq e' \\ i &= g(u + e') & \text{si } u &\leq -e' \end{aligned}$$

On le branche aux bornes d'un générateur de tension de fem e et de résistance interne r . Trouver le point de fonctionnement du dispositif. A.N. : $e' = 2 \text{ V}$, $e = 6 \text{ V}$, $r = 18 \Omega$, $g = 0,5 \Omega^{-1}$.

Rep : $u = 2,4 \text{ V}$; $i = 0,2 \text{ A}$.

II. La caractéristique d'une diode à jonction p-n est donnée par la relation

$$i(u) = I_s \left(\exp\left(\frac{eu}{kT}\right) - 1 \right)$$

où $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ est la valeur absolue de la charge de l'électron, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ est la constante de Boltzmann, $T = 288 \text{ K}$ la température Kelvin de la diode.

1°) Que représente I_s ? Dans la suite, on prendra $I_s = 10^{-9} \text{ A}$.

2°) Etudier les variations de $i(u)$ dans l'intervalle $[-0,1\text{V}, 1\text{V}]$.

3°) Une diode est dite parfaite si sa caractéristique peut être représentée par une demi-droite de pente infinie dans le quadrant $u > 0, i > 0$. On admettra que cela est réalisé dès lors que la pente de la caractéristique est supérieure à $10^{-3} \Omega^{-1}$. A partir de quelle valeur V_0 de u peut-on considérer la diode comme parfaite?

4°) La diode est montée en polarisation directe avec un générateur parfait de fem $E = 1,5 \text{ V}$ en série avec une résistance $R = 1000 \Omega$ (figure 18). Déterminer graphiquement les coordonnées du point de fonctionnement.

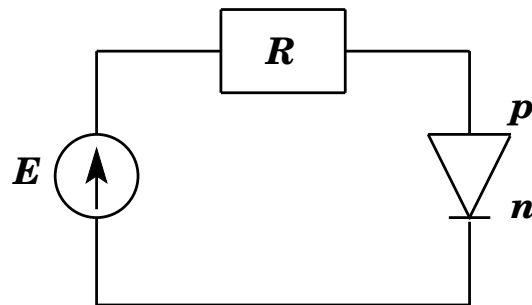


FIGURE 18 –

Rep : $V_0 \simeq 0,6 \text{ V}$.

III. La caractéristique d'une diode tunnel est représentée à la figure 19

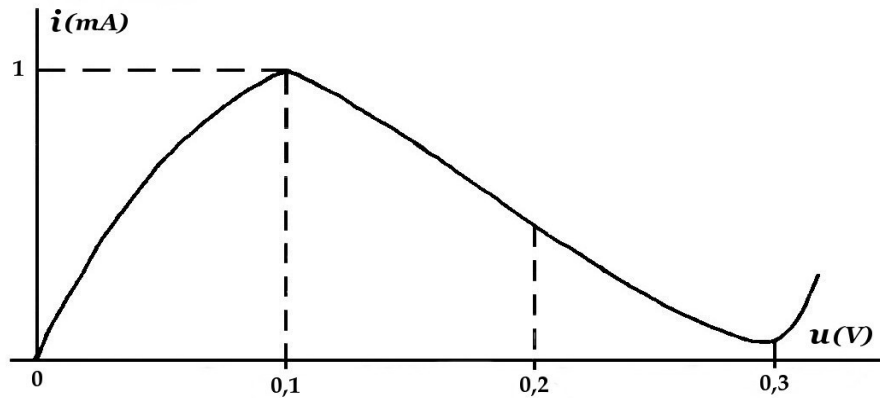


FIGURE 19 –

1°) Cette diode est placée dans le circuit de la figure 20, alimenté par un générateur parfait de fem constante $E = E_0$, en série avec une résistance R . Quelle est l'intensité I_0 traversant la diode lorsque $u = U_0$? A.N. : $E_0 = 0,27 \text{ V}$, $R = 140 \Omega$, $U_0 = 0,2 \text{ V}$.

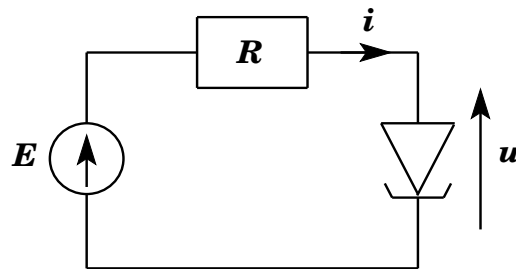


FIGURE 20 –

Rep : $I_0 = 0,5 \text{ mA}$.

2°) En fait, la tension E du générateur n'est pas rigoureusement stabilisée à la valeur E_0 . Elle subit de petites variations, ce que l'on peut traduire en écrivant $E = E_0 + e$ avec $|e| \ll E_0$. L'état électrocinétique du circuit résulte donc de la superposition de deux régimes : un régime stationnaire (statique) associé à la valeur E_0 polarisant la diode et un régime variable associé à e correspondant à un fonctionnement dynamique de la diode.

a) Montrer qu'en régime variable la diode tunnel est équivalente à une résistance *négative* $-r < 0$ définie à partir de sa caractéristique autour du point de fonctionnement précédent U_0, I_0 . Donner la valeur numérique de r sachant que $\frac{di}{du} = -0,0067 \Omega^{-1}$.

Rep : $r \simeq 150 \Omega$.

b) On note v la partie variable de la tension aux bornes de R . Déterminer le rapport d'amplification $A = v/e$ en fonction de R et r . Comment faire varier A pour une diode tunnel et une résistance R données?

Rep : $A = \frac{R}{R - r}$.

IV. On considère le dipôle AB de la figure 21

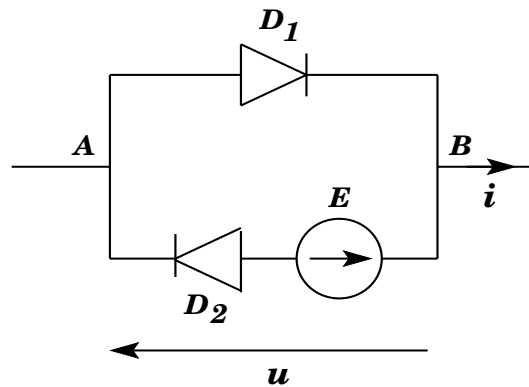


FIGURE 21 –

où les diodes D_1 et D_2 , identiques, ont une tension de seuil V_s et une résistance r dans le sens passant.

- 1°) Déterminer la caractéristique de ce dipôle. A quel composant est-il équivalent ?
- 2°) Montrer que lorsqu'il conduit le dipôle est équivalent à un générateur de tension dont on précisera les éléments caractéristiques.

V. Point de fonctionnement d'un électrolyseur.

On considère le dispositif de la figure 22. Le générateur entre G et F est une source de tension continue E , tandis que AF et FB sont deux potentiomètres de résistance totale R .

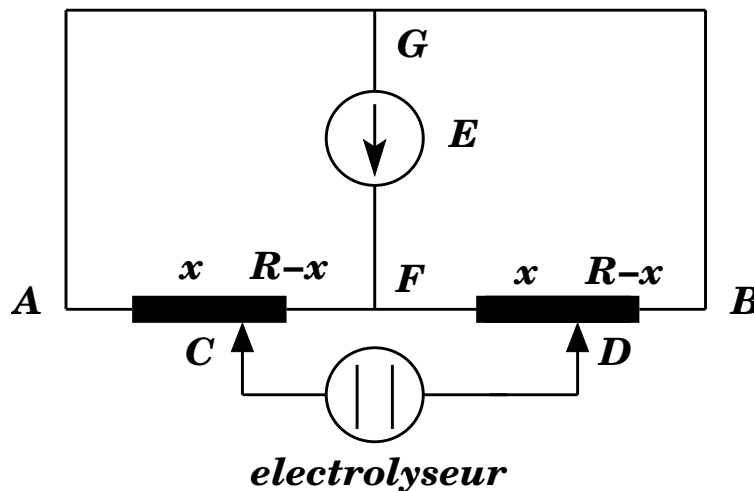


FIGURE 22 –

Entre les curseurs C et D on branche un électrolyseur de fcm e et de résistance interne r .

Etudier et tracer graphiquement en fonction de x les variations de l'intensité i du courant traversant l'électrolyseur. On donne : $E = 4 \text{ V}$, $e = 2 \text{ V}$, $r = 20 \Omega$, $R = 10 \Omega$.

VI. On considère le dipôle AB de la figure 23.

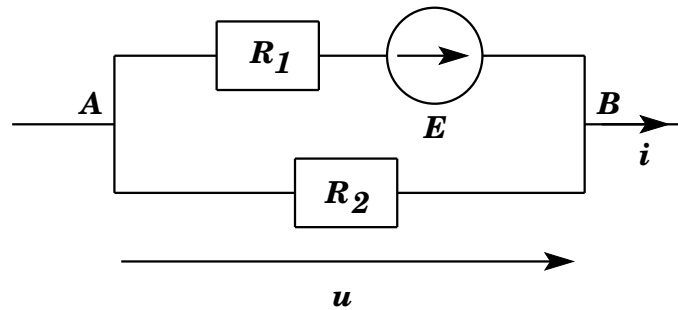


FIGURE 23 –

- 1°) En déterminer graphiquement la caractéristique $i = f(u)$.
- 2°) Définir les éléments du générateur de tension équivalent ainsi que ceux du générateur de courant équivalent.
- 3°) On incorpore le dipôle AB dans le circuit de la figure 24. Déterminer le point de fonctionnement de ce circuit.

