

Chapitre 4

Applications

4.1 Amplitudes d'hélicité de la diffusion Compton, avec couplage d'hélicité dans la voie s

L'exemple typique d'une réaction où, de façon naturelle, on couple en hélicité une particule de spin 1/2, lepton ou quark, et une particule vectorielle de masse nulle¹, photon pour un lepton, ou photon ou gluon pour un quark, ces particules étant bien sûr toutes deux entrantes ou sortantes, est celui de l'effet Compton $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ vers lequel nous revenons maintenant. Le calcul des amplitudes d'hélicité de ce processus servira de test des formules établies au chapitre 3 et fournira l'occasion de présenter certaines astuces de calcul. Pour ne pas perturber le lecteur, nous garderons les mêmes notations que celles de la figure (3.1).

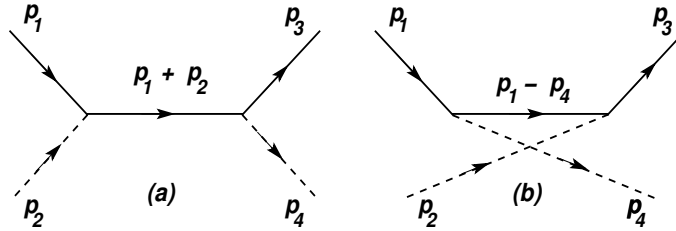


FIGURE 4.1 – Diagrammes de Feynman décrivant l'effet Compton

Au plus bas ordre suivant la constante α , l'effet est décrit par les deux diagrammes de Feynman de la figure (4.1), où la ligne en trait plein est une ligne d'électron et les lignes en tirets sont des lignes de photons. L'amplitude générique correspondante s'écrit

$$\mathcal{M} = 4\pi\alpha T_c, \quad \text{avec} \quad T_c = \overline{U}_3 \left[\gamma(\epsilon_4^*) \frac{m + \gamma(p_1 + p_2)}{m^2 - (p_1 + p_2)^2} \gamma(\epsilon_2) + \gamma(\epsilon_2) \frac{m + \gamma(p_1 - p_4)}{m^2 - (p_1 - p_4)^2} \gamma(\epsilon_4^*) \right] U_1 \quad (4.1)$$

où : U_1 et U_3 sont les spineurs de Dirac respectifs des électrons entrant et sortant, p_1 et p_3 leurs 4-impulsions respectives, m leur masse ; ϵ_2 et ϵ_4 sont les vecteurs de polarisation respectifs des photons entrant et sortant, p_2 et p_4 leurs 4-impulsions respectives. Nous avons ici $p_1^2 = p_3^2 = m^2$, $p_2^2 = p_4^2 = 0$. Nous poserons $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, $u = -(p_1 - p_4)^2 = -(p_2 - p_3)^2$. En couplage d'hélicité entre 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, on a

1. Dénommée ci-dessus "photon réel" pour la simplicité.

$$p_1 \cdot \epsilon_2 = p_2 \cdot \epsilon_2 = 0, \quad p_3 \cdot \epsilon_4 = p_4 \cdot \epsilon_4 = 0$$

En tenant compte de l'équation de Dirac $[m - \gamma(p_1)] U_1 = 0$ et après quelques anti-commutations de matrices γ , on obtient

$$T_c = \overline{U_3} \left[\left[-\frac{\gamma(\epsilon_4^*) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2)}{s - m^2} + \frac{1}{u + m^2} \left\{ \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_2) + 2 p_1 \cdot \epsilon_4^* \gamma(\epsilon_2) - 2 p_4 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_4^*) + 2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* \gamma(p_4) \right\} \right] \right] U_1$$

On voit alors que le calcul nécessite de connaître des expressions telles que $\gamma(\epsilon_2) U_1$ et $\gamma(p_2) U_1$. Notons T, X, Y, Z la base associée au référentiel du centre de masse. En couplage d'hélicité dans la voie s , on choisit Z de telle sorte que

$$p_1 = ET + pZ, \quad p_2 = p(T - Z), \quad \epsilon_1^{(\lambda_1)} = E^{(\lambda_1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 X + iY), \quad \epsilon_2^{(\lambda_2)} = \epsilon_1^{(-\lambda_2)}$$

et, comme préconisé précédemment, l'axe Y est orthogonal aux 4-impulsions de toutes les particules. Pour l'état final, on a

$$p_3 = ET + pZ', \quad p_4 = p(T - Z'), \quad \epsilon_3^{(\lambda_3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_3 X' + iY), \quad \epsilon_4^{(\lambda_4)} = \epsilon_3^{(-\lambda_4)}$$

avec $Z' = Z \cos \theta + X \sin \theta, \quad X' = X \cos \theta - Z \sin \theta$

θ étant, dans ledit référentiel, l'angle de diffusion de l'électron émergeant, par rapport à la direction de propagation Z de l'électron initial; dans ce même référentiel, les deux électrons (initial et final) ont la même énergie E et le même module p de quantité de mouvement :

$$E = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}}, \quad p = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}$$

tandis que les deux photons (initial et final) ont la même énergie, égale à p et égale aux modules de leurs quantités de mouvement.

↳ On a

$$\gamma(p_2) \gamma(p_1) = p(E + p) [1 - \gamma(Z) \gamma(T)] = p\sqrt{s} [1 - \gamma(z_1) \gamma(t_1)]$$

où l'on a tenu compte du fait qu'en couplage d'hélicité, $\gamma(Z) \gamma(T) = \gamma(z_1) \gamma(t_1)$. Or, d'une part, $\gamma(z_1) \gamma(t_1) = 2\gamma_5 S_{z_1}$ et, d'autre part, $\gamma(p_1) U_1 = m U_1$. Appliquant $\gamma(p_2) \gamma(p_1)$ à $U_{1\sigma_1}$, on en déduit

$$\boxed{\gamma(p_2) U_{1\sigma_1} = \frac{p\sqrt{s}}{m} [1 - (2\sigma_1) \gamma_5] U_{1\sigma_1}} \quad (4.2)$$

↳ Rappelons que

$$S_{x_1} U_{1\sigma_1} = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(X) \gamma(t_1) U_{1\sigma_1} = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(X) U_{1\sigma_1} = \frac{1}{2} U_{1-\sigma_1}$$

$$S_{y_1} U_{1\sigma_1} = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(Y) \gamma(t_1) U_{1\sigma_1} = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(Y) U_{1\sigma_1} = i\sigma_1 U_{1-\sigma_1}$$

d'où l'on tire aisément que

$$\gamma(\epsilon_1^{(\lambda)}) U_{1\sigma_1} = \delta_{\lambda, -2\sigma_1} \sqrt{2} (2\sigma_1) \gamma_5 U_{1-\sigma_1} \quad (4.3)$$

soit encore

$$\gamma(\epsilon_2^{(\lambda_2)}) U_{1\sigma_1} = \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \sqrt{2} (2\sigma_1) \gamma_5 U_{1-\sigma_1} \quad (4.4)$$

Combinant (4.5) et (4.4), il vient

$$\gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_2)}) U_{1\sigma_1} = -\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \sqrt{2} (2\sigma_1) \frac{p\sqrt{s}}{m} [\gamma_5 + (2\sigma_1)] U_{1-\sigma_1} \quad (4.5)$$

Les mêmes types de relations valent également pour l'état final :

$$\begin{aligned} \gamma(p_4) U_{3\sigma_3} &= \frac{p\sqrt{s}}{m} [1 - (2\sigma_3)\gamma_5] U_{3\sigma_3} \\ \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_4)}) U_{3\sigma_3} &= \delta_{\lambda_4, 2\sigma_4} \sqrt{2} (2\sigma_3) \gamma_5 U_{3-\sigma_3} \\ \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_4)}) U_{3\sigma_3} &= -\delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \sqrt{2} (2\sigma_3) \frac{p\sqrt{s}}{m} [\gamma_5 + (2\sigma_3)] U_{3-\sigma_3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Calculons alors²

$$A = \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_4)*}) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)}) U_{1\sigma_1} = 2 \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \lambda_2 \lambda_4 \frac{p\sqrt{s}}{m} \overline{U}_{3-\sigma_3} [1 + (2\sigma_1) \gamma_5] U_{1-\sigma_1}$$

Les spineurs étant ici normalisés selon $\overline{U}U = 2m$, les formules (3.67) et (3.68) donnent

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma_3} U_{1\sigma_1} &= 2m \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} - (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \cosh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_5 U_{1\sigma_1} &= -2m \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sinh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} \\ \text{avec } \cosh \chi_1 &= \frac{E}{m}, \quad \sinh \chi_1 = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Les appliquant à A , on trouve ($|\lambda_2| = |\lambda_4| = 1$)

$$\begin{aligned} A &= 2(s - m^2) \lambda_2 \lambda_4 \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &+ (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (\cosh \chi_1 - \sinh \chi_1) \sin \frac{\theta}{2} \left. \right\} = 2(s - m^2) \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\left. - (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (\cosh \chi_1 - \sinh \chi_1) \sin \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

². On prendra garde au fait que la matrice γ_5 anti-commute avec la matrice γ_0 intervenant dans la définition de \overline{U} .

On trouve de même que

$$B = \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_4)^*}) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_2)}) U_{1\sigma_1} \equiv A \quad (4.8)$$

Remarquons que cette égalité n'est pas fortuite. D'une part, les masses vérifiant les égalités $m_1 = m_3 = m$ et $m_2 = m_4 (= 0)$, la tétrade associée à p_3 se déduit de celle associée à p_1 par une simple rotation $R_Y(\theta)$ d'angle θ autour de Y (Eq. 3.35), et l'on a

$$\begin{aligned} U_{3\sigma_3} &= R_Y(\theta) U_{1\sigma_3}, & R_Y(\theta) \gamma(p_1) R_Y(\theta)^{-1} &= \gamma(p_3), & R_Y(\theta) \gamma(p_2) R_Y(\theta)^{-1} &= \gamma(p_4), \\ & & R_Y(\theta) \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_2)}) R_Y(\theta)^{-1} &= \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_2)}) \end{aligned}$$

On peut donc écrire³

$$\begin{aligned} A(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) &= \overline{U}_{1\sigma_3} R_Y(\theta)^{-1} \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_4)^*}) R_Y(\theta) R_Y(\theta)^{-1} \gamma(p_2) R_Y(\theta) \times \\ &R_Y(\theta) \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_2)}) R(\theta)^{-1} U_{3\sigma_1} = \overline{U}_{1\sigma_3} \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_4)^*}) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_2)}) U_{3\sigma_1} \\ &= \left[\overline{U}_{3\sigma_1} \gamma(\epsilon_4^{(\lambda_2)^*}) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_2^{(\lambda_4)}) U_{1\sigma_3} \right]^* = B^*(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_4, \lambda_2) \\ &\text{soit} \quad B(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) = A^*(\sigma_3, \sigma_1; \lambda_4, \lambda_2) \end{aligned}$$

D'autre part⁴, en prenant le complexe conjugué de A et en utilisant la matrice $U_c = i\gamma^2 \gamma_5$ telle que

$$U_c U_\sigma = -(2\sigma) U_{-\sigma}^* \quad \text{et} \quad U_c \gamma_\mu U_c^{-1} = \gamma_\mu^*$$

on obtient, compte tenu de $\epsilon^{(\lambda^*)} = -\epsilon^{(-\lambda)}$,

$$\begin{aligned} A^*(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) &= {}^t U_{3\sigma_3} \gamma_0 \gamma^*(\epsilon_4^{(\lambda_4)}) \gamma^*(p_2) \gamma^*(\epsilon_2^{(\lambda_2)^*}) U_{1\sigma_1}^* \\ &= (2\sigma_3) (2\sigma_1) \overline{U}_{3-\sigma_3} \gamma(\epsilon_4^{(-\lambda_4)^*}) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2^{(-\lambda_2)}) U_{1-\sigma_1} = (2\sigma_1)(2\sigma_3) A(-\sigma_1, -\sigma_3; -\lambda_2, -\lambda_4) \end{aligned}$$

On en déduit

$$B(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) = (2\sigma_1)(2\sigma_3) A(-\sigma_3, -\sigma_1; -\lambda_4, -\lambda_2)$$

d'où l'égalité $B = A$, compte tenu de la forme de A .

✎ Puis

$$2p_1 \cdot \epsilon_4^* = \sqrt{2} \lambda_4 p \sin \theta, \quad 2p_4 \cdot \epsilon_2 = \sqrt{2} \lambda_2 p \sin \theta, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* = -\frac{1}{2} (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta)$$

$$\overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) U_1 = \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \sqrt{2} \left(-2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \sinh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\overline{U}_3 \gamma(\epsilon_4^*) U_1 = \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \sqrt{2} \left(2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \sinh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\overline{U}_3 \gamma(p_4) U_1 = (s - m^2) \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} - (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (\cosh \chi_1 - \sinh \chi_1) \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

3. On rappelle que $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$, voir ITL, §7.3.4, Eq. 7.80.

4. Voir ITL, §7.3.4 et §7.4.3.

⇒ Collectant tous ces résultats, il vient

$$\begin{aligned}
 T_c = T_c(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) &= 2 \lambda_2 \lambda_4 \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \left[-1 + \frac{s - m^2}{u + m^2} \right] \left[\delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\
 &+ (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \left. \right] - \frac{(s - m^2)^2}{s(u + m^2)} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \lambda_2 \lambda_4 [\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} + \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3}] \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \\
 &- (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \frac{s - m^2}{u + m^2} \left[\delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} - (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \right]
 \end{aligned}$$

soit, en remplaçant le produit $\lambda_2 \lambda_4$ par 1 lorsqu'il est en facteur de $\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \delta_{\sigma_3, \sigma_1}$ et par -1 lorsqu'il est en facteur de $\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \delta_{\sigma_3, -\sigma_1}$

$$\begin{aligned}
 T_c = \delta_{\sigma_3, \sigma_1} &\left[2 \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + \frac{s - m^2}{u + m^2} \right] \right. \\
 &- \frac{(s - m^2)^2}{s(u + m^2)} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \lambda_2 \lambda_4 [\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} + \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3}] - (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \frac{s - m^2}{u + m^2} \cos \frac{\theta}{2} \left. \right] \\
 + \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (2\sigma_1) &\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \left[(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \frac{s - m^2}{u + m^2} - 2 \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \left[-1 + \frac{s - m^2}{u + m^2} \right] \right]
 \end{aligned}$$

Simplifions encore cette expression en explicitant u en fonction de θ :

$$u + m^2 = 2p_1 \cdot p_4 = 2p [E + p \cos \theta] = (s - m^2) \left[1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad \text{où} \quad \beta' = \frac{s - m^2}{s}$$

On prendra garde à ne pas confondre β' avec $\beta = \frac{p}{E} = \frac{s - m^2}{s + m^2}$. Tous calculs effectués, on obtient :

$$\begin{aligned}
 T_c(\sigma_1, \sigma_3; \lambda_2, \lambda_4) &= \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[2\beta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \right. \\
 &- (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) - 2\beta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \lambda_2 \lambda_4 [\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} + \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3}] \left. \right] \\
 + (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} &\frac{m}{\sqrt{s}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) - 2\beta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \delta_{\lambda_4, 2\sigma_3} \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

On remarque immédiatement que les amplitudes avec changement d'hélicité de l'électron sont proportionnelles à m/\sqrt{s} . Il s'ensuit qu'à très haute énergie, soit plus précisément pour $\sqrt{s} \gg m$, ces amplitudes ont une très faible contribution : à très haute énergie, l'hélicité de l'électron se conserve. En fait, il s'agit là d'un résultat général pour les processus de l'Electrodynamique Quantique ou ceux de la Chromodynamique Quantique, pour lesquels les masses peuvent être négligées. En effet, dans ces conditions, les amplitudes font intervenir des produits de nombres impairs de matrices γ , se développant uniquement sur les matrices γ_μ et $\gamma_\mu \gamma_5$. Les spineurs étant normalisés selon $\bar{U}U = 2m$, les formules (3.69) et (3.70) montrent qu'en faisant tendre m vers zéro, seuls subsistent des termes conservant l'hélicité :

$$\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} \approx (2\sigma) \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} \approx \sqrt{s} \delta_{\sigma',\sigma} \left[(T + Z)_\mu \cos \frac{\theta}{2} + (X + i(2\sigma)Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.10)$$

Les tableaux ci-après donnent les expressions explicites des 16 amplitudes d'hélicité de l'effet Compton, tirées de (4.9), dans le cas $m \neq 0$ et dans le cas $m = 0$. On remarque aussi que les amplitudes avec changement d'hélicité du photon sont défavorisées à haute énergie par au moins un facteur m^2/s : à très haute énergie, l'hélicité du photon est donc aussi conservée. Cela implique que dans ce domaine et pour ce processus, l'hélicité totale est conservée⁵.

$$\begin{aligned} T_c(\uparrow, \uparrow; +, +) &= T_c(\downarrow, \downarrow; -, -) = -\frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[1 - \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ T_c(\uparrow, \uparrow; -, -) &= T_c(\downarrow, \downarrow; +, +) = -\frac{2 \cos^3 \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ T_c(\uparrow, \uparrow; +, -) &= T_c(\uparrow, \uparrow; -, +) = T_c(\downarrow, \downarrow; +, -) = T_c(\downarrow, \downarrow; -, +) = -\frac{m^2}{s} \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ T_c(\uparrow, \downarrow; +, +) &= T_c(\uparrow, \downarrow; -, -) = -T_c(\downarrow, \uparrow; +, +) = -T_c(\downarrow, \uparrow; -, -) = \frac{m}{\sqrt{s}} \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ T_c(\uparrow, \downarrow; +, -) &= T_c(\uparrow, \downarrow; -, +) = -T_c(\downarrow, \uparrow; +, -) = -T_c(\downarrow, \uparrow; -, +) = \frac{m^3}{s^{3/2}} \frac{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}{1 - \beta' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Tableau I - Amplitudes d'hélicité de la diffusion Compton

$$\begin{aligned} T_c(\uparrow, \uparrow; +, +) &= T_c(\downarrow, \downarrow; -, -) = -\frac{2}{\cos \frac{\theta}{2}} \\ T_c(\uparrow, \uparrow; -, -) &= T_c(\downarrow, \downarrow; +, +) = -2 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Tableau II - Amplitudes d'hélicité non nulles de la diffusion Compton pour $m = 0$

5. A noter que les hélicités de l'état initial et de l'état final sont respectivement $\sigma_1 - \lambda_2$ et $\sigma_3 - \lambda_4$.

4.2 Amplitudes d'hélicité de la diffusion Compton avec couplage dans la voie t

Il est intéressant de comparer le calcul précédent avec celui où l'on effectue un couplage d'hélicité de voie t entre les particules, bien que ce dernier couplage soit plutôt inhabituel pour ce type de processus. Bien entendu, les amplitudes obtenues avec le couplage en voie t ne sont pas directement comparables à celles du couplage en voie s , car les hélicités des particules étant définies par rapport à d'autres axes sont différentes, sauf peut-être pour ce qui concerne les photons. Précisons ce dernier point. Comme au chapitre 3, appelons "vertex de gauche" l'association (1,3) des deux électrons et "vertex de droite" celle, (2,4), des deux photons. On a

$$X_{d\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T_d^\nu Y^\rho Z_d^\omega = \frac{2}{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}} \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} p_2^\nu Y^\rho p_4^\omega, \quad \text{avec ici } p_2 = p(T-Z), \quad p_4 = p(T-Z'), \quad \text{et}$$

$$\Lambda_d^{\frac{1}{2}} = t = 2p^2(1 - \cos\theta), \quad \text{d'où } X_{d\mu} = \frac{1}{1 - \cos\theta} \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} [-T^\nu Y^\rho Z'^\omega - Z^\nu Y^\rho T^\omega + Z^\nu Y^\rho Z'^\omega]$$

$$= \frac{1}{1 - \cos\theta} [-X'_\mu + X_\mu - T_\mu \sin\theta], \quad \text{soit } X_d = X - (T-Z) \cot \frac{\theta}{2} = -X' - (T-Z') \cot \frac{\theta}{2}$$

Il s'ensuit que

$$\epsilon_d^{(\lambda)} = \epsilon^{(\lambda)} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(T-Z) \cot \frac{\theta}{2} = \epsilon'^{(-\lambda)} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(T-Z') \cot \frac{\theta}{2} \quad (4.11)$$

On voit ainsi que le vecteur de polarisation d'un photon en voie t ne diffère de celui en voie s que par un terme proportionnel à la 4-impulsion de ce photon. Or, ce terme ne contribue pas, du fait de l'invariance de jauge de l'amplitude tensorielle générique ($p_2^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ou $T_{\mu\nu} p_4^\nu = 0$). Les hélicités λ'_2 et λ'_4 des photons dans la voie t sont ainsi reliées à celles, λ_2 et λ_4 de la voie s par $\lambda'_2 = -\lambda_2$, $\lambda'_4 = \lambda_4$.

Un avantage apparent du couplage en voie t est que les photons y ont les mêmes vecteurs de polarisation, ce qui peut apporter des simplifications. Cependant, une difficulté apparaît concernant le cas limite $\theta = 0$. En effet, les photons étant sans masse, on a $t = 2p^2(1 - \cos\theta)$, soit $t = t_{\min} = 0$ pour $\theta = 0$. Pour cette valeur du transfert, la transformation de Lorentz permettant de passer du vertex de gauche au vertex de droite perd toute signification. Pour $t \neq 0$, le paramètre Θ de cette transformation est tel que

$$\cosh \Theta = \frac{2(s - m^2) - t}{\sqrt{t(t + 4m^2)}}, \quad \sinh \Theta = 2\sqrt{\frac{[(s - m^2)^2 - st]}{t(t + 4m^2)}} \quad (4.12)$$

et, selon ces formules, tend vers l'infini lorsqu'on fait tendre t tend vers zéro. Or, comme le montre le calcul avec le couplage en voie s , aucune divergence ne doit apparaître dans les amplitudes pour $\theta = 0$, même si $m = 0$. On veillera donc à ce que les fonctions hyperboliques (4.12), qui sont utilisées naturellement dans le couplage en voie t , n'induisent aucune divergence des amplitudes lorsque t tend vers zéro, attention qui peut en l'occurrence constituer un fil conducteur du calcul : comme $\sqrt{t} \cosh \Theta$ et $\sqrt{t} \sinh \Theta \rightarrow (s - m^2)/m$, ces fonctions devront apparaître au moins multipliées par un facteur \sqrt{t} , et éventuellement par un facteur m supplémentaire, car, comme le montre le tableau II, les amplitudes doivent également rester finies pour $m \rightarrow 0$, tant que $\theta \neq \pi$. Écrivons l'amplitude générique sous la forme

$$T_c = \overline{U}_3 \left[\frac{1}{m^2 - s} \left[(2p_1 \cdot \epsilon_2) \gamma(\epsilon_4^*) + \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{u + m^2} \left[(2p_3 \cdot \epsilon_2) \gamma(\epsilon_4^*) - \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_4^*) \right] \right] U_1 \quad (4.13)$$

avec cette fois

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 = \epsilon_d^{(\lambda_2)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_2 X_d + iY], \quad \epsilon_4 = \epsilon_d^{(\lambda_4)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_4 X_d + iY], \quad (\lambda_{2,4} = \pm 1) \\
 T_d &= T_g \cosh \Theta - X_g \sinh \Theta, \quad X_d = X_g \cosh \Theta - T_g \sinh \Theta \\
 \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} T_{g\mu} + 2m (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sinh \xi (X_g + i(2\sigma_1)Y)_\mu \\
 \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma_1} &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} (2\sigma_1) Z_{g\mu} + 2m \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \cosh \xi (X_g + i(2\sigma_1)Y)_\mu \\
 \cosh \xi &= \frac{\sqrt{t + 4m^2}}{2m}, \quad \sinh \xi = \frac{\sqrt{t}}{2m} \\
 T_d &= \frac{p_2 + p_4}{\sqrt{t}}, \quad Z_d = \frac{p_4 - p_2}{\sqrt{t}}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{t}}{2} [T_d - Z_d] = p [T - Z], \\
 p_4 &= \frac{\sqrt{t}}{2} [T_d + Z_d] = p [T - Z']
 \end{aligned}$$

On a
$$\begin{aligned}
 \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2) &= -\gamma(p_2) \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(\epsilon_2) = -\gamma(p_2) \frac{1}{2} [-1 - \lambda_2 \lambda_4 - i(\lambda_2 + \lambda_4) \gamma(X_d) \gamma(Y)] \\
 &= \delta_{\lambda_2, \lambda_4} \gamma(p_2) [1 + i\lambda_2 \gamma(X_d) \gamma(Y)] \\
 &= \delta_{\lambda_2, \lambda_4} \gamma(p_2) [1 - \lambda_2 \gamma_5] \quad \text{car} \quad \gamma(t - z) \gamma_5 = i\gamma(t - z) \gamma(x) \gamma(y)
 \end{aligned}$$

De même
$$\gamma(\epsilon_2) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_4^*) = \delta_{\lambda_2, \lambda_4} \gamma(p_2) [1 + \lambda_2 \gamma_5]$$

Puis
$$p_1 \cdot \epsilon_2 = p_3 \cdot \epsilon_2 = m \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \cosh \xi \sinh \Theta$$

Dans un premier temps, on obtient donc

$$\begin{aligned}
 T_c &= m \sqrt{2} \lambda_2 \cosh \xi \sinh \Theta \left[\frac{1}{u + m^2} - \frac{1}{s - m^2} \right] \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_4^*) U_1 \\
 -\delta_{\lambda_2, \lambda_4} &\left[\frac{1}{s - m^2} \overline{U}_3 \gamma(p_2) [1 - \lambda_2 \gamma_5] U_1 + \frac{1}{u + m^2} \overline{U}_3 \gamma(p_2) [1 + \lambda_2 \gamma_5] U_1 \right] \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 T_g \cdot \epsilon_4^* &= -\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}} T_g \cdot X_d = \frac{\lambda_4}{\sqrt{2}} \sinh \Theta \\
 (X_g + i(2\sigma_1)Y) \cdot \epsilon_4^* &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_4 X_d \cdot X_g - (2\sigma_1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_4 \cosh \Theta + (2\sigma_1)], \quad \text{il vient}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_4^*) U_1 &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} T_g \cdot \epsilon_4^* + 2m (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sinh \xi (X_g + i(2\sigma_1)Y) \cdot \epsilon_4^* \\
 &= m\sqrt{2} \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \lambda_4 \sinh \Theta + m\sqrt{2} \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sinh \xi [1 + \lambda_4 (2\sigma_1) \cosh \Theta]
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_2) U_{1\sigma_1} &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} T_g \cdot p_2 + 2m (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sinh \xi (X_g + i(2\sigma_1)Y) \cdot p_2 \\
 &= m \sqrt{t} \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \cosh \Theta + m \sqrt{t} \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (2\sigma_1) \sinh \xi \sinh \Theta
 \end{aligned}$$

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_2) \gamma_5 U_{1\sigma_1} = 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} (2\sigma_1) Z_g \cdot p_2 + 2m \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \cosh \xi (X_g + i(2\sigma_1)Y) \cdot p_2$$

$$\begin{aligned}
 &= m\sqrt{t}\delta_{\sigma_3,\sigma_1}(2\sigma_1) + m\sqrt{t}\delta_{\sigma_3,-\sigma_1}\cosh\xi\sinh\Theta \\
 \overline{U}_{3\sigma_3}\gamma(p_2)[1\pm\lambda_2\gamma_5]U_{1\sigma_1} &= m\sqrt{t}\left[\delta_{\sigma_3,\sigma_1}[\cosh\Theta\pm\lambda_2(2\sigma_1)]\right. \\
 &\quad \left.+\delta_{\sigma_3,-\sigma_1}\sinh\Theta[(2\sigma_1)\sinh\xi\pm\lambda_2\cosh\xi]\right]
 \end{aligned}$$

L'amplitude (4.14) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}
 T_c &= \delta_{\sigma_3,\sigma_1}T_+ + \delta_{\sigma_3,-\sigma_1}T_- \quad \text{avec} \\
 T_+ &= 2m^2\lambda_2\lambda_4\cosh\xi\sinh^2\Theta\left[\frac{1}{u+m^2}-\frac{1}{s-m^2}\right] - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}m\sqrt{t}\cosh\Theta\left[\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{u+m^2}\right] \\
 &\quad - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}m\sqrt{t}\lambda_2(2\sigma_1)\left[\frac{1}{u+m^2}-\frac{1}{s-m^2}\right], \quad (4.15) \\
 T_- &= 2m^2\lambda_2\cosh\xi\sinh\xi\sinh\Theta[1+\lambda_4(2\sigma_1)\cosh\Theta]\left[\frac{1}{u+m^2}-\frac{1}{s-m^2}\right] \\
 &\quad - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}m\sqrt{t}\sinh\Theta\left[\frac{(2\sigma_1)\sinh\xi-\lambda_2\cosh\xi}{s-m^2}+\frac{(2\sigma_1)\sinh\xi+\lambda_2\cosh\xi}{u+m^2}\right]
 \end{aligned}$$

De la relation $s = t + u + 2m^2$, on tire

$$\begin{aligned}
 s - m^2 - (u + m^2) &= t, \\
 s - m^2 + u + m^2 &= s + u = 2(s - m^2) - t = \sqrt{t(t + 4m^2)}\cosh\Theta
 \end{aligned}$$

Explicitons alors T_+ et T_- :

$$\begin{aligned}
 T_+ &= \frac{mt}{(s-m^2)(u+m^2)}\left[\sqrt{t+4m^2}[\lambda_2\lambda_4\sinh^2\Theta - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}\cosh^2\Theta]\right. \\
 &\quad \left.- \delta_{\lambda_2,\lambda_4}\sqrt{t}\lambda_2(2\sigma_1)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } \lambda_2\lambda_4\sinh^2\Theta - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}\cosh^2\Theta &= -\delta_{\lambda_2,\lambda_4} + [\lambda_2\lambda_4 - \delta_{\lambda_2,\lambda_4}]\sinh^2\Theta \\
 &= -\delta_{\lambda_2,\lambda_4} - \delta_{\lambda_2,-\lambda_4}\sinh^2\Theta, \\
 \text{car } \lambda_2\lambda_4 - \delta_{\lambda_2,\lambda_4} &= -\delta_{\lambda_2,-\lambda_4}, \quad \text{d'où}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_+ &= -\frac{m}{(s-m^2)(u+m^2)}\left[t\delta_{\lambda_2,\lambda_4}\left[\sqrt{t+4m^2}+\lambda_2(2\sigma_1)\sqrt{t}\right]\right. \\
 &\quad \left.+ 4\delta_{\lambda_2,-\lambda_4}\frac{(s-m^2)^2-st}{\sqrt{t+4m^2}}\right]
 \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
 T_- &= \frac{t\sinh\Theta}{2(s-m^2)(u+m^2)}\left[\lambda_2\sqrt{t(t+4m^2)}[1-\delta_{\lambda_2,\lambda_4}+\lambda_4(2\sigma_1)\cosh\Theta]\right. \\
 &\quad \left.- \delta_{\lambda_2,\lambda_4}(2\sigma_1)(s+u)\right] \\
 &= \frac{t\sinh\Theta}{2(s-m^2)(u+m^2)}\left[\lambda_2\delta_{\lambda_2,-\lambda_4}\sqrt{t(t+4m^2)}+(2\sigma_1)(s+u)[\lambda_2\lambda_4-\delta_{\lambda_2,\lambda_4}]\right]
 \end{aligned}$$

$$= \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \frac{t \sinh \Theta}{2(s-m^2)(u+m^2)} \left[\lambda_2 \sqrt{t(t+4m^2)} - (2\sigma_1)(s+u) \right]$$

On obtient finalement

$$\boxed{\begin{aligned} T_c = & -\delta_{\sigma_3, \sigma_1} \frac{m}{(s-m^2)(u+m^2)} \left[t \delta_{\lambda_2, \lambda_4} \left[\sqrt{t+4m^2} + \lambda_2(2\sigma_1)\sqrt{t} \right] \right. \\ & \left. + 4 \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \frac{(s-m^2)^2 - st}{\sqrt{t+4m^2}} \right] \\ & + \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \frac{t \sinh \Theta}{2(s-m^2)(u+m^2)} \left[\lambda_2 \sqrt{t(t+4m^2)} - (2\sigma_1)(s+u) \right] \end{aligned}} \quad (4.16)$$

On remarque que dans ce schéma, ce sont les amplitudes sans changement d'hélicité qui sont défavorisées dans le domaine cinématique où la masse m peut être prise égale à zéro. Bien sûr, cela provient encore de la nature vectorielle du couplage électromagnétique puisqu'alors

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} \approx (2\sigma_1) \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma_1} \approx \sqrt{t} (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} (X_g + i(2\sigma_1)Y)_\mu$$

De même, on observe dans ce domaine un changement de signe de l'hélicité du photon. Ces résultats ne sont pas en contradiction avec ceux du couplage en voie s , en raison des changements de signe des hélicités, expliqués ailleurs, lorsqu'on passe du couplage en voie s à celui en voie t .

