# ELECTROMAGNÉTISME ET OPTIQUE

## TEXTES D'EXAMENS

**Christian Carimalo**

## I - Question de cours

Ecrire les équations de Maxwell dans l'espace vide de sources et en déduire les équations de propagation du champ électromagnétique.

## II - Problème - Partie A

Une onde électromagnétique monochromatique de pulsation $\omega$, plane, polarisée rectilignement, se propage dans l'espace vide de sources. A l'origine O d'un système de coordonnées cartésiennes, son champ magnétique $\overrightarrow{B_1}(t)$ s'écrit, en notation complexe,

$$\overrightarrow{B_1}(t) = -\frac{j}{2} B_0 \, \overrightarrow{e_y} \, e^{j\omega t}$$

et son vecteur d'onde a pour expression

$$\overrightarrow{k_1} = k \left[ -\cos\theta \, \overrightarrow{e_x} + \sin\theta \, \overrightarrow{e_z} \right]$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

**1°**) Préciser la relation de dispersion $k(\omega)$.

**2°**) Trouver, en notation complexe, l'expression $\overrightarrow{B_1}(t, M)$ du champ magnétique de l'onde en tout point $M(x, y, z)$.

**3°**) En déduire, en notation complexe, l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E_1}(t, M)$ en $M$.

**4°**) Donner enfin les expressions réelles de ces champs.

**5°**) A l'aide d'un schéma, préciser les orientations des champs $\overrightarrow{E_1}(t, M)$, $\overrightarrow{B_1}(t, M)$ et $\overrightarrow{k_1}$.

**6°**) Déterminer la moyenne temporelle $r_1$ de la norme du vecteur de Poynting $\overrightarrow{R_1}$ de cette onde. Que représente-t-elle physiquement ?

**7°**) Calculer numériquement $r_1$ pour $B_0 = \frac{1}{3} 10^{-8}$ T.

## II - Problème - Partie B

On superpose à l'onde précédente une onde de même pulsation $\omega$ et dont le champ magnétique en O s'écrit en notation complexe

$$\overrightarrow{B_2}(t) = \frac{j}{2} B_0 \, \overrightarrow{e_y} \, e^{j\omega t}$$

et qui a pour vecteur d'onde

$$\overrightarrow{k_2} = k \left[ \cos\theta \, \overrightarrow{e_x} + \sin\theta \, \overrightarrow{e_z} \right]$$

**8°**) Déterminer en notation complexe les champs électrique $\overrightarrow{E}(t, M)$ et magnétique $\overrightarrow{B}(t, M)$ résultant de cette superposition en tout point M.

**9°**) Trouver la direction de propagation de cette onde résultante ainsi que la vitesse de propagation. Commenter le résultat.

**10°**) a) Déterminer en fonction des coordonnées la valeur moyenne temporelle $I$ de la norme du vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$ de l'onde résultante.

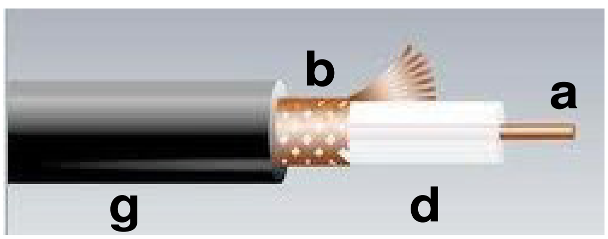
b) Décrire le phénom‘ene d'interférence observé dans un plan perpendiculaire à l'axe $\overrightarrow{Oz}$. Quel est l'interfrange ?

**11°**) Déterminer, par une méthode au choix, la force électromotrice induite que développerait cette onde à l'intérieur d'un circuit fait d'un conducteur filiforme, ayant la forme d'un carré de côtés de longueur $a$, situé dans le plan $xOz$, de centre $M_0(a/2, 0, 0)$ et dont deux côtés sont parallèles à $\overrightarrow{Oz}$.