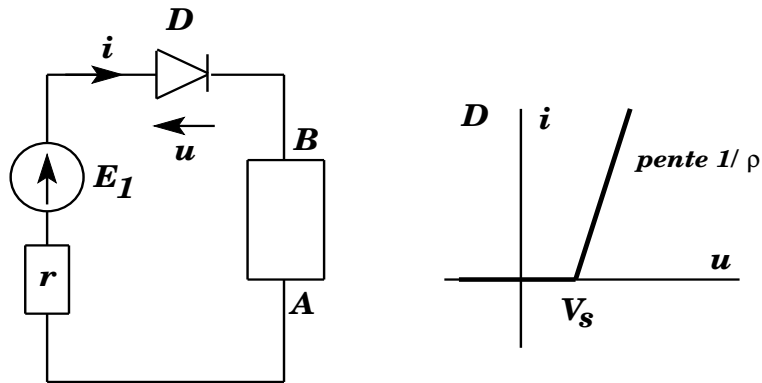


FIGURE 24 –

VII. On considère le circuit de la figure 25, constitué, en série, d'un générateur de tension parfait de fem constante E , une résistance R et un dipôle D dont la caractéristique tension-courant est donnée par $u = ai^\alpha$. Pour les applications numériques, on prendra : $E = 10 \text{ V}$, $R = 20\Omega$, $a = 10 \text{ S.l.}$, $\alpha = 0,25$.

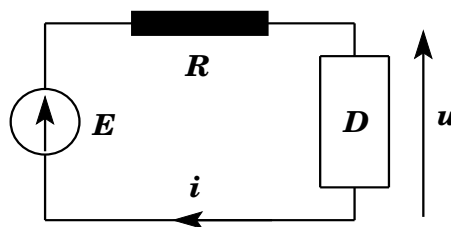


FIGURE 25 –

1°) Tracer la caractéristique courant-tension $i = f(u)$. On ne demande pas une grande précision : on pourra prendre comme échelle 1cm pour 1V en abscisse et 1cm pour 0,1A en ordonnée. On limitera cette caractéristique à sa partie utile, sachant que la puissance maximale admissible par D est de 10W.

2°) Déterminer graphiquement les valeurs approximatives des coordonnées du point de fonctionnement du circuit.

3°) Exprimer E en fonction de i , puis en fonction de u .

4°) On définit le coefficient de stabilisation S par

$$S = \left(\frac{dE}{E}\right) / \left(\frac{du}{u}\right) = \frac{u}{E} \frac{dE}{du}$$

Calculer S en fonction de $x = u/E$ et de α et en donner la valeur numérique.

5°) Calculer S si dans le circuit précédent on remplace le dipôle D par une résistance R' .

6°) Justifier le nom de coefficient de stabilisation donné à la grandeur S , en comparant, lorsque E varie légèrement autour de sa valeur nominale, les variations consécutives de u dans les questions 4°) et 5°).

Théorèmes généraux

I. Calculer les intensités circulant dans les diverses branches du réseau de la figure 26 :

- 1°) En utilisant directement les lois de Kirchhoff ;
- 2°) En procédant par superposition.

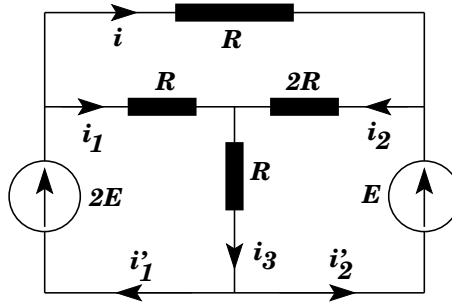


FIGURE 26 –

Rep : $i_1 = i_3 = i = E/R$, $i_2 = 0$, $i'_1 = 2E/R$, $i'_2 = -E/R$.

II. Pour les montages de la figure 27, les différences de potentiel entre A et B sont-elles les mêmes ? Donner les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au dipôle de gauche.

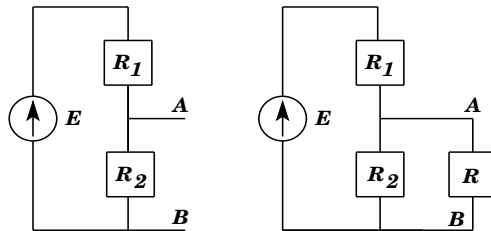


FIGURE 27 –

III. Donner les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB de la figure 28

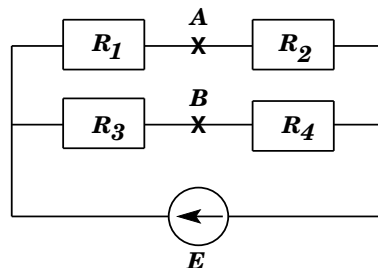


FIGURE 28 –

IV. Dans le réseau de la figure 29, trouver les valeurs numériques des intensités I_1 , I_2 et I_3 :

- 1°) En utilisant les lois de Kirchhoff et la méthode matricielle ;
- 2°) par superposition ;
- 3°) en utilisant pas à pas le théorème de Thévenin ;
- 4°) en utilisant pas à pas le Théorème de Norton.

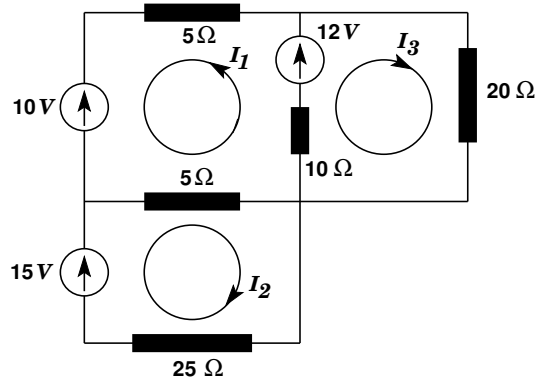


FIGURE 29 –

Rep : $I_1 = -27/95$ A, $I_2 = 47/95$ A, $I_3 = 52/95$ A.

V. Dans le réseau de la figure 30, quelle doit être la condition sur les résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour que l'intensité I du courant traversant la résistance R soit indépendante de E_3 ?

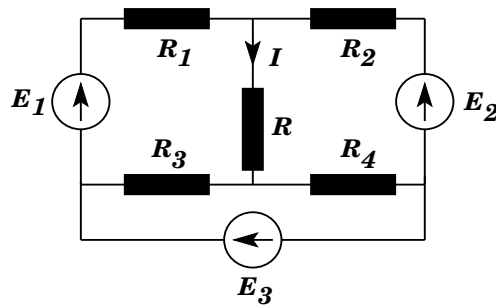


FIGURE 30 –

VI. On dispose de N générateurs de tension identiques, chacun délivrant une fem E et ayant une résistance interne r . On les associe en p séries de q générateurs, ces p séries étant montées en parallèle, et l'on fait débiter l'ensemble obtenu dans une résistance de charge R .

- 1°) Donner les caractéristiques du générateur de tension équivalent à l'ensemble.

Rep : $E_{\text{eq}} = qE$, $R_{\text{eq}} = rq/p$.

- 2°) Quelles doivent être les valeurs de p et q pour que l'ensemble débite le maximum d'intensité de courant dans R ? A.N. : $N = 18$, $E = 1,8$ V, $r = 2$ Ω, $R = 3$ Ω.

Rep : $q = \sqrt{\frac{NR}{r}}$, $p = \sqrt{\frac{Nr}{R}}$, $p = 3$, $q = 6$.

VII. Pour le réseau de la figure 31, calculer les intensités i_1, \dots, i_5 par deux méthodes différentes. Il peut être judicieux d'utiliser le théorème de Millmann.

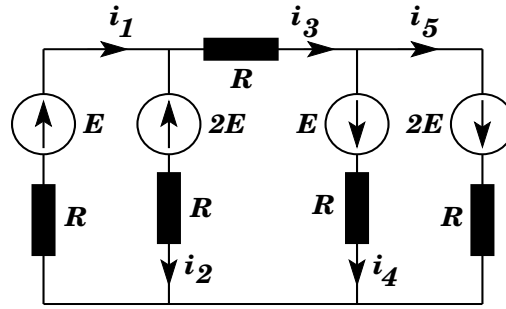


FIGURE 31 –

Rep : $i_1 = i_4 = \frac{E}{4R}$, $i_2 = -i_5 = -\frac{5E}{4R}$, $i_3 = \frac{3E}{2R}$.

VIII. Pont de Wheatstone.

1°) Déterminer les caractéristiques du générateur de Thévenin du dipôle AB en dehors de la résistance R dans le montage de la figure 32 (le générateur de tension E est supposé sans résistance interne).

Rep : $E_{Th} = E \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}$, $R_{Th} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

2°) En déduire l'expression de l'intensité I du courant traversant la résistance R . Montrer que l'on obtient $I = 0$ si les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 satisfont une certaine relation. En déduire une méthode de mesure de R_4 (la résistance R est alors celle d'un galvanomètre placé dans la branche AB).

Rep : $R_2 R_4 = R_1 R_3$.

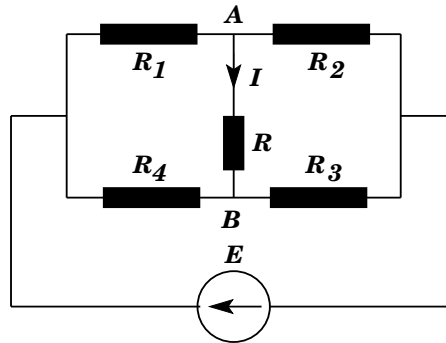


FIGURE 32 –

IX. Un treillis plan illimité est constitué de fils conducteurs groupés en mailles carrées dont chaque côté a pour résistance R . On veut calculer la résistance équivalente mesurée entre deux noeuds voisins A et B du treillis. Pour cela, on envisage les deux régimes permanents suivants.

1°) Dans le premier, un courant d'intensité I entre par le noeud A et se disperse dans le réseau. Quelle est alors l'intensité du courant dans la branche AB ?

2°) Dans le second, un courant d'intensité I provenant de l'infini se rassemble dans le noeud B . Quelle est alors l'intensité du courant dans la branche AB ?