Lorsque $m \rightarrow 0$ tandis que t reste fini, on a $t \approx s \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $u \approx s \cos^2 \frac{\theta}{2}$, $\sinh \Theta \approx 2 \frac{\sqrt{su}}{t}$, et

$$\begin{aligned} T_c & \approx \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \frac{1}{\sqrt{su}} [\lambda_2 t - (2\sigma_1)(s+u)] \\ & \approx -2(2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \left[\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \sqrt{\frac{u}{s}} + \delta_{\lambda_2, -2\sigma_1} \sqrt{\frac{s}{u}} \right] \\ & = -2(2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \delta_{\lambda_2, -\lambda_4} \left[\delta_{\lambda_2, 2\sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} + \delta_{\lambda_2, -2\sigma_1} \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right] \end{aligned}$$

On trouve alors des amplitudes similaires à celles du tableau II.

4.3 Amplitudes d'hélicité de $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

La production d'une paire particule-antiparticule $e^- e^+$ par collision de deux photons réels est l'un des deux processus "croisés" de la diffusion Compton, le dernier étant la production d'une paire de photons par annihilation d'une paire $e^- e^+$. Ce processus donne un exemple de couplage d'hélicité en voie s d'un système particule-antiparticule de spin 1/2 d'une part, et de deux photons (ici réels) d'autre part. Les diagrammes de Feynman décrivant ce processus au plus bas ordre en α sont représentés à la figure (4.2). Après extraction de la constante de couplage $4\pi\alpha$, l'amplitude générique correspondante s'écrit

$$T = \overline{U}_3 \left[\gamma(\epsilon_1) \frac{m + \gamma(p_3 - p_1)}{m^2 - (p_1 - p_3)^2} \gamma(\epsilon_2) + \gamma(\epsilon_2) \frac{m + \gamma(p_3 - p_2)}{m^2 - (p_2 - p_3)^2} \gamma(\epsilon_1) \right] V_4 \quad (4.17)$$

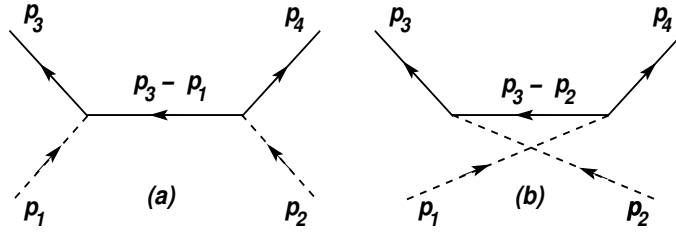


FIGURE 4.2 – Diagrammes de Feynman pour $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

Les notations sont les suivantes. L'électron final est représenté par le spineur $U_{3\sigma_3}$ d'hélicité σ_3 et $p_3 = ET + pZ'$ est sa 4-impulsion ; le positron final est représenté par le spineur $V_{4\sigma_4} = \gamma_5 U_{4\sigma_4}$ d'hélicité σ_4 et $p_4 = ET - pZ'$ est sa 4-impulsion ; un premier photon initial a pour vecteur de polarisation $\epsilon_1^{(\lambda_1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 X + iY)$ et a pour 4-impulsion $p_1 = E(T + Z)$; le second photon initial a pour vecteur de polarisation $\epsilon_2^{(\lambda_2)} = \epsilon_1^{(-\lambda_2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\lambda_2 X + iY)$ et a pour 4-impulsion $p_2 = E(T - Z)$. On pose $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, $t = -(p_1 - p_3)^2 = -(p_2 - p_4)^2$, $u = -(p_2 - p_3)^2 = -(p_1 - p_4)^2$, et l'on a ici $E = \frac{\sqrt{s}}{2}$, $p = \beta E$ avec $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$, m étant la masse de l'électron (ou du positron!).

Utilisant l'équation de Dirac pour l'électron, l'amplitude devient

$$T = \overline{U}_3 \left\{ \frac{1}{m^2 + t} \left[2p_3 \cdot \epsilon_1 \gamma(\epsilon_2) - \gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) \right] + \frac{1}{m^2 + u} \left[2p_3 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_1) - \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_1) \right] \right\} V_4$$

On a

$$\begin{aligned} -\gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) &= \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2), \quad \gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2) = \frac{1}{2} [1 + \lambda_1 \lambda_2 + i(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma(X) \gamma(Y)] \\ &= \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [1 + i\lambda_1 \gamma(X) \gamma(Y)] \quad \text{car } \lambda_1 \lambda_2 = \pm 1 \end{aligned}$$

Or, de $\gamma_5 = i \gamma(X) \gamma(Y) \gamma(Z) \gamma(T)$, on tire

$$\gamma(X) \gamma(Y) \gamma(T + \epsilon Z) = i \epsilon \gamma(T + \epsilon Z) \gamma_5, \quad \text{avec } \epsilon = \pm 1, \quad \text{d'où}$$

$$\gamma(p_1)\gamma(X)\gamma(Y) = i\gamma(p_1)\gamma_5, \quad \gamma(p_2)\gamma(X)\gamma(Y) = -i\gamma(p_2)\gamma_5 \quad (4.18)$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} -\gamma(\epsilon_1)\gamma(p_1)\gamma(\epsilon_2) &= \delta_{\lambda_1, \lambda_2}\gamma(p_1)[1 - \lambda_1\gamma_5] \quad \text{et} \\ -\gamma(\epsilon_2)\gamma(p_2)\gamma(\epsilon_1) &= \delta_{\lambda_1, \lambda_2}\gamma(p_2)[1 - \lambda_1\gamma_5] \end{aligned} \quad (4.19)$$

✎ Exprimons ci-dessous quelques produits scalaires :

comme $p_3 = E(T + \beta Z')$, il vient

$$p_3 \cdot \epsilon_1 = E\beta Z' \cdot \epsilon_1 = -\frac{E\beta\lambda_1}{\sqrt{2}} Z' \cdot X = \frac{E\beta\lambda_1}{\sqrt{2}} \sin\theta, \quad p_3 \cdot \epsilon_2 = -\frac{E\beta\lambda_2}{\sqrt{2}} \sin\theta;$$

puis

$$p_1 \cdot [X' - i(2\sigma_3)Y] = p_1 \cdot X' = E\sin\theta = -p_2 \cdot [X' - i(2\sigma_3)Y], \quad p_1 \cdot Z' = -E\cos\theta$$

$$\epsilon_1 \cdot [X' - i(2\sigma_3)Y] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_1 \cos\theta + (2\sigma_3)], \quad \epsilon_2 \cdot [X' - i(2\sigma_3)Y] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_2 \cos\theta + (2\sigma_3)]$$

$$\epsilon_1 \cdot Z' = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sin\theta, \quad \epsilon_2 \cdot Z' = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

✎ Adaptant (??) à l'état final e^-e^+ , on a les formules

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu V_{4\sigma_4} &= 2m \left[(2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \cosh\chi (X' - 2i\sigma_3 Y)_\mu - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} Z'_\mu \right] \\ \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu \gamma_5 V_{4\sigma_4} &= 2m \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sinh\chi (X' - 2i\sigma_3 Y)_\mu - (2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} T_\mu \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec $2m \cosh\chi = \sqrt{s}$, $2m \sinh\chi = \beta\sqrt{s}$. On en déduit

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(\epsilon_1) V_{4\sigma_4} = (2\sigma_3) \sqrt{s} \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_1 \cos\theta + (2\sigma_3)] - (2m) \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(\epsilon_2) V_{4\sigma_4} = (2\sigma_3) \sqrt{s} \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_2 \cos\theta + (2\sigma_3)] + (2m) \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_1) V_{4\sigma_4} = -\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_2) V_{4\sigma_4} = (2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{s}{2} \sin\theta + \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} m \sqrt{s} \cos\theta$$

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_1) \gamma_5 V_{4\sigma_4} = \beta \frac{s}{2} \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin\theta - (2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} m \sqrt{s}$$

$$\overline{U}_{3\sigma_3} \gamma(p_2) \gamma_5 V_{4\sigma_4} = -\beta \frac{s}{2} \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin\theta - (2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} m \sqrt{s}$$

puis

$$-\overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1)\gamma(p_1)\gamma(\epsilon_2) V_{4\sigma_4} = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{s}{2} \sin\theta [(2\sigma_3) - \lambda_1\beta] + \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} m \sqrt{s} [\cos\theta + (2\sigma_3)\lambda_1] \right]$$

$$-\overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2)\gamma(p_2)\gamma(\epsilon_1) V_{4\sigma_4} = -\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{s}{2} \sin\theta [(2\sigma_3) - \lambda_1\beta] + \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} m \sqrt{s} [\cos\theta - (2\sigma_3)\lambda_1] \right]$$

✎ Collectant tous ces résultats, et explicitant $t + m^2 = \frac{s}{2} [1 - \beta \cos\theta]$, $u + m^2 = \frac{s}{2} [1 + \beta \cos\theta]$, on trouve

$$\begin{aligned}
 T = T(\lambda_1, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4) = & \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \left[\beta \lambda_1 \sin \theta \left\{ [1 - (2\sigma_3)\lambda_2 \cos \theta] \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2m}{\sqrt{s}} \lambda_2 \sin \theta \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \right\} + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \left\{ \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin \theta [(2\sigma_3) - \lambda_1 \beta] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2m}{\sqrt{s}} \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} [\cos \theta + (2\sigma_3)\lambda_1] \right\} \right] \\
 & - \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \left[\beta \lambda_2 \sin \theta \left\{ [1 + (2\sigma_3)\lambda_1 \cos \theta] \delta_{\sigma_4, \sigma_3} - \frac{2m}{\sqrt{s}} \lambda_1 \sin \theta \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \left\{ \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin \theta [(2\sigma_3) - \lambda_1 \beta] + \frac{2m}{\sqrt{s}} \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} [\cos \theta - (2\sigma_3)\lambda_1] \right\} \right] \right] \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Les tableaux ci-après donnent les expressions explicites des 16 amplitudes d'hélicité du processus, tirées de (4.21), dans le cas $m \neq 0$ et dans le cas $m = 0$.

$$\begin{aligned}
 T(+, +; \uparrow, \uparrow) &= T(+, +; \downarrow, \downarrow) = T(-, -; \uparrow, \uparrow) = T(-, -; \downarrow, \downarrow) = 0 \\
 T(+, -; \uparrow, \uparrow) &= -T(-, +; \downarrow, \downarrow) = \frac{2\beta \sin \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
 T(+, -; \downarrow, \downarrow) &= -T(-, +; \uparrow, \uparrow) = \frac{2\beta \sin \theta (1 - \cos \theta)}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
 T(+, +; \uparrow, \downarrow) &= T(-, -; \downarrow, \uparrow) = \frac{4m\beta}{\sqrt{s}} \frac{1 + \beta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
 T(-, -; \uparrow, \downarrow) &= T(+, +; \downarrow, \uparrow) = -\frac{4m\beta}{\sqrt{s}} \frac{1 - \beta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\
 T(+, -; \uparrow, \downarrow) &= T(-, +; \uparrow, \downarrow) = T(+, -; \downarrow, \uparrow) = T(-, +; \downarrow, \uparrow) = -\frac{4m\beta}{\sqrt{s}} \frac{\sin^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}
 \end{aligned}$$

Tableau III - Amplitudes d'hélicité de $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

$$\begin{aligned}
 T(+, -; \uparrow, \uparrow) &= -T(-, +; \downarrow, \downarrow) = 2 \cot \frac{\theta}{2} \\
 T(+, -; \downarrow, \downarrow) &= -T(-, +; \uparrow, \uparrow) = 2 \tan \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

Tableau IV - Amplitudes d'hélicité non nulles de $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ pour $m = 0$

Ici aussi, on observe que certaines amplitudes s'annulent pour $m = 0$ (en fait, pour $\sqrt{s} \gg m$) : celles pour lesquelles les hélicités de l'électron et du positron sont *opposées*, phénomène similaire à celui observé pour la diffusion Compton, et qui résulte, comme déjà indiqué, de la nature vectorielle de l'interaction électromagnétique.

4.4 Amplitudes d'hélicité de $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow e^- + e^+$

Le processus envisagé ici diffère de celui du paragraphe précédent en ce que les deux photons entrant en collision sont maintenant supposés *virtuels*, cette appellation signifiant que ces photons sont en fait des intermédiaires décrivant une interaction électromagnétique entre deux vertex d'un diagramme de Feynman, comme par exemple ceux des diagrammes des figures (1.4) et (1.5) du chapitre 1, et que de ce fait, ils ne sont pas observables. Nous supposons qu'ils sont du genre espace et poserons $p_1^2 = -t_1 < 0$, $p_2^2 = -t_2 < 0$. Leur tétrades d'hélicité respectives dans un couplage en voie s sont définies comme au paragraphe 1.5.3 :

① photon 1

$$\epsilon_1^{(0)} = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left(P + p_1 \frac{P \cdot p_1}{t_1} \right) = \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left(p_2 + p_1 \frac{p_2 \cdot p_1}{t_1} \right) = T_1$$

avec $P = p_1 + p_2$, $P^2 = s$, $\Lambda = \Lambda(s, -t_1, -t_2)$

$$z_1 = \frac{p_1}{\sqrt{t_1}}, \quad \epsilon_1^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X \pm iY) = \epsilon^{(\pm)}$$

② photon 2

$$\epsilon_2^{(0)} = \frac{2\sqrt{t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left(P + p_2 \frac{P \cdot p_2}{t_2} \right) = T_2, \quad z_2 = \frac{p_2}{\sqrt{t_2}}, \quad \epsilon_2^{(\pm)} = \epsilon_1^{(\mp)}$$

Notons que

$$\begin{aligned} T_1 &= \cosh \eta_1 T + \sinh \eta_1 Z, & z_1 &= \cosh \eta_1 Z + \sinh \eta_1 T \\ T_2 &= \cosh \eta_2 T - \sinh \eta_2 Z, & z_2 &= -\cosh \eta_2 Z + \sinh \eta_2 T \\ T_1 &= \cosh \eta T_2 - \sinh \eta z_2, & z_1 &= -\cosh \eta z_2 + \sinh \eta T_2 \\ T_2 &= \cosh \eta T_1 - \sinh \eta z_1, & z_2 &= -\cosh \eta z_1 + \sinh \eta T_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \cosh \eta_1 &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{st_1}}, & \sinh \eta_1 &= \frac{s + t_2 - t_1}{2\sqrt{st_1}}, & \cosh \eta_2 &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{st_2}}, & \sinh \eta_2 &= \frac{s + t_1 - t_2}{2\sqrt{st_2}} \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2, & \cosh \eta &= \frac{s + t_1 + t_2}{2\sqrt{t_1 t_2}}, & \sinh \eta &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t_1 t_2}} \end{aligned}$$

et que, inversement,

$$\begin{aligned} T &= \cosh \eta_1 T_1 - \sinh \eta_1 z_1 = \cosh \eta_2 T_2 - \sinh \eta_2 z_2 \\ Z &= \cosh \eta_1 z_1 - \sinh \eta_1 T_1 = -\cosh \eta_2 z_2 + \sinh \eta_2 T_2 \end{aligned}$$

Les photons virtuels disposent chacun de trois états de polarisation : $\epsilon_1^{(0)}$, $\epsilon_1^{(\pm)}$ pour le premier, $\epsilon_2^{(0)}$, $\epsilon_2^{(\pm)}$ pour le second, correspondant aux indices d'hélicité 0 et ± 1 , ce qui conduit à déterminer 36 amplitudes d'hélicité pour ce processus. Nous écrirons son amplitude générique sous la forme

$$T = \overline{U}_3 \left\{ \frac{1}{a} \left[2p_3 \cdot \epsilon_1 \gamma(\epsilon_2) - \gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) \right] + \frac{1}{b} \left[2p_3 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_1) - \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_1) \right] \right\} V_4$$

$$\text{avec } a = m^2 - (p_3 - p_1)^2 = m^2 + t, \quad b = m^2 - (p_3 - p_2)^2 = m^2 + u$$

Exprimons ici les dénominateurs a et b en fonction de θ :

$$a = t_1 + 2p_1 \cdot p_3 = t_1 + \sqrt{st_1} (\sinh \eta_1 - \beta \cosh \eta_1 \cos \theta) = t_1 + \frac{1}{2} (s + t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \beta \Lambda^{\frac{1}{2}} \cos \theta \text{ soit}$$

$$a = \sqrt{t_1 t_2} (\cosh \eta - \beta \sinh \eta \cos \theta) \text{ et de même } b = \sqrt{t_1 t_2} (\cosh \eta + \beta \sinh \eta \cos \theta)$$

Nous déterminerons séparément les amplitudes $T(0, 0; \sigma_3, \sigma_4)$, $T(0, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4)$, $T(\lambda_1, 0; \sigma_3, \sigma_4)$ et $T(\lambda_1, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4)$, avec ici $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$.

• **Amplitudes** $T(0, 0; \sigma_3, \sigma_4)$

Pour ces amplitudes, $\epsilon_1 = T_1$, $\epsilon_2 = T_2$. On a

$$\gamma(\epsilon_1^{(0)}) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2^{(0)}) = \sqrt{t_1} \gamma(T_1) \gamma(z_1) \gamma(T_2) \text{ et comme } \gamma(T_1) \gamma(z_1) = -\gamma(T_2) \gamma(z_2), \text{ il vient}$$

$$\gamma(\epsilon_1^{(0)}) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2^{(0)}) = \sqrt{t_1} \gamma(T_1) \gamma(z_1) \gamma(T_2) = -\sqrt{t_1} \gamma(T_2) \gamma(z_2) \gamma(T_2) = \sqrt{t_1} \gamma(z_2) = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \gamma(p_2)$$

$$\text{De même, } \gamma(\epsilon_2^{(0)}) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_1^{(0)}) = \sqrt{t_2} \gamma(z_1) = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \gamma(p_1)$$

Il est judicieux d'utiliser ici l'équation $P^\mu \overline{U}_3 \gamma_\mu V_4 = 0$, qui résulte de la conservation d'un courant et qui permet d'écrire

$$\overline{U}_3 \gamma(p_2) V_4 = -\overline{U}_3 \gamma(p_1) V_4, \quad \overline{U}_3 \gamma(T_1) V_4 = \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1} \overline{U}_3 \gamma(z_1) V_4 = \frac{\sinh \eta_1}{\sqrt{t_1} \cosh \eta_1} \overline{U}_3 \gamma(p_1) V_4$$

$$\overline{U}_3 \gamma(T_2) V_4 = \frac{\sinh \eta_2}{\cosh \eta_2} \overline{U}_3 \gamma(z_2) V_4 = \frac{\sinh \eta_2}{\sqrt{t_2} \cosh \eta_2} \overline{U}_3 \gamma(p_2) V_4 = -\frac{\sinh \eta_2}{\sqrt{t_2} \cosh \eta_2} \overline{U}_3 \gamma(p_1) V_4$$

On obtient ainsi

$$T(0, 0; \sigma_3, \sigma_4) = \overline{U}_3 \gamma(p_1) V_4 \times A \text{ avec}$$

$$A = \frac{1}{a} \left\{ -2p_3 \cdot T_1 \frac{\sinh \eta_2}{\sqrt{t_2} \cosh \eta_2} + \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \right\} + \frac{1}{b} \left\{ 2p_3 \cdot T_2 \frac{\sinh \eta_1}{\sqrt{t_1} \cosh \eta_1} - \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right\}$$

Comme $2p_3 \cdot T_1 = \sqrt{s} (\cosh \eta_1 - \beta \sinh \eta_1 \cos \theta)$, $2p_3 \cdot T_2 = \sqrt{s} (\cosh \eta_2 + \beta \sinh \eta_2 \cos \theta)$, $\sqrt{t_1} \cosh \eta_1 = \sqrt{t_2} \cosh \eta_2 = \sqrt{\frac{t_1 t_2}{s}} \sinh \eta$, les coefficients respectifs A_1 et B_1 de $1/a$ et $1/b$ s'écrivent

$$A_1 = -\sqrt{s} \frac{\sinh \eta_2}{\sqrt{t_2} \cosh \eta_2} (\cosh \eta_1 - \beta \sinh \eta_1 \cos \theta) + \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \frac{s\beta \sinh \eta_2 \sinh \eta_1 \cos \theta}{\sqrt{t_1 t_2} \sinh \eta} + \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} - \frac{1}{2\sqrt{t_1 t_2}} (s + t_1 - t_2), \text{ soit}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{s\beta \sinh \eta_2 \sinh \eta_1 \cos \theta}{\sqrt{t_1 t_2} \sinh \eta} - \frac{1}{2\sqrt{t_1 t_2}}(s - t_1 - t_2); \\
 B_1 &= \sqrt{s} \frac{\sinh \eta_1}{\sqrt{t_1} \cosh \eta_1} (\cosh \eta_2 + \beta \sinh \eta_2 \cos \theta) - \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \\
 &= \frac{s\beta \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \cos \theta}{\sqrt{t_1 t_2} \sinh \eta} + \frac{1}{2\sqrt{t_1 t_2}}(s - t_1 - t_2)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 ab A &= \frac{s\beta \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \cos \theta}{\sqrt{t_1 t_2} \sinh \eta} (a+b) + \frac{1}{2\sqrt{t_1 t_2}}(s-t_1-t_2)(a-b) = \beta \cos \theta \left\{ \frac{2s \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \cosh \eta}{\sinh \eta} \right. \\
 &\quad \left. - \sinh \eta (s - t_1 - t_2) \right\} = \frac{\beta \cos \theta}{2\sqrt{t_1 t_2} \Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[(s+t_2-t_1)(s+t_1-t_2)(s+t_1+t_2) - (s-t_1-t_2)\Lambda \right], \text{ soit} \\
 A &= \frac{4s \sqrt{t_1 t_2} \beta \cos \theta}{ab \Lambda^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_3 \gamma(p_1) V_4 &= 2m \left[(2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \cosh \chi p_1 \cdot X' - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} p_1 \cdot Z' \right] \\
 &= \sqrt{t_1} \cosh \eta_1 \left[(2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sqrt{s} \sin \theta + 2m \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \cos \theta \right] \\
 &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2} \left[(2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin \theta + \frac{2m}{\sqrt{s}} \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

Les amplitudes cherchées ont donc pour expression générale

$$T(0, 0; \sigma_3, \sigma_4) = \frac{2s \sqrt{t_1 t_2} \beta \cos \theta}{ab} \left[(2\sigma_3) \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \sin \theta + \frac{2m}{\sqrt{s}} \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \cos \theta \right] \quad (4.22)$$

soit, explicitement,

$$\begin{aligned}
 T(0, 0; \uparrow, \uparrow) &= -T(0, 0; \downarrow, \downarrow) = \frac{2s \sqrt{t_1 t_2} \beta \cos \theta \sin \theta}{ab} \\
 T(0, 0; \uparrow, \downarrow) &= T(0, 0; \downarrow, \uparrow) = \frac{4m \sqrt{s t_1 t_2} \beta \cos^2 \theta}{ab}
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

• **Amplitudes** $T(0, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4)$

Pour calculer ces amplitudes, il apparaît plus avantageux d'exprimer leur forme générique comme

$$T = \overline{U}_3 \left\{ \frac{1}{a} \left[2p_3 \cdot \epsilon_1 \gamma(\epsilon_2) - \gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) \right] + \frac{1}{b} \left[-2p_4 \cdot \epsilon_1 \gamma(\epsilon_2) + \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_1) \right] \right\} V_4$$

En effet, on a maintenant ($\lambda_2 = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \gamma(\epsilon_1)\gamma(p_1)\gamma(\epsilon_2) &= \sqrt{t_1} \gamma(T_1) \gamma(z_1) \gamma(\epsilon_1^{(-\lambda_2)}) = \lambda_2 \sqrt{t_1} \gamma(\epsilon_1^{(-\lambda_2)}) \gamma_5 \\ 2p_3 \cdot T_1 &= \sqrt{s} (\cosh \eta_1 - \beta \sinh \eta_1 \cos \theta), \quad 2p_4 \cdot T_1 = \sqrt{s} (\cosh \eta_1 + \beta \sinh \eta_1 \cos \theta) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} abT &= \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 \left\{ \sqrt{s} \cosh \eta_1 (b-a) - \sinh \eta_1 \sqrt{s} \beta \cos \theta (a+b) \right\} \\ &+ \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) \gamma_5 V_4 \left\{ \lambda_2 \sqrt{t_1} (a+b) \right\} = 2\sqrt{s t_1 t_2} \beta \cos \theta \sinh \eta_2 \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 \\ &+ 2\lambda_2 t_1 \sqrt{t_2} \cosh \eta \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) \gamma_5 V_4, \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\sqrt{t_1}}{ab} \left\{ (s+t_1-t_2) \beta \cos \theta \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 + \lambda_2 (s+t_1+t_2) \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) \gamma_5 V_4 \right\}$$