# Cable coaxial

Un cable coaxial est constitué d'un conducteur central de forme cylindrique, appelé "âme" du cable, d'axe $z'z$ et de rayon $a$, entouré d'un second conducteur cylindrique creux de même axe $z'z$ et de rayon intérieur $b$ ($b > a$), de faible épaisseur, constituant le "blindage" du cable (voir figure). L'espace entre les deux conducteurs est rempli d'un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope de permittivité $\epsilon$. Le tout est enveloppé d'une gaine protectrice en plastique. La longueur $h$ du cable est si grande devant $b$ que l'on pourra considérer, lorsque cela est posssible, qu'elle est infinie.

L'âme et le blindage sont des <u>conducteurs parfaits</u>. On envisage la propagation le long du cable d'une onde électromagnétique monochromatique, de pulsation $\omega$, dont on note $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ les champs complexes électrique et magnétique, respectivement. La position d'un point courant $M$ sera repérée au moyen des coordonnées cylindriques $\rho$, $\varphi$ et $z$.




**Cable coaxial - (a) : âme ; (b) : blindage ;**
**(d) : diélectrique ; (g) : gaine protectrice**

**1°)** a) Ecrire les équations de Maxwell valables dans le milieu diélectrique entre âme et blindage pour l'onde de pulsation $\omega$.

b) On cherche une onde respectant la symétrie cylindrique autour de l'axe $z'z$. Montrer que pour une telle onde, on a

$$E_\varphi = 0 \quad , \quad B_\rho = 0 \quad , \quad B_z = 0$$

**2°)** On étudie plus particulièrement le cas où $E_z = 0$.

**a)** Ecrire, en coordonnées cylindriques, les équations satisfaites par les composantes non nulles du champ électromagnétique.

**b)** Montrer qu'on a alors

$$E_\rho(\rho, z, t) = \frac{F(z)}{\rho}\, e^{j\omega t}$$

$F(z)$ étant une fonction de $z$ uniquement.

**3°) a)** Prouver que $F(z)$ est de la forme

$$F(z) = F\left[\, e^{-jkz} \;+\; r\, e^{-jkz}\,\right]$$

où $F$ et $r$ sont des constantes. Exprimer $k$ en fonction de $\omega$ et $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$.

**b)** Interpréter chacun des termes de cette expression ainsi que le coefficient $r$.

**c)** Déduire l'expression de $B_\varphi(\rho, z, t)$.

**4°) a)** A l'aide de conditions de passage, montrer que la surface de l'âme ainsi que la surface intérieure du blindage portent chacune des charges dont on exprimera les densités superficielles respectives $\sigma_a$ et $\sigma_b$, puis les charges par unité de longueur du cable $Q_a$ et $Q_b$ correspondantes.

**b)** Montrer de même que sur ces surfaces circulent des courants dont on exprimera les densités superficielles respectives $J_a$ et $J_b$, puis les intensités de courant correspondantes $I_a$ et $I_b$, tout en en précisant l'orientation.

**5°)** On veut ensuite obtenir des expressions pour le potentiel électrique et pour le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$. On admettra que ces potentiels satisfont la jauge de Lorentz

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

et que l'on peut opter pour la <u>condition supplémentaire</u> $A_\rho = 0$.

**a)** Rappeler les relations liant les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ aux potentiels $V$ et $\overrightarrow{A}$.

**b)** Démontrer que l'on a

$$V(\rho, z, t) = F\ \ln(\frac{b}{\rho})\ e^{j\omega t} \left[\ e^{-jkz}\ +\ r\ e^{-jkz}\ \right]$$

en convenant de choisir $V = 0$ pour $\rho = b$.