3°) Montrer que la superposition de ces deux régimes donne un régime où un courant d'intensité I entre par le noeud A et ressort par le noeud B , Quelle est dans ce nouveau régime la tension entre A et B ? En déduire la résistance équivalente cherchée.

Rep : $R_{eq} = R/2$.

X. Dans le circuit de la figure 33, le dipôle D est une diode Zener dont la caractéristique est schématisée dans cette même figure. En appliquant le théorème de Thévenin ou le théorème de Norton, associé au théorème de Millmann, trouver, en fonction des valeurs de U_D , l'intensité I du courant circulant dans le résistance R .

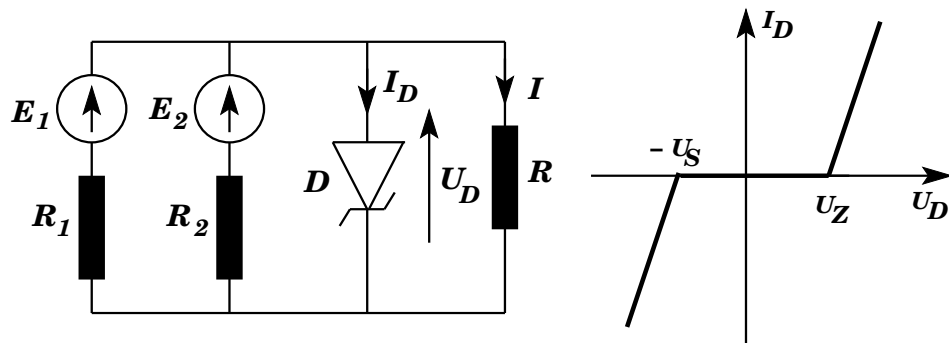


FIGURE 33 –

XI. On considère le réseau de la figure 34.

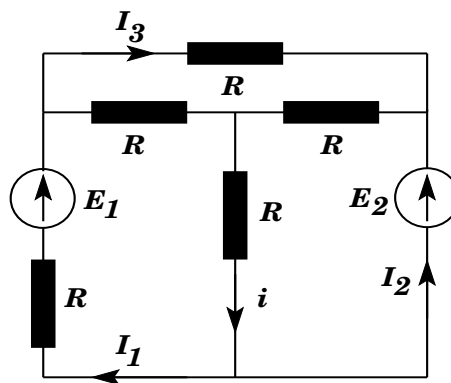


FIGURE 34 –

1°) Calculer I_1 , I_2 , I_3 en utilisant la loi des mailles et la méthode des déterminants.

2°) Calculer I_3 en utilisant le théorème de superposition.

3°) Calculer i en utilisant le théorème de Thévenin associé aux théorèmes de Kennely et de Millmann.

Rep : $I_1 = \frac{5E_1 - 4E_2}{8R}$, $I_2 = \frac{2E_2 - E_1}{2R}$, $I_3 = \frac{3E_1 - 4E_2}{8R}$, $i = \frac{E_1 + 4E_2}{8R}$.

4°) Résoudre complètement le réseau obtenu à partir du précédent en remplaçant l'un ou l'autre des générateurs de tension, ou les deux, par un ou des générateurs de courant parfaits.

XII. Déterminer l'intensité du courant circulant dans chacune des branches du réseau de la figure 35. Existe-t-il des situations pour lesquelles il ne passe plus de courant soit dans R_1 , soit dans R_2 , soit dans R_3 ?

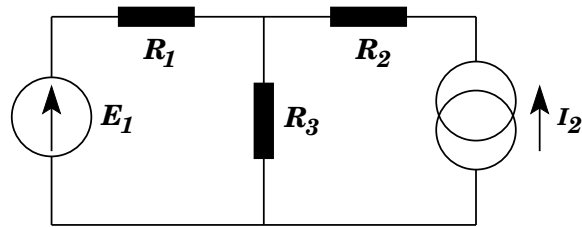


FIGURE 35 –

Régimes transitoires

I. Le circuit de la figure 36 comporte un générateur parfait de fem constante E , un interrupteur K , une bobine de coefficient d'auto-induction L et de résistance R . On peut considérer que la résistance des fils de liaison et une éventuelle résistance interne du générateur réel sont prises en compte dans la résistance R . Tout effet capacitif du circuit est négligé. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

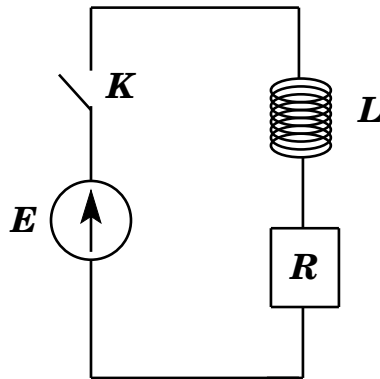


FIGURE 36 –

1° Que peut-on dire de la valeur à cette date de l'intensité I du courant traversant le circuit ? Justifier la réponse.

2°) Comment s'exprime la réaction de la bobine à la fermeture de l'interrupteur et au passage d'un courant ?

3°) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité $I(t)$. L'intégrer et trouver l'expression de $I(t)$ compte tenu de la condition trouvée au 1°).

4°) Que valeur I_0 atteint $I(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$? Au bout de combien de temps $I(t)$ ne diffère de cette valeur qu'à moins de 5% ? Définir alors une constante de temps pour ce circuit. On donne $e^3 \simeq 20$.

5°) Quelle énergie a été emmagasinée dans la bobine ?

II. Partie A.

Le circuit de la figure 37 comporte un générateur parfait de fem E , un interrupteur K , une résistance R et un condensateur C_1 , de capacité C , initialement déchargé. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

1°) On examine d'abord le régime stationnaire final.

a) Quelle charge Q_1 apparaît sur l'armature A du condensateur lorsque $t \rightarrow +\infty$? Préciser son signe.

b) Quelle énergie W_1 a été emmagasinée dans le condensateur ?

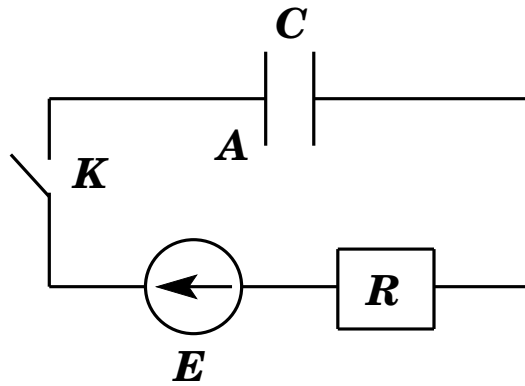


FIGURE 37 –

2°) On étudie ensuite le régime transitoire. Le coefficient d'auto-induction du circuit est négligé.

- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge $q_1(t)$ de l'armature A du condensateur.
- En déduire par intégration l'expression de $q_1(t)$.
- Retrouver alors le résultat du 1° a). Au bout de combien de temps $q_1(t)$ ne diffère de Q_1 qu'à moins de 5% ? Définir alors une constante de temps du circuit C, R . On donne $e^3 \simeq 20$.

Partie B.

Le condensateur précédent est remplacé par deux condensateurs C_2 et C_3 de capacités respectives $2C$ et $3C$, montés en série et initialement déchargés (figure 38). A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . On néglige encore le coefficient d'auto-induction du circuit.

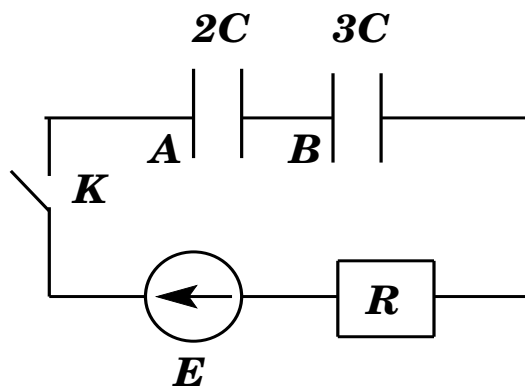


FIGURE 38 –

1°) Quelle est, pour $t > 0$, la relation entre la charge q_2 sur l'armature A du condensateur C_1 et la charge q_3 sur l'armature B du condensateur C_3 ?

Reprendre les questions 2°) de la partie A, mais pour la charge q_2 du condensateur C_2 .

Partie C. On reconsidère le processus de charge du condensateur de la partie A en tenant compte cette fois de l'inévitable présence d'un coefficient d'auto-induction L du circuit.

1°) Quelles conditions initiales doivent être maintenant appliquées ?

- 2°) a) Etablir la nouvelle équation différentielle que doit satisfaire la charge $q_1(t)$.
- b) Résoudre cette équation dans le cas où L est suffisamment petit pour que soit réalisée la condition $L < 4R^2/C$. En déduire l'expression de $q_1(t)$ puis de l'intensité $I(t)$ traversant le circuit.
- 3°) a) On se place dans le cas où $L \ll R^2/C$. Interpréter ce cas en termes de constantes de temps. Montrer que l'intensité $I(t)$ prend alors la forme

$$I(t) = I_1 \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right)$$

I_1 , τ_1 et $\tau_2 < \tau_1$ étant des constantes dont on précisera les expressions.

- b) Etudier les variations de $I(t)$ au voisinage de $t = 0$, puis pour $\tau_1 \ll t \leq \tau_2$. Commenter.

III. Dans le montage de la figure 39 le condensateur (1) de capacité C_1 a été initialement chargé, son armature A porte alors la charge Q_0 , tandis que le condensateur (2) de capacité C_2 a une charge initiale nulle. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Tout coefficient d'auto-induction est négligé.