Or,

$$\begin{aligned} \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sqrt{\frac{s}{2}} \left[1 - \lambda_2 (2\sigma_3) \cos \theta \right] + \frac{2m}{\sqrt{2}} \lambda_2 \sin \theta \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \\ \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) \gamma_5 V_4 &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} (2\sigma_3) \beta \sqrt{\frac{s}{2}} \left[1 - \lambda_2 (2\sigma_3) \cos \theta \right] \end{aligned}$$

d'où l'amplitude

$$\begin{aligned} T(0, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4) &= \sqrt{\frac{s t_1}{2}} \frac{\beta}{ab} \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \left[1 - \lambda_2 (2\sigma_3) \cos \theta \right] \left[(s+t_1-t_2) \cos \theta \right. \right. \\ &\left. \left. + (2\sigma_3) \lambda_2 (s+t_1+t_2) \right] + \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \frac{2m}{\sqrt{s}} \lambda_2 (s+t_1-t_2) \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Explicitement,

$$\begin{aligned} T(0, +; \uparrow, \uparrow) &= T(0, -; \downarrow, \downarrow) = \sqrt{\frac{s t_1}{2}} \frac{\beta}{ab} \left[1 - \cos \theta \right] \left[(s+t_1-t_2) \cos \theta \right. \\ &\left. + (s+t_1+t_2) \right] \\ T(0, +; \downarrow, \downarrow) &= T(0, -; \uparrow, \uparrow) = \sqrt{\frac{s t_1}{2}} \frac{\beta}{ab} \left[1 + \cos \theta \right] \left[(s+t_1-t_2) \cos \theta \right. \\ &\left. - (s+t_1+t_2) \right] \\ T(0, +; \uparrow, \downarrow) &= T(0, +; \downarrow, \uparrow) = -T(0, -; \uparrow, \downarrow) = -T(0, -; \downarrow, \uparrow) \\ &= \frac{m\beta \sqrt{2 t_1}}{ab} (s+t_1-t_2) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

• **Amplitudes** $T(\lambda_1, 0; \sigma_3, \sigma_4)$

Symétriquement au cas précédent, l'amplitude générique sera ici présentée sous la forme

$$T = \overline{U}_3 \left\{ \frac{1}{a} \left[-2p_4 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_1) + \gamma(\epsilon_1) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_2) \right] + \frac{1}{b} \left[2p_3 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_1) - \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_2) \gamma(\epsilon_1) \right] \right\} V_4$$

où $\epsilon_2 = T_2$, $\epsilon_1 = \epsilon_1^{(\lambda_1)}$, $\lambda_1 = \pm 1$. Ensuite, on utilise les identités $\gamma(\epsilon_1) \gamma(p_2) \gamma(T_2) = \sqrt{t_2} \lambda_1 \gamma(\epsilon_1) \gamma_5$, $2p_3 \cdot T_2 = \sqrt{s} (\cosh \eta_2 - \beta \sinh \eta_2 \cos \theta)$, $2p_4 \cdot T_2 = \sqrt{s} (\cosh \eta_2 + \beta \sinh \eta_2 \cos \theta)$, pour obtenir

$$\begin{aligned} abT &= \sqrt{t_2} \lambda_1 \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) \gamma_5 V_4 (a+b) + \sqrt{s} \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) V_4 \left[\cosh \eta_2 (a-b) + \beta \sinh \eta_2 \cos \theta (a+b) \right] \\ &= \sqrt{t_2} \left[\lambda_1 (s+t_1+t_2) \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) \gamma_5 V_4 - (s+t_2-t_1) \beta \cos \theta \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) V_4 \right] \end{aligned}$$

Les remplacements

$$\begin{aligned} \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) V_4 &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sqrt{\frac{s}{2}} \left[1 + \lambda_1 (2\sigma_3) \cos \theta \right] - \frac{2m}{\sqrt{2}} \lambda_1 \sin \theta \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \\ \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_1) \gamma_5 V_4 &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} (2\sigma_3) \beta \sqrt{\frac{s}{2}} \left[1 + \lambda_1 (2\sigma_3) \cos \theta \right] \end{aligned}$$

conduisent enfin à l'expression

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, 0; \sigma_3, \sigma_4) &= \sqrt{\frac{s t_2}{2}} \frac{\beta}{ab} \left\{ \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \left[1 + \lambda_1 (2\sigma_3) \cos \theta \right] \left[- (s+t_2-t_1) \cos \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2\sigma_3) \lambda_1 (s+t_1+t_2) \right] + \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \frac{2m}{\sqrt{s}} \lambda_2 (s+t_2-t_1) \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

et explicitement aux amplitudes

$$\begin{aligned} T(+, 0; \uparrow, \uparrow) &= T(-, 0; \downarrow, \downarrow) = \sqrt{\frac{s t_2}{2}} \frac{\beta}{ab} \left[1 + \cos \theta \right] \left[- (s+t_2-t_1) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + (s+t_1+t_2) \right] \\ T(+, 0; \downarrow, \downarrow) &= T(-, 0; \uparrow, \uparrow) = -\sqrt{\frac{s t_2}{2}} \frac{\beta}{ab} \left[1 - \cos \theta \right] \left[(s+t_2-t_1) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + (s+t_1+t_2) \right] \\ T(+, 0; \uparrow, \downarrow) &= T(+, 0; \downarrow, \uparrow) = -T(-, 0; \uparrow, \downarrow) = -T(-, 0; \downarrow, \uparrow) \\ &= \frac{m\beta \sqrt{2} t_2}{ab} (s+t_2-t_1) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

• **Amplitudes** $T(\lambda_1, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4)$, $(\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1)$

Ecrivons l'amplitude générique sous la forme

$$T = \overline{U}_3 \left\{ \frac{1}{a} \left[2p_3 \cdot \epsilon_2 \gamma(\epsilon_2) - \gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) \right] + \frac{1}{b} \left[-2p_4 \cdot \epsilon_1 \gamma(\epsilon_2) + \gamma(\epsilon_2) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_1) \right] \right\} V_4$$

avec $\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda_1 X - iY)$, $\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_2 X - iY)$. On a $2p_3 \cdot \epsilon_1 = -2p_4 \cdot \epsilon_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{s}{2}} \beta \sin \theta$, et de $\gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2) = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [1 - \lambda_1 \gamma(T_1) \gamma(z_1) \gamma_5]$, $\gamma(\epsilon_2) \gamma(\epsilon_1) = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [1 + \lambda_1 \gamma(T_1) \gamma(z_1) \gamma_5]$, on tire

$$\gamma(\epsilon_1) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_2) = \sqrt{t_1} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [\gamma(z_1) - \lambda_1 \gamma(T_1) \gamma_5]$$

$$\gamma(\epsilon_2) \gamma(p_1) \gamma(\epsilon_1) = \sqrt{t_1} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [\gamma(z_1) + \lambda_1 \gamma(T_1) \gamma_5]$$

D'où

$$\begin{aligned} abT &= (a+b) \left\{ \beta \lambda_1 \sqrt{\frac{s}{2}} \sin \theta \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 - \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{t_1} \overline{U}_3 \gamma(T_1) \gamma_5 V_4 \right\} \\ &+ \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{t_1} (b-a) \overline{U}_3 \gamma(z_1) V_4 = (s+t_1+t_2) \left\{ \beta \lambda_1 \sqrt{\frac{s}{2}} \sin \theta \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 - \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{t_1} \overline{U}_3 \gamma(T_1) \gamma_5 V_4 \right\} \\ &\quad + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{t_1} \beta \cos \theta \Lambda^{\frac{1}{2}} \overline{U}_3 \gamma(z_1) V_4 \end{aligned}$$

Exprimons les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} \overline{U}_3 \gamma(\epsilon_2) V_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sqrt{s} [1 - \lambda_2 (2\sigma_3) \cos \theta] + 2m \lambda_2 \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \sin \theta \right] \\ \overline{U}_3 \gamma(T_1) \gamma_5 V_4 &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \beta \sqrt{s} \sin \theta \sinh \eta_1 - 2m (2\sigma_3) \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \cosh \eta_1 \cos \theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{st_1}} \left[(s+t_2-t_1) \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \beta \sqrt{s} \sin \theta - 2m (2\sigma_3) \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \Lambda^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right] \\ \overline{U}_3 \gamma(z_1) V_4 &= \cosh \eta_1 \left[(2\sigma_3) \sqrt{s} \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sin \theta + 2m \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \cos \theta \right] \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{st_1}} \left[(2\sigma_3) \sqrt{s} \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sin \theta + 2m \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

Posant $Z = s + t_1 + t_2$ et $X = s + t_2 - t_1$, on en déduit l'amplitude générique

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4) &= \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \frac{\beta \sin \theta}{2ab} \left\{ \lambda_1 s Z [1 - \lambda_2 (2\sigma_3) \cos \theta] \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \lambda_1 X Z + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (2\sigma_3) \Lambda \cos \theta \right\} \\ &+ \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \frac{m}{ab\sqrt{s}} \left\{ \lambda_1 \lambda_2 s \beta Z \sin^2 \theta + \lambda_1 (2\sigma_3) \delta_{\lambda_1, \lambda_2} Z \Lambda^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \beta \Lambda \cos^2 \theta \right\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

et explicitement les 16 amplitudes suivantes :

$$\begin{aligned}
 T(+, +; \uparrow, \uparrow) &= -T(-, -; \downarrow, \downarrow) = \frac{\beta \sin \theta}{2ab} \left\{ sZ(1 - \cos \theta) + \Lambda \cos \theta - XZ \right\} \\
 T(+, +; \downarrow, \downarrow) &= -T(-, -; \uparrow, \uparrow) = \frac{\beta \sin \theta}{2ab} \left\{ sZ(1 + \cos \theta) - \Lambda \cos \theta - XZ \right\} \\
 T(+, +; \uparrow, \downarrow) &= T(-, -; \downarrow, \uparrow) = \frac{m}{ab\sqrt{s}} \left\{ s\beta Z \sin^2 \theta + \beta\Lambda \cos^2 \theta + Z\Lambda^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 T(+, +; \downarrow, \uparrow) &= T(-, -; \uparrow, \downarrow) = \frac{m}{ab\sqrt{s}} \left\{ s\beta Z \sin^2 \theta + \beta\Lambda \cos^2 \theta - Z\Lambda^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 \\
 T(+, -; \uparrow, \uparrow) &= -T(-, +; \downarrow, \downarrow) = \frac{sZ\beta \sin \theta}{2ab} (1 + \cos \theta) \\
 T(+, -; \downarrow, \downarrow) &= -T(-, +; \uparrow, \uparrow) = \frac{sZ\beta \sin \theta}{2ab} (1 - \cos \theta) \\
 \\
 T(+, -; \uparrow, \downarrow) &= T(+, -; \downarrow, \uparrow) = T(-, +; \uparrow, \downarrow) = T(-, +; \downarrow, \uparrow) \\
 &= -\frac{m\beta Z \sqrt{s} \sin^2 \theta}{ab}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.5 Amplitudes d'hélicité de $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow \pi^- + \pi^+$

A titre de comparaison avec les amplitudes d'hélicité du paragraphe précédent, il nous paraît intéressant de calculer celles correspondant à la production, par collision de deux photons virtuels, d'une paire de particules sans spin, telles que les pions π^- et π^+ . Les pions étant des particules hadroniques, leur interaction électromagnétique est certainement plus compliquée que celle obtenue en appliquant naïvement le principe de couplage minimum au lagrangien libre d'un pion chargé. Cependant, dans notre optique de comparaison, il nous suffira de considérer l'amplitude de Born dudit processus, déduite de ce principe. Utilisant les mêmes notations, elle s'écrit

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = 4\pi\alpha \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu T_{\mu\nu} \quad \text{avec}$$

$$T_{\mu\nu} = -2g_{\mu\nu} + \frac{1}{a} (2p_3 - p_1)_\mu (2p_4 - p_2)_\nu + \frac{1}{b} (2p_4 - p_1)_\mu (2p_3 - p_2)_\nu$$

• Amplitude $T(0, 0)$

En tenant compte du fait que $p_1^\mu T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} p_2^\nu = 0$, on obtient

$$T(0, 0) = \frac{4\sqrt{t_1 t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} P^\mu P^\nu T_{\mu\nu} = \frac{4\sqrt{t_1 t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[-2s + 4(P \cdot p_3)(P \cdot p_4) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \quad \text{soit}$$

$$\boxed{T(0, 0) = \frac{4s\sqrt{t_1 t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{sZ}{ab} - 2 \right]} \tag{4.30}$$

• **Amplitudes** $T(\lambda_1, 0)$, $(\lambda_1 = \pm 1)$

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, 0) &= \frac{2\sqrt{t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{4}{a} (\epsilon_1 \cdot p_3)(P \cdot p_4) + \frac{4}{b} (\epsilon_1 \cdot p_4)(P \cdot p_3) \right] = \frac{8\sqrt{t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} (\epsilon_1 \cdot p_3)(P \cdot p_4) \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \\ &= \frac{2s\sqrt{t_2}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\lambda_1 \sqrt{\frac{s}{2}} \beta \sin \theta \right] \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$T(\lambda_1, 0) = \lambda_1 \frac{s\sqrt{2st_2} \beta^2 \sin \theta \cos \theta}{ab} \quad (4.31)$$

 • **Amplitudes** $T(0, \lambda_2)$, $(\lambda_2 = \pm 1, \epsilon_2 = \epsilon_1^{(-\lambda_2)})$

$$\begin{aligned} T(0, \lambda_2) &= \frac{2\sqrt{t_1}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{4}{a} (P \cdot p_3)(\epsilon_2 \cdot p_4) + \frac{4}{b} (P \cdot p_4)(\epsilon_2 \cdot p_3) \right] = \frac{8\sqrt{t_1}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} (P \cdot p_3)(\epsilon_2 \cdot p_4) \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \\ &= \frac{2s\sqrt{t_1}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\lambda_2 \sqrt{\frac{s}{2}} \beta \sin \theta \right] \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$T(0, \lambda_2) = \lambda_2 \frac{s\sqrt{2st_1} \beta^2 \sin \theta \cos \theta}{ab} \quad (4.32)$$

 • **Amplitudes** $T(\lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1)$

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, \lambda_2) &= -2\delta_{\lambda_2, \lambda_1} + \frac{4(\epsilon_1 \cdot p_3)(\epsilon_2 \cdot p_4)}{a} + \frac{4(\epsilon_1 \cdot p_4)(\epsilon_2 \cdot p_3)}{b} = -2\delta_{\lambda_2, \lambda_1} \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 s \beta^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$T(\lambda_1, \lambda_2) = -2\delta_{\lambda_2, \lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{sZ \beta^2 \sin^2 \theta}{ab} \quad (4.33)$$

4.6 Amplitudes d'hélicité de $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

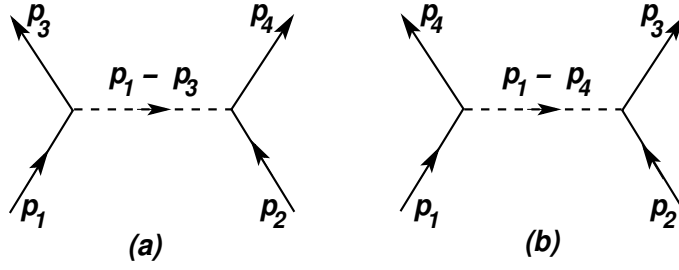


FIGURE 4.3 – (a) : Diagrammes de Feynman de la diffusion Møller.

Dans ce processus, appelé diffusion Møller⁶, les particules initiales et finales sont toutes identiques et donc de même masse m . Les notations sont celles de la figure (3.1). Au plus bas ordre en α , elle est représentée par les deux diagrammes de Feynman de la figure (4.3) et son amplitude, divisée par $4\pi\alpha$ s'écrit⁷

$$T_m = \frac{1}{t} \bar{U}_3 \gamma_\mu U_1 \bar{U}_4 \gamma^\mu U_2 - \frac{1}{u} \bar{U}_4 \gamma_\mu U_1 \bar{U}_3 \gamma^\mu U_2 \quad (4.34)$$

$$t = -(p_1 - p_3)^2, \quad u = -(p_1 - p_4)^2$$

Les facteurs $X_1 = \bar{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} \bar{U}_{4\sigma_4} \gamma^\mu U_{2\sigma_2}$ et $X_2 = \bar{U}_{4\sigma_4} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} \bar{U}_{3\sigma_3} \gamma^\mu U_{2\sigma_2}$ peuvent être calculés facilement en utilisant des formules du type (3.69), avec des spineurs normalisés selon $\bar{U}U = 2m$. En effet, prenant

$$\begin{aligned} \bar{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \left[\left[T_\mu \cosh \chi \cos \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sinh \chi \left[Z_\mu \cos \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma_1 Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \right] - 2m (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} T_\mu \sin \frac{\theta}{2} \\ \bar{U}_{4\sigma_4} \gamma_\mu U_{2\sigma_2} &= 2m \delta_{\sigma_4, \sigma_2} \left[\left[T_\mu \cosh \chi \cos \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sinh \chi \left[-Z_\mu \cos \frac{\theta}{2} + (-X + 2i\sigma_2 Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \right] - 2(2\sigma_2) m \delta_{\sigma_4, -\sigma_2} T_\mu \sin \frac{\theta}{2} \\ \bar{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{2\sigma_2} &= 2m \delta_{\sigma_3, \sigma_2} \left[\left[T_\mu \cosh \chi \sin \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sinh \chi \left[-Z_\mu \sin \frac{\theta}{2} + (X - 2i\sigma_2 Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \right] + 2(2\sigma_2) m \delta_{\sigma_3, -\sigma_2} T_\mu \cos \frac{\theta}{2} \\ \bar{U}_{4\sigma_4} \gamma_\mu U_{1\sigma_1} &= -2m \delta_{\sigma_4, \sigma_1} \left[\left[T_\mu \cosh \chi \sin \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sinh \chi \left[Z_\mu \sin \frac{\theta}{2} - (X + 2i\sigma_1 Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \right] - 2(2\sigma_1) m \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} T_\mu \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

et effectuant les produits scalaires appropriés tout en tenant compte de $1 + 4\sigma_1\sigma_2 = 2\delta_{\sigma_2, \sigma_1}$, on trouve

6. C. Møller, Ann. d. Physik 14, 568 (1932).

7. Le signe “-” entre les deux termes de l’amplitude provient du fait que le passage de l’un à l’autre implique l’échange de deux fermions.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 4m^2 \left[\cosh \chi \cos \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_3, \sigma_1} - (2\sigma_1) \delta_{\sigma_3, -\sigma_1} \sin \frac{\theta}{2} \right] \left[\cosh \chi \cos \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_4, \sigma_2} \right. \\
 &\quad \left. - (2\sigma_2) \delta_{\sigma_4, -\sigma_2} \sin \frac{\theta}{2} \right] + 4m^2 \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \delta_{\sigma_4, \sigma_2} \sinh^2 \chi \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\delta_{\sigma_2, \sigma_1} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 X_2 &= -4m^2 \left[\cosh \chi \sin \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_4, \sigma_1} + (2\sigma_1) \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} \cos \frac{\theta}{2} \right] \left[\cosh \chi \sin \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_3, \sigma_2} \right. \\
 &\quad \left. + (2\sigma_2) \cos \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_3, \sigma_2} \right] - 4m^2 \delta_{\sigma_4, \sigma_1} \delta_{\sigma_3, \sigma_2} \sinh^2 \chi \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\delta_{\sigma_2, \sigma_1} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

On en déduit les expressions des amplitudes $T_m(\sigma_1, \sigma_2, ;, \sigma_3, \sigma_4)$ du tableau V.

$$\begin{aligned}
 T_m(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) &= T_m(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) = \frac{4}{\beta^2} \left[\frac{1 + \beta^2}{\sin^2 \theta} - \frac{2m^2}{s} \right] \\
 T_m(\uparrow, \uparrow; \downarrow, \downarrow) &= T_m(\downarrow, \downarrow; \uparrow, \uparrow) = \frac{8m^2}{s\beta^2} \\
 T_m(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) &= T_m(\uparrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = -T_m(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \uparrow) = -T_m(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) \\
 &= -T_m(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) = -T_m(\downarrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) = T_m(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \downarrow) = T_m(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) \\
 &= -\frac{4m \cos \theta}{\sqrt{s} \beta^2 \sin \theta} \\
 T_m(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) &= T_m(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1 + \beta^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 2 \right] \\
 T_m(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) &= T_m(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1 + \beta^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} - 2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Tableau V - Amplitudes d'hélicité de la diffusion Møller

A titre de vérification de ces formules, nous proposons au lecteur de retrouver l'expression bien connue⁸ de la somme des carrés des amplitudes T_m (obtenue par un calcul ordinaire de trace) :

$$\sum_{\sigma_i} |T_m|^2 = 16 \left(\frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \right)^2 \left\{ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)^2 \left[1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right] \right\} \tag{4.37}$$

8. Voir par exemple, V. Berestetski, E. Lifchitz, L. Pitayevski, "Electrodynamique Quantique", Cours de Physique Théorique de L. Landau et E. Lifchitz, Tome 4, § 81, Ed. Librairie du Globe et Ed. Mir (1989).

4.7 Amplitudes d'hélicité de $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \mu^- + \mu^+$

Ce processus de production de trois leptons (“trident”) par collision électron-photon, dont une paire muon μ^- – anti-muon μ^+ , sera ici envisagé du seul point de vue de l’Electrodynamique Quantique, excluant ainsi un échange possible de la particule Z ou la production de particule (hormis un photon) ou de résonance se désintégrant ensuite en une paire $\mu^- \mu^+$. Considéré à l’ordre le plus bas vis-à-vis de la constante électromagnétique α , il est décrit par les diagrammes de Feynman de la figure 4.4. Cette figure contient deux séries de diagrammes, représentant chacune une voie possible pour ce processus. La première série (a) se rapporte à “l’émission” par l’électron d’un photon virtuel du genre espace, conduisant au sous-processus $\gamma + \gamma^* \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Dans la seconde série (b) apparaît, comme sous-processus, une diffusion Compton virtuelle $\gamma + e \rightarrow \gamma^* + e$, où le photon virtuel émis est cette fois du genre temps, ce photon “lourd” se “désintégrant” par la suite en une paire $\mu^- \mu^+$.

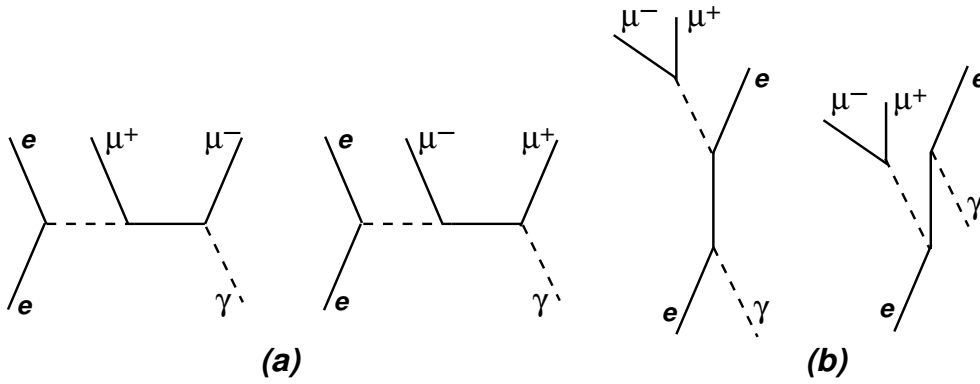


FIGURE 4.4 – Diagrammes de Feynman pour $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \mu^- + \mu^+$, sans échange de Z , ni production de résonance vectorielle

Dans ce qui suit, les amplitudes d’hélicité dudit processus seront calculées uniquement dans le cas des masses nulles, en utilisant le couplage d’hélicité symétrique pour l’état final et le couplage en voie s pour l’état initial. L’amplitude générique est la somme des amplitudes correspondant aux diagrammes (a) et (b) respectivement :

$$\begin{aligned}
 T_{\text{trident}} &= \epsilon_2^\mu [T_\mu^a + T_\mu^b], \quad \text{avec} \\
 T_\mu^a &= -\frac{\bar{U}_3 \gamma^\nu U_1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{U}_4 T_{\mu\nu}^a V_5, \quad T_\mu^b = -\frac{\bar{U}_4 \gamma^\nu V_5}{(p_4 + p_5)^2} \bar{U}_3 T_{\mu\nu}^b U_1, \quad \text{où} \\
 T_{\mu\nu}^a &= \left[\frac{p_{4\mu}}{p_2 \cdot p_4} - \frac{p_{5\mu}}{p_2 \cdot p_5} \right] \gamma_\nu - \frac{1}{2p_2 \cdot p_4} \gamma_\mu \gamma(p_2) \gamma_\nu + \frac{1}{2p_2 \cdot p_5} \gamma_\nu \gamma(p_2) \gamma_\mu, \\
 T_{\mu\nu}^b &= \left[\frac{p_{3\mu}}{p_2 \cdot p_3} - \frac{p_{1\mu}}{p_2 \cdot p_1} \right] \gamma_\nu - \frac{1}{2p_2 \cdot p_3} \gamma_\mu \gamma(p_2) \gamma_\nu - \frac{1}{2p_2 \cdot p_1} \gamma_\nu \gamma(p_2) \gamma_\mu
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

La constante de couplage $e^3 = (4\pi\alpha)^{3/2}$ a été extraite. Les indices sont attribués ainsi : indice 1 pour l’électron incident, indices 2 et μ pour le photon réel incident, indice 3 pour l’électron émergent, indice 4 pour le muon μ^- , indice 5 pour son anti-particule μ^+ . L’électron incident est supposé se propager selon l’axe Z du référentiel du centre de masse de la réaction, et le photon incident, en sens inverse. Par conséquent, on a

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T + Z], \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - Z], \quad \epsilon_2^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda X - iY], \quad \text{où}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4 + p_5)^2$$

Nous utiliserons la décomposition

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu = g_{\mu\alpha} \gamma_\nu - g_{\mu\nu} \gamma_\alpha + g_{\alpha\nu} \gamma_\mu - i \epsilon_{\mu\alpha\nu\omega} \gamma^\omega \gamma_5$$

pour exprimer les tenseurs (4.38) sous la forme

$$T_{\mu\nu}^a = A_{\mu\nu\alpha}^a \gamma^\alpha + i B_{\mu\nu\alpha}^a \gamma^\alpha \gamma_5, \quad T_{\mu\nu}^b = A_{\mu\nu\alpha}^b \gamma^\alpha + i B_{\mu\nu\alpha}^b \gamma^\alpha \gamma_5, \quad \text{avec}$$

$$A_{\mu\nu\alpha}^a = \left[\frac{p_{4\mu}}{p_2 \cdot p_4} - \frac{p_{5\mu}}{p_2 \cdot p_5} \right] g_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_5} - \frac{1}{p_2 \cdot p_4} \right] [p_{2\mu} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} p_{2\alpha} + p_{2\nu} g_{\mu\alpha}]$$

$$B_{\mu\nu\alpha}^a = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_5} + \frac{1}{p_2 \cdot p_4} \right] \epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} p_2^\omega$$

$$A_{\mu\nu\alpha}^b = \left[\frac{p_{3\mu}}{p_2 \cdot p_3} - \frac{p_{1\mu}}{p_2 \cdot p_1} \right] g_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_1} + \frac{1}{p_2 \cdot p_3} \right] [p_{2\mu} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} p_{2\alpha} + p_{2\nu} g_{\mu\alpha}]$$

$$B_{\mu\nu\alpha}^b = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_3} - \frac{1}{p_2 \cdot p_1} \right] \epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} p_2^\omega$$

Supposant nulles les masses des leptons, on peut utiliser les formules suivantes⁹

$$V_5 = \gamma_5 U_5 = (2\sigma_5) U_5$$

$$\bar{U}_\ell \gamma^\mu U_k = \delta_{\sigma_\ell \sigma_k} \sqrt{(2E_\ell)(2E_k)} G_{\ell k}^\mu(\sigma_k), \quad \text{avec}$$

$$G_{\ell k}^\mu(\sigma) = e^{i\sigma(\varphi_\ell - \varphi_k)} \cos \frac{\theta_\ell}{2} \cos \frac{\theta_k}{2} [T + Z]^\mu + e^{-i\sigma(\varphi_\ell - \varphi_k)} \sin \frac{\theta_\ell}{2} \sin \frac{\theta_k}{2} [T - Z]^\mu \\ + e^{-i\sigma(\varphi_\ell + \varphi_k)} \sin \frac{\theta_\ell}{2} \cos \frac{\theta_k}{2} [X + i(2\sigma)Y]^\mu + e^{i\sigma(\varphi_\ell + \varphi_k)} \cos \frac{\theta_\ell}{2} \sin \frac{\theta_k}{2} [X - i(2\sigma)Y]^\mu$$

On notera que

$$G_{nm}(\sigma') \cdot G_{\ell k}(\sigma) = 2 \delta_{\sigma', \sigma} H_{n\ell}(\sigma) H_{mk}^*(\sigma) + 2 \delta_{\sigma', -\sigma} H_{m\ell}(\sigma) H_{nk}^*(\sigma), \quad \text{où} \\ H_{n\ell}(\sigma) = e^{i\sigma(\varphi_n - \varphi_\ell)} \cos \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_\ell}{2} - e^{-i\sigma(\varphi_n - \varphi_\ell)} \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_\ell}{2} = -H_{\ell n}(\sigma), \quad \text{avec} \\ |H_{n\ell}(\sigma)|^2 = \sin^2 \frac{\theta_{n\ell}}{2}$$

① Amplitudes relatives à la série de diagrammes (a)

Ecrivons

$$T^a = \epsilon_2^\mu T_\mu^a = \frac{1}{2p_1 \cdot p_3} \sqrt{(2E_1)(2E_3)(2E_4)(2E_5)} \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \delta_{\sigma_4, \sigma_5} (2\sigma_4) X_a, \quad (4.39)$$

$$\text{avec} \quad X_a = \epsilon_2^\mu G_{31}^\nu(\sigma_1) G_{45}^\alpha(\sigma_4) [A_{\mu\nu\alpha}^a + i(2\sigma_4) B_{\mu\nu\alpha}^a],$$