**c)** En déduire l'expression de $\overrightarrow{A}$.

**6°) a)** On note $U(z, t)$ la tension entre âme et blindage pour une côte $z$ donnée. Déterminer la constante $F$ sachant que

$$U(0, t) = U_0\ e^{j\omega t}$$

**b)** Réexprimer alors $U(z, t)$ et $I_a(z, t)$ compte-tenu de cette donnée.

**7°) a)** On définit par $Z = U(z, t)/I_a(z, t)$ l'impédance du cable à la côte $z$. A la côte $z = h$, le cable est relié à une impédance $Z_0$. Exprimer $r$ en fonction de $Z_0$ et de *l'impédance caractéristique*

$$Z_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}\ln(\frac{b}{a})$$

**b)** Comment faudrait-il choisir $Z_0$ pour minimiser la réflexion d'onde à la liaison finale du cable ?

**c)** Calculer numériquement $Z_c$ pour $a = 1$ mm, $b = 4$ mm, $\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = 1,4$ ; on donne $\ln 2 = 0,7$.

**8°)** Le cable étant relié à une impédance caractéristique appropriée, aucune réflexion d'onde ne se produit à la terminaison du cable en $z = h$. Par contre, on observe encore une réflexion d'onde à l'intérieur du cable, due à un défaut du diélectrique. Ce défaut sera modélisé ainsi :

pour $z < \ell < h$, la permittivité du milieu est $\epsilon$, alors que pour $\ell < z < h$ elle prend une autre valeur $\epsilon'$.

**a)** Quelle est la forme de $E_\rho$ pour $\ell < z < h$ ?

**b)** En appliquant les conditions de passage du champ électromagnétique en $z = \ell$, trouver l'expression de $r$ en fonction de $\omega$, $\ell$ et des indices de réfraction $n$ et $n'$ des deux milieux de permittivité $\epsilon$ et $\epsilon'$, respectivement.

On rappelle ci-dessous les expressions, en coordonnées cylindriques, du rotationnel et de la divergence d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{V}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho \mathrm{V}_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{V}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \mathrm{V_z}}{\partial \mathrm{z}}$$

**Onde électromagnétique dans l'ionosphère**

On considère un milieu ionisé. Celui-ci, initialement homogène, est globalement neutre et comporte, par unité de volume, $N$ ions positifs et $N$ électrons. Le milieu est suffisamment dilué pour qu'on puisse admettre que toutes ces charges sont sans interaction entre elles. La permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique de ce milieu ont les mêmes valeurs que dans le vide, soit $\epsilon_0$ et $\mu_0$ respectivement. On se propose d'étudier les conditions de propagation d'une onde électromagnétique dans un tel milieu.

L'onde envisagée sera supposée monochromatique, de pulsation $\omega$. Son champ électrique et son champ magnétique seront écrits en notation complexe, soit

$$\overrightarrow{E}\ (M,t) = \overrightarrow{E}\ (M)\exp(j\omega t) \quad , \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}\ (M,t) = \overrightarrow{B}\ (M)\exp(j\omega t)$$

respectivement, $\overrightarrow{E}\ (M)$ et $\overrightarrow{B}\ (M)$ étant des champs complexes.

Cette onde imprime aux particules chargées un mouvement oscillatoire. De ce fait, le nombre de particules chargées dans un volume donné n'est plus constant. Le nombre $N_-$ d'électrons par unité de volume s'écrit alors $N_- = N + n(M,t)$. Toutefois, les effets de ces mouvements sont faibles et $n$ est une petite correction, $|n| \ll N$, dont la moyenne temporelle est nulle. Un tel effet existe aussi pour les ions positifs, mais peut être négligé par rapport à celui provenant des électrons, du fait que leur masse est beaucoup plus grande que celle d'un électron. Le nombre d'ions positifs par unité de volume sera donc encore pris égal à $N$.

1°) Evaluer la densité volumique de charge $\rho(M,t)$. La charge d'un électron sera notée $-e$.

2°) La vitesse d'un électron situé au voisinage d'un point $M$ sera écrite sous forme complexe comme

$$\overrightarrow{v}\ (M,t) = \overrightarrow{V}\ (M)\exp(j\omega t)$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, et en négligeant les forces magnétiques, trouver la relation entre cette vitesse et le champ électrique oscillant. On notera $m$ la masse d'un électron.

3°) En déduire l'expression complexe

$$\overrightarrow{\jmath}\ (M,t) = \overrightarrow{J}\ (M)\exp(j\omega t)$$

du vecteur densité volumique de courant résultant de ces mouvements. On tiendra compte uniquement du mouvement des électrons et on admettra que le produit $n\ \overrightarrow{v}$ peut être négligé dans cette expression.