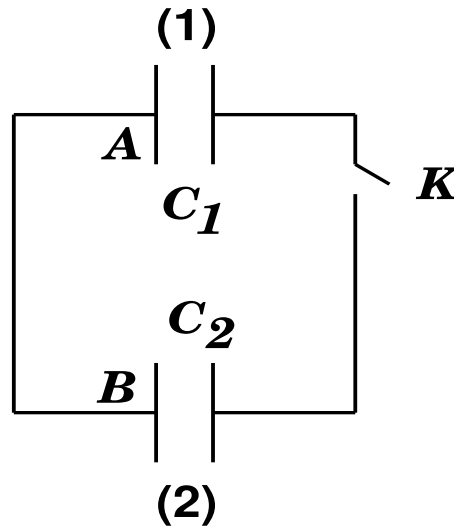


FIGURE 39 –

- 1°) a) Quelles sont, à l'équilibre final, les charges respectives Q_1 et Q_2 des deux condensateurs? En préciser les signes.
- b) Faire le bilan énergétique. Que peut-on en conclure?
- 2°) On s'intéresse maintenant au régime transitoire.
- a) Soit, à la date t , $q_1(t)$ et $q_2(t)$ les charges respectives de l'armature A du condensateur (1) et de l'armature B du condensateur (2). Quelle relation existe-t-il entre ces deux charges?
- b) On note R la résistance totale des fils de liaison. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de $q_1(t)$ puis en déduire, par intégration, l'expression de $q_1(t)$ puis celle de $q_2(t)$.
- c) Donner l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant de décharge du condensateur (1).
- d) En déduire l'énergie totale dissipée par effet Joule dans les fils conducteurs. Conclure.

IV. On considère le circuit de la figure 40 où, initialement, le condensateur (1) porte la charge Q , tandis que le condensateur (2) est déchargé. Tout coefficient d'auto-induction est négligé.

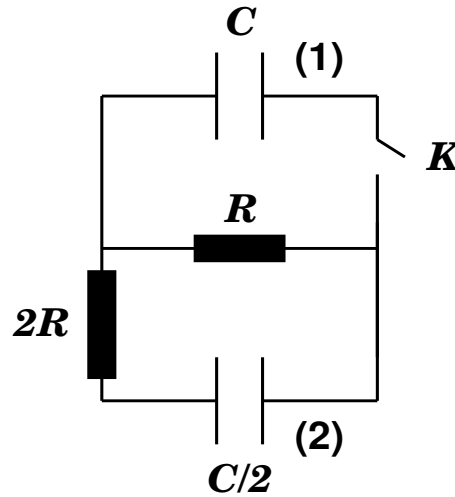


FIGURE 40 –

A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . On note q_1 et q_2 les charges respectives des condensateurs (1) et (2) à la date $t > 0$.

1°) Montrer qu'entre q_1 , q_2 et leurs dérivées temporelles \dot{q}_1 et \dot{q}_2 il existe deux relations de la forme

$$q_1 = \alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2, \quad q_2 = \gamma \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_2$$

2°) En procédant par substitution, en déduire les équations différentielles satisfaites par q_1 et q_2 séparément.

3°) Intégrer ces équations pour trouver $q_1(t)$ et $q_2(t)$, compte tenu des conditions initiales.

4°) Calculer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

V. Dans le circuit de la figure 41, le générateur délivre une tension constante E , la bobine de coefficient d'auto-induction L a une résistance négligeable et le condensateur, initialement déchargé, a pour capacité C . A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\alpha = \frac{1}{2RC}$. On supposera $\omega_0 > \alpha$ et l'on posera $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

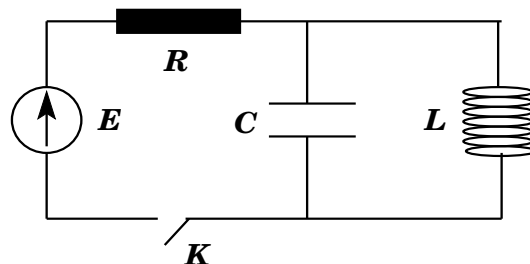


FIGURE 41 –

Trouver l'expression de l'intensité $I(t)$ du courant traversant la résistance R . En tracer le graphe.

VI. Dans le circuit de la figure 42, le générateur parfait délivre une tension constante E . Tout effet inductif est négligé. On posera $u_1 = V_A - V_O$, $u_2 = V_O - V_B$. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K , alors que les condensateurs sont déchargés.

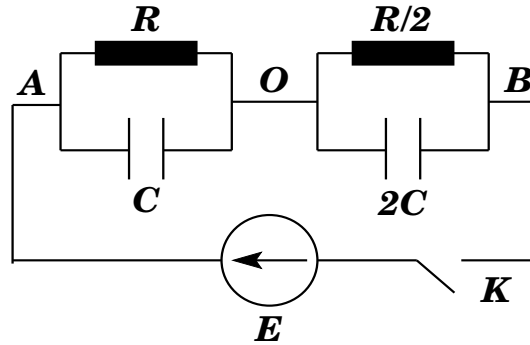


FIGURE 42 –

1°) Que peut-on dire de l'intensité du courant dans la branche BEA à cette date ?

2°) a) Etablir les équations différentielles vérifiées par u_1 et u_2 après la fermeture de l'interrupteur. Les intégrer pour trouver $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour $t \geq 0$, en tenant compte de la condition trouvée au 1°). On posera $\tau = \frac{1}{RC}$.

b) Quelles sont les valeurs limites de u_1 et u_2 pour $t \rightarrow +\infty$?

VII. La branche AB du circuit de la figure 43 comprend, en série, une résistance pure, une bobine sans résistance et de coefficient d'auto-induction L et un condensateur parfait de capacité C . La branche DF comprend une pile, sans résistance interne, de fem constante E .

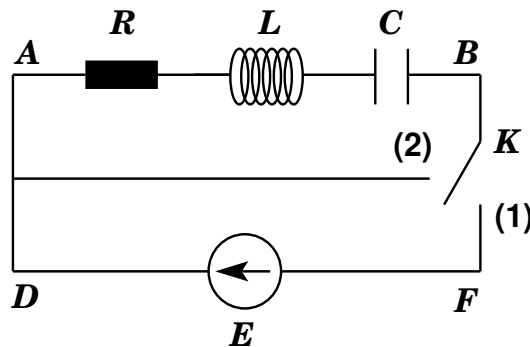


FIGURE 43 –

Le condensateur est initialement déchargé. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K dans la position (1).

a) Quelle est la valeur de l'intensité du courant dans le circuit à $t = 0$? Justifier la réponse. Etablir l'équation différentielle déterminant l'évolution temporelle de la charge $q(t)$ du conden-

sateur. On posera $\alpha = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2°) a) Donner l'expression de la solution générale de cette équation.

b) Quelle doit être la condition sur R , L et C pour que l'on ait des oscillations amorties? Quelle est alors la période T (ou pseudo-période) de ces oscillations?

c) Cette condition étant supposée satisfaite, trouver $q(t)$ et $i(t)$, compte tenu des conditions initiales et tracer qualitativement la courbe de variation de $i(t)$ au cours du temps.

3°) A la date t_0 , le condensateur a acquis la charge q_0 . On place alors l'interrupteur dans la position (2).

a) Quelle est l'équation différentielle déterminant, à partir de ce moment, l'évolution temporelle de la charge du condensateur?

b) Préciser les conditions initiales à $t = t_0$ puis, résolvant l'équation différentielle en supposant réalisée la condition du 2° b), déterminer $q(t)$ pour $t \geq t_0$ (il sera commode de poser $t' = t - t_0$).

4°) a) Montrer que l'équation différentielle du 3° a) est analogue à celle qui détermine le mouvement sur un axe horizontal d'un point matériel de masse m , fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k et soumis à une force de frottement $-f\dot{x}$, f étant un coefficient de frottement positif.

b) Quels sont les analogues mécaniques de R , L et C ?

c) Trouver, par analogie avec un système mécanique que l'on définira, la capacité totale de l'association en série de deux condensateurs.

5°) a) Quels sont les analogues électriques de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique totale? On notera $W(t)$ l'énergie totale du circuit.

Dans les conditions du 3°), calculer la perte d'énergie $\Delta W(t) = W(t) - W(t+T)$ au cours d'une pseudo-période T , puis le rapport $Q = 2\pi W(t)/\Delta W(t)$. Montrer que si $\alpha T \ll 1$ (cas d'une résistance faible) on a $Q \simeq L\omega_0/R$.

c) Calculer le nombre d'oscillations effectuées pendant le laps de temps au bout duquel l'amplitude maximum de $q(t)$ a été atténuée d'un facteur $1/e \simeq 1/3$. Exprimer ce nombre en fonction de Q pour $\alpha T \ll 1$ et justifier alors l'appellation de *coefficient de qualité* pour Q .

VIII. Un système d'allumage classique d'un moteur à explosion comporte :

- une batterie E (12 V);

un (inter)rupteur à vis platinées VP, dont l'ouverture et la fermeture sont commandées par la rotation du moteur, grâce à l'arbre à cames;

- une "bobine" TR;

un condensateur C (0,125 μ F) branché aux bornes du rupteur VP;

- un distributeur D qui alimente successivement les quatre bougies.

La bobine TR est un transformateur qui comporte deux bobinages : le primaire B et le secondaire B_2 . On se contente des approximations suivantes :

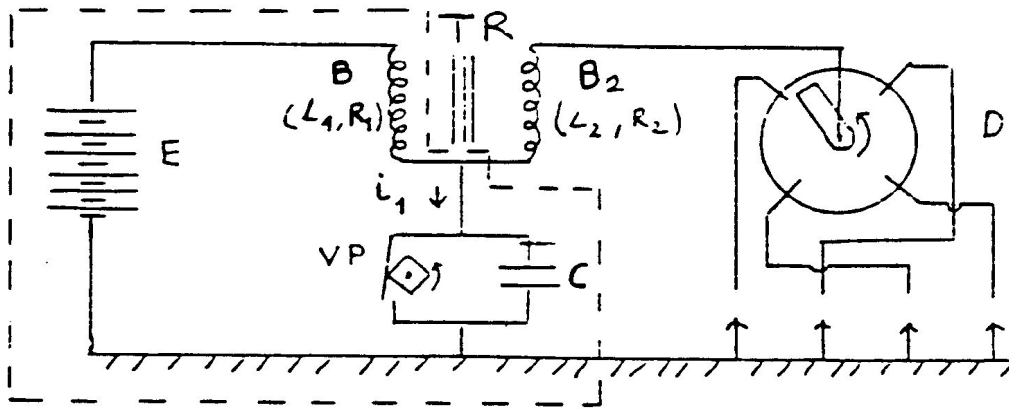


FIGURE 44 –

- le bobinage primaire est assimilé à une inductance L_1 (0,02 H) en série avec une résistance R_1 (20 Ω);
- la réaction du circuit secondaire sur le primaire est négligeable;
- le bobinage secondaire B_2 est la source d'une force électromotrice e , valant 50 fois la force contre-électromotrice due à l'induction dans le bobinage primaire (elle sert à provoquer l'amorçage de l'arc électrique dans les bougies).