9. Voir section 3.5.

$$\begin{aligned}
 \text{soit } X_a &= \left[\frac{\epsilon_2 \cdot p_4}{p_2 \cdot p_4} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_5}{p_2 \cdot p_5} \right] G_{45}(\sigma_4) \cdot G_{31}(\sigma_1) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_5} - \frac{1}{p_2 \cdot p_4} \right] [p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) - \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4)] \\
 &+ (2\sigma_4) \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} \epsilon_2^\mu p_2^\omega G_{31}^\nu(\sigma_1) G_{45}^\alpha(\sigma_4) \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_4} + \frac{1}{p_2 \cdot p_5} \right]
 \end{aligned}$$

Comme

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} \epsilon_2^\mu p_2^\omega = -i\lambda [p_{2\nu} \epsilon_{2\alpha} - p_{2\alpha} \epsilon_{2\nu}]$$

X_a peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 X_a &= \left[\frac{\epsilon_2 \cdot p_4}{p_2 \cdot p_4} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_5}{p_2 \cdot p_5} \right] G_{45}(\sigma_4) \cdot G_{31}(\sigma_1) \\
 &+ [p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) - \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4)] \left[\frac{\delta_{\lambda, 2\sigma_4}}{p_2 \cdot p_5} - \frac{\delta_{\lambda, -2\sigma_4}}{p_2 \cdot p_4} \right]
 \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_1$, on a

$$p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) = \sqrt{s} \cos \frac{\theta_3}{2} e^{i\sigma_1 \varphi_3}, \quad \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) = -\sqrt{2} \lambda \delta_{\lambda, 2\sigma_1} \sin \frac{\theta_3}{2} e^{-i\sigma_1 \varphi_3}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) &= \sqrt{s} \cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_4(\varphi_4 - \varphi_5)}, \\
 \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) &= -\sqrt{2} \lambda \left[e^{-i\sigma_4(\varphi_4 + \varphi_5)} \sin \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, 2\sigma_4} + e^{i\sigma_4(\varphi_4 + \varphi_5)} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, -2\sigma_4} \right], \\
 \epsilon_2 \cdot p_k &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} E_k \sin \theta_k e^{-i\lambda \varphi_k}, \quad p_2 \cdot p_k = \sqrt{s} E_k \cos^2 \frac{\theta_k}{2}
 \end{aligned}$$

Calculons alors

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) - \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) = -\lambda \sqrt{2s} \cos \frac{\theta_3}{2} e^{i\sigma_1 \varphi_3} \times \\
 &\times \left[e^{-i\sigma_4(\varphi_4 + \varphi_5)} \sin \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, 2\sigma_4} + e^{i\sigma_4(\varphi_4 + \varphi_5)} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, -2\sigma_4} \right] + \lambda \sqrt{2s} \times \\
 &\times \delta_{\lambda, 2\sigma_1} \sin \frac{\theta_3}{2} e^{-i\sigma_1 \varphi_3} \cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_4(\varphi_4 - \varphi_5)}
 \end{aligned}$$

Utilisant la décomposition

$$Q_1 = \delta_{\sigma_4, \sigma_1} Q_1(\sigma_4 = \sigma_1) + \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} Q_1(\sigma_4 = -\sigma_1),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -\lambda \sqrt{2s} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_1} \left\{ \cos \frac{\theta_3}{2} e^{i\sigma_1 \varphi_3} \left[e^{-i\sigma_1(\varphi_4 + \varphi_5)} \sin \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, 2\sigma_1} \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left. e^{i\sigma_1(\varphi_4 + \varphi_5)} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, -2\sigma_1} \right] - \delta_{\lambda, 2\sigma_1} \sin \frac{\theta_3}{2} e^{-i\sigma_1 \varphi_3} \cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_1(\varphi_4 - \varphi_5)} \right\} \right. \\
 &+ \left. \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} \left\{ \cos \frac{\theta_3}{2} e^{i\sigma_1 \varphi_3} \left[e^{i\sigma_1(\varphi_4 + \varphi_5)} \sin \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, -2\sigma_1} + e^{-i\sigma_1(\varphi_4 + \varphi_5)} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} \delta_{\lambda, 2\sigma_1} \right] \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. -\delta_{\lambda,2\sigma_1} \sin \frac{\theta_3}{2} e^{-i\sigma_1\varphi_3} \cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{-i\sigma_1(\varphi_4-\varphi_5)} \right\} \Bigg], \text{ soit} \\
 Q_1 = & -\lambda \sqrt{2s} \left[\left[\delta_{\sigma_4,\sigma_1} \left\{ \delta_{\lambda,-2\sigma_1} \cos \frac{\theta_3}{2} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta_{\lambda,2\sigma_1} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{-i\sigma_1\varphi_5} H_{43}(\sigma_1) \right\} + \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \left\{ \delta_{\lambda,-2\sigma_1} \cos \frac{\theta_3}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \sin \frac{\theta_4}{2} e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta_{\lambda,2\sigma_1} \cos \frac{\theta_4}{2} e^{-i\sigma_1\varphi_4} H_{53}(\sigma_1) \right\} \right] \Bigg]
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 Q_1 \left[\frac{\delta_{\lambda,2\sigma_4}}{p_2 \cdot p_5} - \frac{\delta_{\lambda,-2\sigma_4}}{p_2 \cdot p_4} \right] = & -\lambda \sqrt{2s} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_5} \left[\delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \delta_{\lambda,-2\sigma_1} \cos \frac{\theta_3}{2} \cos \frac{\theta_5}{2} \sin \frac{\theta_4}{2} e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta_{\sigma_4,\sigma_1} \delta_{\lambda,2\sigma_1} \cos \frac{\theta_5}{2} e^{-i\sigma_1\varphi_5} H_{43}(\sigma_1) \right] - \frac{1}{p_2 \cdot p_4} \left[\delta_{\sigma_4,\sigma_1} \delta_{\lambda,-2\sigma_1} \cos \frac{\theta_3}{2} \cos \frac{\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \delta_{\lambda,2\sigma_1} \cos \frac{\theta_4}{2} e^{-i\sigma_1\varphi_4} H_{53}(\sigma_1) \right] \right] = Q'_1 \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left[\frac{\epsilon_2 \cdot p_4}{p_2 \cdot p_4} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_5}{p_2 \cdot p_5} \right] G_{45}(\sigma_4) \cdot G_{31}(\sigma_1) = \lambda \sqrt{2} \left[\frac{E_4 \sin \theta_4 e^{-i\lambda\varphi_4}}{p_2 \cdot p_4} - \frac{E_5 \sin \theta_5 e^{-i\lambda\varphi_5}}{p_2 \cdot p_5} \right] \times \\
 & \times \left[\delta_{\sigma_4,\sigma_1} \sin \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_1\varphi_5} H_{43}(\sigma_1) + \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \sin \frac{\theta_4}{2} e^{i\sigma_1\varphi_4} H_{53}(\sigma_1) \right]
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{E_4 \sin \theta_4 e^{-i\lambda\varphi_4}}{p_2 \cdot p_4} - \frac{E_5 \sin \theta_5 e^{-i\lambda\varphi_5}}{p_2 \cdot p_5} = & \frac{2}{\sqrt{s}} \left[\tan \frac{\theta_4}{2} e^{-i\lambda(\varphi_4-\varphi_5)/2} - \tan \frac{\theta_5}{2} e^{i\lambda(\varphi_4-\varphi_5)/2} \right] \times \\
 & \times e^{-i\lambda(\varphi_4+\varphi_5)/2} = -\frac{2}{\sqrt{s}} e^{-i\lambda(\varphi_4+\varphi_5)/2} \frac{H_{45}(\lambda/2)}{\cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2}}, \quad \text{d'où} \\
 Q_2 = & -\frac{2\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{s}} \frac{e^{-i\lambda(\varphi_4+\varphi_5)/2}}{\cos \frac{\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_5}{2}} \left[\delta_{\lambda,2\sigma_1} H_{45}(\sigma_1) + \delta_{\lambda,-2\sigma_1} H_{45}^*(\sigma_1) \right] \times \\
 & \times \left[\delta_{\sigma_4,\sigma_1} \sin \frac{\theta_5}{2} e^{i\sigma_1\varphi_5} H_{43}(\sigma_1) + \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \sin \frac{\theta_4}{2} e^{i\sigma_1\varphi_4} H_{53}(\sigma_1) \right] \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{s}}$, $c_i = \cos \frac{\theta_i}{2}$, $s_i = \sin \frac{\theta_i}{2}$, pour $i = 3, 4, 5$.
Compte tenu des expressions (4.40) et (4.41), l'amplitude X_a sera écrite sous la forme

$$X_a = \frac{2\sqrt{2}(2\sigma_1)}{\sqrt{s}} X'_a, \quad \text{avec}$$

$$X'_a = \delta_{\sigma_4,\sigma_1} \delta_{\lambda,2\sigma_1} X_1 + \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \delta_{\lambda,2\sigma_1} X_2 + \delta_{\sigma_4,\sigma_1} \delta_{\lambda,-2\sigma_1} X_3 + \delta_{\sigma_4,-\sigma_1} \delta_{\lambda,-2\sigma_1} X_4 \quad (4.42)$$

On trouve

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{e^{-i\sigma_1\varphi_5}}{x_5 c_5 c_4} H_{43}(\sigma_1) \left[c_4 - x_5 s_5 e^{i\sigma_1(\varphi_5-\varphi_4)} H_{45}(\sigma_1) \right] \\
 X_2 &= -\frac{e^{-i\sigma_1\varphi_4}}{x_4 c_4 c_5} H_{53}(\sigma_1) \left[c_5 + x_4 s_4 e^{i\sigma_1(\varphi_4-\varphi_5)} H_{45}(\sigma_1) \right] \\
 X_3 &= -\frac{s_5 e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)}}{x_4 c_4 c_5} \left[c_3 c_5 - x_4 e^{i\sigma_1(\varphi_5-\varphi_3)} H_{45}^*(\sigma_1) H_{43}(\sigma_1) \right] \\
 X_4 &= \frac{s_4 e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)}}{x_5 c_5 c_4} \left[c_3 c_4 + x_5 e^{i\sigma_1(\varphi_4-\varphi_3)} H_{45}^*(\sigma_1) H_{53}(\sigma_1) \right]
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

② Amplitudes relatives à la série de diagrammes (b)

A part quelques petites variantes, le calcul des amplitudes des diagrammes (b) est similaire au précédent. Ecrivaint

$$T^b = \epsilon_2^\mu T_\mu^b = -\frac{1}{2p_4 \cdot p_5} \sqrt{(2E_1)(2E_3)(2E_4)(2E_5)} \delta_{\sigma_3, \sigma_1} \delta_{\sigma_4, \sigma_5}(2\sigma_4) X_b, \tag{4.44}$$

$$\text{où } X_b = \epsilon_2^\mu G_{31}^\alpha(\sigma_1) G_{45}^\nu(\sigma_4) [A_{\mu\nu\alpha}^b + i(2\sigma_1) B_{\mu\nu\alpha}^b],$$

$$\begin{aligned}
 \text{soit } X_b &= \frac{\epsilon_2 \cdot p_3}{p_2 \cdot p_3} G_{45}(\sigma_4) \cdot G_{31}(\sigma_1) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_3} + \frac{1}{p_2 \cdot p_1} \right] [p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) - \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4)] \\
 &+ (2\sigma_1) \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} \epsilon_2^\mu p_2^\omega G_{31}^\alpha(\sigma_1) G_{45}^\nu(\sigma_4) \left[\frac{1}{p_2 \cdot p_3} - \frac{1}{p_2 \cdot p_1} \right]
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 X_b &= \frac{\epsilon_2 \cdot p_3}{p_2 \cdot p_3} G_{45}(\sigma_4) \cdot G_{31}(\sigma_1) + \\
 &+ \left[\frac{\delta_{\lambda, 2\sigma_1}}{p_2 \cdot p_1} + \frac{\delta_{\lambda, -2\sigma_1}}{p_2 \cdot p_3} \right] [p_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) \epsilon_2 \cdot G_{45}(\sigma_4) - \epsilon_2 \cdot G_{31}(\sigma_1) p_2 \cdot G_{45}(\sigma_4)]
 \end{aligned}$$

on obtient X_b sous la forme

$$X_b = \frac{2\sqrt{2}(2\sigma_1)}{\sqrt{s}} X'_b, \quad \text{avec}$$

$$X'_b = \delta_{\sigma_4, \sigma_1} \delta_{\lambda, 2\sigma_1} Y_1 + \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} \delta_{\lambda, 2\sigma_1} Y_2 + \delta_{\sigma_4, \sigma_1} \delta_{\lambda, -2\sigma_1} Y_3 + \delta_{\sigma_4, -\sigma_1} \delta_{\lambda, -2\sigma_1} Y_4 \tag{4.45}$$

et

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{e^{-i\sigma_1\varphi_5}}{c_3} H_{43}(\sigma_1) \left[c_3 c_5 + s_3 s_5 e^{2i\sigma_1(\varphi_5-\varphi_3)} \right] \\
 Y_2 &= \frac{e^{-i\sigma_1\varphi_4}}{c_3} H_{53}(\sigma_1) \left[c_3 c_4 + s_3 s_4 e^{2i\sigma_1(\varphi_4-\varphi_5)} \right] \\
 Y_3 &= \frac{s_5 e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)}}{x_3 c_3} \left[c_4 - x_3 s_3 e^{i\sigma_1(\varphi_3-\varphi_4)} H_{43}(\sigma_1) \right] \\
 Y_4 &= \frac{s_4 e^{i\sigma_1(\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5)}}{x_3 c_3} \left[c_5 - x_3 s_3 e^{i\sigma_1(\varphi_3-\varphi_5)} H_{53}(\sigma_1) \right]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

③ Formules de cinématique

Les variables énergies et angles des particules finales (de masses nulles) considérées ici sont relatives au référentiel (T, X, Y, Z) du centre de masse de la réaction. Elles satisfont les relations

$$\begin{aligned}
 \sqrt{s} &= E_3 + E_4 + E_5 \\
 0 &= E_3 \cos \theta_3 + E_4 \cos \theta_4 + E_5 \cos \theta_5 \\
 0 &= E_3 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 + E_4 \sin \theta_4 \cos \varphi_4 + E_5 \sin \theta_5 \cos \varphi_5 \\
 0 &= E_3 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 + E_4 \sin \theta_4 \sin \varphi_4 + E_5 \sin \theta_5 \sin \varphi_5
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

qui montrent que les énergies des particules doivent s'exprimer en fonctions des variables angulaires. Dans ledit référentiel, les 3-impulsions des particules finales sont dans un même plan. Notant $\theta_{k\ell}$ l'angle, inférieur à π , entre les 3-impulsions des particules k et ℓ , on a $\theta_{34} + \theta_{35} + \theta_{45} = 2\pi$, on trouve ($x_k = 2E_k/\sqrt{s}$)

$$x_3 = 1 - \cot \frac{\theta_{34}}{2} \cot \frac{\theta_{35}}{2}, \quad x_4 = 1 - \cot \frac{\theta_{34}}{2} \cot \frac{\theta_{45}}{2}, \quad x_5 = 1 - \cot \frac{\theta_{35}}{2} \cot \frac{\theta_{45}}{2} \tag{4.48}$$

Il est utile de rappeler que

$$\cos \theta_{k\ell} = \cos \theta_k \cos \theta_\ell + \sin \theta_k \sin \theta_\ell \cos(\varphi_k - \varphi_\ell) \tag{4.49}$$

Combinant les deux premières relations de (4.47), on trouve aussi

$$\begin{aligned}
 x_3 c_3^2 + x_4 c_4^2 + x_5 c_5^2 &= 1, \quad x_3 s_3^2 + x_4 s_4^2 + x_5 s_5^2 = 1, \quad \text{et} \\
 x_3 + x_4 + x_5 &= 2
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Les carrés des masses invariantes $W_{k\ell}^2 = (p_k + p_\ell)^2$ et le transfert $t = -(p_1 - p_3)^2$ s'expriment comme suit

$$\begin{aligned}
 t &= s x_3 s_3^2, \quad W_{34}^2 = s x_3 x_4 \sin^2 \frac{\theta_{34}}{2} = s(1 - x_5), \\
 W_{35}^2 &= s x_3 x_5 \sin^2 \frac{\theta_{35}}{2} = s(1 - x_4), \quad W_{45}^2 = s x_4 x_5 \sin^2 \frac{\theta_{45}}{2} = s(1 - x_3)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

④ **Taux d'interaction**

L'amplitude totale du processus s'écrit

$$T = T_a + T_b = 2\sqrt{2}s(2\sigma_4)(2\sigma_1)\delta_{\sigma_3,\sigma_1}\delta_{\sigma_5,\sigma_4}\sqrt{x_3x_4x_5}\left[\frac{X'_a}{t} - \frac{X'_b}{W_{45}^2}\right]$$

et le taux d'interaction correspondant est

$$\mathcal{I} = \sum_{\sigma_k,\lambda} |T|^2 = 16s \sum_{i=1}^4 |Z_i|^2, \quad \text{avec} \quad Z_i = x_3x_4x_5 \left[\frac{X_i}{t} - \frac{Y_i}{W_{45}^2} \right]$$

En utilisant les formules de cinématique établies précédemment, on trouve

$$\begin{aligned} x_3x_4x_5 |X_1|^2 &= \frac{1}{x_4c_4^2x_5c_5^2} x_3s_3^2(1-x_5)^2 \\ x_3x_4x_5 |X_2|^2 &= \frac{1}{x_4c_4^2x_5c_5^2} x_3s_3^2(1-x_4)^2 \\ x_3x_4x_5 |X_3|^2 &= \frac{1}{x_4c_4^2x_5c_5^2} x_3s_3^2x_5^2s_5^4 \\ x_3x_4x_5 |X_4|^2 &= \frac{1}{x_4c_4^2x_5c_5^2} x_3s_3^2x_4^2s_4^4, \\ x_3x_4x_5 |Y_1|^2 &= \frac{1}{x_3c_3^2}(1-x_3)(1-x_5)^2 \\ x_3x_4x_5 |Y_2|^2 &= \frac{1}{x_3c_3^2}(1-x_3)(1-x_4)^2 \\ x_3x_4x_5 |Y_3|^2 &= \frac{1}{x_3c_3^2}(1-x_3)x_5^2s_5^4 \\ x_3x_4x_5 |Y_4|^2 &= \frac{1}{x_3c_3^2}(1-x_3)x_4^2s_4^4 \end{aligned} \tag{4.52}$$

On en déduit les taux d'interaction correspondant aux diagrammes (a) et (b) pris séparément :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a &= \frac{16}{t^2} \times t [(1-x_4)^2 + (1-x_5)^2 + x_4^2s_4^4 + x_5^2s_5^4] \times \frac{1}{x_4c_4^2x_5c_5^2} \\ \mathcal{I}_b &= \frac{16}{W_{45}^4} \times W_{45}^2 [(1-x_4)^2 + (1-x_5)^2 + x_4^2s_4^4 + x_5^2s_5^4] \times \frac{1}{x_3c_3^2} \end{aligned} \tag{4.53}$$

Nous ferons ici trois commentaires. D'après (4.53), le taux \mathcal{I}_a est proportionnel à $1/t$ et non pas à $1/t^2$. Ceci pouvait être prévu en considérant la formule de factorisation (1.139) du chapitre 1. En effet, pour un vertex leptonique et dans le cas des masses nulles, on trouve $L = 8m^2 = 0$ et $T = 2t$, ce qui fait tomber une puissance de t au dénominateur de la formule (1.142). Ensuite, on observe une grande similarité entre \mathcal{I}_a et \mathcal{I}_b . Ceci n'est pas étonnant car les deux séries de diagrammes ont la même structure et l'on passe des premiers aux seconds en effectuant les substitutions (compte tenu des masses nulles, donc égales) des 4-vecteurs :

$$p_1 \rightarrow -p_5, \quad p_2 \rightarrow p_2, \quad p_3 \rightarrow p_4, \quad p_4 \rightarrow p_3, \quad p_5 \rightarrow -p_1 \quad (4.54)$$

Or, le taux d'interaction des diagrammes (a), exprimé en fonction des invariants de la réaction, admet un prolongement analytique, et celui-ci peut être mis en oeuvre pour obtenir \mathcal{I}_b par ladite substitution. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a &= \frac{8}{(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_5)} [(p_3 \cdot p_5)^2 + (p_3 \cdot p_4)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2 + (p_1 \cdot p_5)^2] \\ &\rightarrow \frac{8}{(p_5 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1)} [(p_4 \cdot p_1)^2 + (p_4 \cdot p_3)^2 + (p_5 \cdot p_3)^2 + (p_5 \cdot p_1)^2] \\ &= \frac{16}{W_{45}^2 x_3 c_3^2} [x_4^2 s_4^4 + (1 - x_5)^2 + (1 - x_4)^2 + x_5^2 s_5^4] = \mathcal{I}_b \end{aligned}$$

On note en passant que ce prolongement montre que \mathcal{I}_b est proportionnel à $1/W_{45}^2$ et non pas à $1/W_{45}^4$, ce qui pouvait aussi être prévu au regard d'une formule de factorisation concernant les processus à échange d'un photon du genre temps.

Enfin, on vérifie que l'expression de \mathcal{I}_a est bien conforme à la formule (4.94) du Complément I. Dans cette formule, faisons d'abord les changements $1 \rightarrow 2$, tout en posant $p_2^2 = -t_1 \neq 0$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 5$, $t_2 = t$. Puis prenons $F_{\mu\rho} = -\left[g_{\mu\rho} + \frac{p_{2\mu}p_{2\rho}}{t_1}\right]$, $G_{\nu\sigma} = \text{Tr}\gamma(p_1)\gamma_\nu\gamma(p_3)\gamma_\sigma$ et posons finalement $t_1 = 0$, $m = 0$. On obtient

$$X_G = -4G \left\{ ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2tW_{45}^2}{ab} \right\} + \frac{16t}{ab} [G_{44} + G_{55}]$$

Or, $G = -4t$, $G_{44} = 8(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_4) = 2s^2 x_4 s_4^2 (1 - x_5)$, $G_{55} = 8(p_1 \cdot p_5)(p_3 \cdot p_5) = 2s^2 x_5 s_5^2 (1 - x_4)$, $a = s x_4 c_4^2$, $b = s x_5 c_5^2$. D'où

$$\frac{1}{t^2} X_G = \frac{16}{t x_4 c_4^2 x_5 c_5^2} [x_4^2 c_4^2 + x_5^2 c_5^4 - 2x_3 s_3^2 (1 - x_3) + 2x_4 s_4^2 (1 - x_5) + 2x_5 s_5^2 (1 - x_4)]$$

Mais

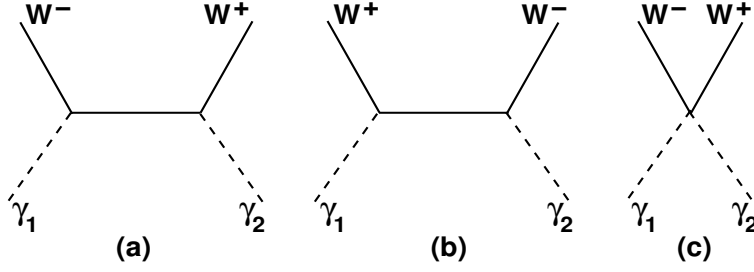
$$\begin{aligned} x_4^2 c_4^2 + x_5^2 c_5^4 - 2x_3 s_3^2 (1 - x_3) + 2x_4 s_4^2 (1 - x_5) + 2x_5 s_5^2 (1 - x_4) &= x_4^2 s_4^4 - 2x_4^2 c_4^2 + x_4^2 + x_5^2 s_5^4 \\ &\quad - 2x_5^2 s_5^2 + x_5^2 - 2x_3 s_3^2 (1 - x_3) + 2x_4 s_4^2 (1 - x_5) + 2x_5 s_5^2 (1 - x_4) \\ &= x_4^2 s_4^4 + x_5^2 s_5^4 - 2x_3 s_3^2 (1 - x_3) + 2x_4 s_4^2 (1 - x_5 - x_4) + 2x_5 s_5^2 (1 - x_4 - x_5) + x_4^2 + x_5^2 \\ &\quad = x_4^2 s_4^4 + x_5^2 s_5^4 - 2(1 - x_3)[x^3 s_3^2 + x_4 s_4^2 + x_5 s_5^2] + x_4^2 + x_5^2 \\ &= x_4^2 s_4^4 + x_5^2 s_5^4 - 2(1 - x_3) + x_4^2 + x_5^2 = x_4^2 s_4^4 + x_5^2 s_5^4 + 1 - 2x_4 + 1 - 2x_5 + x_4^2 + x_5^2 \\ &= x_4^2 s_4^4 + x_5^2 s_5^4 + (1 - x_4)^2 + (1 - x_5)^2 \end{aligned}$$

et l'on a bien $X_G/t^2 = \mathcal{I}_a$.

Disons quelques mots sur le terme d'interférence $\mathcal{I}_{ab} = \sum T_a T_b^*$ entre les amplitudes des diagrammes (a) et (b). Il apparaît que ce terme est antisymétrique dans l'échange des particules 4 (μ^-) et 5 (μ^+), même en tenant compte de leur masse. La conséquence est qu'il donne une contribution nulle à la section efficace totale du processus, car l'intégration sur les variables des dites particules est symétrique vis-à-vis de cet échange. Ce fait était prévisible pour la raison suivante. Le taux d'interaction total peut tout aussi bien être calculé comme la somme des carrés

des amplitudes correspondant chacune à un état du système particule-antiparticule $(4, 5)$ associé à un moment orbital L et à un spin total S donnés. Un tel état, neutre en charge, a une C-parité bien définie, égale à $C = (-1)^{L+S}$. Or, dans les diagrammes (a), la paire $(4, 5)$ est produite par un système de deux photons dont la C-parité totale est $(-1)(-1) = +1$, tandis que dans les diagrammes (b), elle est issue d'un photon virtuel de C-parité égale à -1 . La C-parité étant une grandeur conservée, les états (L, S) impliqués respectivement dans les amplitudes (a) et dans les amplitudes (b) sont donc différents, et l'interférence totale entre les deux séries de diagrammes est donc nulle.

4.8 Amplitudes d'hélicité de $\gamma + \gamma \rightarrow W^- + W^+$ ¹⁰


 FIGURE 4.5 – Diagrammes de Feynman pour $\gamma + \gamma \rightarrow W^- + W^+$

A l'ordre le plus bas suivant α , l'amplitude générique du processus de production d'une paire $W^- W^+$ de bosons vecteurs lourds W par collision photon-photon, décrite principalement par les diagrammes de la figure (4.5), est donnée par

$$\mathcal{M} = 4\pi\alpha \epsilon_3^{*\rho} \epsilon_4^{*\sigma} T_{\rho,\sigma;\mu,\nu} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu,$$

Elle fait intervenir le tenseur de rang 4 :

$$\begin{aligned} T_{\rho,\sigma;\mu,\nu} &= A_{\rho,\sigma;\mu,\nu} + B_{\rho,\sigma;\mu,\nu} + C_{\rho,\sigma;\mu,\nu}, \quad \text{où} \\ A_{\rho,\sigma;\mu,\nu} &= \left[\left[A_{1\mu\rho\omega} + (\kappa - 1) [p_{1\rho} g_{\omega\mu} - p_{1\omega} g_{\rho\mu}] \right] a^{\omega\gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[A_{2\nu\sigma\gamma} + (\kappa - 1) [p_{2\sigma} g_{\gamma\nu} - p_{2\gamma} g_{\sigma\nu}] \right] \right], \\ B_{\rho,\sigma;\mu,\nu} &= \left[\left[B_{1\mu\sigma\omega} + (\kappa - 1) [p_{1\sigma} g_{\omega\mu} - p_{1\omega} g_{\sigma\mu}] \right] b^{\omega\gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[B_{2\nu\rho\gamma} + (\kappa - 1) [p_{2\rho} g_{\gamma\nu} - p_{2\gamma} g_{\rho\nu}] \right] \right], \\ A_{1\mu\rho\omega} &= [2p_3 - p_1]_\mu g_{\rho\omega} + [p_1 - p_3]_\omega g_{\rho\mu} + 2 [p_{1\rho} g_{\omega\mu} - p_{1\omega} g_{\rho\mu}], \\ A_{2\nu\sigma\gamma} &= [2p_4 - p_2]_\nu g_{\sigma\gamma} + [p_2 - p_4]_\gamma g_{\sigma\nu} + 2 [p_{2\sigma} g_{\gamma\nu} - p_{2\gamma} g_{\sigma\nu}], \\ B_{1\mu\sigma\omega} &= [2p_4 - p_1]_\mu g_{\sigma\omega} + [p_1 - p_4]_\omega g_{\sigma\mu} + 2 [p_{1\sigma} g_{\omega\mu} - p_{1\omega} g_{\sigma\mu}], \\ B_{2\nu\rho\gamma} &= [2p_3 - p_2]_\nu g_{\rho\gamma} + [p_2 - p_3]_\gamma g_{\rho\nu} + 2 [p_{2\rho} g_{\gamma\nu} - p_{2\gamma} g_{\rho\nu}], \\ C_{\rho,\sigma;\mu,\nu} &= g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} - 2 g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}, \\ a^{\beta\gamma} &= \frac{1}{m^2 - p^2} \left[g^{\beta\gamma} - \frac{p^\beta p^\gamma}{m^2} \right], \quad p = p_1 - p_3 = p_4 - p_2, \\ b^{\beta\gamma} &= \frac{1}{m^2 - p'^2} \left[g^{\beta\gamma} - \frac{p'^\beta p'^\gamma}{m^2} \right], \quad p' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2. \end{aligned} \tag{4.55}$$

10. J-F Loiseau, "Photoproduction de paires de bosons lourds dans le champ électromagnétique des noyaux", Thèse de 3ème cycle, UPMC, Paris, juin 1973 ; M. Baillargeon, G. Bélanger, F. Boudjema, "Effects of nonstandard trilinear couplings in photon-photon collisions : 1. $\gamma + \gamma \rightarrow W^- + W^+$ ", Nucl. Phys. B500 (1997) 224.