4°) Connaissant $\rho(M,t)$ et $\overrightarrow{\jmath}\ (M,t)$, trouver, à partir des équations de Maxwell, les relations que doivent vérifier $\overrightarrow{E}\ (M)$ et $\overrightarrow{B}\ (M)$.

5°) Montrer que $\exp(j\omega t)\ \mathrm{div} N_-\ \overrightarrow{V} = -j\omega n$.

6°) En remplaçant $n$ et $\overrightarrow{v}$, et tenant compte des approximations préconisées, transformer les équations de Maxwell établies précedemment pour montrer que

a) $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}\ (M) = j\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon\ \overrightarrow{E}\ (M)$ ;

b) $\text{div}\ \epsilon\epsilon_0\ \overrightarrow{E}\ (M) = 0$ ;

c) $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}\ (M) = -j\omega\ \overrightarrow{B}\ (M)$ ;

d) $\text{div}\ \ \overrightarrow{B}\ (M) = 0$ ;

où l'on a posé $\epsilon = 1 - \dfrac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}$.

7°) En déduire les équations de propagation

$$\Delta\ \overrightarrow{E}\ (M) + \epsilon\ \frac{\omega^2}{c^2}\ \overrightarrow{E}\ (M) = \overrightarrow{0}\ ,\ \text{ et }\ \Delta\ \overrightarrow{B}\ (M) + \epsilon\ \frac{\omega^2}{c^2}\ \overrightarrow{B}\ (M) = \overrightarrow{0}$$

où $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$.

8°) On envisage une onde plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

a) Trouver l'expression de $k^2 = \overrightarrow{k}^2$.

b) En déduire que la propagation des ondes dans le milieu ionisé n'est possible que si la pulsation $\omega$ est supérieure à une valeur limite $\omega_p$, appelée "fréquence plasma".

c) Evaluer numériquement $\omega_p$ en prenant $N = 1,8\ 10^{11}$ m$^{-3}$, $e = 1,6\ 10^{-19}$ C, $m = 9\ 10^{-31}$ kg. Quelle est la longueur d'onde correspondante ? Pour quel domaine de longueurs d'ondes la propagation se fait-elle sans atténuation ?

9°) a) Pour un paquet d'ondes de pulsation moyenne $\omega > \omega_p$ pouvant se propager dans le milieu ionisé, quelles en sont la vitesse de phase $V_\phi$ et la vitesse de groupe $V_g$ ?

b) Donner l'allure des variations de ces vitesses en fonction de $u = \omega_p/\omega \leq 1$.

10°) On étudie maintenant la réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique à l'interface entre l'air (non ionisé) et un milieu ionisé. Cet interface sera modélisé par le plan $xOy$, le passage de l'air au milieu ionisé s'effectuant dans le sens de l'axe $\overrightarrow{Oz}$. Compte-tenu des équations établies au 6°), le milieu ionisé est assimilable à un diélectrique de permittivité relative $\epsilon$. D'autre part, du point de vue électromagnétique, l'air est équivalent au vide (mêmes constantes $\epsilon_0$ et $\mu_0$). Les conditions de passage du champ électromagnétique à l'interface de deux diélectriques seront donc applicables ici.

Rappeler ces conditions, sans démonstration.

11°) On considère la réflexion et la transmission d'une onde plane,monochromatique, polarisée rectilignement, se propageant depuis l'air suivant l'axe $Oz$. Dans l'air, le champ électrique résultant sera écrit sous la forme

$$\overrightarrow{E_1}\ (M,t) = E_0 \exp(j\omega t) \left[\exp(-jk_0z) + r\exp(jk_0z)\right]\ \ \overrightarrow{e}_y$$

$r$ étant le coefficient de réflexion en amplitude de l'interface. Le champ électrique dans le milieu ionisé prend la forme

$$\overrightarrow{E_2}\ (M,t) = E_0\ \tau\ \ \exp(j\omega t)\exp(-jkz)\ \ \overrightarrow{e}_y$$

$\tau$ étant le coefficient de transmission de l'interface.

a) Donner l'expression de $k_0$.

b) Trouver les expressions des champs magnétiques dans l'air, $\overrightarrow{B_1}\ (M,t)$ et dans le milieu ionisé $\overrightarrow{B_2}\ (M,t)$, respectivement.