Sur le schéma de principe de la figure 44, on a entouré en pointillés les éléments du circuit primaire.

1°) Dessiner le schéma électrique du circuit primaire dans les deux cas ouvert et fermé.

2°) On étudie l'établissement du courant $i_1(t)$ à partir de l'instant t_0 de fermeture du rupteur VP. On suppose qu'à cette date, ce courant est nul et que la charge $q(t_0)$ du condensateur est nulle.

a) Montrer que l'hypothèse $q(t_0) = 0$ est cohérente avec l'affirmation "le rupteur VP est fermé".

b) Estimer la valeur limite $i_1(\infty)$ du courant au bout d'un temps long.

c) Ecrire une équation différentielle gouvernant l'évolution du courant $i_1(t)$.

d) Compte tenu des conditions aux limites, pour $t = t_0$, trouver $i_1(t)$.

e) Vérifier que les résultats de b) et d) sont cohérents.

f) Le moteur tourne à 3000 tours/mn; le temps T de fermeture du rupteur (approximativement égal au temps d'ouverture) peut-il être considéré comme long au sens de b) ?

3°) On étudie maintenant l'évolution du courant $i_1(t)$ à partir de l'instant d'ouverture $t_0 + T$. On écrira la charge du condensateur C sous la forme

$$q(t') = q_\ell + Ae^{at'} + Be^{bt'}$$

où $t' = t - t_0 - T$ est le temps écoulé à partir de la fermeture du rupteur. On posera $\lambda = R_1/(2L)$, $\omega_0^2 = 1/(L_1C)$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$.

- a) Donner la relation entre $i_1(t')$ et $q(t')$.
- b) Les conditions initiales sont-elles $i_1(0) = E/R_1$, $q(0) = 0$?
- c) Estimer les valeurs limites du courant $i_1(\infty)$ et de la charge $q(\infty)$ pour un temps très long.
- d) Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge $q(t')$.
- e) Montrer que A et B doivent être complexes conjugués pour que $q(t')$ soit une quantité physique. Déterminer A et B .
- f) Tracer $i_1(t)$ pour $t_0 + T < t < t_0 + 2T$.

Régimes sinusoïdaux

I. Le circuit de la figure 45 comportant un condensateur parfait de capacité C , une bobine sans résistance de coefficient d'auto-induction L et une résistance R est alimenté par un générateur sans résistance interne et de fem $E = E_0 \cos \omega t$ (le bout de la flèche du générateur indique l'origine des phases). Le condensateur est initialement déchargé. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

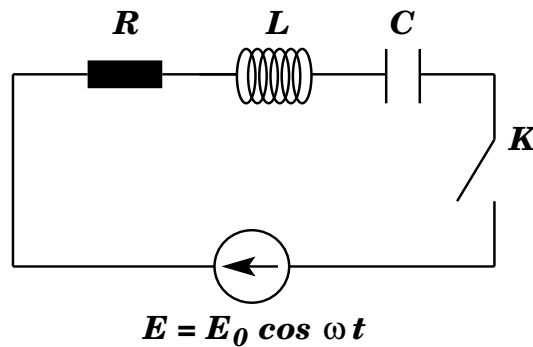


FIGURE 45 –

1°) a) Etablir l'équation différentielle déterminant l'évolution temporelle de la charge $q(t)$ du condensateur.

b) La solution de cette équation est composée de deux termes $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, où $q_1(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Que représente mathématiquement chacun de ces deux termes ?

c) Définir le régime transitoire et le régime permanent. Quelle est la nature du régime permanent ?

• Dans les questions suivantes, on suppose établi le régime permanent.

2°) a) Trouver l'impédance complexe Z du circuit R, L, C . L'exprimer en fonction de R , $x = \omega/\omega_0$ et $Q = L\omega_0/R$ où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

b) En déduire l'amplitude I_0 de l'intensité du courant dans le circuit ainsi que le déphasage φ de ce courant par rapport à la tension complexe $e = E_0 e^{j\omega t}$ du générateur.

3°) Tracer qualitativement la courbe représentant les variations de I_0 en fonction de x .

a) Quelles sont, a priori, les valeurs de I_0 lorsque $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$, respectivement ? En expliquer les raisons physiques.

b) Quelle est la valeur maximum I_M de I_0 et quelle est la valeur correspondante de x ?

4°) Tracer qualitativement la courbe des variations du déphasage φ en fonction de x . Que devient le déphasage lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini ? En expliquer les raisons physiques.

5°) On note x_a et x_b les valeurs de x pour lesquelles $I_0 = I_M/\sqrt{2}$.

- a) Quelles sont les valeurs correspondantes de φ ?
- b) En supposant Q très grand devant 1, déterminer approximativement x_a et x_b et la bande passante $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a = \omega_0(x_b - x_a)$ en fonction de Q .
- c) Que peut-on en déduire quant à l'allure de la courbe de $I_0(x)$ lorsque Q devient de plus en plus grand ?
- 6°) On note v la tension complexe aux bornes du condensateur. Déterminer le rapport $\chi = v/e$ en fonction de x et Q .

$$\text{Rep : } \chi = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- a) Que devient ce rapport lorsque $x \rightarrow 0$ et lorsque $x \rightarrow +\infty$?
- b) Donner la valeur de χ pour $x = 1$.

7°) Quelle est la puissance moyenne P_m dissipée dans le circuit R, L, C ? Tracer qualitativement la courbe de variation de P_m en fonction de x . Que devient-elle pour $\omega = \omega_0$?

8°) Quelle est l'énergie moyenne E_c emmagasinée dans le condensateur ? Tracer qualitativement la courbe de variation de E_c en fonction de x . A quelle condition cette courbe présente-t-elle un maximum ?

9°) Un circuit est constitué d'une résistance $R = 25\Omega$, d'une inductance $L = 0,6 \text{ H}$, et d'une capacité C . En régime sinusoïdal permanent de fréquence $\nu = 40 \text{ Hz}$, le courant est en avance de 60° sur la tension du générateur. Déterminer la fréquence de résonance de ce circuit et la capacité C (Rep : $45,4 \text{ Hz}$, $C = 20,5 \mu\text{F}$).

II. On dispose d'un résistor (résistance pure) de valeur R , d'un capacitor (condensateur parfait) de capacité C et d'un inductor (inductance sans résistance) d'inductance L . A l'aide de ces composants, on réalise les trois associations suivantes :

- a1) association (R, L) en série
- a2) association (R, C) en série
- a3) association (R, L, C) en série,

que l'on alimente avec le même générateur d'impédance négligeable délivrant la tension $E = E_0 \cos \omega t$ dont on peut faire varier la fréquence. En étudiant en fonction de ω le module Z de l'impédance complexe de chaque association, on trouve l'une des trois courbes de la figure 46 :

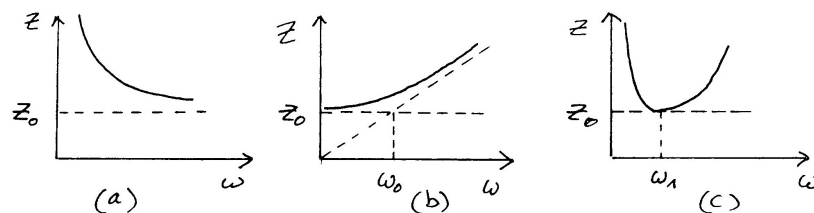


FIGURE 46 -

1°) Sans faire aucun calcul détaillé mais en apportant des arguments précis fondés sur la forme des courbes, dire à quelle courbe correspond chacune des trois associations considérées.

2°) a) Donner pour chacune des associations l'expression de son impédance complexe et en préciser le module et l'argument.

b) Que représente l'ordonnée commune Z_0 des courbes ?

c) Expérimentalement, on trouve $Z_0 = 20\Omega$, $\omega_0 = 80 \text{ rd/s}$, $\omega_1 = 2000 \text{ rd/s}$. Déterminer numériquement R , L et C (Rep : $R = 20\Omega$, $L = 250 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$).

III. Le circuit de la figure 47 est alimenté par un générateur parfait délivrant la tension

$$E(t) = E_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

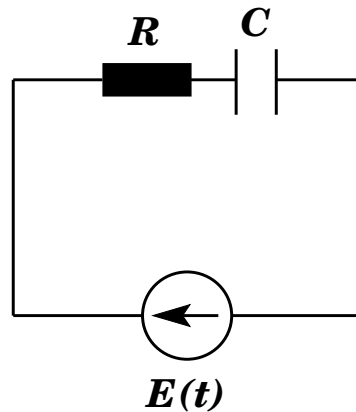


FIGURE 47 –

1°) Tracer qualitativement la courbe $E = f(t)$.

2°) Déterminer, en régime variable permanent, l'intensité du courant dans le circuit.