La 4-impulsion et la polarisation de chacune des particules sont :

- $p_1, \epsilon_{1\mu}$ avec l'indice d'hélicité $\lambda_1 = \pm 1$ pour le photon 1 ;
- $p_2, \epsilon_{2\nu}$ avec l'indice d'hélicité $\lambda_2 = \pm 1$ pour le photon 2 ;
- $p_3, \epsilon_{3\rho}$ avec l'indice d'hélicité $\lambda_3 = 0, \pm 1$ pour le boson W^- ;
- $p_4, \epsilon_{4\sigma}$ avec l'indice d'hélicité $\lambda_4 = 0, \pm 1$ pour le boson W^+ ;

Etant massif, le boson vectoriel W dispose d'un troisième état d'hélicité correspondant à $\lambda = 0$. Nous poserons $\epsilon_3^{(0)} = z_3, \epsilon_4^{(0)} = z_4$. Le couplage d'hélicité utilisé est celui de la voie s .

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2} [T + Z], \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - Z] \\
 \epsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_1 X - iY], \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_2 X - iY], \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \frac{1}{2} [1 + \lambda_1 \lambda_2] = \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \\
 p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2} [T + \beta Z'], \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - \beta Z'], \quad Z' = Z \cos \theta + X \sin \theta \\
 \text{Pour } \lambda_{3,4} = \pm 1 : \quad \epsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_3 X' - iY], \quad \epsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_4 X' - iY], \\
 X' &= X \cos \theta - Z \sin \theta \\
 \epsilon_1 \cdot p_3 &= -\epsilon_1 \cdot p_4 = \frac{\lambda_1}{2\sqrt{2}} \beta \sqrt{s} \sin \theta, \quad \epsilon_2 \cdot p_3 = -\epsilon_2 \cdot p_4 = -\frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}} \beta \sqrt{s} \sin \theta \\
 p_1 \cdot \epsilon_3^* &= -p_2 \cdot \epsilon_3^* = -\frac{\lambda_3}{2\sqrt{2}} \sqrt{s} \sin \theta, \quad p_1 \cdot \epsilon_4^* = -p_2 \cdot \epsilon_4^* = \frac{\lambda_4}{2\sqrt{2}} \sqrt{s} \sin \theta \\
 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^* &= -\frac{1}{2} [1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta], \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_4^* = -\frac{1}{2} [1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta] \\
 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^* &= -\frac{1}{2} [1 - \lambda_2 \lambda_3 \cos \theta], \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* = -\frac{1}{2} [1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta] \\
 \text{Pour } \lambda_{3,4} = 0 : \quad \epsilon_3^{(0)} &= z_3 = \frac{\sqrt{s}}{2m} [\beta T + Z'], \quad \epsilon_4^{(0)} = z_4 = \frac{\sqrt{s}}{2m} [\beta T - Z'] \\
 z_3 \cdot z_4 &= \frac{s}{4m^2} (1 + \beta^2) \\
 p_1 \cdot z_3 &= p_2 \cdot z_4 = \frac{s}{4m} [\beta - \cos \theta], \quad p_1 \cdot z_4 = p_2 \cdot z_3 = \frac{s}{4m} [\beta + \cos \theta] \\
 \epsilon_1 \cdot z_3 &= -\epsilon_1 \cdot z_4 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{s}}{2m} \sin \theta, \quad \epsilon_2 \cdot z_3 = -\epsilon_2 \cdot z_4 = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{s}}{2m} \sin \theta \\
 a &= m^2 - (p_1 - p_3)^2 = 2(p_1 \cdot p_3) = 2(p_2 \cdot p_4) = \frac{s}{2} [1 - \beta \cos \theta] \\
 b &= m^2 - (p_1 - p_4)^2 = 2(p_1 \cdot p_4) = 2(p_2 \cdot p_3) = \frac{s}{2} [1 + \beta \cos \theta]
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Bien avant la découverte expérimentale du W en 1983, de nombreux théoriciens avaient déjà étudié certains processus offrant la possibilité de mettre en évidence cette particule, notamment des réactions où apparaissent, en tant que sous-processus, l'effet Compton $\gamma + W^\pm \rightarrow \gamma + W^\pm$ ou même $\gamma + \gamma \rightarrow W^- + W^+$.

Cependant, il semblerait que les amplitudes d'hélicité de $\gamma + \gamma \rightarrow W^- + W^+$ aient été calculées pour la première fois par J-F Loiseau dans sa thèse, soutenue à Paris en 1973¹¹. Dans ce travail, l'auteur a déduit l'amplitude générique en appliquant, selon l'usage, le principe de couplage électromagnétique minimum au Lagrangien libre du boson chargé W , tout en envisageant pour cette particule un moment magnétique anomal κ , ce qui conduit à l'amplitude (4.55) écrite plus haut. Il a montré en particulier que la valeur $\kappa = 1$, qui est en fait celle assignée par la théorie électro-faible actuelle, prémunit la section efficace de toute divergence à très haute énergie¹². C'est cette valeur de κ que nous retenons dans la suite. Outre l'intérêt physique certain que présente ledit processus¹³, le calcul de ses amplitudes d'hélicité est un excellent exercice de manipulation de 4-vecteurs de polarisation et de leurs produits scalaires ! Une liste de définitions et de formules utiles au calcul est donnée dans (4.56).

Le lecteur s'assurera que le tenseur $T_{\rho,\sigma;\mu,\nu}$ est compatible avec l'invariance de jauge, c'est-à-dire qu'il vérifie bien les équations $p_1^\mu T_{\rho,\sigma;\mu,\nu} = 0$, $p_2^\nu T_{\rho,\sigma;\mu,\nu} = 0$, mais à la condition qu'on le projette préalablement sur les polarisations des bosons W^- et W^+ .

La première étape du calcul peut paraître rébarbative mais s'avère rentable. Elle consiste à effectuer les développements des produits tensoriels $A_{1\mu\rho\omega}a^{\omega\gamma}A_{2\nu\sigma\gamma}$ et $B_{1\mu\sigma\omega}b^{\omega\gamma}B_{2\nu\rho\gamma}$, tout en éliminant dans le résultat les termes proportionnels à $p_{1\mu}$, $p_{2\nu}$, $p_{3\rho}$ ou encore $p_{4\sigma}$, car ils ont des projections nulles sur les polarisations des particules vectorielles, celles-ci étant associées aux indices μ , ν , ρ et σ , respectivement¹⁴. Dans cette opération, les tenseurs $g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}$ et $g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}$ du "terme de contact" $C_{\rho,\sigma;\mu,\nu}$ disparaissent, et les termes proportionnels à $1/m^2$ provenant des propagateurs de W disparaissent aussi. Tenant compte de $p_4 \cdot \epsilon_{1,2} = -p_3 \cdot \epsilon_{1,2}$, on aboutit ainsi à une forme "simplifiée" de l'amplitude générique :

$$\begin{aligned}
 T(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2) &= 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left[- (p_3 \cdot \epsilon_1)(p_3 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) + (p_3 \cdot \epsilon_1) \left[(p_2 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (p_2 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) \right] + (p_3 \cdot \epsilon_2) \left[(p_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) - (p_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*) \right] \right] \\
 &\quad + \frac{4}{a} \left[(p_1 \cdot \epsilon_3^*)(p_2 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (p_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) \right] \\
 &\quad + \frac{4}{b} \left[(p_1 \cdot \epsilon_4^*)(p_2 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (p_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) \right] \\
 &\quad - 2(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

plus adaptée aux étapes suivantes du calcul.

• Amplitudes $T(0, 0; \lambda_1, \lambda_2)$

On trouve :

$$E = -(p_3 \cdot \epsilon_1)(p_3 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) + (p_3 \cdot \epsilon_1) \left[(p_2 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) - (p_2 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) \right]$$

11. Plus précisément, ce sont plutôt les amplitudes avec des polarisations rectilignes que l'on trouve dans cette thèse.

12. Pour $s \rightarrow \infty$, la section efficace correspondant à $\kappa = 1$ tend vers la constante $\frac{128\pi\alpha^2}{m^2}$.

13. Voir M. Baillargeon, G. Bélanger, F. Boudjema, loc. cit.

14. En intermédiaire, il est utile de poser $p = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$, $p' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$.

$$\begin{aligned}
 & +(p_3 \cdot \epsilon_2) \left[(p_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) - (p_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*) \right] \\
 & = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^2 s^2 \sin^2 \theta}{32m^2} [-4 + (1 + \beta^2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F & = (p_1 \cdot \epsilon_3^*)(p_2 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (p_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) \\
 & = \frac{s^2}{16m^2} [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta - \cos \theta)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \theta]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G & = (p_1 \cdot \epsilon_4^*)(p_2 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + (p_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) \\
 & = \frac{s^2}{16m^2} [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta + \cos \theta)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \theta]
 \end{aligned}$$

$$H = -2(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) = -2\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{s}{4m^2} (1 + \beta^2)$$

D'où

$$\begin{aligned}
 T(0, 0; \lambda_1, \lambda_2) & = \frac{s}{2m^2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \left[\lambda_1 \lambda_2 \beta^2 \sin^2 \theta [-4 + (1 + \beta^2)] \right. \\
 & + (1 + \beta \cos \theta) [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta - \cos \theta)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \theta] + (1 - \beta \cos \theta) [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta + \cos \theta)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \theta] \\
 & \left. - \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 + \beta^2)(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \right] = \frac{2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[\lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \theta (2 - \beta^2) + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \times \right. \\
 & \left. \times [1 - \beta^2 - \sin^2 \theta (2 - \beta^2)] \right]
 \end{aligned}$$

Notant que $\lambda_1 \lambda_2 = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} - \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}$ (puisque $\lambda_{1,2} = \pm 1$), on aboutit à

$$\boxed{T(0, 0; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 - \beta^2) - \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \sin^2 \theta (2 - \beta^2) \right]} \quad (4.58)$$

• **Amplitudes** $T(0, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_4 = \pm 1$

On a maintenant $\epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = 0$, et donc $H = 0$. Il vient

$$\begin{aligned}
 E & = \frac{s\sqrt{s}\beta \sin \theta}{16m\sqrt{2}} \left[\lambda_1 (\beta + \cos \theta)(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) - \lambda_2 (\beta - \cos \theta)(1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) \right] \\
 F & = -\frac{s\sqrt{s} \sin \theta}{8m\sqrt{2}} \left[\lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta - \cos \theta) + \lambda_1 (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \right] \\
 G & = \frac{s\sqrt{s} \sin \theta}{8m\sqrt{2}} \left[\lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (\beta + \cos \theta) + \lambda_2 (1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) \right]
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 T(0, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2) & = \frac{\sqrt{s} \sin \theta}{m\sqrt{2}(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \left[\lambda_1 \{ \beta(\beta + \cos \theta) - (1 + \beta \cos \theta) \} \right. \\
 & \left. + \lambda_2 (1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) \{ 1 - \beta \cos \theta - \beta(\beta - \cos \theta) \} + \lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \{ (\beta + \cos \theta)(1 - \beta \cos \theta) \} \right]
 \end{aligned}$$

$$- (\beta - \cos \theta)(1 + \beta \cos \theta) \}} = \frac{2m\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{s}(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \left[\lambda_2(1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) - \lambda_1(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) + 2\lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \cos \theta \right]$$

Or, $\lambda_2(1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) - \lambda_1(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) + 2\lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \cos \theta = \lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_4 \cos \theta (\delta_{\lambda_1, \lambda_2} - \lambda_1 \lambda_2)$
et

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -2\lambda_1 \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}, \quad \delta_{\lambda_1, \lambda_2} - \lambda_1 \lambda_2 = \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}$$

d'où il ressort que

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_4 \cos \theta (\delta_{\lambda_1, \lambda_2} - \lambda_1 \lambda_2) &= 2\delta_{\lambda_1, -\lambda_2} [-\lambda_1 + \lambda_4 \cos \theta] = -2\lambda_1 \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} [1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta] \\ &\equiv (\lambda_2 - \lambda_1)(1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) \equiv (\lambda_2 - \lambda_1)(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \end{aligned}$$

et finalement

$$T(0, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2m\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{s}(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} [\lambda_2 - \lambda_1] [1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta] \quad (4.59)$$

• **Amplitudes** $T(\lambda_3, 0; \lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_3 = \pm 1$

Le lecteur vérifiera que

$$T(\lambda_3, 0; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2m\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{s}(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} [\lambda_1 - \lambda_2] [1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta] \quad (4.60)$$

• **Amplitudes** $T(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_{3,4} = \pm 1$

On a cette fois

$$\begin{aligned} E &= \frac{s\beta \sin^2 \theta}{16} \left[2\beta \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) \right] \\ F &= \frac{s}{8} \left[\lambda_3 \lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sin^2 \theta + (1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta)(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \right] \\ G &= \frac{s}{8} \left[\lambda_3 \lambda_4 \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sin^2 \theta + (1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta)(1 - \lambda_2 \lambda_3 \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

$$H = -2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} \delta_{\lambda_1, \lambda_2}$$

d'où

$$\begin{aligned} T(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[2\beta^2 \sin^2 \theta \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} + \beta \sin^2 \theta (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda_3 \lambda_4 \sin^2 \theta \delta_{\lambda_1, \lambda_2} + (1 + \beta \cos \theta)(1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta)(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \beta \cos \theta)(1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta)(1 - \lambda_2 \lambda_3 \cos \theta) - 2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[2\beta^2 \sin^2 \theta \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} + 2 \lambda_3 \lambda_4 \sin^2 \theta \delta_{\lambda_1, \lambda_2} + 2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \cos^2 \theta \right. \\ \left. - 2 \delta_{\lambda_3, \lambda_4} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) + \beta(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) \cos \theta \right]$$

En faisant usage des relations

$$\delta_{\lambda_1, \lambda_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_1 \delta_{\lambda_1, \lambda_2}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda_1 \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \\ 1 + x^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 x = [1 + \lambda_1 \lambda_3 x]^2 \quad (\text{car } |\lambda_i| = 1)$$

on aboutit à la formule¹⁵

$$\boxed{T(\lambda_3, \lambda_4; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_3, \lambda_4} [1 + \lambda_1 \lambda_3 \beta]^2 \right. \\ \left. + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\lambda_3, \lambda_4} (1 - \beta^2) \sin^2 \theta + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\lambda_3, -\lambda_4} [1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta]^2 \right]} \quad (4.61)$$

On remarque que l'amplitude correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = -\lambda_4$ est nulle, que celle correspondant à $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ est défavorisée à très haute énergie ($\beta \rightarrow 1$) par le facteur $(1 - \beta^2) \sin^2 \theta$, et que celle correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4$ est elle aussi défavorisée dans ce domaine par le facteur $(1 - \beta)^2$.

15. A titre d'exercice, nous proposons au lecteur de comparer les formules des amplitudes établies ici à celles données dans l'appendice A de l'article de Baillargeon et. al., loc. cit.

4.9 Amplitudes d'hélicité de $\gamma + \gamma \rightarrow e^{*-} + e^+$

L'éventuelle existence de quarks ou de leptons "excités" a fait l'objet de nombreuses études théoriques, portant à la fois sur leur spectroscopie vis-à-vis du groupe $SU(2) \times U(1)$ de la théorie électro-faible, et sur les possibilités de les mettre en évidence dans certaines réactions¹⁶. Nous considérons ici la production d'une paire {électron excité (e^{*-}) - positron (e^+)} par collision de deux photons réels de suffisamment haute énergie. Dans l'état actuel des techniques, une telle réaction n'est pas réalisable avec deux photons strictement réels, mais seulement avec des photons "quasi réels" se trouvant, par exemple, dans le champ électromagnétique intense d'ions lourds ultra-relativistes¹⁷.

Nous utiliserons un modèle, couramment suggéré, pour lequel le couplage γ - e^* - e est décrit par le Lagrangien

$$L_1 = \sqrt{4\pi\alpha} f_{\gamma e^* e} \{e^* \sigma_{\mu\nu} (1 - \gamma_5) e \partial^\mu A^\nu + \text{h.c.}\} \quad (4.62)$$

$f_{\gamma e^* e}$ étant une constante de couplage¹⁸, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, tandis que le couplage γ - e^* - e^* est décrit par le Lagrangien

$$L_2 = -\sqrt{4\pi\alpha} \bar{e}^* \left\{ \gamma_\mu A^\mu + \frac{\kappa}{M} \sigma_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \right\} e^* \quad (4.63)$$

κ étant un moment magnétique, M la masse du lepton excité. Cette masse, ainsi que l'énergie totale de la réaction dans le référentiel de son centre de masse sont supposées très grandes devant la masse du positron, et pour cette raison, nous négligerons cette dernière.

Les constantes de couplage étant mises à part, l'amplitude tensorielle du processus, invariante de jauge, est

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -i\bar{U}_4 \left[\left[\sigma_{\mu\rho} q_1^\rho (1 - \gamma_5) \frac{\gamma(q_2 - p_3)}{2q_2 \cdot p_3} \gamma_\nu + \sigma_{\nu\omega} q_2^\omega (1 - \gamma_5) \frac{\gamma(q_1 - p_3)}{2q_1 \cdot p_3} \gamma_\mu \right. \right. \\ & + \left. \left[\gamma_\mu + i \frac{\kappa}{M} \sigma_{\mu\rho} q_1^\rho \right] \frac{M + \gamma(p_4 - q_1)}{M^2 - (p_4 - q_1)^2} \sigma_{\nu\omega} q_2^\omega (1 - \gamma_5) \right. \\ & \left. \left. + \left[\gamma_\nu + i \frac{\kappa}{M} \sigma_{\nu\omega} q_2^\omega \right] \frac{M + \gamma(p_4 - q_2)}{M^2 - (p_4 - q_2)^2} \sigma_{\mu\rho} q_1^\rho (1 - \gamma_5) \right] \right] V_3 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Les notations sont les suivantes : (q_1, μ) , (q_2, ν) sont les 4-impulsions et les indices de Lorentz respectifs des photons initiaux 1 et 2 ; $(p_3, V_3 = \gamma_5 U_3)$, (p_4, U_4) sont les 4-impulsions et les spineurs respectifs du positron 3 et de l'électron excité 4. Les deux premiers termes correspondent aux diagrammes (a) de la figure 4.6 où un électron virtuel est échangé, tandis que les deux derniers termes correspondent aux diagrammes (b) de cette figure, où un électron excité virtuel est échangé. Pour ce calcul, nous utiliserons encore le couplage d'hélicité de la voie s . Notant

16. F.M. Renard, Phys. Lett. 139B, 449 (1982) ; N. Cabibbo, L. Maiani, Y. Srivastava, Phys. Lett. 139B, 459 (1984) ; A. De Rujula, L. Maiani, R. Petronzio, Phys. Lett. 140B, 253 (1984) ; G. Pancheri, Y. Srivastava, Phys. Lett. 146B, 87 (1984) ; J. Kühn, P. Zerwas, Phys. Lett. 147B, 189 (1984) ; J. Kühn, H.D. Tholl, P.M. Zerwas, Phys. Lett. 158B, 270 (1985) ; K. Hagiwara, S. Komamiya, D. Zeppenfeld, Z. Phys. C29, 115 (1985) ; F. Boudjema, A. Djouadi, Phys. Lett. B240, 485 (1990) ; U. Baur, M. Spira, P.M. Zerwas, Phys. Rev. D42, 815 (1990) ; I.F. Ginzburg, D.Yu. Ivanov, Phys. Lett. B276, 214 (1992) ; Y.A. Coutinho, J.A. Martins Simoões, C.M. Porto, P.P. Queiroz Filho, Phys. Rev. D57, 6975 (1998) ; O.J.P. Éboli, S.M. Lietti, Prakash Mathews, Phys. Rev. D65 (2002) 075003.

17. Voir à ce sujet : C. Carimalo et al. : "Nuclei as Generators of Quasi-real Photons", Phys. Rev. D10, 1561 (1974) ; G. Baur, C.A. Bertulani, Nucl. Phys. A505, 835 (1989) ; N. Baron, G. Baur, Phys. Rev. C, 1999 (1993) ; K. Hencken, D. Trautmann, G. Baur, Z. Phys. C, 473 (1995) ; G. Baur, K. Hencken, D. Trautmann, Prog. Part. Nucl. Phys. 42, 357 (1999).

18. h.c. = conjugué hermitique, $\alpha = 1/137$, A^μ est le champ du photon...

$s = (q_1 + q_2)^2 = 2q_1 \cdot q_2$, $T = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{s}}$, $Z = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{s}}$, on a $q_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(T + Z)$, $q_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(T - Z)$. Dans le référentiel du centre de masse, l'axe Y est encore pris selon $\vec{q}_1 \wedge \vec{p}_3$, et l'axe X perpendiculaire à \vec{q}_1 , dans le plan (\vec{q}_1, \vec{p}_3) : $Y_\mu \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} q_1^\nu q_2^\rho p_3^\omega$, $X_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T^\nu Y^\rho Z^\omega$.

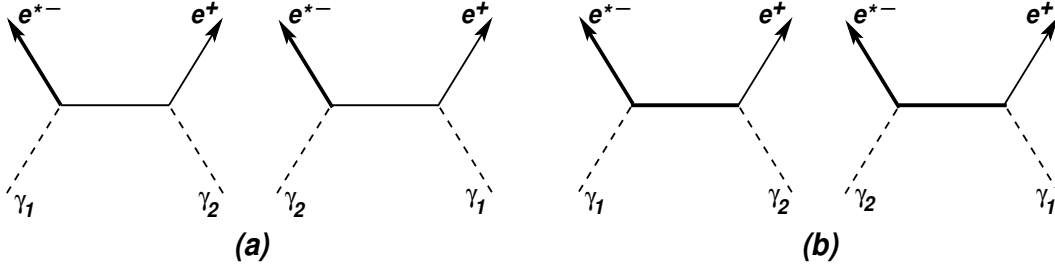


FIGURE 4.6 – Diagrammes de Feynman pour $\gamma + \gamma \rightarrow e^{*-} + e^+$

Les vecteurs de polarisation des deux photons (1) et (2) sont respectivement définis par

$$\epsilon_1^{(\lambda)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda X + iY], \quad \epsilon_2^{(\lambda)} = \epsilon_1^{(-\lambda)}$$

Par rapport aux calculs précédents, celui envisagé ici présente les différences suivantes. Tout d'abord, les spineurs V_3 et U_4 sont associés à des masses très différentes, dont l'une est en outre prise égale à zéro. Ensuite, après avoir fait disparaître, par des anticommutations appropriées, la masse de l'électron excité du numérateur des propagateurs, la matrice sandwichée apparaissant finalement dans l'amplitude (4.64) est une somme de produits de matrices γ , certains comptant un nombre pair de ces matrices, d'autres en comptant un nombre impair. Enfin, on note la présence du projecteur de chiralité $(1 - \gamma_5)/2$.

Considérons tout d'abord des spineurs associés à des masses non nulles et normalisés selon $\bar{U}U = 2$, et posons $\epsilon = \pm 1$. A partir des formules établies au paragraphe 3.2.3, on déduit :

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= -2\delta_{\sigma', -\sigma} \left[\delta_{\epsilon, 2\sigma} e^{\chi_{34}^+} - \delta_{\epsilon, -2\sigma} e^{-\chi_{34}^+} \right] \\ \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= 2\delta_{\epsilon, 2\sigma} \left[\delta_{\sigma', \sigma} (2\sigma) e^{\chi_{34}^+} [X' + i(2\sigma)Y]_\mu - \delta_{\sigma', -\sigma} e^{\chi_{34}^+} [T + Z']_\mu \right] \\ &\quad + 2\delta_{\epsilon, -2\sigma} \left[\delta_{\sigma', \sigma} (2\sigma) e^{-\chi_{34}^+} [X' + i(2\sigma)Y]_\mu + \delta_{\sigma', -\sigma} e^{-\chi_{34}^+} [T - Z']_\mu \right] \\ \bar{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= \delta_{\epsilon, 2\sigma} \left[i \delta_{\sigma', \sigma} (2\sigma) e^{\chi_{34}^+} \left[[T + Z']_\mu [X' + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [T + Z']_\nu [X' + i(2\sigma)Y]_\mu \right] - \delta_{\sigma', -\sigma} e^{\chi_{34}^+} \left[i [T_\mu Z'_\nu - T_\nu Z'_\mu] + (2\sigma) [X'_\mu Y_\nu - X'_\nu Y_\mu] \right] \right] \\ &\quad + \delta_{\epsilon, -2\sigma} \left[i \delta_{\sigma', \sigma} (2\sigma) e^{-\chi_{34}^+} \left[[T - Z']_\mu [X' + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [T - Z']_\nu [X' + i(2\sigma)Y]_\mu \right] - \delta_{\sigma', -\sigma} e^{-\chi_{34}^+} \left[i [T_\mu Z'_\nu - T_\nu Z'_\mu] - (2\sigma) [X'_\mu Y_\nu - X'_\nu Y_\mu] \right] \right] \end{aligned}$$

Des définitions $\cosh \chi_3 = \frac{E_3}{m_3}$, $\cosh \chi_4 = \frac{E_4}{m_4}$, on tire ($m_3 = m_{e^+}$, $m_4 = M$)

$$\cosh 2\chi_{34}^+ = \cosh(\chi_3 + \chi_4) = \frac{1}{m_3 m_4} [E_3 E_4 + p_3 p_4] = \frac{p_3 \cdot p_4}{m_3 m_4}$$

Lorsque $m_3 \rightarrow 0$,

$$e^{\chi_{3/2}} = \sqrt{e^{\chi_3}} = \sqrt{\cosh \chi_3 + \sinh \chi_3} \simeq \sqrt{\frac{2E_3}{m_3}}, \text{ donc}$$

$$\sqrt{m_3} e^{\chi_{3/2}} \simeq \sqrt{2E_3}, \quad \sqrt{m_3} e^{-\chi_{3/2}} \simeq \frac{m_3}{\sqrt{2E_3}} \rightarrow 0$$

et, revenant aux spineurs normalisés selon $\bar{U}U = 2m$, les relations précédentes conduisent finalement à

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= -2\delta_{\sigma',-\sigma} \delta_{2\sigma,\epsilon} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} \\ \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= 2\delta_{2\sigma,\epsilon} \left[\delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \sqrt{2p_3 \cdot p_4} [X' + i(2\sigma)Y]_\mu \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{2M}{\sqrt{2p_3 \cdot p_4}} p_{3\mu} \right] \\ \bar{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} [1 + \epsilon\gamma_5] V_{3\sigma} &= \delta_{2\sigma,\epsilon} \left[i \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \frac{2M}{\sqrt{2p_3 \cdot p_4}} \left[p_{3\mu} [X' + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p_{3\nu} [X' + i(2\sigma)Y]_\mu \right] - \delta_{\sigma',-\sigma} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} \left[i [T_\mu Z'_\nu - T_\nu Z'_\mu] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2\sigma) [X'_\mu Y_\nu - X'_\nu Y_\mu] \right] \right] \\ \text{avec } T_\mu Z'_\nu - T_\nu Z'_\mu &= -\frac{p_{3\mu} p_{4\nu} - p_{3\nu} p_{4\mu}}{p_3 \cdot p_4} \end{aligned} \tag{4.65}$$

En utilisant systématiquement la relation $\gamma_5 = i\gamma(X)\gamma(Y)\gamma(Z)\gamma(T)$, valable pour toute base T, X, Y, Z orthonormée et d'orientation directe, on montre les relations (très) utiles suivantes.

$$\gamma(\lambda X + iY) \gamma(T + \eta Z) (1 + \epsilon\gamma_5) [1 - \epsilon\eta\lambda] = 0 \tag{4.66}$$

où $\lambda, \eta, \epsilon = \pm 1$, d'où l'on déduit notamment

$$\gamma(\epsilon(\pm))\gamma(q_1)(1 \mp \gamma_5) = 0, \quad \gamma(\epsilon(\pm))\gamma(q_2)(1 \pm \gamma_5) = 0 \tag{4.67}$$

Notant que

$$\begin{aligned}
 \gamma(\epsilon_1)\gamma(\epsilon_2) &= \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [1 + \lambda_1\gamma(Z)\gamma(T)\gamma_5], & \gamma(\epsilon_2)\gamma(\epsilon_1) &= \delta_{\lambda_1, \lambda_2} [1 - \lambda_1\gamma(Z)\gamma(T)\gamma_5] \\
 \gamma(q_1)\gamma(q_2) &= \frac{s}{2} [1 + \gamma(Z)\gamma(T)], & \gamma(q_2)\gamma(q_1) &= \frac{s}{2} [1 - \gamma(Z)\gamma(T)]
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

on déduit aussi

$$\begin{aligned}
 \gamma(\epsilon_1)\gamma(\epsilon_2)\gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] &= \delta_{\lambda_2, \lambda_1} (1 - \lambda_1\eta\epsilon)\gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 &= 2\delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1\eta\epsilon, -1} \gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 \gamma(\epsilon_2)\gamma(\epsilon_1)\gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] &= \delta_{\lambda_2, \lambda_1} (1 + \lambda_1\eta\epsilon)\gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 &= 2\delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1\eta\epsilon, 1} \gamma(T + \eta Z) [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 \gamma(\epsilon_1)\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_1)\gamma(q_2) [1 + \epsilon\gamma_5] &= s\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1, \epsilon} [1 + \gamma(Z)\gamma(T)] [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 \gamma(\epsilon_2)\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_2)\gamma(q_1) [1 + \epsilon\gamma_5] &= s\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1, \epsilon} [1 - \gamma(Z)\gamma(T)] [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 \gamma(\lambda X + iY)\gamma(q_1)\gamma(q_2) [1 + \epsilon\gamma_5] &= s\delta_{\lambda, -\epsilon} \gamma(\lambda X + iY) [1 + \epsilon\gamma_5] \\
 \gamma(\lambda X + iY)\gamma(q_2)\gamma(q_1) [1 + \epsilon\gamma_5] &= s\delta_{\lambda, \epsilon} \gamma(\lambda X + iY) [1 + \epsilon\gamma_5]
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Rappelons enfin que dans le cas $m_3 = 0$, on a $\gamma_5 V_3 = (2\sigma_3) V_3$. Il en résulte que, dans cette approximation, la présence de la matrice $(1 - \gamma_5)$ fait que les huit amplitudes pour lesquelles $\sigma_3 = +1/2$ sont nulles.

