Trois théorèmes sur les matrices

Christian Carimalo

1 Théorème I

Soit A et B deux matrices $n \times n$ à coefficients complexes, C et D les deux matrices $2n \times 2n$

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda \times \mathbb{1}_n & -B \\ A & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & B \\ 0_n & -\lambda \times \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

où λ est un nombre complexe, $\mathbb{1}$ la matrice $n \times n$ identité, 0_n la matrice nulle $n \times n$. On a

$$CD = \begin{pmatrix} -\lambda \times \mathbb{1}_n & 0_n \\ A & AB - \lambda \times \mathbb{1}_n \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} BA - \lambda \times \mathbb{1}_n & 0_n \\ -\lambda \times A & -\lambda \times \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

Comme $\det CD = (-\lambda)^n \det[AB - \lambda \mathbb{1}_n] = \det DC = (-\lambda)^n \det[BA - \lambda \mathbb{1}_n]$, on en déduit, pour $\lambda \neq 0$

$$\det[AB - \lambda \mathbb{1}_n] = \det[BA - \lambda \mathbb{1}_n] \tag{1}$$

Le cas $\lambda = 0$ peut être inclus dans l'égalité (1), puisque $\det AB = \det BA$. Une conséquence de ce résultat est que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

2 Théorème II : décomposition polaire d'une matrice

2.1 Cas général

Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients complexes, $M^\dagger = {}^tM^\star$ sa conjuguée hermitique. Les deux matrices $S_1 = MM^\dagger$ et $S_2 = M^\dagger M$ sont hermitiques et positives. Elles sont diagonalisables et toutes leurs valeurs propres sont positives. Ayant le même polynôme caractéristique d'après (1), elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Il est clair que Ker S_1 = Ker $M^\dagger$ et que Ker S_2 = Ker$M$. Bien qu'ils soient de même dimension, les noyaux de S_1 et S_2 peuvent être engendrés par des vecteurs différents et sont donc généralement distincts.

Soit $|\varphi_\lambda, k>$ un vecteur propre de S_1 correspondant à la valeur propre non nulle λ ($\lambda > 0$), avec $1 \leq k \leq n_\lambda$ où n_λ est la multiplicité de λ. Introduisons les vecteurs

$$|\psi_\lambda, k> = \frac{M^\dagger}{\sqrt{\lambda}} |\varphi_\lambda, k> \tag{2}$$

Précisons leurs propriétés. On a

$$S_2|\psi_\lambda,k>=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}M^\dagger MM^\dagger|\varphi_\lambda,k>=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}M^\dagger S_1|\varphi_\lambda,k>$$
$$=\sqrt{\lambda}M^\dagger|\varphi_\lambda,k>=\lambda\,|\psi_\lambda,k>$$

Ainsi, les vecteurs (2) sont les vecteurs propres de S_2 pour ses valeurs propres non nulles. Vérifions s'ils sont orthonormés :

$$<\psi'_{\lambda'},k'|\psi_\lambda,k>=\frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}<\varphi'_{\lambda'},k'|MM^\dagger|Y_\lambda,k>=\delta_{\lambda'\lambda}<\varphi'_{\lambda'},k'|\varphi_\lambda,k>$$

Nous savons que les vecteurs propres de S_1 peuvent être choisis de telle sorte à former une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Dans tous les cas $<\psi'_{\lambda'},k'|\psi_\lambda,k>$ est donc égal à 1 si les vecteurs sont identiques et égal à 0 s'ils sont différents. Les vecteurs (2), en nombre égal à la dimension m de $\mathrm{Im}\,S_1$, qui est aussi la dimension de $\mathrm{Im}\,S_2$, constituent une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,S_2$. On peut compléter cette base avec les $n-m$ vecteurs $|Z_\ell>$ de la base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,S_2$ pour constituer une base orthonormée de l'espace complet $\mathbb{C}^n$. Vérifions que ces vecteurs sont bien orthogonaux aux vecteurs (2) : $<\psi|Z_\ell>=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}<\varphi_\lambda|M|Z_\ell>=0$ puisque $M|Z_\ell>=0$. L'ensemble des m vecteurs $|\psi_\lambda,k>$ et des $n-m$ vecteurs $|Z_\ell>$ formant une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, on a la relation de fermeture

$$\mathbb{1}_n=\sum_{\lambda,k}|\psi_\lambda,k><\psi_\lambda,k|+\sum_\ell|Z_\ell><Z_\ell|$$

d'où l'on déduit

$$M\mathbb{1}_n=M=\sum_{\lambda,k}M|\psi_\lambda,k><\psi_\lambda,k|=\sum_{\lambda,k}\sqrt{\lambda}\,|\varphi_\lambda,k><\psi_\lambda,k| \qquad (3)$$

Les deux bases $\{|\psi_\lambda,k>,|Z_\ell>\}$ et $\{|\varphi_\lambda,k>,|W_\ell>\}$, où les vecteurs $|W_\ell>$ engendrent $\mathrm{Ker}\,S_1$, étant orthonormées, sont reliées par une matrice unitaire U (c-à-d telle que $U^{\dagger-1}=U$) et l'on peut écrire $|\varphi_\lambda>=U|\psi_\lambda>$. La relation (3) se récrit donc comme

$$M=HU,\quad \text{où}\quad H=\sum_{\lambda,k}\sqrt{\lambda}\,|\varphi_\lambda,k><\varphi_\lambda,k| \qquad (4)$$

De façon évidente, la matrice H est hermitique : en fait, $H=\sqrt{S_1}$. On obtient ainsi ce que l'on appelle la décomposition polaire de la matrice M : toute matrice $n\times n$ peut être écrite comme le produit d'une matrice hermitique $n\times n$ et d'une matrice unitaire $n\times n$.