12°) En appliquant les relations de passage pour $z = 0$, trouver les expressions de $r$ et $\tau$ en fonction de $u = \omega_p/\omega$.

13°) Pour $u \leq 1$, montrer que le facteur de réflexion en énergie de l'interface a pour expression

$$R = \frac{u^4}{(1+\sqrt{1-u^2})^4}$$

14°) a) Calculer numériquement $R$ pour : $u = 0,6$, $u = 0,8$ et $u = \sqrt{80/81}$.

b) En déduire que l'onde réfléchie ne produit un effet sensible que pour des valeurs de $u$ très proches de $1$.

15°) Il existe dans la haute atmosphère terrestre une couche ionisée comportant un nombre d'électrons par unité de volume égal à $N = 1,8\ 10^{11}$ m$^{-3}$. Sur terre, un émetteur envoie verticalement une onde électromagnétique dont la longueur d'onde peut être augmentée à partir d'une valeur minimum égale à $40$ m.

a) A partir de quelle longueur d'onde reçoit-on au sol un écho très important dû à cette couche ionisée ?

b) Calculer numériquement l'altitude de cette couche sachant que l'écho est reçu $6\ 10^{-4}$ seconde après l'émission du signal.

**Vitesse de phase, vitesse de groupe, réflexion**

## Exercice I

L'espace est repéré par un repère cartésien $(O, x, y, z)$, ayant pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation $\omega = 2\pi\nu$ se propage selon l'axe $z'Oz$ dans un milieu d'indice de réfraction réel $n$ et de perméabilité magnétique $\mu_0$. On note $\overrightarrow{k} = k\,\overrightarrow{e_z}$ son vecteur d'onde.

**1°)** Trouver l'équation de propagation de l'onde dans ce milieu et en déduire la relation de dispersion liant $k$ à $\omega$.

**2°)** L'indice $n$ dépend en fait de $\lambda_0 = c/\nu$, $c$ étant la célérité de la lumière dans le vide, selon la relation

$$n^2 = 1 - \frac{\lambda_0^2}{a^2}$$

$a$ étant une constante positive.

a) Rappeler ce que représentent la vitesse de phase $v_\phi$ et la vitesse de groupe $v_g$ d'un paquet d'ondes se propageant dans le milieu.

b) Déterminer ces vitesses et commenter.

## Exercice II

On considère le phénomène de réflexion d'une onde électromagnétique par un miroir plan. Sa surface sera modélisée par tout le plan $xOz$ d'un repère cartésien $Ox, y, z$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Le miroir est supposé <u>parfait</u>. Cela signifie que dans la région $y < 0$ contenant le matériau du miroir, le champ électromagnétique y est strictement nul. Le milieu occupant la région $y > 0$ est de l'air, pour lequel les constantes diélectriques et magnétique sont celles du vide, soit $\epsilon_0$ et $\mu_0$ respectivement.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation $\omega$, dite "incidente", se propageant dans la direction du vecteur

$$\overrightarrow{u} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_x} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

avec $0 < \theta < \pi/2$ tombe sur le miroir. Il en résulte l'apparition d'une onde dite "réfléchie". On écrira le champ électrique de l'onde incidente sous la forme complexe :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp j(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})$$

où $\overrightarrow{E_0}$ est un vecteur de composantes $E_{0x}$, $E_{0y}$ et $E_{0z}$ <u>réelles et positives</u>, $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$, et celui de l'onde réfléchie sous la forme complexe

$$\overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E'_0} \exp j(\omega t - \overrightarrow{k'} \cdot \overrightarrow{r})$$

où $\overrightarrow{E'_0}$ est un vecteur de composantes $E'_{0x}$, $E'_{0y}$ et $E'_{0z}$ à déterminer. Dans la région $y > 0$ le champ électrique total est la résultante des deux champs précédents.