Les relations (4.67) montrent aussi que les amplitudes pour lesquelles $\epsilon_1 = \epsilon^{(+)}$ et $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(+)} = \epsilon^{(-)}$ sont également nulles. En effet, compte tenu de $q_1 \cdot \epsilon^{(+)} = 0$, on a par exemple $\sigma_{\mu\rho} \epsilon_1^\mu q_1^\rho (1 - \gamma_5) = \frac{i}{2} \gamma(\epsilon^{(+)}) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) = 0$. Au final, il ne reste donc que six amplitudes à calculer.

On a

$$\begin{aligned}
 T(\sigma_4, \sigma_3; \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \overline{U}_{4\sigma_4} \left[\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_1)(1 - \gamma_5) \frac{\gamma(q_2 - p_3)}{2q_2 \cdot p_3} \gamma(\epsilon_2) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma(\epsilon_2)\gamma(q_2)(1 - \gamma_5) \frac{\gamma(q_1 - p_3)}{2q_1 \cdot p_3} \gamma(\epsilon_1) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\gamma(\epsilon_1) - \frac{\kappa}{2M} \gamma(\epsilon_1)\gamma(q_1) \right] \frac{M + \gamma(p_4 - q_1)}{M^2 - (p_4 - q_1)^2} \gamma(\epsilon_2)\gamma(q_2)(1 - \gamma_5) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\gamma(\epsilon_2) - \frac{\kappa}{2M} \gamma(\epsilon_2)\gamma(q_2) \right] \frac{M + \gamma(p_4 - q_2)}{M^2 - (p_4 - q_2)^2} \gamma(\epsilon_1)\gamma(q_1)(1 - \gamma_5) \right] V_{3\sigma_3} \\
 &= \frac{1}{2} \overline{U}_{4\sigma_4} \left[\left[\frac{1}{2q_2 \cdot p_3} + \frac{1 + \kappa}{2q_1 \cdot p_4} \right] \gamma(\epsilon_1)\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_1)\gamma(q_2)(1 - \gamma_5) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2q_1 \cdot p_3} + \frac{1 + \kappa}{2q_2 \cdot p_4} \right] \gamma(\epsilon_2)\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_2)\gamma(q_1)(1 - \gamma_5) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{\epsilon_2 \cdot p_4}{q_2 \cdot p_4} - \frac{\epsilon_2 \cdot p_3}{q_2 \cdot p_3} \right] \gamma(\epsilon_1) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) + \left[\frac{\epsilon_1 \cdot p_4}{q_1 \cdot p_4} - \frac{\epsilon_1 \cdot p_3}{q_1 \cdot p_3} \right] \gamma(\epsilon_2) \gamma(q_2) (1 - \gamma_5) \\
 & - \frac{\kappa}{2M} \left[\frac{\epsilon_1 \cdot p_4}{q_1 \cdot p_4} \gamma(\epsilon_2) \gamma(q_1) \gamma(q_2) (1 - \gamma_5) + \frac{\epsilon_2 \cdot p_4}{q_2 \cdot p_4} \gamma(\epsilon_1) \gamma(q_2) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2) \gamma(q_2) (1 - \gamma_5) + \gamma(\epsilon_2) \gamma(\epsilon_1) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) \right] \Big] V_{3\sigma_3}
 \end{aligned}$$

Calculons :

$$\textcircled{1} \quad \overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2) \gamma(q_1) \gamma(q_2) (1 - \gamma_5) V_{3\sigma_3} = s \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \overline{U}_{4\sigma_4} [1 + \gamma(Z) \gamma(T)] [1 - \gamma_5] V_{3\sigma_3}$$

Comme $T \cdot Z = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{4\sigma_4} \sigma_{\mu\nu} Z^\mu T^\nu [1 - \gamma_5] V_{3\sigma_3} &= \frac{i}{2} \overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(Z) \gamma(T) [1 - \gamma_5] V_{3\sigma_3} \\
 &= \delta_{2\sigma, -1} \left[-i \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{2M}{\sqrt{2p_3 \cdot p_4}} [-p_3 \cdot T X' \cdot Z] - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} [-i Z' \cdot Z] \right] \\
 &= i \delta_{2\sigma, -1} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{2ME_3}{\sqrt{2p_3 \cdot p_4}} \sin \theta - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

où θ est l'angle de diffusion du positron dans le référentiel du centre de masse de la réaction.

Compte tenu de la relation $2\sqrt{s}E_3 = 2p_3 \cdot (p_3 + p_4) = 2p_3 \cdot p_4 = s - M^2$, il vient

$$\overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(Z) \gamma(T) [1 - \gamma_5] V_{3\sigma_3} = 2\delta_{2\sigma_3, -1} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{M}{\sqrt{s}} \sin \theta - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \cos \theta \right]$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 & \overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(\epsilon_1) \gamma(\epsilon_2) \gamma(q_1) \gamma(q_2) (1 - \gamma_5) V_{3\sigma_3} = \\
 & s \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \delta_{2\sigma_3, -1} \sqrt{s - M^2} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{M}{\sqrt{s}} \sin \theta - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} [1 + \cos \theta] \right]
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(\epsilon_2) \gamma(\epsilon_1) \gamma(q_2) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) V_{3\sigma_3} = s \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \overline{U}_{4\sigma_4} [1 - \gamma(Z) \gamma(T)] [1 - \gamma_5] V_{3\sigma_3}$$

$$= -2s \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \delta_{2\sigma_3, -1} \sqrt{s - M^2} \left[\delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{M}{\sqrt{s}} \sin \theta + \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} [1 - \cos \theta] \right]$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{U}_{4\sigma_4} \gamma(\epsilon_1) \gamma(q_1) (1 - \gamma_5) V_{3\sigma_3} = -2i \overline{U}_{4\sigma_4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_1^\mu q_1^\nu (1 - \gamma_5) V_{3\sigma_3}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2i \delta_{2\sigma_3, -1} \left[-i \delta_{\sigma_4, \sigma_3} \frac{2M}{\sqrt{2p_3 \cdot p_4}} \left[\epsilon_1 \cdot p_3 q_1 \cdot X' - q_1 \cdot p_3 \epsilon_1 \cdot (X' - iY) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \delta_{\sigma_4, -\sigma_3} \sqrt{2p_3 \cdot p_4} [-iq_1 \cdot T \epsilon_1 \cdot Z' + q_1 \cdot X' \epsilon_1 \cdot Y] \right]
 \end{aligned}$$

Tenant compte de

$$\begin{aligned}
 q_1 \cdot X' &= \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta, \quad q_1 \cdot p_3 = \frac{E_3 \sqrt{s}}{2} (1 - \cos \theta), \quad \epsilon_1 \cdot Z' = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad \epsilon_1 \cdot X' = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \\
 \epsilon_1 \cdot p_3 &= \frac{E_3 \lambda_1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad \epsilon_1 \cdot Y = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_1 - 1 = -2\delta_{\lambda_1, -1},
 \end{aligned}$$

il vient

$$\overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_1)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} = -\delta_{2\sigma_3,-1}\delta_{\lambda_1,-1}\sqrt{2s}\sqrt{s-M^2}\left[\delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\sin\theta - \delta_{\sigma_4,\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}[1-\cos\theta]\right]$$

$$\textcircled{4} \quad \overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_2)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} = \delta_{2\sigma_3,-1}\delta_{\lambda_2,-1}\sqrt{2s}\sqrt{s-M^2}\left[\delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\sin\theta + \delta_{\sigma_4,\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}[1+\cos\theta]\right]$$

⑤ De la relation

$$\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_1)\gamma(q_2) = \frac{s}{2}\gamma(\epsilon_2)[1+\lambda_2\gamma_5] \quad (4.70)$$

on déduit

$$\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_1)\gamma(q_2)[1-\gamma_5] = s\delta_{\lambda_2,-1}\gamma(\epsilon_2)[1-\gamma_5]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & \overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_1)\gamma(q_2)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} = s\delta_{\lambda_2,-1}\overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_2)[1-\gamma_5]V_{3\sigma_3} \\ & = 2s\delta_{\lambda_2,-1}\delta_{2\sigma_3,-1}\left[-\delta_{\sigma_4,\sigma_3}\sqrt{2p_3\cdot p_4}\epsilon_2\cdot(X'-iY) - \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{2M}{\sqrt{2p_3\cdot p_4}}\epsilon_2\cdot p_3\right] \\ & = -s\sqrt{2}\sqrt{s-M^2}\delta_{2\sigma_3,-1}\delta_{\lambda_2,-1}\left[\delta_{\sigma_4,\sigma_3}[1+\cos\theta] + \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}\sin\theta\right] \end{aligned}$$

⑥ De même, la relation

$$\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_2)\gamma(q_1) = \frac{s}{2}\gamma(\epsilon_1)[1+\lambda_1\gamma_5] \quad (4.71)$$

conduit à

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_2)\gamma(q_1)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} & = s\delta_{\lambda_1,-1}\overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_1)[1-\gamma_5]V_{3\sigma_3} \\ & = -s\sqrt{2}\sqrt{s-M^2}\delta_{2\sigma_3,-1}\delta_{\lambda_1,-1}\left[\delta_{\sigma_4,\sigma_3}[1-\cos\theta] - \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}\sin\theta\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad & \overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_1)\gamma(\epsilon_2)\gamma(q_2)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} = 2\delta_{\lambda_2,\lambda_1}\delta_{\lambda_1,-1}\overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(q_2)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} \\ & = 4\delta_{\lambda_2,\lambda_1}\delta_{\lambda_1,-1}\delta_{2\sigma_3,-1}\left[-\delta_{\sigma_4,\sigma_3}\sqrt{2p_3\cdot p_4}q_2\cdot X' - \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{2M}{\sqrt{2p_3\cdot p_4}}q_2\cdot p_3\right] \\ & = 2\sqrt{s}\sqrt{s-M^2}\delta_{\lambda_2,\lambda_1}\delta_{\lambda_1,-1}\delta_{2\sigma_3,-1}\left[\delta_{\sigma_4,\sigma_3}\sin\theta - \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}[1+\cos\theta]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad & \overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(\epsilon_2)\gamma(\epsilon_1)\gamma(q_1)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} = 2\delta_{\lambda_2,\lambda_1}\delta_{\lambda_1,-1}\overline{U}_{4\sigma_4}\gamma(q_1)(1-\gamma_5)V_{3\sigma_3} \\ & = -2\sqrt{s}\sqrt{s-M^2}\delta_{\lambda_2,\lambda_1}\delta_{\lambda_1,-1}\delta_{2\sigma_3,-1}\left[\delta_{\sigma_4,\sigma_3}\sin\theta + \delta_{\sigma_4,-\sigma_3}\frac{M}{\sqrt{s}}[1-\cos\theta]\right] \end{aligned}$$

On a $E_4 = \sqrt{s} - E_3 = \frac{s+M^2}{2\sqrt{s}}$. Nous poserons $\beta^* = \frac{E_3}{E_4} = \frac{s-M^2}{s+M^2}$. On a

$$2q_{1,2} \cdot p_4 = 2\sqrt{s}E_4(1 \pm \beta^* \cos \theta) = 2\sqrt{s}E_3(1 \pm \beta^* \cos \theta)/\beta^*$$

$$\epsilon_1 \cdot p_3 = -\epsilon_1 \cdot p_4 = \frac{\lambda_1 E_3}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad \epsilon_2 \cdot p_3 = -\epsilon_2 \cdot p_4 = -\frac{\lambda_2 E_3}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

Rassemblant toutes ces expressions, on aboutit aux formules des six amplitudes d'hélicité non nulles $T_{\lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_4, \sigma_3}$ listées dans le tableau VI et dont nous laissons la vérification au lecteur.

$T_{+,-}^{\uparrow, \downarrow} = -\sqrt{s-M^2} [1 + \cos \theta] \left\{ 1 + \beta^* \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \beta^* \cos \theta} \right\}$	(4.72)
$T_{+,-}^{\downarrow, \downarrow} = -\frac{M\sqrt{s-M^2}}{\sqrt{s}} \frac{\sin \theta [1 + \cos \theta]}{1 - \cos \theta} \left\{ 1 + \beta^* \left(1 + \frac{\kappa s}{2M^2} \right) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \beta^* \cos \theta} \right\}$	
$T_{-,+}^{\uparrow, \downarrow} = -\sqrt{s-M^2} [1 - \cos \theta] \left\{ 1 + \beta^* \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{1 + \cos \theta}{1 - \beta^* \cos \theta} \right\}$	
$T_{-,+}^{\downarrow, \downarrow} = \frac{M\sqrt{s-M^2}}{\sqrt{s}} \frac{\sin \theta [1 - \cos \theta]}{1 + \cos \theta} \left\{ 1 + \beta^* \left(1 + \frac{\kappa s}{2M^2} \right) \frac{1 + \cos \theta}{1 - \beta^* \cos \theta} \right\}$	
$T_{-,-}^{\uparrow, \downarrow} = -\sqrt{s-M^2} \frac{1 + \beta^*}{\beta^*} \left[2 + \beta^* \kappa \frac{1 - \beta^* \cos^2 \theta}{1 - \beta^{*2} \cos^2 \theta} \right]$	
$T_{-,-}^{\downarrow, \downarrow} = -\frac{M}{\sqrt{s}} \sqrt{s-M^2} \cot \theta \left[2 \frac{1 - \beta^*}{\beta^*} + \frac{\beta^* \sin^2 \theta [4\beta^* + \kappa(1 + \beta^*)]}{1 - \beta^{*2} \cos^2 \theta} \right]$	

Tableau VI - Amplitudes d'hélicité non nulles pour $\gamma + \gamma \rightarrow e^{*-} + e^+$ ($m_{e^+} = 0$)

4.10 Amplitudes d'hélicité de $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ via l'échange de leptons excités

Dans le cadre du modèle standard électro-faible, cette réaction s'effectue, à l'ordre le plus bas suivant les constantes de couplage, selon l'un ou l'autre des deux processus décrits par les diagrammes de la figure 4.7. Le premier, (a), procède de l'échange dans la voie t d'un neutrino électronique, et le second, (b), de l'échange dans la voie s d'un photon ou d'un Z .

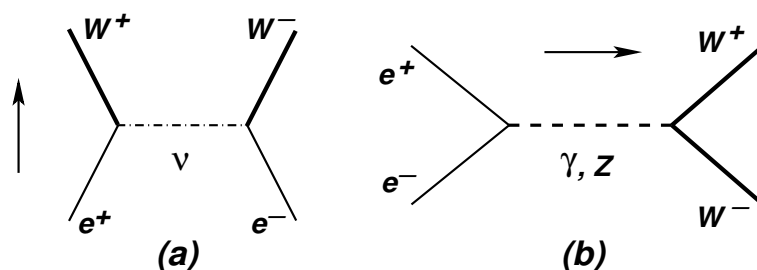


FIGURE 4.7 – Diagrammes de Feynman du modèle standard pour $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$

Cependant, si l'on imagine que les leptons actuellement observés sont en réalité des états liés de particules plus fondamentales, appelées “préons” dans les modèles de “compositeness”, et qui restent à découvrir, on peut envisager, à l'instar de ce qui est observé dans le secteur hadronique, des multiplets d'isospin faible de leptons excités; et si l'on suppose en outre que ces leptons excités peuvent être couplés aux leptons usuels par les particules de jauge γ, W, Z , d'autres voies de réalisation de réactions telles que celle considérée ici peuvent être imaginées¹⁹. Ainsi, dans le secteur d'isospin et d'hypercharge $I_W = \frac{3}{2}, Y = -1$ on peut avoir quatre électrons excités (E^+, E^0, E^-, E^{--}) (de spin 1/2), dont un neutre et un doublement chargé négativement, ces derniers étant susceptibles d'intervenir dans la production d'une paire W^-W^+ par collisions e^-e^+ , via les processus décrits par les diagrammes de la figure 4.8, qui procèdent par échange dans la voie t d'un E^{--} , diagramme (a), ou d'un E^0 , diagramme (b).

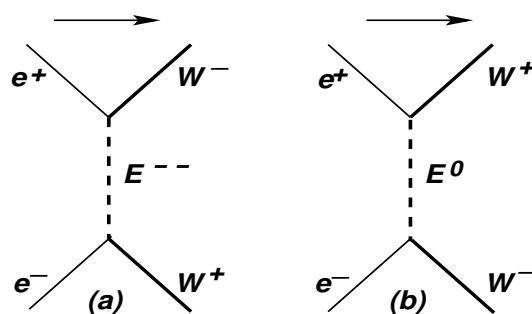


FIGURE 4.8 – Diagrammes de Feynman pour $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ via l'échange de leptons excités

Le couplage qui nous intéresse ici entre ces électrons excités et l'électron usuel est supposé de type magnétique²⁰ et décrit par le Lagrangien effectif suivant

19. Voir par exemple les récentes publications suivantes, dans lesquelles le lecteur trouvera de nombreuses références : S. Biondini, *Frascati Phys. Ser.* 55 (2012) 7-12; S. Biondini, O. Panella, G. Pancheri, Y. Srivastava, *Phys. Rev. D* 85 (2012) 095018; *Nuovo Cim.* C037, (2014) 02, 91-97; S. Biondini, O. Panella, *Phys. Rev. D* 92 (2015) 015023; S. Biondini, O. Panella, *Frascati Phys. Ser.* 61 (2016) 141-146.

20. Ce qui garantit l'invariance de jauge.

$$\mathcal{L} = C \left\{ \bar{e} \sigma_{\mu\nu} \partial^\mu W^{(+)\nu} [1 + \gamma_5] E^{--} + \overline{E^{--}} \sigma_{\mu\nu} \partial^\mu W^{(-)\nu} [1 - \gamma_5] e \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{e} \sigma_{\mu\nu} \partial^\mu W^{(-)\nu} [1 + \gamma_5] E^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{E^0} \sigma_{\mu\nu} \partial^\mu W^{(+)\nu} [1 - \gamma_5] e \right\} \quad (4.73)$$

où C est une constante de couplage dont la valeur est ici sans importance et où, ici encore, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Avec ce Lagrangien, les amplitudes correspondant aux diagrammes (a) et (b) de la figure 4.8 sont respectivement

$$\mathcal{A}_a = \frac{1}{D_a} \overline{V_2} \sigma_{\mu\nu} p_3^\mu \epsilon_3^{*\nu} [1 + \gamma_5] [M_a + \gamma(Q_a)] \sigma_{\rho\omega} p_4^\rho \epsilon_4^{*\omega} [1 - \gamma_5] U_1 \\ \text{avec } Q_a = p_1 - p_4, \quad D_a = M_a^2 - Q_a^2, \\ \mathcal{A}_b = \frac{1}{3D_b} \overline{V_2} \sigma_{\mu\nu} p_4^\mu \epsilon_4^{*\nu} [1 + \gamma_5] [M_b + \gamma(Q_b)] \sigma_{\rho\omega} p_3^\rho \epsilon_3^{*\omega} [1 - \gamma_5] U_1 \\ \text{avec } Q_b = p_1 - p_3, \quad D_b = M_b^2 - Q_b^2$$

après division par C^2 . Les notations sont les suivantes : (U_1, p_1) et (V_2, p_2) sont les spineurs et 4-impulsions respectives de l'électron et du positron incidents ; (ϵ_3, p_3) et (ϵ_4, p_4) sont les vecteurs de polarisation et les 4-impulsions respectives du W^- et du W^+ finals ; M_a et M_b sont les masses respectives de E^{--} et de E^0 , que l'on peut supposer égales, conformément à la symétrie supposée. Ces masses sont supposées très grandes devant la masse de l'électron, de sorte que nous négligerons cette dernière²¹. Dans le référentiel du centre de masse de la réaction, l'électron incident se propage selon l'axe Z et le positron en sens inverse, tandis que le W^- sortant est émis avec l'angle θ par rapport à Z . Dans ce référentiel, l'axe Y est choisi selon $\vec{p}_1 \wedge \vec{p}_3$ et l'on a

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T + Z], \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - Z], \quad \text{avec } s = (p_1 + p_2)^2, \\ p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T + \beta Z'], \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - \beta Z'], \quad \text{avec } \beta = \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{s}}, \\ Z' = Z \cos \theta + X \sin \theta, \quad X' = X \cos \theta - Z \sin \theta \\ \epsilon_3^{(\lambda)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda X' + iY], \quad \epsilon_4^{(\lambda)} = \epsilon_3^{(-\lambda)} \quad \text{pour } \lambda = \pm 1, \\ \epsilon_3^{(0)} = \frac{\sqrt{s}}{2M_W} [Z' + \beta T], \quad \epsilon_4^{(0)} = \frac{\sqrt{s}}{2M_W} [-Z' + \beta T]$$

De par la forme magnétique du couplage et la présence des matrices $(1 + \gamma_5)$ et $(1 - \gamma_5)$, les amplitudes "réduites" $T_a = 4D_a \mathcal{A}_a$, $T_b = 12D_b \mathcal{A}_b$ s'expriment comme

$$T_a = -\overline{V_2} [1 + \gamma_5] \gamma(p_3) \gamma(\epsilon_3^*) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_4^*) [1 - \gamma_5] U_1 \quad \text{et} \\ T_b = -\overline{V_2} [1 + \gamma_5] \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(Q_b) \gamma(p_3) \gamma(\epsilon_3^*) [1 - \gamma_5] U_1 \quad (4.74)$$

La masse de l'électron étant négligée, on a²²

21. Compte tenu du fait qu'on a aussi $M_W \gg m_e$...

22. A démontrer!

$$\begin{aligned}
 U_{1\sigma_1} \bar{V}_{2\sigma_2} &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \delta_{\sigma_2, -\sigma_1} \gamma(p_1) \gamma(p_2) [1 + (2\sigma_1)\gamma_5] \\
 &+ (2\sigma_1) \frac{\sqrt{s}}{4} \delta_{\sigma_2, \sigma_1} \gamma(X + i(2\sigma_1)Y) [1 - (2\sigma_1)\gamma_5]
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

et

$$[1 - \gamma_5] U_{1\sigma_1} \bar{V}_{2\sigma_2} [1 + \gamma_5] = -\sqrt{s} \delta_{\sigma_2, \sigma_1} \delta_{2\sigma_1, -1} \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \tag{4.76}$$

Comme on pouvait le prévoir, seules les hélicités $\sigma_2 = \sigma_1 = -1/2$ contribuent. On en déduit

$$\begin{aligned}
 T_a &= \sqrt{s} \delta_{\sigma_2, \sigma_1} \delta_{2\sigma_1, -1} X_a \quad \text{avec} \\
 X_a &= \text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon_3^*) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon_4^*) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5]
 \end{aligned}$$

De façon évidente, T_b se déduit de T_a en échangeant les rôles de W^- et W^+ . Il suffit donc de déterminer uniquement les amplitudes T_a .