D'après ce qui précède, la matrice unitaire U est celle qui permet de passer de la base des vecteurs propres de S_2 à celle des vecteurs propres de S_1.

Remarque

• La matrice $H' = U^{-1}HU$ est elle aussi hermitique et telle que

$$H'^2 = U^{-1}HUU^{-1}HU = U^{-1}S_1U = S_2$$

On a ainsi une autre décomposition polaire de M sous la forme $M = UH'$.

2.2 Cas des matrices inversibles

Ce cas est plus simple à traiter. Considérons la matrice $S = MM^\dagger$. Elle est hermitique, positive et inversible et la matrice H telle que $H^2 = S$ est elle aussi hermitique, positive et inversible. En fait, diagonalisant S, la matrice H est simplement la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées des valeurs propres de S. Définissons ensuite la matrice $U = H^{-1}M$. On a $UU^\dagger = H^{-1}MM^\dagger H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = 1$. Cette matrice est donc unitaire et on obtient ainsi la décomposition polaire $M = HU$ où H est hermitique et U unitaire.

2.3 Exemples

① Envisageons le cas des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

On a

$$S_1 = MM^\dagger = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = M^\dagger M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres communes à S_1 et S_2 sont $\lambda = 0$ avec une multiplicité 2, et $\lambda = 6$. On trouve pour vecteurs propres de S_1 :

$$\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \lambda = 6$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad \lambda = 0$$

et pour vecteurs propres de S_2 :

$$\psi_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad \lambda = 6$$

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad \lambda = 0$$

On constate que $\operatorname{Ker} S_1$ et $\operatorname{Ker} S_2$ ne sont pas engendrés par les mêmes vecteurs et sont donc distincts. On a

$$\psi_6 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varphi_6 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,Z_2, \quad W_1 = Z_1, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\varphi_6 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,Z_2$$

Soit B_1 la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres de S_1 et B_2 celle du passage de la base canonique à la base des vecteurs propres de S_2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On a

$$U = B_1 B_2^{-1} = B_1\,{}^t\!B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On peut ensuite calculer H au moyen de la formule $H = MU^{-1}$:

$$H = M\,{}^t U = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie aisément que $H^2 = S_1$.

② **Exercice** : trouver une matrice M telle que

$$S_1 = MM^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$S_2 = M^\dagger M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rép. : $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$ (à un facteur de phase près).

3 Théorème III

C'est un corollaire du théorème II : Pour toute matrice $n \times n$ M, il existe deux matrices unitaires $n \times n$ P et P' telles que PMP'^{-1} soit diagonale. En effet, dans la décomposition polaire $M = HU$ de M, la matrice hermitique H est diagonalisable et l'on peut trouver une matrice unitaire P telle que $\Delta = PHP^{-1}$ soit diagonale, et par suite $M = P^{-1}\Delta PU$. Or $P' = PU$ est aussi unitaire et la matrice $\Delta = PMP'^{-1}$ est diagonale.

3.1 Exemples

① Les matrices (5) vont ici encore servir de premier exemple. La matrice H est simultanément diagonalisable avec son carré S_1, dont les vecteurs propres se déduisent de la base canonique par la matrice B_1. On a donc $H = B_1 \Delta B_1^{-1}$ où

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $M = B_1 \Delta B^{-1} B_1 B_2^{-1} = B_1 \Delta B_2^{-1}$. La matrice M s'écrit donc bien sous la forme prévue par le théorème III. Pour être complet, il est intéressant de noter que cette matrice, dont les valeurs propres sont $\lambda = 2$ de multiplicité 1 et $\lambda = 0$ de multiplicité 2, est diagonalisable par la matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas une matrice unitaire.

② En second exemple, considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a une valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et une valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité 2 à laquelle ne correspond qu'un seul vecteur propre : cette matrice M n'est donc pas diagonalisable. On peut lui trouver une forme de Jordan au moyen de la matrice de passage Q, non unitaire, telle que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donnant}$$

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$S_1 = MM^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = M^\dagger M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice S_1 est déjà diagonale ; ses vecteurs propres sont $\varphi_2 = (1, 0, 0)$ pour la valeur propre 2, $\varphi_0 = (0, 1, 0)$ pour la valeur propre 0 et $\varphi_1 = (0, 0, 1)$ pour la valeur propre 1. Les vecteurs propres de S_2 seront pris comme suit :

$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ pour la valeur propre 2, $\psi_1 = M^\dagger \varphi_1 = (0, -1, 0)$ pour la valeur propre 1 et $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ pour la valeur propre 0 (orthogonal aux deux premiers vecteurs). On prendra garde au fait que la matrice de passage B_2 doit être construite dans l'ordre (ψ_2, ψ_0, ψ_1), soit

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $B_1 \equiv 1$, on a $U = B_2^{-1}$, et l'on trouve

$$H = MB_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Si nous avions choisi $\psi_1 = (0, 1, 0)$ plutôt que $(0, -1, 0)$, nous aurions trouvé pour H la valeur propre -1 à la place de 1.