IV. Le circuit de la figure 48 est alimenté par un générateur parfait délivrant la tension $E(t) = E_0 \cos \omega t$.

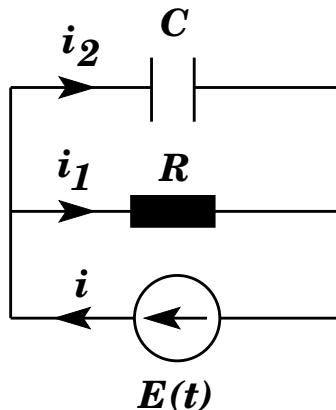


FIGURE 48 –

1°) Déterminer les expressions complexes des intensités i_1 , i_2 et i .

2°) Refaire les calculs en tenant compte cette fois d'une résistance interne r du générateur.

V. Le générateur parfait du circuit de la figure 49 délivre la tension $E(t) = E_0 \cos \omega t$.

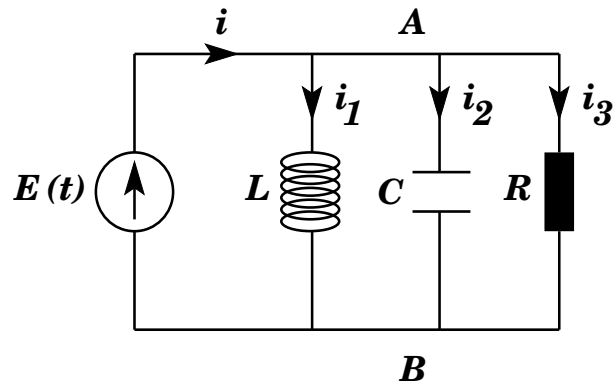


FIGURE 49 –

- 1°) Déterminer les expressions complexes des intensités i_1 , i_2 et i_3 .
- 2°) Quelle est l'impédance complexe Z du dipôle AB ?
- 3°) Tracer qualitativement la courbe représentant les variations de $I_0 = |i|$ en fonction de ω . Pour quelle valeur de ω l'amplitude I_0 du courant est-elle minimum ? Quel est alors le déphasage du courant par rapport à la tension $E(t)$?

VI. Adaptation d'impédance.

Un générateur G de tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos \omega t$ alimente un dipôle AB dont l'impédance complexe pour la pulsation ω a pour expression $Z = R + jS$ (figure 50). Pour cette même pulsation, le générateur possède une impédance interne $z = r + js$.

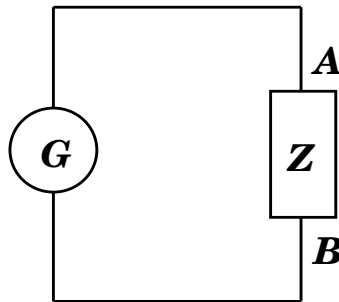


FIGURE 50 –

- 1°) Déterminer l'intensité complexe du courant dans le circuit.
- 2°) Quelle est la puissance moyenne $P_Z(\omega)$ fournie au dipôle AB par le générateur ?
- 3°) a) Quelle doit être la relation entre Z et z pour que cette puissance soit maximum ?
b) Quelle est alors la puissance moyenne $P_G(\omega)$ dissipée dans le générateur ?

VII. On veut réaliser un diviseur de tension en plaçant deux résistances pures R_1 et R_2 en série aux bornes d'un générateur parfait de tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos \omega t$ (figure 51 (a)).

On note $u = V_A - V_B$ la tension entre A et B (figure 50). On place entre A et B une impédance de charge Z .

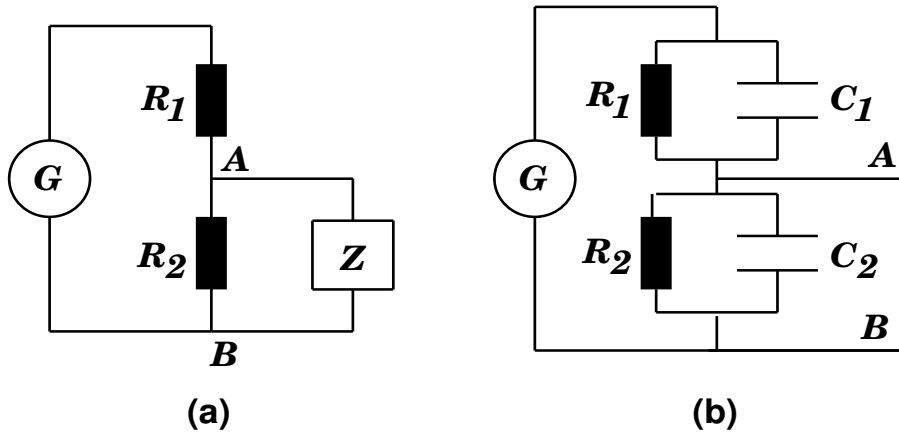


FIGURE 51 –

- 1°) Calculer, en notation complexe le rapport u/E .
- 2°) a) Calculer la puissance moyenne P_Z dissipée dans l'impédance de charge Z .
b) Si Z est constituée d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C en série, trouver la valeur de R pour laquelle P_Z est maximum.
- 3°) Montrer que si le générateur délivre une tension comportant plusieurs composantes sinusoïdales de pulsations différentes, $u(t)$ n'a pas la même forme que $E(t)$ si Z n'est pas une résistance pure (il y a alors *distorsion*).
- 4°) On considère maintenant un diviseur de tension constitué par deux ensembles en série comportant chacun une résistance et un condensateur en parallèle (figure 51 (b)).
a) Dans le cas d'une tension sinusoïdale $E(t)$, quelle doit être la condition sur R_1, C_1, R_2 et C_2 pour que le rapport complexe u/E soit indépendant de la pulsation, l'impédance de charge étant déconnectée?
Quel type d'impédance de charge Z peut-on placer entre A et B sans qu'il y ait distorsion ?

VIII. Deux bobines identiques, de coefficient d'auto-induction L et de résistance interne R , sont associées à un condensateur de capacité C pour constituer le circuit de la figure 52. Le générateur parfait G délivre la tension sinusoïdale $E = E_0 \cos \omega t$. On suppose le régime permanent établi. On note Z_1, Z_2 et Z_3 les impédances complexes respectives de la bobine, de la branche comportant une bobine et le condensateur, du dipôle MN constitué des deux impédances Z_1 et Z_2 en parallèle.

- 1°) a) Donner les expressions de Z_1, Z_2 .
b) Quel est le signe de la partie imaginaire de Z_2/Z_1 ?
c) Exprimer Z_3 en fonction de Z_1 et Z_2 uniquement.
- 2°) a) Démontrer que les intensités i_1, i_2 et i_3 ont même amplitude maximum I_0 si $Z_2/Z_1 = e^{j\varphi}$ où φ est un nombre réel satisfaisant la relation

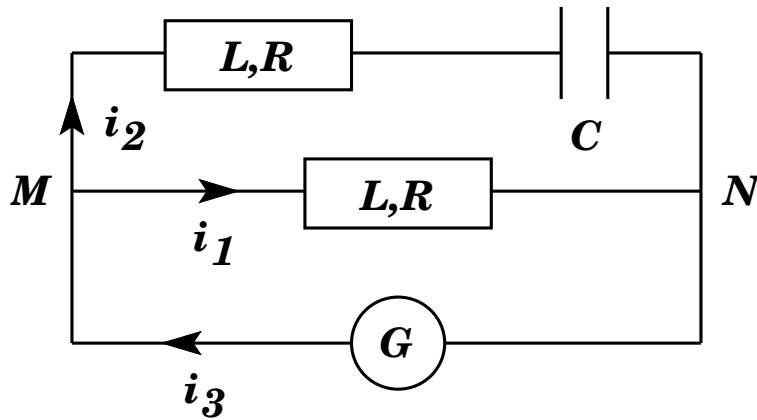


FIGURE 52 –

$$|1 + e^{j\varphi}| = 2 \cos \frac{\varphi}{2} = 1$$

b) Compte tenu du 1° b), démontrer que $\varphi = 4\pi/3$ et en déduire les relations $L\omega = R\sqrt{3}$, $LC\omega^2 = 1$.

3°) a) Exprimer ensuite Z_1 , Z_2 et Z_3 en fonction de R uniquement.

En déduire les déphasages respectifs φ_1 , φ_2 et φ_3 de i_1 , i_2 et i_3 par rapport à la tension du générateur, ainsi que leur amplitude maximum commune I_0 .

4°) a) Quelle est la puissance moyenne développée dans chacune des bobines ?

b) Quelle est la puissance moyenne fournie au condensateur ?

c) Quelle est la puissance moyenne fournie par le générateur ?

IX. On considère le circuit de la figure 53 où G est un générateur de tension parfait de fem $E = E_0 \cos \omega t$.

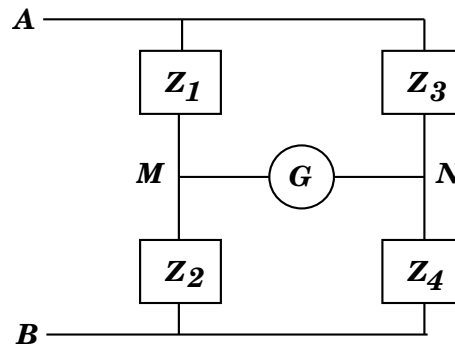


FIGURE 53 –

1°) Déterminer, sous forme complexe, les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB : tension u (flèche de B vers A), impédance Z .

2°) Quelle doit être la condition sur les impédances Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 pour que l'on ait $u = 0$ (pont de Wheatstone équilibré).

3°) Z_1 et Z_3 sont des résistances pures toutes deux égales à R , Z_2 est une résistance pure variable R_v et Z_4 est une impédance inconnue Z_0 .

a) On fait varier R_v de telle sorte que $R_v = |Z_0|$. On peut donc écrire $Z_0 = R_v e^{j\varphi}$. Justifier cette notation.

b) Montrer que $\frac{|V_A - V_B|}{|V_M - V_N|} = \tan \frac{\varphi}{2}$.