☞ Commençons par l'évaluation de la trace X_a pour des polarisations uniquement circulaires. On a

$$\begin{aligned}
 X_a(\lambda_1, \lambda_2) &= \text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &+ \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 \text{et } Q_a &= \frac{\sqrt{s}}{2} [Z + \beta Z'], \quad Z = Z' \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} [\epsilon^{(-)} - \epsilon^{(+)}]
 \end{aligned}$$

① Comme les vecteurs de polarisation circulaire sont isotropes, il vient

$$\begin{aligned}
 &\text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Q_a) \gamma(p_4) \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= \frac{\sqrt{s}}{2} [\cos \theta + \beta] \text{Tr} \gamma(p_3) \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Z') \gamma(p_4) \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= \frac{s\sqrt{s}}{8} [\cos \theta + \beta] \text{Tr} \gamma(T + \beta Z') \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Z') \gamma(T - \beta Z') \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= \frac{s\sqrt{s}}{8} [\cos \theta + \beta] \text{Tr} \gamma(T + \beta Z') \gamma(T + \beta Z') \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Z') \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= M_W^2 \frac{\sqrt{s}}{2} [\cos \theta + \beta] \text{Tr} \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Z') \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5]
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) &= 1 - i\lambda_1 \gamma(X') \gamma(Y) = 1 - \lambda_1 \gamma(Z') \gamma(T) \gamma_5, \quad \text{et} \\
 \text{Tr} \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) \gamma(Z') \gamma(\epsilon^{(\lambda_1)}) \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] &= -\text{Tr} [\gamma(Z') - \lambda_1 \gamma(T) \gamma_5] \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\
 &= -4Z' \cdot X = 4 \sin \theta
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(Q_a)\gamma(p_4)\gamma(\epsilon^{(\lambda_1)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] = 2M_W^2\sqrt{s} \sin \theta [\cos \theta + \beta]$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(Q_a)\gamma(p_4)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= -\frac{\sqrt{s}}{2} \text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(Z)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(p_4)\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= -\sqrt{s} Z \cdot \epsilon^{(-\lambda_1)} \text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(p_4)\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \end{aligned}$$

Or,

$$\boxed{\gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(p_4) = -\frac{s}{4}\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)}) [1 - \lambda_1\beta\gamma_5]^2} \quad (4.77)$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(p_4)\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] &= -\frac{s}{4} (1 + \lambda_1\beta)^2 \text{Tr } \gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= -s(1 + \lambda_1\beta)^2 \epsilon^{(-\lambda_1)} \cdot (X - iY) = -\frac{s}{\sqrt{2}}(1 + \lambda_1\beta)^2 [1 - \lambda_1 \cos \theta] \end{aligned}$$

Comme $Z \cdot \epsilon^{(-\lambda_1)} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sin \theta$, on aboutit à

$$\begin{aligned} & \text{Tr } \gamma(p_3)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(Q_a)\gamma(p_4)\gamma(\epsilon^{(-\lambda_1)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= \lambda_1 \frac{s\sqrt{s}}{2} (1 + \lambda_1\beta)^2 \sin \theta [1 - \lambda_1 \cos \theta] \end{aligned}$$

Finalement, pour $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, on obtient

$$X_a(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{s\sqrt{s}}{2} \sin \theta \left[\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 - \beta^2) [\cos \theta + \beta] + \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \lambda_1 (1 + \lambda_1\beta)^2 [1 - \lambda_1 \cos \theta] \right]$$

$$\boxed{X_a(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{s\sqrt{s}}{2} \sin \theta \left[\delta_{\lambda_1, \lambda_2} (1 - \beta^2) [\cos \theta + \beta] + \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \lambda_1 (1 + \lambda_1\beta)^2 [1 - \lambda_1 \cos \theta] \right]}, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1} \quad (4.78)$$

☞ Prenons maintenant $\lambda_1 = 0, |\lambda_2| = 1$. Ici, $\epsilon_3^{(0)} \equiv z_3$ et, dans le couplage d'hélicité en voie s , $\gamma(p_3)\gamma(\epsilon_3^{(0)}) = M_W\gamma(t_3)\gamma(z_3) = M_W\gamma(T)\gamma(Z')$. Donc²³

$$\begin{aligned} X_a(0, \lambda_2) &= -M_W \frac{s}{4} \text{Tr } \gamma(T)\gamma(Z')\gamma(Z + \beta Z')\gamma(T - \beta Z')\gamma(\epsilon^{(\lambda_2)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= M_W \frac{s}{4} \text{Tr } \gamma(T) [\cos \theta + \beta + \sin \theta \gamma(Z')\gamma(X')] \gamma(T - \beta Z')\gamma(\epsilon^{(\lambda_2)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= M_W \frac{s}{4} \text{Tr } [\cos \theta + \beta + \sin \theta \gamma(Z')\gamma(X')] [1 + \beta \gamma(Z')\gamma(T)] \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)})\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \end{aligned}$$

23. Rappelons que $\epsilon_2^* = [\epsilon_1^{(-\lambda_2)}]^* = -\epsilon^{(\lambda_2)}$.

Or, d'une part, $\gamma(Z')\gamma(X') = \gamma(Z)\gamma(X)$, et, d'autre part,

$$\boxed{[1 + \beta\gamma(Z')\gamma(T)]\gamma(\epsilon^{(\lambda_2)}) = \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)})[1 - \lambda_2\beta\gamma_5]} \quad (4.79)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} X_a(0, \lambda_2) &= M_W \frac{s}{4} [1 + \lambda_2\beta] \text{Tr} \gamma(X - iY) [\cos \theta + \beta + \sin \theta \gamma(Z)\gamma(X)] \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)}) [1 - \gamma_5] \\ &= M_W \frac{s}{4} [1 + \lambda_2\beta] \text{Tr} \left\{ [\cos \theta + \beta] \gamma(X - iY) + \sin \theta \gamma(Z) + \sin \theta \gamma(T)\gamma_5 \right\} \gamma(\epsilon^{(\lambda_2)}) [1 - \gamma_5] \\ &= M_W s [1 + \lambda_2\beta] \left\{ [\cos \theta + \beta] (X - iY) + \sin \theta Z \right\} \cdot \epsilon^{(\lambda_2)} \end{aligned}$$

soit, tous calculs effectués,

$$\boxed{X_a(0, \lambda_2) = \frac{M_W s}{\sqrt{2}} [1 + \lambda_2\beta] [1 + \lambda_2 \cos \theta] [\beta - \lambda_2 + 2 \cos \theta],} \quad (4.80)$$

$$|\lambda_2| = 1$$

☞ Le lecteur vérifiera que l'on obtient de façon similaire :

$$\boxed{X_a(\lambda_1, 0) = -\frac{M_W s}{\sqrt{2}} [1 - \lambda_1\beta] [1 - \lambda_1 \cos \theta] [\beta + \lambda_1 + 2 \cos \theta],} \quad (4.81)$$

$$|\lambda_1| = 1$$

☞ Prenons maintenant $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a alors $\gamma(p_3)\gamma(\epsilon_3^{(0)}) = -\gamma(p_4)\gamma(\epsilon_4^{(0)}) = M_W \gamma(T)\gamma(Z')$, et

$$\begin{aligned} X_a(0, 0) &= -M_W^2 \frac{\sqrt{s}}{2} \text{Tr} \gamma(T)\gamma(Z')\gamma(Z + \beta Z')\gamma(T)\gamma(Z')\gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= M_W^2 \frac{\sqrt{s}}{2} \text{Tr} \left\{ [\cos \theta + \beta] \gamma(Z') + \sin \theta \gamma(X') \right\} \gamma(X - iY) [1 + \gamma_5] \\ &= 2M_W^2 \sqrt{s} [(\cos \theta + \beta) Z' \cdot X + \sin \theta X' \cdot X], \text{ soit} \end{aligned}$$

$$\boxed{X_a(0, 0) = -2M_W^2 \sqrt{s} \sin \theta [\beta + \cos \theta]} \quad (4.82)$$

4.11 Amplitudes d'hélicité de $g + g \rightarrow g + g$

La diffusion de deux gluons, $g + g \rightarrow g + g$, est un processus de pure Chromodynamique Quantique. A l'ordre le plus bas selon la constante de couplage forte $\sqrt{4\pi\alpha_s}$, il est décrit par les diagrammes de la figure (4.9)

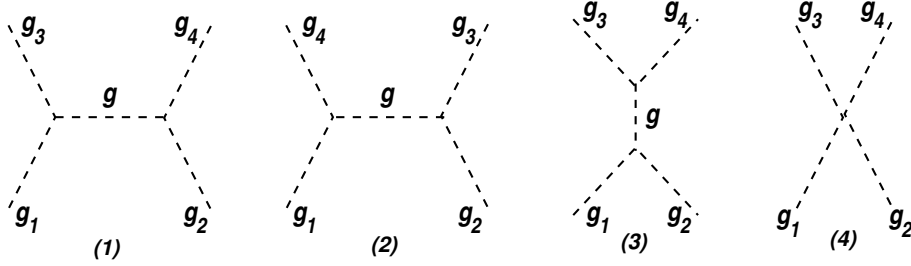


FIGURE 4.9 – Diagrammes de Feynman pour $g + g \rightarrow g + g$

correspondant respectivement aux amplitudes tensorielles suivantes (obtenues après division par $4\pi\alpha_s$) :

$$A_1 = -\frac{1}{(p_1 - p_3)^2} f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} \left\{ g_{\mu\rho}(p_1 + p_3)_\omega + g_{\rho\omega}(p_1 - 2p_3)_\mu - g_{\mu\omega}(2p_1 - p_3)_\rho \right\} g^{\omega\pi} \times \\ \left\{ g_{\nu\sigma}(p_4 + p_2)_\pi + g_{\nu\pi}(p_4 - 2p_2)_\sigma - g_{\sigma\pi}(2p_4 - p_2)_\nu \right\}$$

$$A_2 = -\frac{1}{(p_1 - p_4)^2} f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} \left\{ g_{\mu\sigma}(p_1 + p_4)_\omega + g_{\sigma\omega}(p_1 - 2p_4)_\mu - g_{\mu\omega}(2p_1 - p_4)_\sigma \right\} g^{\omega\pi} \times \\ \left\{ g_{\nu\rho}(p_3 + p_2)_\pi + g_{\nu\pi}(p_3 - 2p_2)_\rho - g_{\rho\pi}(2p_3 - p_2)_\nu \right\}$$

$$A_3 = \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} f_{\alpha\beta a} f_{\gamma\delta a} \left\{ g_{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\omega + g_{\nu\omega}(p_1 + 2p_2)_\mu - g_{\mu\omega}(2p_1 + p_2)_\nu \right\} g^{\omega\pi} \times \\ \left\{ g_{\rho\sigma}(p_3 - p_4)_\pi + g_{\sigma\pi}(p_3 + 2p_4)_\rho - g_{\rho\pi}(2p_3 + p_4)_\sigma \right\}$$

$$A_4 = f_{\alpha\beta a} f_{\gamma\delta a} \left\{ g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right\} + f_{\alpha\gamma a} f_{\delta\beta a} \left\{ g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} \right\} \\ + f_{\gamma\beta a} f_{\alpha\delta a} \left\{ g_{\rho\sigma} g_{\nu\mu} - g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} \right\}$$

Dans ces expressions, les grandeurs $f_{\alpha\beta a}$, etc, sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie $su(3)$, et une sommation sur l'indice a y est implicite. Ces constantes ne sont pas indépendantes car elles satisfont l'identité de Jacobi

$$f_{\alpha\beta a} f_{a\gamma\delta} + f_{\beta\gamma a} f_{a\alpha\delta} + f_{\gamma\alpha a} f_{a\beta\delta} = 0 \quad (4.83)$$

(avec sommation sur a), soit

$$f_{\alpha\beta a} f_{\gamma\delta a} = f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} - f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} \quad (4.84)$$

Cette dernière relation permet des regroupements de termes dans l'amplitude totale. Mais avant de les effectuer, précisons les notations. Le référentiel du centre de masse de la réaction a pour base (T, X, Y, Z) . Les gluons sont des particules vectorielles de masse nulle et n'ont donc que des polarisations circulaires. Leurs 4-impulsions, indices de Lorentz, indices de couleur, 4-vecteurs de polarisation sont les suivants :

- ✓ $(p_1, \mu, \alpha, \epsilon_1)$ et $(p_2, \nu, \beta, \epsilon_2)$ pour les gluons initiaux, avec $p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T + Z]$, $p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - Z]$,
 $\epsilon_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_1 X + iY]$, $\epsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_2 X + iY]$;
- ✓ $(p_3, \rho, \gamma, \epsilon_3)$ et $(p_4, \sigma, \delta, \epsilon_4)$ pour les gluons finals, avec $p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T + Z']$, $p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} [T - Z']$,
 $\epsilon_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda_3 X' + iY]$, $\epsilon_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} [-\lambda_4 X' + iY]$, $Z' = Z \cos \theta + X \sin \theta$, $X' = X \cos \theta - Z \sin \theta$;
- ✓ enfin : $s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4$, $t = 2p_1 \cdot p_3 = 2p_2 \cdot p_4$, $u = 2p_1 \cdot p_4 = 2p_2 \cdot p_3$, et l'on a $s = t + u$.

En couplage d'hélicité dans la voie s , les 4-impulsions p_1 et p_2 sont toutes deux orthogonales à la fois à ϵ_1 et ϵ_2 ; de même, les 4-impulsions p_3 et p_4 sont toutes deux orthogonales à la fois à ϵ_3 et ϵ_4 . En conséquence, nous éliminerons dans l'amplitude tensorielle les termes proportionnels à $p_{1\mu}, p_{1\nu}, p_{2\mu}, p_{2\nu}, p_{3\rho}, p_{3\sigma}, p_{4\rho}, p_{4\sigma}$, dont les contributions sont finalement nulles²⁴. Tenant compte aussi du fait que $(p_1 + p_2)_{\mu \text{ ou } \nu} = (p_3 + p_4)_{\mu \text{ ou } \nu} \equiv 0$ et $(p_3 + p_4)_{\rho \text{ ou } \sigma} = (p_1 + p_2)_{\rho \text{ ou } \sigma} \equiv 0$, on obtient ainsi l'amplitude tensorielle "effective" suivante

$$\begin{aligned}
 T &= 2 f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} T_1 + 2 f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} T_2, \quad \text{où} \\
 T_1 &= g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + \frac{u}{t} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \frac{u}{s} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \frac{2}{t} \left\{ p_{1\rho} [p_{3\mu} g_{\nu\sigma} - p_{3\nu} g_{\mu\sigma}] \right. \\
 &\quad \left. + p_{1\sigma} [p_{3\nu} g_{\mu\rho} - p_{3\mu} g_{\nu\rho}] - p_{1\rho} p_{1\sigma} g_{\mu\nu} - p_{3\mu} p_{3\nu} g_{\rho\sigma} \right\} \\
 T_2 &= g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + \frac{t}{u} g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - \frac{t}{s} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \frac{2}{u} \left\{ -p_{1\sigma} [p_{3\mu} g_{\nu\rho} - p_{3\nu} g_{\mu\rho}] \right. \\
 &\quad \left. - p_{1\rho} [p_{3\nu} g_{\mu\sigma} - p_{3\mu} g_{\nu\sigma}] - p_{1\rho} p_{1\sigma} g_{\mu\nu} - p_{3\mu} p_{3\nu} g_{\rho\sigma} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Clairement, on obtient T_2 à partir de T_1 en échangeant entre eux soit les gluons finals, soit les gluons initiaux²⁵. Pour le calcul des amplitudes d'hélicité, qui est ici encore un excellent exercice de manipulation des 4-vecteurs de polarisation et de leurs indices de spin, les formules suivantes sont utiles :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 &= \delta_{\lambda_2, \lambda_1} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 \lambda_2), \quad \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = \delta_{\lambda_3, \lambda_4} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_3 \lambda_4), \\
 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^* &= -\frac{1}{2} [1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta], \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_4^* = -\frac{1}{2} [1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta], \\
 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^* &= -\frac{1}{2} [1 - \lambda_2 \lambda_3 \cos \theta], \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* = -\frac{1}{2} [1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta], \\
 p_1 \cdot \epsilon_3^* &= -\lambda_3 \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}} \sin \theta, \quad p_1 \cdot \epsilon_4^* = \lambda_4 \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}} \sin \theta, \\
 p_3 \cdot \epsilon_1 &= \lambda_1 \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}} \sin \theta, \quad p_3 \cdot \epsilon_2 = -\lambda_2 \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}} \sin \theta
 \end{aligned}$$

24. Notons ici que l'amplitude tensorielle est invariante de jauge relativement à chacun des indices μ, ν, ρ et σ , à la condition que les autres indices soient contractés avec les vecteurs de polarisation qui leur sont respectivement attachés.

25. Notons aussi que les facteurs de couleur associés respectivement à T_1 et à T_2 sont indépendants et que de ce fait, T_1 et T_2 sont séparément invariants de jauge, sous la condition mentionnée dans la note précédente.

$$\cos \theta = 1 - \frac{2t}{s} = \frac{2u}{s} - 1, \quad \sin^2 \theta = \frac{4ut}{s^2}$$

☞ Pour simplifier l'écriture, posons $c = \cos \theta$ puis calculons :

$$\begin{aligned} T_{1\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= (\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) + \frac{u}{t}(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) - \frac{u}{s}(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) \\ &\quad + \frac{2}{t} \left[(p_1 \cdot \epsilon_3^*) \left[(p_3 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) - (p_3 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*) \right] \right. \\ &\quad \left. + (p_1 \cdot \epsilon_4^*) \left[(p_3 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) - (p_3 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) \right] \right. \\ &\quad \left. - (p_1 \cdot \epsilon_3^*)(p_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) - (p_3 \cdot \epsilon_1)(p_3 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) \right] \\ &= \frac{1}{4} [1 - \lambda_1 \lambda_4 c] [1 - \lambda_2 \lambda_3 c] + \frac{u}{4t} [1 + \lambda_1 \lambda_3 c] [1 + \lambda_2 \lambda_4 c] - \frac{u}{s} \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_4, \lambda_3} \\ &\quad + \frac{1}{4t} \left[\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{2}} \sin \theta \right]^2 \left\{ \frac{\lambda_3}{2} [\lambda_1 [1 + \lambda_2 \lambda_4 c] + \lambda_2 [1 - \lambda_1 \lambda_3 c]] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_4}{2} [\lambda_2 [1 + \lambda_1 \lambda_3 c] + \lambda_1 [1 - \lambda_2 \lambda_3 c]] + \lambda_3 \lambda_4 \delta_{\lambda_2, \lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_4, \lambda_3} \right\} \\ &= \frac{1}{4} [1 - \lambda_1 \lambda_4 c] [1 - \lambda_2 \lambda_3 c] + \frac{s-t}{4t} [1 + \lambda_1 \lambda_3 c] [1 + \lambda_2 \lambda_4 c] \\ &\quad + \frac{u}{4s} \left\{ -4\delta_{\lambda_2, \lambda_1} \delta_{\lambda_4, \lambda_3} + \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2] [\lambda_3 + \lambda_4] + \lambda_3 \lambda_4 \delta_{\lambda_2, \lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_4, \lambda_3} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} [\lambda_1 + \lambda_2] [\lambda_3 + \lambda_4] \left[\frac{2u}{s} - 1 \right] + \frac{s}{4t} \left[1 + [\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4] \left[1 - \frac{2t}{s} \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \left[1 - \frac{4ut}{s^2} \right] \right] + \frac{u}{4s} \{ \dots \} \end{aligned}$$

Remplaçant ensuite $4\delta_{\lambda, \lambda'}$ par $1 + \lambda\lambda'$, on trouve finalement

$$T_{1\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{s}{4t} [1 + \lambda_1 \lambda_3] [1 + \lambda_2 \lambda_4] - \frac{u}{4s} [1 - \lambda_1 \lambda_2] [1 - \lambda_3 \lambda_4] - \frac{1}{4} [\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_3 - \lambda_4]$$

puis

$$T_{2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{s}{4u} [1 + \lambda_1 \lambda_4] [1 + \lambda_2 \lambda_3] - \frac{t}{4s} [1 - \lambda_1 \lambda_2] [1 - \lambda_3 \lambda_4] - \frac{1}{4} [\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_4 - \lambda_3]$$

L'amplitude générique totale s'écrit donc (somme implicite sur a)

$$\begin{aligned} T_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \left[f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} X_1 + f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} X_2 \right] \quad \text{avec} \\ X_1 &= \frac{s}{t} [1 + \lambda_1 \lambda_3] [1 + \lambda_2 \lambda_4] - \frac{u}{s} [1 - \lambda_1 \lambda_2] [1 - \lambda_3 \lambda_4] - [\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_3 - \lambda_4], \\ X_2 &= \frac{s}{u} [1 + \lambda_1 \lambda_4] [1 + \lambda_2 \lambda_3] - \frac{t}{s} [1 - \lambda_1 \lambda_2] [1 - \lambda_3 \lambda_4] - [\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_4 - \lambda_3] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Dix amplitudes sont nulles indépendamment des facteurs de couleur $f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a}$ et $f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a}$:

$$T_{++++}^{\dots} = T_{+++-}^{\dots} = T_{+--+}^{\dots} = T_{-+++}^{\dots} = T_{----+}^{\dots} = T_{---+-}^{\dots} = T_{-+--}^{\dots} = T_{+---}^{\dots} = 0$$

$$T_{++--}^{\dots} = T_{--++}^{\dots} = 0$$

et les six restantes, nulles ou non selon les valeurs des facteurs de couleur, sont listées dans le tableau VII :

$T_{++++}^{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{----}^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \left[f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} \frac{s}{t} + f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} \frac{s}{u} \right]$	(4.87)
$T_{+-+-}^{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{-+-+}^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \left[f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} \frac{u^2}{st} + f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} \frac{u}{s} \right]$	
$T_{+--+}^{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{-++-}^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \left[f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} \frac{t}{s} + f_{\alpha\delta a} f_{\beta\gamma a} \frac{t^2}{su} \right]$	

Tableau VII - Amplitudes d'hélicité de $g + g \rightarrow g + g$

Utilisant les relations

$$\sum_{\alpha\gamma} f_{\alpha\gamma a} f_{\alpha\gamma b} = 3\delta_{ab}, \quad \sum_{\alpha\alpha\delta} f_{\alpha\gamma a} f_{\beta\delta a} f_{\alpha\delta b} = -\sum_{\alpha\alpha\delta} f_{\delta\beta a} f_{a\gamma\alpha} f_{\alpha\delta b} = \frac{3}{2} f_{\beta\gamma b},$$

on déduit ensuite le taux d'interaction²⁶

$$\sum |T|^2 = 128 \times 9 \times \left[3 + \frac{st}{u^2} + \frac{su}{t^2} - \frac{ut}{s^2} \right] \quad (4.88)$$

²⁶. B.L. Combridge, J. Kripfganz, J. Ranft, Phys. Lett. 70B (1977) 234. Attention, dans cette référence t et u sont les variables de Mandelstam, opposées à t et u définis ici, lesquels sont positifs.

4.12 Complément I : Obtention du taux d'interaction de $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow e^- + e^+$ par un calcul de trace ; amplitudes $F_{m\bar{m}; n\bar{n}}$

Pour bien comprendre un calcul, il est toujours bon de l'aborder de différentes façons afin de cerner ses difficultés et de rechercher des astuces permettant de contourner celles-ci. Ainsi, à titre de comparaison avec le calcul d'amplitudes d'hélicité et pour compléter l'étude du processus virtuel $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow e^- + e^+$, nous présentons le calcul du tenseur

$$\begin{aligned}
 X_{\mu\rho;\nu\sigma} &= \sum_{\text{pol.}} T_{\mu\nu} T_{\nu\sigma}^*, \quad \text{avec } T_{\mu\nu} = \bar{U}_3 X_{\mu\nu} V_4, \quad T_{\rho\sigma}^* = \bar{V}_4 \bar{X}_{\rho\sigma} U_3, \\
 X_{\mu\nu} &= 2 \left[\frac{p_{3\mu}}{a} - \frac{p_{4\mu}}{b} \right] \gamma_\nu - \frac{1}{a} \gamma_\mu \gamma(p_1) \gamma_\nu + \frac{1}{b} \gamma_\nu \gamma(p_1) \gamma_\mu, \\
 \bar{X}_{\rho\sigma} &= 2 \left[\frac{p_{3\rho}}{a} - \frac{p_{4\rho}}{b} \right] \gamma_\sigma - \frac{1}{a} \gamma_\rho \gamma(p_1) \gamma_\sigma + \frac{1}{b} \gamma_\sigma \gamma(p_1) \gamma_\rho,
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

où $\sum_{\text{pol.}}$ est la somme sur tous les états de spin de l'électron et du positron, que nous effectuerons en calculant la trace

$$X_{\mu\rho;\nu\sigma} = \text{Tr} [\gamma(p_3) + m] X_{\mu\nu} [\gamma(p_4) - m] \bar{X}_{\rho\sigma}$$

Pour s'épargner le fastidieux calcul d'une trace d'un produit de huit matrices γ , nous utiliserons préalablement la décomposition suivante d'un produit de trois de ces matrices²⁷ :

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu = g_{\mu\alpha} \gamma_\nu - g_{\mu\nu} \gamma_\alpha + g_{\alpha\nu} \gamma_\mu - i \epsilon_{\mu\alpha\nu\omega} \gamma^\omega \gamma_5$$

pour écrire les tenseurs $X_{\mu\nu}$ et $\bar{X}_{\rho\sigma}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
 X_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha + i B_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha \gamma_5, \quad \bar{X}_{\rho\sigma} = A_{\rho\sigma\beta} \gamma^\beta - i B_{\rho\sigma\beta} \gamma^\beta \gamma_5, \quad \text{avec} \\
 A_{\mu\nu\alpha} &= 2 \left[\frac{p_{3\mu}}{a} - \frac{p_{4\mu}}{b} \right] g_{\nu\alpha} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left[p_{1\mu} g_{\nu\alpha} - p_{1\alpha} g_{\mu\nu} + p_{1\nu} g_{\mu\alpha} \right] \\
 B_{\mu\nu\alpha} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\omega} p_1^\omega \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)
 \end{aligned}$$

et obtenir "simplement" :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} X_{\mu\nu;\rho\sigma} &= \left\{ A_{\mu\nu\alpha} A_{\rho\sigma\beta} + B_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma\beta} \right\} L^{\alpha\beta} \\
 + g^{\alpha\beta} &\left\{ (m^2 - p_3 \cdot p_4) B_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma\beta} - (m^2 + p_3 \cdot p_4) A_{\mu\nu\alpha} A_{\rho\sigma\beta} \right\} \\
 + &\left\{ B_{\mu\nu\alpha} A_{\rho\sigma\beta} - A_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma\beta} \right\} \epsilon^{\alpha\beta\omega\pi} p_{3\omega} p_{4\pi}, \quad \text{où} \\
 L^{\alpha\beta} &= p_3^\alpha p_4^\beta + p_4^\alpha p_3^\beta
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

L'étape suivante, la plus longue, consiste à effectuer les contractions des tenseurs dans (4.90). Observons tout d'abord que la symétrie entre les deux photons virtuels a été égarée lorsque le tenseur $X_{\mu\nu}$ a été présenté sous la forme (4.89), résultant d'un souci naturel de simplification. Pour tenter de la retrouver et exploiter au mieux l'expression (4.90), nous projeterons cette dernière sur deux tenseurs $F^{\mu\rho}$ et $G^{\nu\sigma}$, le premier orthogonal à p_1 suivant ses deux indices, le second orthogonal à p_2 suivant ses deux indices. Nous noterons $p_{i\mu} p_{j\rho} F^{\mu\rho} = F(p_i, p_j) = F_{ij}$, et utiliserons le même type de notation pour les contractions des tenseurs $G^{\nu\sigma}$ et $L^{\alpha\beta}$.

²⁷. Voir ITL, Eq, 7.59.

① Calcul de $Q_1 = A_{\mu\nu\alpha}A_{\rho\sigma\beta}L^{\alpha\beta}F^{\mu\rho}G^{\nu\sigma}$

- $Q_{11} = 4 \left[\frac{p_{3\mu}}{a} - \frac{p_{4\mu}}{b} \right] \left[\frac{p_{3\rho}}{a} - \frac{p_{4\rho}}{b} \right] F^{\mu\rho} G_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta} = 4 \left[\frac{F_{33}}{a^2} + \frac{F_{44}}{b^2} - \frac{[F_{34} + F_{43}]}{ab} \right] [G_{34} + G_{43}]$
- $Q_{12} = \frac{2}{a} p_{3\mu} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) g_{\nu\alpha} [p_{1\sigma} g_{\rho\beta} - p_{1\beta} g_{\rho\sigma}] F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} L^{\alpha\beta} = \frac{2}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [F_{33} G_{41} + F_{34} G_{31}]$
 $-\frac{2}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 H_{33} + p_1 \cdot p_3 H_{34}], \text{ où } H^{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$
- $Q_{13} = -\frac{2}{b} p_{4\mu} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) g_{\nu\alpha} [p_{1\sigma} g_{\rho\beta} - p_{1\beta} g_{\rho\sigma}] F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} L^{\alpha\beta} = -\frac{2}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [F_{43} G_{41} + F_{44} G_{31}]$
 $+\frac{2}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 H_{43} + p_1 \cdot p_3 H_{44}]$
- $Q_{14} = \frac{2}{a} p_{3\rho} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) g_{\sigma\beta} [p_{1\nu} g_{\mu\alpha} - p_{1\alpha} g_{\mu\nu}] F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} L^{\alpha\beta} = \frac{2}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [F_{33} G_{14} + F_{43} G_{13}]$
 $-\frac{2}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 K_{33} + p_1 \cdot p_3 K_{34}], \text{ où } K^{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$
- $Q_{15} = -\frac{2}{b} p_{4\rho} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) g_{\sigma\beta} [p_{1\nu} g_{\mu\alpha} - p_{1\alpha} g_{\mu\nu}] F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} L^{\alpha\beta} = -\frac{2}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [F_{34} G_{14} + F_{44} G_{13}]$
 $+\frac{2}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 K_{43} + p_1 \cdot p_3 K_{44}]$
- $Q_{16} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 [p_{1\nu} g_{\mu\alpha} - p_{1\alpha} g_{\mu\nu}] [p_{1\sigma} g_{\rho\beta} - p_{1\beta} g_{\rho\sigma}] F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} L^{\alpha\beta}$
 $= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 \left\{ [F_{34} + F_{43}] G_{11} - p_1 \cdot p_3 H_{41} - p_1 \cdot p_4 H_{31} \right.$
 $\left. - p_1 \cdot p_3 K_{41} - p_1 \cdot p_4 K_{31} + 2(p_1 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)H \right\}, \text{ où } H = g_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$

② Calcul de $Q_2 = B_{\mu\nu\alpha}B_{\rho\sigma\beta}L^{\alpha\beta}F^{\mu\rho}G^{\nu\sigma}$

Le produit $\epsilon_{\mu\nu\alpha r} \epsilon_{\rho\sigma\beta s}$ ne permet pas d'effectuer immédiatement des produits scalaires. On peut lui trouver une forme adaptée en utilisant la formule (2.183) du chapitre 2, reposant sur la définition du tenseur de Levi-Civita. Compte tenu de la métrique de Minkowski, ledit produit s'exprime selon la longue formule (4.91) ci-dessous (développement d'un déterminant 4×4).