$\mathbf{1}^\circ$) a) Expliciter le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ en fonction des données.

b) Quel doit être la valeur de $\| \overrightarrow{k'} \|$ ?

$\mathbf{2}^\circ$) a) A quelles conditions de continuité le champ électrique doit-il satisfaire en $y = 0$ ?

b) Appliquer ces conditions pour démontrer que

$$k'_x = k_x \quad , \quad k'_z = 0 \quad , \quad E'_{0x} = -E_{0x} \quad , \quad E'_{0z} = -E_{0z}$$

c) En déduire que l'on a nécessairement $k'_y = -k_y$.

d) En appliquant l'une des équations locales du champ électromagnétique, montrer qu'en tout point de la région $y > 0$ on a

$$\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{E} + \overrightarrow{k'} \cdot \overrightarrow{E'} = 0$$

et, en passant à la limite $y = 0$, en déduire que l'on a

$$E'_{0y} = E_{0y}$$

$\mathbf{3}^\circ$) Trouver alors l'expression complexe du vecteur champ électrique total $\overrightarrow{E_T}$ en fonction des données, puis exprimer les composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ et $\mathcal{E}_z$ du champ électrique <u>réel</u>.

$\mathbf{4}^\circ$) a) Appliquer la relation de Maxwell-Faraday pour trouver les expressions complexes des composantes $B_x$, $B_y$ et $B_z$ d'une part et $B'_x$, $B'_y$ et $B'_z$ d'autre part, des champs magnétiques de l'onde incidente, et de l'onde réfléchie, respectivement.

b) En déduire les composantes $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_y$ et $\mathcal{B}_z$ du champ magnétique total <u>réel</u>

$\mathbf{5}^\circ$) Dans la suite du problème, on considère le cas où $E_{0z} = 0$, et l'on pose $E_0 = \| \overrightarrow{E_0} \|$.

a) Expliciter, uniquement en fonction de $x, y, t, c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, E_0$ et $\theta$, les composantes réelles des champs électrique et magnétique des ondes incidente et réfléchie, et en donner une représentation schématique.

b) Réexprimer également les composantes réelles des champs électrique et magnétique résultants, en fonction des seules variables indiquées.

$\mathbf{6}^\circ$) a) Déterminer les composantes $P_x$, $P_y$ et $P_z$ du vecteur de Poynting $\overrightarrow{P}$ du champ électromagnétique total, en rappelant la signification physique de ce vecteur.

b) En déterminer les valeurs moyennes temporelles, $< P_x >$, $< P_y >$ et $< P_z >$.

$\mathbf{7}^\circ$) Donner une représentation graphique des variations spatiales de $< P_x >$, en précisant les valeurs de $y$ pour lesquelles cette grandeur est nulle.

$\mathbf{8}^\circ$) a) Montrer qu'il existe sur le plan du miroir une distribution superficielle de charges dont on calculera la densité $\sigma(t, x)$.

b) Montrer aussi que le plan du miroir est porteur d'une distribution superficielle de courants dont on calculera la densité $j_x(t,x)$.

**9°)** a) Démontrer la relation

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

b) En donner l'interprétation physique.

## Milieu diélectrique absorbant

L'espace est repéré par un repère cartésien $(O, x, y, z)$, ayant pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

La région $z \leq 0$ est le <u>vide</u> de permittivité $\varepsilon_0 = 1/(36\pi\ 10^9)$ S.I. et de perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ S. I. Une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation $\omega$ et rectilignement polarisée s'y propage suivant la direction $\overrightarrow{Oz}$. L'expression complexe du champ électrique de cette onde dite "incidente" est

$$\overrightarrow{E_i}\ (M, t) = E_0\ \overrightarrow{e_x}\ \exp j(\omega t - k_0 z) \qquad\qquad (\ j^2 = -1)$$

$E_0$ et $k_0$ étant des grandeurs constantes, réelles et positives et $z \leq 0$.