X. Circuit déphaseur

Dans le circuit de la figure 54, le générateur parfait G délivre la tension $E = E_0 \cos \omega t$. On note $v = V_A - V_B$ et l'on pose $v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

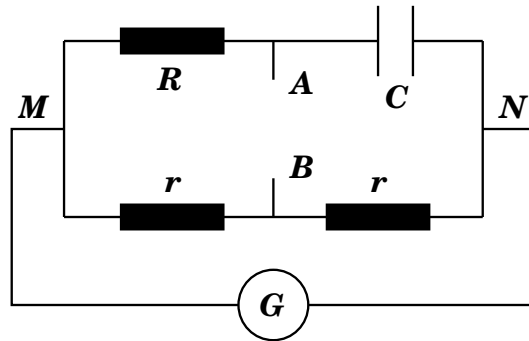


FIGURE 54 –

1°) Montrer que V_0 est indépendant de R et ω .

2°) Déterminer φ .

XI. Dans le circuit de la figure 55, le générateur parfait G délivre la tension $E = E_0 \cos \omega t$. On note $u = V_A - V_B$ et l'on pose $x = RC\omega$.

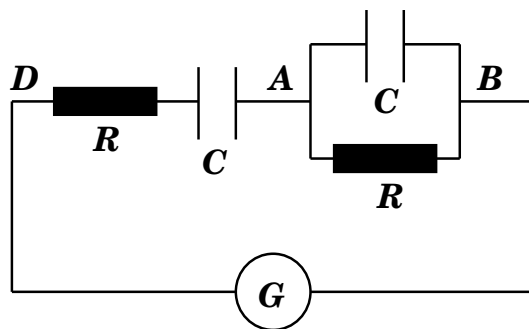


FIGURE 55 –

1°) a) Calculer l'impédance complexe de la portion BD .

b) Tracer la courbe de variation de $|Z|$ en fonction de x .

c) Calculer le module et le déphasage de l'intensité du courant pour $x = 1$.

2°) a) Calculer, en notation complexe, le rapport u/E .

b) Tracer la courbe de variation de $|u/E|$ en fonction de x et montrer qu'elle présente un maximum.

c) Définir et calculer la bande passante correspondante.

3°) a) Calculer la puissance moyenne P dissipée dans la portion AB .

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x est-elle maximum ?

4°) a) Montrer que si, par un montage approprié, on voulait imposer $E = \beta u$ avec β réel, ceci ne pourrait être réalisé que pour une certaine fréquence que l'on déterminera.

b) quelle devrait être alors la valeur de β ?

XII. 1°) Calculer l'impédance complexe $Z(\omega)$ de la portion de circuit de la figure 56, ω étant la pulsation du courant sinusoïdal $i = I_0 \cos \omega t$ qui y règne (le sens de référence va de A vers B). On pourra poser $\tau = R_2 C$.

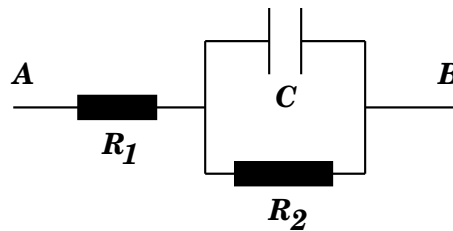


FIGURE 56 –

2°) Montrer que lorsque ω varie de zéro à l'infini, le nombre complexe $Z(\omega)$ décrit dans le plan complexe un demi-cercle de rayon $R_2/2$ et de centre $(x = R_1 + R_2/2, y = 0)$. On précisera le sens de variation de $Z(\omega)$ sur ce demi-cercle quand ω augmente ainsi que les valeurs de Z pour $\omega = 0, 1/\tau, +\infty$.

3°) On pose $v = V_A - V_B = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'allure des variations de V_0/I_0 et de φ en fonction de ω .

Cet élément de circuit représente en fait l'impédance interne d'un générateur de tension. On connecte ce générateur aux bornes d'une résistance pure R . Quelle est la valeur de R pour laquelle la puissance moyenne qui y est consommée est maximum ?

XIII. On considère le circuit de la figure 57 où G est un générateur de tension parfait de fem complexe $e = E_0 e^{j\omega t}$.

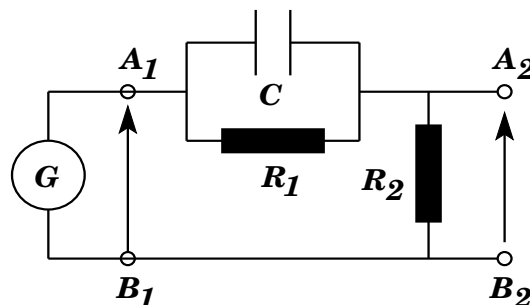


FIGURE 57 –

1°) Le circuit de charge à droite de A_2B_2 étant ouvert, calculer le rapport complexe $T = v/e$ en fonction de ω , $K = (R_1 + R_2)/R_2$ et $\tau = R_1R_2C/(R_1 + R_2)$.

2°) Calculer le nombre complexe $z = K + 1 - 2KT$. En déduire, dans le plan complexe, l'ensemble décrit par le point représentatif de T lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

3°) Déterminer, en fonction de e , T et R_2 la tension u et l'impédance interne Z_i du générateur de Thévenin équivalent à la portion de circuit à gauche des bornes A_2 et B_2 .

XIV. L'impédance d'un circuit passif a pour expression

$$Z(\omega) = \frac{\alpha + j\beta\omega}{\gamma + j\delta\omega}$$

où α , β , γ et δ sont trois réels indépendant de la pulsation ω .

1°) Montrer que, nécessairement, on doit avoir $\alpha\gamma \geq 0$, $\beta\delta \geq 0$ (considérer la puissance qui se développe dans cette impédance).

2°) Montrer que lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le point représentatif de $Z(\omega)$ dans le plan complexe décrit un demi-cercle dont on déterminera le centre et le rayon. Indication : exprimer $z = (\gamma - j\delta\omega)/(\gamma + j\delta\omega)$ en fonction de Z , α , β , γ et δ .

XV. Une portion de circuit contient, en série, deux bobines A et B dont les coefficients d'auto-induction et les résistances sont, respectivement, L , $R_A = 25\Omega$, $L_B \simeq 0$, $R_B = 75\Omega$. On établit aux bornes de cette portion une différence de potentiel sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 110 V.

On plonge la bobine B dans un calorimètre à circulation d'eau. L'eau arrive au fond du calorimètre à la température 10°C et se déverse par le haut. Lorsque le débit est de 540g d'eau par minute, la température de l'eau à la sortie du calorimètre est de 12°C . Calculer :

1°) l'intensité efficace du courant dans la portion de circuit considérée (Rep : 1 A) ;

2°) le module de l'impédance de cette portion de circuit ainsi que le module de l'impédance de la bobine A et son coefficient d'auto-induction L (Rep : 110 Ω , $|Z_A| = 52,2\Omega$, $L = 146$ mH) ;

3°) la puissance consommée au total et le facteur de puissance correspondant (Rep : 100 W, $\cos\varphi = 0,9$) ;

4°) les différences de potentiel efficaces aux bornes de A et aux bornes de B (Rep : 52,2 V, 75 V) ;

5°) la capacité du condensateur qu'il faudrait intercaler en série avec le circuit pour que l'intensité ait la plus grande valeur maximum ; quel serait alors la valeur efficace de cette intensité en supposant que la résistance du circuit conserve la même valeur ? (Rep : 69,5 μF , 1,1 A).

XVI. Un dipôle comportant, en série, une résistance pure R , une bobine de coefficient d'auto-induction $L = 0,6$ H et de résistance négligeable et un condensateur parfait de capacité C est alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $U_e = 10$ V. On règle la capacité à la valeur C_0 pour laquelle l'intensité efficace I_e du courant est maximum. Déterminer C_0 et R .

XVII. Un dipôle est constitué de deux éléments en parallèle. L'un est une résistance $R = 50\Omega$, l'autre est inconnu. Lorsque la tension aux bornes du dipôle est, en Volt, $v = 100 \cos(1500t + 45^\circ)$, l'intensité du courant est $i = 12 \sin(1500t + 135^\circ)$ en Ampère. Quel est l'élément inconnu ? (Rep : une résistance $R' = 10\Omega$).

XVIII. Un circuit R, L, C série est alimenté par la tension $v = 70,7 \sin(500t + 30^\circ)$ V. L'intensité du courant est $i = 2,83 \sin(500t + 30^\circ)$ A. Déterminer R et C si $L = 0,6$ H. (Rep : $R = 25\Omega$, $C = 8\mu\text{F}$).

XIX. Une puissance de 180 W est dissipée dans un circuit série (R, L) dont le facteur de puissance est de 0,8 et où règne le courant $i = 4,24 \sin(500t + 45^\circ)$. Déterminer R et L . (Rep : $R = 20\Omega$, $L = 3$ mH).

XX. Une bobine est traversée par un courant de 12 A quand on applique entre ses bornes la ddp continue de 120 V. Sous une tension sinusoïdale de valeur efficace 120 V et de fréquence 50 Hz, l'intensité efficace dans la bobine est de 5 A. Calculer le coefficient d'auto-induction de la bobine et le déphasage intensité-tension. (Rep : $L \simeq 0,07$ H, $\varphi \simeq 65^\circ$).

XXI. Une installation électrique alimentée en courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz sous une tension efficace de 200 V comprend les appareils suivants disposés en dérivation :

- une bouilloire qui en 7 mn peut élever de 20°C la température d'un litre d'eau avec un rendement de 80% (son inductance est négligeable) ;
- un moteur qui peut élever, d'un mouvement uniforme, un poids de 204 kg de 10 m en 25 s ; le rendement de ce moteur est de 80% et son facteur de puissance est de 0,6.