- $Q_{21} = t_1 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 \left[F G L + M_{34} + M_{43} + N_{34} + N_{43} - F [G_{34} + G_{43}] - G [F_{34} + F_{43}] - M L \right]$
 $\text{où } F = g_{\mu\rho} F^{\mu\rho}, G = g_{\nu\sigma} G^{\nu\sigma}, M^{\rho\nu} = g_{\mu\sigma} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}, N^{\mu\sigma} = g_{\nu\rho} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma},$
 $L = g_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta} = 2 p_3 \cdot p_4, M = g_{\rho\nu} M^{\rho\nu} = N = g_{\mu\sigma} N^{\mu\sigma}$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\mu\nu\alpha\tau} \epsilon_{\rho\sigma\beta s} &= -g_{rs} \left[g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\beta} g_{\alpha\rho} + g_{\mu\beta} g_{\nu\rho} g_{\alpha\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\beta} g_{\alpha\sigma} \right. \\
 &\quad \left. - g_{\mu\beta} g_{\nu\sigma} g_{\alpha\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} g_{\alpha\beta} \right] + g_{r\beta} \left[g_{\mu s} g_{\nu\rho} g_{\alpha\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} g_{\alpha s} + g_{\mu\sigma} g_{\nu s} g_{\alpha\rho} \right. \\
 &\quad \left. - g_{\mu s} g_{\nu\sigma} g_{\alpha\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} g_{\alpha s} - g_{\mu\rho} g_{\nu s} g_{\alpha\sigma} \right] - g_{r\sigma} \left[g_{\mu\beta} g_{\nu s} g_{\alpha\rho} + g_{\mu s} g_{\nu\rho} g_{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + g_{\mu\rho} g_{\nu\beta} g_{\alpha s} - g_{\mu\beta} g_{\nu\rho} g_{\alpha s} - g_{\mu\rho} g_{\nu s} g_{\alpha\beta} - g_{\mu s} g_{\nu\beta} g_{\alpha\rho} \right] + g_{r\rho} \left[g_{\mu\sigma} g_{\nu\beta} g_{\alpha s} \right. \\
 &\quad \left. + g_{\mu\beta} g_{\nu s} g_{\alpha\sigma} + g_{\mu s} g_{\nu\sigma} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\sigma} g_{\nu s} g_{\alpha\beta} - g_{\mu s} g_{\nu\beta} g_{\alpha\sigma} - g_{\mu\beta} g_{\nu\sigma} g_{\alpha s} \right] \\
 &= g_{rs} \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\beta} - g_{r\beta} \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \epsilon_{\lambda s\rho\sigma} + g_{r\sigma} \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \epsilon_{\lambda\beta s\rho} - g_{r\rho} \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \epsilon_{\lambda\sigma\beta s}
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

- $Q_{22} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 \left[F G L_{11} + p_1 \cdot p_4 M_{31} + p_1 \cdot p_3 M_{41} - M L_{11} - F [p_1 \cdot p_4 G_{13} + p_1 \cdot p_3 G_{14}] \right]$
- $Q_{23} = - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 \left[G_{11} [F_{34} + F_{43}] + F [p_1 \cdot p_3 G_{41} + p_1 \cdot p_4 G_{31}] \right. \\ \left. - p_1 \cdot p_3 N_{41} - p_1 \cdot p_4 N_{31} - F L G_{11} \right]$

③ Calcul de $Q_3 = (m^2 - p_3 \cdot p_4) B_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma\beta} g^{\alpha\beta} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$

- $Q_3 = -(m^2 - p_3 \cdot p_4) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 p_1^r p_1^s F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} \left[g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} g_{rs} + g_{\mu\sigma} g_{\nu s} g_{r\rho} + g_{\mu s} g_{\nu\rho} g_{r\sigma} \right. \\ \left. - g_{\mu\rho} g_{\nu s} g_{r\sigma} - g_{\mu s} g_{\nu\sigma} g_{r\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} g_{rs} \right] = -(m^2 - p_3 \cdot p_4) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 \left[-t_1 F G \right. \\ \left. - F G_{11} + t_1 M \right]$

④ Calcul de $Q_4 = -(m^2 + p_3 \cdot p_4) A_{\mu\nu\alpha} A_{\rho\sigma\beta} g^{\alpha\beta} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$

$$\begin{aligned}
 Q_4 &= -(m^2 + p_3 \cdot p_4) \left\{ 4G \left[\frac{F_{33}}{a^2} + \frac{F_{44}}{b^2} - \frac{[F_{34} + F_{43}]}{ab} \right] + 2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left[\frac{H_{41} + K_{41}}{b} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{M_{41} + N_{41}}{b} - \frac{H_{31} + K_{31}}{a} + \frac{M_{31} + N_{31}}{a} \right] + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 [-t_1 H + F G_{11}] \right\}
 \end{aligned}$$

⑤ Calcul de $Q_5 = B_{\mu\nu\alpha} A_{\rho\sigma\beta} \epsilon^{\alpha\beta\omega\pi} p_{3\omega} p_{4\pi} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$

$$\begin{aligned}
 \bullet Q_5 &= -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} \left[\delta_\mu^\beta p_{3\nu} p_1 \cdot p_4 + p_{3\mu} p_{4\nu} p_1^\beta + p_{4\mu} \delta_\nu^\beta p_1 \cdot p_3 - \delta_\mu^\beta p_{4\nu} p_1 \cdot p_3 \right. \\
 &\quad \left. - p_{4\mu} p_{3\nu} p_1^\beta - p_{3\mu} \delta_\nu^\beta p_1 \cdot p_4 \right] \left\{ 2 \left[\frac{p_{3\rho}}{a} - \frac{p_{4\rho}}{b} \right] g_{\sigma\beta} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_{1\sigma} g_{\rho\beta} - p_{1\beta} g_{\rho\sigma}] \right\} \\
 &= -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \left[\frac{2}{a} [p_1 \cdot p_4 M_{33} + G_{41} F_{33} + p_1 \cdot p_3 G F_{43} - p_1 \cdot p_3 M_{34} - G_{31} F_{43} - p_1 \cdot p_4 G F_{33}] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{b} [p_1 \cdot p_4 M_{43} + G_{41} F_{34} + p_1 \cdot p_3 G F_{44} - p_1 \cdot p_3 M_{44} - G_{31} F_{44} - p_1 \cdot p_4 G F_{34}] \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 F G_{31} + t_1 H_{34} + p_1 \cdot p_3 N_{41} - p_1 \cdot p_3 H_{41} - p_1 \cdot p_3 F G_{41} \right. \\
 &\quad \left. - t_1 H_{43} - p_1 \cdot p_4 N_{31} + p_1 \cdot p_4 H_{31}] \right]
 \end{aligned}$$

⑥ Calcul de $Q_6 = -A_{\mu\nu\alpha} B_{\rho\sigma\beta} \epsilon^{\alpha\beta\omega\pi} p_{3\omega} p_{4\pi} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma}$

$$\begin{aligned}
 Q_6 &= -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \left[\frac{2}{a} [p_1 \cdot p_4 N_{33} + G_{14} F_{33} + p_1 \cdot p_3 G F_{34} - p_1 \cdot p_3 N_{34} - G_{13} F_{34} \right. \\
 &\quad \left. - p_1 \cdot p_4 G F_{33}] - \frac{2}{b} [p_1 \cdot p_4 N_{43} + G_{14} F_{43} + p_1 \cdot p_3 G F_{44} - p_1 \cdot p_3 N_{44} \right. \\
 &\quad \left. - G_{13} F_{44} - p_1 \cdot p_4 G F_{43}] + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) [p_1 \cdot p_4 F G_{13} + t_1 K_{34} + p_1 \cdot p_3 M_{41} \right. \\
 &\quad \left. - p_1 \cdot p_3 K_{41} - p_1 \cdot p_3 F G_{14} - t_1 K_{43} - p_1 \cdot p_4 M_{31} + p_1 \cdot p_4 K_{31}] \right]
 \end{aligned}$$

Nous ordonnerons ensuite les termes de la façon suivante : facteur de FG , facteur de F , facteur de G , facteurs des $F_{ij}G_{k\ell}$, puis le reste.

① Facteur de FG

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 \left[t_1 L + L_{11} - t_1(p_3 \cdot p_4 - m^2) \right], \text{ et} \\
 t_1 L + L_{11} - t_1(p_3 \cdot p_4 - m^2) &= \frac{1}{2} t_1 W^2 + \frac{1}{2} (a + t_1)(b + t_1) \text{ où} \\
 W^2 = (p_3 + p_4)^2 &= 2m^2 + 2p_3 \cdot p_4 = (p_1 + p_2)^2 = a + b - t_1 - t_2, \text{ d'où} \\
 R_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 (ab - t_1 t_2)
 \end{aligned}$$

Pour éviter des confusions, le carré de la masse invariante de la paire e^-e^+ est ici noté W^2 plutôt que s comme dans les formules de la section 4.4, car le processus *virtuel* $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow e^- + e^+$ est un sous-processus d'un processus global dont le carré de la masse invariante est généralement noté s .

② Facteur de F

$$R_2 = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 \left\{ -t_1 [G_{34} + G_{43}] - p_1 \cdot p_4 [G_{13} + G_{31}] - p_1 \cdot p_3 [G_{14} + G_{41}] + L G_{11} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -G_{11}(p_3 \cdot p_4 - m^2) \} - (p_3 \cdot p_4 + m^2) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 G_{11} \\
 & + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \{ p_1 \cdot p_4 [G_{31} + G_{13}] - p_1 \cdot p_3 [G_{14} + G_{41}] \} \\
 & = \frac{2}{a^2} t_1 G_{44} + \frac{2}{b^2} t_1 G_{33} - \frac{2}{ab} [t_1 [G_{34} + G_{43}] + t_2 G_{11}]
 \end{aligned}$$

Pour arriver à ce résultat, nous avons effectué, d'une part, les simplifications qui résultent de $G^{\nu\sigma} p_{2\nu} = G^{\nu\sigma} p_{2\sigma} = 0$, et qui permettent d'écrire, par exemple, $G_{31} = G_{33} + G_{34}$, puisque $p_1 = p_3 + p_4 - p_2$, et, d'autre part, tenu compte de la relation $W^2 = 2(p_3 \cdot p_4 + m^2) = a + b - t_1 - t_2$.

③ Facteur de G

En écrivant $F_{22} = F_{33} + F_{44} + F_{34} + F_{43}$, on trouve

$$R_3 = \frac{2}{a^2} t_2 F_{33} + \frac{2}{b^2} t_2 F_{44} - \frac{2}{ab} [t_2 [F_{34} + F_{43}] + t_1 F_{22}]$$

③ Facteur de H

$$R_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 (ab - t_1 t_2)$$

③ Facteur de M

$$R_5 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 (ab - t_1 t_2)$$

④ Termes du type $F_{ij} G_{k\ell}$

$$\begin{aligned}
 R_6 = & -\frac{2}{a^2} \{ 4 F_{33} G_{44} + [F_{34} - F_{43}] [G_{34} - G_{43}] \} - \frac{2}{b^2} \{ 4 F_{44} G_{33} + [F_{34} - F_{43}] [G_{34} - G_{43}] \} \\
 & - \frac{4}{ab} [F_{34} + F_{43}] [G_{34} + G_{43}]
 \end{aligned}$$

⑤ Terme proportionnel à $H_{34} + K_{34}$: $R_7 = \frac{4}{a} [H_{34} + K_{34}]$.

⑥ Terme proportionnel à $H_{43} + K_{43}$: $R_7 = \frac{4}{b} [H_{43} + K_{43}]$.

⑦ Termes restants :

$$R_8 = -\Delta_{34} \left[\frac{2(t_1 + t_2)}{ab} + \frac{W^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] - \Delta_{43} \left[\frac{2(t_1 + t_2)}{ab} + \frac{W^2}{b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

où l'on a posé $\Delta_{34} = H_{34} + K_{34} - M_{34} - N_{34}$, $\Delta_{43} = H_{43} + K_{43} - M_{43} - N_{43}$.

Finalement, on aboutit à la formule (4.92) suivante, où l'on retrouve toutes les symétries souhaitées (entre les photons initiaux d'une part, et entre les leptons finals d'autre part) :

$$\begin{aligned}
 X_{\mu\rho;\nu\sigma} F^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} &= X_{FG} = \\
 &2FG \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 (ab - t_1 t_2) \\
 &+ 8F \left\{ \frac{t_1}{a^2} G_{44} + \frac{t_1}{b^2} G_{33} - \frac{1}{ab} \left[t_1 [G_{34} + G_{43}] + t_2 G_{11} \right] \right\} \\
 &+ 8G \left\{ \frac{t_2}{b^2} F_{44} + \frac{t_2}{a^2} F_{33} - \frac{1}{ab} \left[t_2 [F_{34} + F_{43}] + t_1 F_{22} \right] \right\} \\
 &+ 2(ab - t_1 t_2) \left\{ H \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^2 - M \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 \right\} \\
 &- \frac{8}{a^2} \left\{ 4F_{33} G_{44} + [F_{34} - F_{43}] [G_{34} - G_{43}] \right\} \\
 &- \frac{8}{b^2} \left\{ 4F_{44} G_{33} + [F_{34} - F_{43}] [G_{34} - G_{43}] \right\} \\
 &- \frac{16}{ab} [F_{34} + F_{43}] [G_{34} + G_{43}] \\
 &+ \frac{16}{a} [H_{34} + K_{34}] + \frac{16}{b} [H_{43} + K_{43}] \\
 &- 4\Delta_{34} \left[\frac{2(t_1 + t_2)}{ab} + \frac{W^2}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] - 4\Delta_{43} \left[\frac{2(t_1 + t_2)}{ab} + \frac{W^2}{b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Dans les cas courants, les tenseurs $F^{\mu\nu}$ et $G^{\nu\sigma}$ utilisés sont symétriques et l'expression (4.92) se simplifie considérablement, puisqu'alors $H_{\omega\pi} = K_{\omega\pi} = M_{\omega\pi} = N_{\omega\pi}$, $\Delta_{34} = \Delta_{43} = 0$:

$$\begin{aligned}
 X_{FG} &= 2FG \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)^2 (ab - t_1 t_2) - 8H \frac{(ab - t_1 t_2)}{ab} \\
 &+ 8F \left\{ \frac{t_1}{a^2} G_{44} + \frac{t_1}{b^2} G_{33} - \frac{1}{ab} \left[2t_1 G_{34} + t_2 G_{11} \right] \right\} \\
 &+ 8G \left\{ \frac{t_2}{b^2} F_{44} + \frac{t_2}{a^2} F_{33} - \frac{1}{ab} \left[2t_2 F_{34} + t_1 F_{22} \right] \right\} \\
 &- \frac{32}{a^2} F_{33} G_{44} - \frac{32}{b^2} F_{44} G_{33} - \frac{64}{ab} F_{34} G_{34} + \frac{32}{a} H_{34} + \frac{32}{b} H_{43}
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Prenons par exemple $F^{\mu\rho} = g^{\mu\rho} + \frac{p_1^\mu p_1^\rho}{t_1}$. On obtient ²⁸

$$\begin{aligned}
 X_G = 4G \left\{ 2m^2 t_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 + (ab - t_1 t_2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2t_2 W^2}{ab} \right\} \\
 + 16(t_1 - 2m^2) \left\{ \frac{G_{33}}{b^2} + \frac{G_{44}}{a^2} - \frac{2G_{34}}{ab} \right\} - \frac{16t_2}{ab} [G_{33} + G_{44}]
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

et si, de plus, $G^{\nu\sigma} = g^{\nu\sigma} + \frac{p_2^\nu p_2^\sigma}{t_2}$, cette expression devient

$$\begin{aligned}
 X_T = 8(ab - t_1 t_2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{16(t_1 + t_2)W^2}{ab} - 32m^4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \\
 + 16m^2 \left[(t_1 + t_2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{2W^2}{ab} \right]
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Puis, prenant $F^{\mu\rho} = q^\mu q^\rho$ avec $q = r + p_1 \frac{p_1 \cdot r}{t_1}$ où r est un 4-vecteur quelconque, (4.92) prend la forme

$$\begin{aligned}
 X_r = G \left\{ 2r^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 (ab - t_1 t_2) \right. \\
 \left. + 8t_2 \left[\frac{1}{b} \left(r \cdot p_4 - \frac{r \cdot p_1}{2} \right) - \frac{1}{a} \left(r \cdot p_3 - \frac{r \cdot p_1}{2} \right) \right]^2 \right. \\
 \left. - 2t_2 (r \cdot p_1)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{8}{ab} [t_1 (r \cdot p_2)^2 + r \cdot p_1 (a + b)] \right\} - 8G_{rr} \frac{ab - t_1 t_2}{ab} \\
 + \frac{16G_{3r}}{ab} [a[2r \cdot p_4 - r \cdot p_1] + t_2 r \cdot p_1] + \frac{16G_{4r}}{ab} [b[2r \cdot p_3 - r \cdot p_1] + t_2 r \cdot p_1] \\
 + \frac{8G_{33}}{b^2} \left\{ 4(r \cdot p_4) [r \cdot p_1 - r \cdot p_4] + r^2 t_1 - r^2 t_2 \frac{b}{a} \right\} \\
 + \frac{8G_{44}}{a^2} \left\{ 4(r \cdot p_3) [r \cdot p_1 - r \cdot p_3] + r^2 t_1 - r^2 t_2 \frac{a}{b} \right\} \\
 - \frac{16G_{34}}{ab} \left\{ (2r \cdot p_3 - r \cdot p_1)(2r \cdot p_4 - r \cdot p_1) + (r \cdot p_1)^2 + r^2 [t_1 + t_2] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

²⁸. Dans le calcul menant de (4.93) à (4.94), tous les termes en $1/t_1$ ou en $1/t_1^2$, qui pourraient être cause de divergence lorsque $t_1 \rightarrow 0$, disparaissent. C'est, en fait, une conséquence de l'invariance de jauge du tenseur complet $X_{\mu\rho;\nu\sigma}$. Cette remarque s'applique aussi au calcul de (4.96).

Ci-dessous sont présentées certaines combinaisons d'amplitudes

$$F_{m\bar{m}; n\bar{n}} = [\epsilon_1^m]^\mu [\epsilon_1^{\bar{m}}]^{*\rho} X_{\mu\rho; \nu\sigma} [\epsilon_2^n]^\nu [\epsilon_1^{\bar{n}}]^{*\sigma} = \sum_{\text{pol}} T_{mn} T_{\bar{m}\bar{n}}^*$$

intervenant dans le taux d'interaction de la production d'une paire e^-e^+ par échange de deux photons virtuels, selon le processus décrit au paragraphe 1.5.3 du chapitre 1²⁹. On peut les obtenir en sommant des amplitudes d'hélicité calculées dans la section 4.4 (avec le changement $s \rightarrow W^2$), ou bien en utilisant directement la formule (4.93).

$$\begin{aligned}
 F_{+++; ++} + F_{+++; --} &= \frac{4}{a^2b^2} \left\{ [ab - t_1t_2] [Z^2 - 2ab] - 4\eta^4 Z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\eta^2 Z [2ab - Z(t_1 + t_2)] \right\} \\
 F_{+++; +-} &= \frac{4Z\eta^2}{a^2b^2} \left\{ 2[Z\eta^2 - ab] + Zt_1 \right\} \\
 F_{+-; ++} &= \frac{4Z\eta^2}{a^2b^2} \left\{ 2[Z\eta^2 - ab] + Zt_2 \right\} \\
 F_{+-; +-} &= \frac{8}{a^2b^2} \left\{ abt_1t_2 - [ab - Z\eta^2]^2 \right\}, \quad F_{+-; -+} = -\frac{8Z^2\eta^4}{a^2b^2} \\
 F_{+++; 0-} - F_{+++; +0} &= \frac{8}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_2}{W^2}} \eta \zeta X_1 \left\{ ab - Z [2\eta^2 + t_1] \right\} \\
 F_{+0; ++} - F_{0-; ++} &= \frac{8}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_1}{W^2}} \eta \zeta X_2 \left\{ ab - Z [2\eta^2 + t_2] \right\} \\
 F_{+-; 0-} - F_{+-; +0} &= \frac{16}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_2}{W^2}} \eta \zeta X_1 \left\{ Z\eta^2 - ab \right\} \\
 F_{+0; +-} - F_{0-; +-} &= \frac{16}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_1}{W^2}} \eta \zeta X_2 \left\{ Z\eta^2 - ab \right\} \\
 F_{0+; +-} - F_{-0; +-} &= \frac{16}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_1}{W^2}} \eta^3 \zeta X_2 Z \\
 F_{+++; 00} &= \frac{2t_2}{W^2} \left\{ [2\eta^2 + t_1] [W^2 Z^2 - 4X_1^2 \zeta^2] - 4t_1 W^2 ab \right\} \\
 F_{00; ++} &= \frac{2t_1}{W^2} \left\{ [2\eta^2 + t_2] [W^2 Z^2 - 4X_2^2 \zeta^2] - 4t_2 W^2 ab \right\} \\
 F_{+-; 00} &= \frac{4t_2\eta^2}{a^2b^2 W^2} \left\{ 4X_1^2 \zeta^2 - Z^2 W^2 \right\} \\
 F_{+0; 00} &= \frac{8t_2}{a^2b^2} \sqrt{\frac{2t_1}{W^2}} \eta \zeta \left\{ ZW^2 - 4X_1 \zeta^2 \right\}, \quad F_{00; 00} = \frac{32t_1t_2}{a^2b^2} \zeta^2 [W^2 - 4\zeta^2]
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

29. Voir, par exemple, N. Artega, C. Carimalo, P. Kessler, S. Ong, O. Panella, Phys. Rev. 52, 4920 (1995).

avec les notations suivantes :

$$Z = W^2 + t_1 + t_2 = a + b, \quad X_1 = W^2 - t_1 + t_2, \quad X_2 = W^2 + t_1 - t_2,$$
$$\eta = \frac{W}{2}\beta \sin \theta, \quad \zeta = \frac{W}{2}\beta \cos \theta, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{W^2}}$$

Dans les formules (4.92) à (4.96), le taux d'interaction est exprimé à l'aide des invariants de la réaction et les expressions correspondantes sont directement utilisables pour obtenir, par un prolongement analytique approprié, le taux d'interaction de la diffusion Compton virtuelle, avec des photons virtuels du genre espace ou du genre temps.

4.13 Complément II : La conjugaison de charge

Du point de vue du groupe de Lorentz, la conjugaison de charge est l'opération qui transforme l'état d'une particule correspondant à une 4-impulsion p et une composante de spin σ données en l'état de son anti-particule correspondant à ces mêmes grandeurs. Pour ce même état $|[p], \sigma\rangle$, notons $a_\sigma([p])$ et $b_\sigma([p])$ les opérateurs d'annihilation de la particule et de son anti-particule, respectivement. Agissant sur ces opérateurs, la conjugaison de charge est représentée par un opérateur $U(C)$, *linéaire et unitaire*³⁰, tel que

$$U(C) a_\sigma([p]) U(C)^{-1} = \eta_c b_\sigma([p]), \quad U(C) a_\sigma^\dagger([p]) U(C)^{-1} = \eta_c^* b_\sigma^\dagger([p]) \quad (4.98)$$

avec $\eta_c \eta_c^* = 1$

On doit avoir symétriquement

$$U(C) b_\sigma([p]) U(C)^{-1} = \eta'_c a_\sigma([p]), \quad \text{avec } \eta'_c \eta_c^* = 1 \quad (4.99)$$

ce qui implique que

$$U(C)^2 = \eta_c \eta'_c \times \text{id.} \quad (4.100)$$

où id. est l'opérateur identité dans l'espace de Fock. Considérons le champ de spineurs

$$\Psi(x) = \int d\rho(p) \sum_\sigma [e^{-ip \cdot x} U_\sigma([p]) a_\sigma([p]) + e^{ip \cdot x} W_\sigma([p]) b_\sigma^\dagger([p])] \quad (4.101)$$

où $d\rho(p) = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}$ avec $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. L'analogie de ce champ qui correspondrait à un univers où anti-particule et particule auraient échangé leurs rôles s'écrit

$$\Psi^c(x) = \int d\rho(p) \sum_\sigma [e^{-ip \cdot x} U_\sigma([p]) b_\sigma([p]) + e^{ip \cdot x} W_\sigma([p]) a_\sigma^\dagger([p])] \quad (4.102)$$

et ladite conjugaison de charge doit permettre de passer de l'un à l'autre :

$$U(C) \Psi(x) U(C)^{-1} = \eta \Psi^c(x) \quad \text{où } |\eta| = 1 \quad (4.103)$$

Or,

$$U(C) \Psi(x) U(C)^{-1} = \int d\rho(p) \sum_\sigma [\eta_c e^{-ip \cdot x} U_\sigma([p]) b_\sigma([p]) + \eta_c^* e^{ip \cdot x} W_\sigma([p]) a_\sigma^\dagger([p])] \quad (4.104)$$

et l'on est donc amené à poser $\eta_c^* = \eta_c = \eta$. Cependant, le champ $\Psi(x)$ étant supposé être l'unique grandeur décrivant à la fois les particules et les anti-particules de l'espèce considérée, son transformé $\Psi^c(x)$ doit pouvoir être exprimé en fonction de celui-ci. Comparant (4.104) et (4.101), on voit que cela nécessite une conjugaison hermitique et une transposition des spineurs :

$${}^t\Psi^\dagger(x) = \int d\rho(p) \sum_\sigma [e^{-ip \cdot x} {}^tW_\sigma^\dagger([p]) b_\sigma([p]) + e^{ip \cdot x} {}^tU_\sigma^\dagger([p]) a_\sigma^\dagger([p])] \quad (4.105)$$

puis une transformation linéaire permettant d'exprimer ${}^tU_\sigma^\dagger([p])$ et ${}^tW_\sigma^\dagger([p])$ en fonction de $W_\sigma([p])$ et $U_\sigma([p])$, c'est-à-dire, telle que

³⁰. Par conjugaison de charge, le nombre d'anti-particules finales doit être égal au nombre de particules initiales.

$$L_c {}^t W_\sigma^\dagger([p]) = \eta \eta_c U_\sigma([p]) \quad \text{et} \quad L_c {}^t U_\sigma^\dagger([p]) = \eta \eta_c^* W_\sigma([p]) \quad (4.105)$$

afin d'obtenir

$$L_c {}^t \Psi^\dagger(x) = \eta \Psi^c(x) \quad (4.106)$$

Du point de vue des fonctions d'onde spinorielles et des facteurs $e^{\pm ip \cdot x}$, le passage de $\Psi(x)$ à $\Psi^c(x)$ apparaît donc comme une opération *anti-linéaire*. En fait, on peut considérer que (4.105) est la définition appropriée du spineur W conduisant à (4.106). Pour la suite, nous renvoyons le lecteur à la section 6.9 et au paragraphe 7.4.3 de notre cours ITL. Nous y montrons que le spineur à énergie négative

$$W_\sigma([p]) = (-1)^{1/2-\sigma} V_{-\sigma}([p]) \quad (V = \gamma_5 U) \quad (4.107)$$

est tel que

$$\begin{aligned} U_\sigma([p]) &= \mathcal{C} {}^t \bar{W}_\sigma([p]), & W_\sigma([p]) &= \mathcal{C} {}^t \bar{U}_\sigma([p]) \\ \text{où } \mathcal{C} &= i \gamma^2 \gamma_0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Prenant cette définition du spineur W , on obtient alors

$$U(C) \Psi(x) U(C)^{-1} = \Psi^c(x) = \mathcal{C} {}^t \bar{\Psi}(x) \quad (4.109)$$

Notons en passant que les relations simples

$$W^\dagger = V^\dagger, \quad W^\downarrow = -V^\dagger$$

justifient l'utilisation systématique des spineurs V pour représenter les états spinoriels d'une anti-particule de spin 1/2. La matrice \mathcal{C} a les propriétés suivantes :

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} = -\mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C} \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1} = -{}^t \gamma_\mu, \quad \mathcal{C} \gamma_5 \mathcal{C}^{-1} = \gamma_5 \quad (4.110)$$

Considérons alors la forme $X(\sigma', \sigma) = \bar{U}'_{\sigma'} \Gamma U_\sigma$ où Γ est le produit de n matrices γ_μ , ne comportant aucune matrice γ_5 : $\Gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$. Considérons son conjugué complexe :

$$\begin{aligned} X^*(\sigma', \sigma) &= \bar{U}_\sigma \gamma_n \cdots \gamma_1 U'_{\sigma'} = {}^t U'_{\sigma'} {}^t \gamma_1 \cdots {}^t \gamma_n {}^t \bar{U}_\sigma = \bar{W}'_{\sigma'} \mathcal{C}^{-1} {}^t \gamma_1 \cdots {}^t \gamma_n \mathcal{C}^{-1} W_\sigma \\ &= -(-1)^n \bar{W}'_{\sigma'} \gamma_1 \cdots \gamma_n W_\sigma = (-1)^n (-1)^{1-\sigma'-\sigma} \bar{U}'_{-\sigma'} \gamma_5 \gamma_1 \cdots \gamma_n \gamma_5 U_{-\sigma} \\ &= (-1)^{1-\sigma'-\sigma} X(-\sigma', -\sigma) = (2\sigma)(2\sigma') X(-\sigma', -\sigma) \end{aligned} \quad (4.111)$$

Si Γ comporte une matrice γ_5 ³¹, du fait que $\gamma_0 {}^t \gamma_5 \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_5$, un signe “-” supplémentaire s'introduit et l'on a dans ce cas

$$X^*(\sigma', \sigma) = (-1)^{\sigma'+\sigma} X_{-\sigma', -\sigma} = -(2\sigma)(2\sigma') X_{-\sigma', -\sigma} \quad (4.112)$$

31. Le cas d'un nombre impair supérieur à 1 de matrices γ_5 présentes dans le produit Γ se ramène, par anti-commutations successives, à celui d'une seule matrice γ_5 présente.

Envisageons alors des amplitudes d'hélicité relatives à des processus relevant de l'Electrodynamique Quantique ou de la Chromodynamique Quantique, impliquant des leptons ou des quarks. Prenons comme premier exemple la diffusion Møller. Son amplitude générique comporte des formes du type $X(\sigma', \sigma)$ où chacune des matrices Γ "sandwichées" ne comporte aucune matrice γ_5 . Les spineurs impliqués dans ce processus étant au nombre de 4, on en déduit la propriété suivante des amplitudes d'hélicité :

$$T_{\sigma_3, \sigma_4; \sigma_1, \sigma_2}^* = (-1)^{\sum \sigma_i} T_{-\sigma_3, -\sigma_4; -\sigma_1, -\sigma_2}$$

ce qui se vérifie aisément sur les formules de la section 4.6. Considérons ensuite le processus $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow e^- + e^+$. Le positron étant décrit par un spineur V , une matrice γ_5 est présente dans l'amplitude générique de type $X(\sigma', \sigma)$. Les fonctions d'onde des photons sont des vecteurs de polarisation vérifiant $\epsilon_\lambda^* = (-1)^\lambda \epsilon_{-\lambda}$. Pour ce processus, on a donc

$$T_{\lambda_1, \lambda_2; \sigma_3, \sigma_4}^* = (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \sigma_3 + \sigma_4} T_{-\lambda_1, -\lambda_2; -\sigma_3, -\sigma_4}$$

ce qui se vérifie tout aussi aisément sur les formules de la section 4.4.