Cette onde rencontre sous incidence normale un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope occupant tout le demi-espace $z \geq 0$. Il en résulte l'apparition, d'une part, d'une onde dite "réfléchie" dans la région $z \leq 0$, dont le champ électrique complexe s'écrit

$$\overrightarrow{E_r}\ (M, t) = r\ E_0\ \overrightarrow{e_x}\ \exp j(\omega t + k_0 z)$$

$r$ étant une constante pouvant être complexe ; et, d'autre part, d'une onde dite "transmise" dans la région $z \geq 0$, dont le champ électrique complexe s'écrit

$$\overrightarrow{E_t}\ (M, t) = \tau\ E_0\ \overrightarrow{e_x}\ \exp j(\omega t - kz)$$

$\tau$ et $k$ étant des constantes pouvant être complexes elles aussi. La permittivité du milieu sera notée $\varepsilon = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$ et sa perméabilité sera prise égale à celle du vide.

**1**°) a) Ecrire les équations de Maxwell applicables à ce milieu diélectrique.

b) En déduire l'équation de propagation du champ électrique dans ce milieu.

**2**°) Compte-tenu des expressions des champs données plus haut, montrer que $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ où $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, et trouver la relation entre $k$, $\omega$, $c$ et $\varepsilon_r$.

**3**°) Trouver les expressions complexes des champs magnétiques $\overrightarrow{B_i}$, $\overrightarrow{B_r}$ et $\overrightarrow{B_t}$ des ondes incidente, réfléchie et transmise, respectivement.

♣ En fait, le milieu diélectrique est absorbant dans la gamme de fréquence considérée. Sa permittivité prend alors une forme complexe : $\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')$, $\varepsilon_r'$ et $\varepsilon_r''$ étant des constantes réelles et positives. Le vecteur d'onde $k$ devient alors complexe et s'écrit $k = k_0(n' - jn'')$, $n'$ et $n''$ étant des quantités réelles et positives.

**4**°) Donner les relations qui lient $\varepsilon_r'$ et $\varepsilon_r''$ à $n'$ et $n''$.

**5**°) Quelle est la conséquence du fait que $k$ ait une partie imaginaire ? Justifier alors le signe de $n''$.

**6°)** Rappeler, sans démonstration, les conditions devant être vérifiées par le champ électrique et le champ magnétique en $z = 0$.

**7°)** Appliquer ces conditions pour démontrer les relations

$$r = \frac{1-n}{1+n} \quad , \qquad \tau = \frac{2}{1+n}$$

où $n = n' - jn''$.

**8°)** Le coefficient de réflexion $r$ sera écrit sous la forme $r = r_0 e^{-j\phi}$. Exprimer $r_0$ et $\tan\phi$ en fonction de $n'$ et $n''$.

**9°)** Expliciter les expressions réelles des champs électriques et des champs magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise, respectivement. Il sera utile de poser

$$\tau = \tau_0 \ e^{j\phi'} \ \ \text{(coefficient de transmission) et} \ \ \tau' = \frac{2n}{1+n} = \tau'_0 \ e^{j\phi''},$$

en exprimant toutefois $\tau_0$, $\tan\phi'$, $\tau'_0$ et $\tan\phi''$ en fonction de $n'$ et $n''$.

**10°)** On note $\overrightarrow{P_i}$, $\overrightarrow{P_r}$ $\overrightarrow{P_t}$ les vecteurs de Poynting des onde incidente, réfléchie et transmise respectivement, et $<\overrightarrow{P_i}>$, $<\overrightarrow{P_r}>$ et $<\overrightarrow{P_t}>$ les valeurs moyennes temporelles de ces vecteurs. Expliciter soigneusement ces grandeurs en fonction des données et en donner la signification physique.