Calculer :

- 1°) l'intensité efficace du courant dans chacun des appareils ;
- 2°) l'intensité efficace du courant total et le facteur de puissance de l'installation ;

la capacité d'un condensateur qui, placé en dérivation aux bornes de l'installation donnerait une intensité totale en phase avec la tension lorsque les deux appareils fonctionnent simultanément. Quelle serait alors la valeur efficace de l'intensité totale ?

Rep : 5 A, 8,33 A, 12 A, 0,833, 106 μF , 10 A.

XXII. On considère les deux portions de circuit A_1A_2 et B_1B_2 de la figure 58.

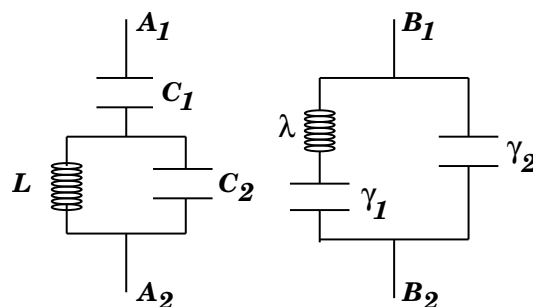


FIGURE 58 –

1°) Déterminer les impédances complexes respectives Z_A et Z_B de ces deux portions.

2°) Déterminer, en fonction des éléments de A_1A_2 , les valeurs respectives de λ , γ_1 et γ_2 pour que soit réalisée l'équivalence des deux portions, c'est-à-dire pour que l'on ait $Z_A = Z_B$ pour toute pulsation.

Rep : $\lambda = L \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1} \right)^2$, $\gamma_1 = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2}$, $\gamma_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

XXIII. Entre un circuit "amont" dont les bornes de sortie sont A_1 et B_1 et un circuit "aval" dont les bornes d'entrée sont A_2 et B_2 , on dispose en "T" trois impédances Z_1 , Z_2 et Z_3 comme indiqué à la figure 59.

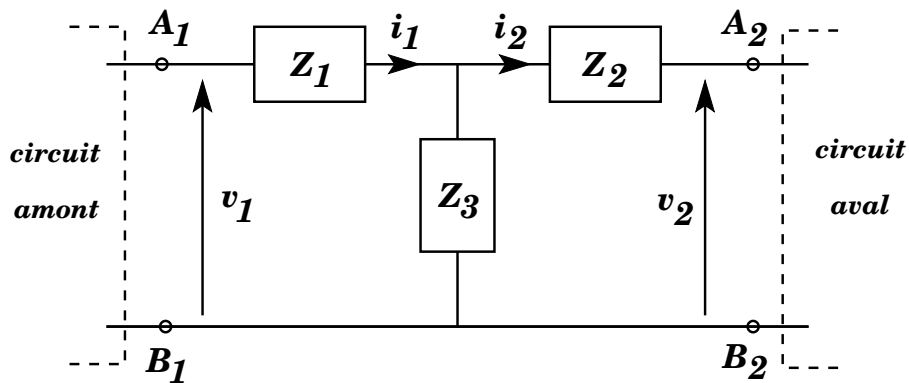


FIGURE 59 –

Dans le circuit amont se trouve un générateur G qui alimente l'ensemble des circuits en délivrant une tension sinusoïdale $e = E_0 e^{j\omega t}$ de pulsation ω . On note $v_1 = V_{A_1} - V_{B_1}$ la tension d'entrée et $v_2 = V_{A_2} - V_{B_2}$ la tension de sortie.

1°) a) Montrer qu'en notation complexe les intensités de courant i_1 et i_2 sont liées à v_1 et v_2 par des relations linéaires de la forme

$$i_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad i_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 \quad (1)$$

où a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des nombres complexes que l'on exprimera en fonction de Z_1 , Z_2 et Z_3 .

b) Quelle relation existe-t-il entre a_2 et b_1 ?

2°) On réalise successivement les deux montages suivants :

a) dans un premier montage, le circuit amont comporte uniquement le générateur G dont on négligera l'impédance interne (on a alors $v_1 = e$) et on relie directement les deux bornes A_2 et B_2 (court-circuit). Que vaut alors i_2 ?

b) Dans un deuxième montage, le circuit aval comprend uniquement G et on relie A_1 et B_1 . Que vaut alors i_1 ? Comparer le résultat obtenu à la question précédente et conclure (théorème de réciprocité).

3°) Dans le montage 2° b), calculer l'impédance totale Z_i du circuit à gauche des bornes A_2 et B_2 .

4°) Le circuit amont comprend uniquement G .

a) Le circuit aval est ouvert. Calculer, en fonction de e , Z_1 et Z_3 la valeur correspondante u de la tension de sortie v_2 .

b) le circuit aval est constitué uniquement par une impédance Z . Calculer en fonction de e , Z_1 , Z_2 et Z_3 la valeur correspondante de i_2 . Montrer que tout se passe comme si, à gauche des bornes A_2 et B_2 était placé un générateur de tension u et d'impédance interne Z_i (théorème de Thévenin).

5°) On revient au montage général de la figure 59. Inverser les relations (1), c'est-à-dire, exprimer v_1 et v_2 en fonction de i_1 et i_2 selon des relations linéaires du type

$$v_1 = \alpha i_1 + \beta i_2, \quad v_2 = \gamma i_1 + \delta i_2 \quad (2)$$

où α , β , γ et δ sont des nombres complexes que l'on exprimera en fonction de Z_1 , Z_2 et Z_3 . Quele relation existe-t-il entre β et γ ?

6°) Montrer que le montage en T de la figure 59, ou montage "en étoile", est équivalent au montage "en II", ou "en triangle", de la figure 60, Z'_1 , Z'_2 et Z'_3 étant trois impédances que l'on exprimera en fonction de Z_1 , Z_2 et Z_3 (théorème de Kennely).

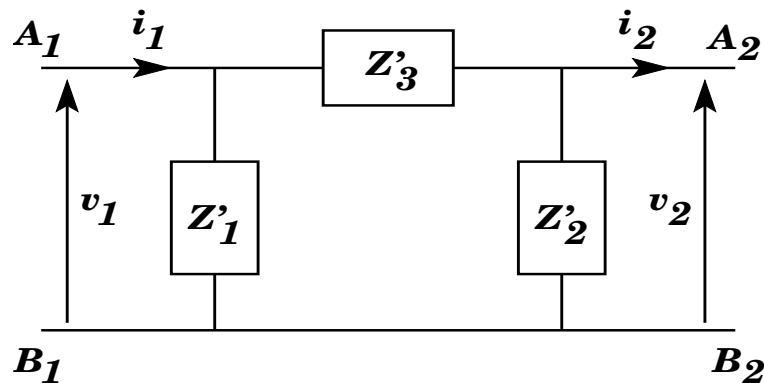


FIGURE 60 –

7°) On suppose maintenant que $Z_2 = Z_1$, le circuit de charge étant constitué d'une impédance Z .

a) Calculer l'impédance apparente d'entrée $Z_e = v_1/i_1$ en fonction de Z_1 , Z_3 et Z .

b) On note Z' la valeur obtenue pour Z_e lorsque le circuit aval est ouvert (Z infini) et par Z'' la valeur obtenue pour Z_e lorsque les bornes A_2 et B_2 sont directement reliées (court-circuit). Calculer Z' et Z'' .

c) Montrer qu'il est possible de choisir l'impédance de charge Z de telle sorte que $Z_e = Z$. Soit Z_0 la valeur correspondante de Z . Montrer que $Z_0^2 = Z'Z''$.

d) Z_1 est l'impédance complexe d'une bobine sans résistance et de coefficient d'auto-induction L et Z_3 celle d'un condensateur parfait de capacité $2C$. Montrer que si la pulsation ω est inférieure à une certaine valeur ω_c que l'on calculera, Z_0 est réel, tandis que si $\omega \geq \omega_c$, Z_0 est imaginaire pur.

e) Z_1 et Z_3 étant définis comme en d), on suppose que $Z = Z_0$ et l'on pose $x = \omega/\omega_c$,

$\eta = v_2/v_1$. Calculer η en fonction de x pour $x < 1$. Montrer que dans ce cas, v_2 et v_1 ont même module et calculer leur déphasage pour $x = 1/2$.

XXIV. Théorème de superposition. Dans le circuit de la figure 61, G_1 est un générateur de tension parfait de fem constante E et G_2 est un générateur parfait délivrant la tension variable $e = E_0 \cos \omega t$ (le haut de la flèche indique l'origine des phases). Pour la pulsation ω , les condensateurs se comportent comme des courts-circuits. Les résistances sont des résistances pures. Exprimer les différences de potentiel aux points A et B par rapport à la masse M , le régime permanent étant établi.

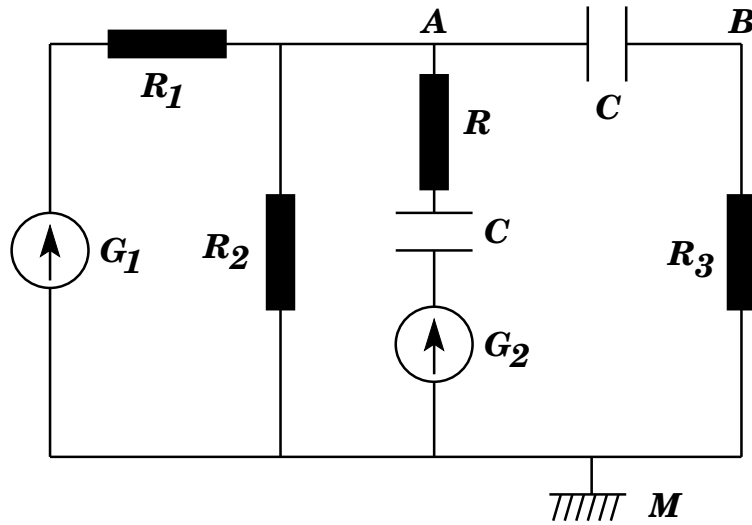


FIGURE 61 –