**11°)** On définit

$$R = \frac{|| <\overrightarrow{P_r}> ||_{z=0}}{|| <\overrightarrow{P_i}> ||_{z=0}} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{|| <\overrightarrow{P_t}> ||_{z=0}}{|| <\overrightarrow{P_i}> ||_{z=0}}$$

a) Montrer que $T = Re(\tau'\tau^*)$.

b) Montrer ensuite que l'on a $R + T = 1$. Que traduit cette dernière relation ?

**12°)** La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est de 1 mW. Quelle est, numériquement, la puissance moyenne absorbée par le milieu diélectrique ? On donne $n' = 7,4$, $n'' = 2,3$, $\sqrt{4625/7585} = 0,78$.

**13°)** La fréquence de l'onde est $\nu = 4 \ 10^8$ Hz. Evaluer numériquement la distance $\delta$ au bout de laquelle, à partir de $z = 0$, la puissance électromagnétique transmise dans le milieu diélectrique est alors divisée par $e = 2,718$.

On considère l'espace vide situé entre deux plans parallèles modélisant les surfaces, mises face à face, de deux corps parfaitement conducteurs. Relativement à un repère cartésien $O, x, y, z$, ces deux plans sont définis par $y = 0$ et $y = a > 0$ respectivement, les deux conducteurs occupant l'un la région $y \leq 0$, l'autre la région $y \geq a$. Il s'agit ici de trouver dans quelle condition une onde électromagnétique monochromatique de pulsation $\omega$ peut se propager dans cet espace, et en particulier une onde "transverse électrique", dont le champ électrique est de la forme (en notation complexe)

$$\overrightarrow{E}\ (x, y, z, t) = E(y)\ \overrightarrow{e_x}\ \exp j(\omega t - kz)$$

où $E(y)$ une fonction de y à déterminer, et $k$ le vecteur d'onde décrivant la propagation parallèlement à l'axe $z'z$.

$\mathbf{1}°$) En argumentant la réponse, dire quelle valeur doit prendre $E(y)$ pour $y = 0$ et $y = a$.

$\mathbf{2}°$) En appliquant les équations de Maxwell, trouver l'équation différentielle que doit satisfaire $E(y)$.

$\mathbf{3}°$) Donner, en argumentant la réponse, la solution générale de cette équation qui correspond effectivement à une propagation. Compte-tenu des contraintes rappelées en $\mathbf{1}°$), expliciter la ou les solutions $E(y)$ qui conviennent.

$\mathbf{4}°$) a) Trouver la relation liant $k$ à $\omega$.

b) Quelle est la valeur minimum $\omega_m$ de $\omega$ en dessous de laquelle la propagation d'une onde n'est plus possible ?

c) Lorsque la propagation est possible, déterminer les vitesses de phase et les vitesses de groupe des ondes.

$\mathbf{5}°$) Trouver, en notation complexe, l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}\ (x, y, z, t)$ associé.

$\mathbf{6}°$) On considère une onde se propageant avec un vecteur d'onde $k$ prenant la plus grande valeur possible, $\omega$ étant alors plus grand que sa valeur minimum $\omega_m$. Trouver les expressions (complexes) des densités superficielles de courant induits par cette onde sur les surfaces des deux conducteurs.

$\mathbf{7}°$) Montrer que l'onde en question peut être considérée comme le résultat de la superposition de deux ondes planes progressives se réfléchissant sur les deux plans conducteurs. Trouver la valeur de l'angle de réflexion.

## Effet Faraday

Dans ce problème, on étudie l'influence d'un champ magnétique statique sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique.

### Partie A

Le passage d'une onde électromagnétique à travers un milieu diélectrique a pour effet d'y déplacer les charges microscopiques, provoquant ainsi l'apparition dans le milieu de moments dipolaires électriques induits. Par leur variation temporelle, ceux-ci sont susceptibles d'émettre de nouvelles ondes électromagnétiques venant interférer avec le champ appliqué pour donner un champ macroscopique total dans le milieu, de champ électrique $\overrightarrow{E}\ (M,t)$ et de champ magnétique $\overrightarrow{B}\ (M,t)$. Pour évaluer cet effet, on utilise le modèle classique de charges élastiquement liées au milieu, soumises à l'action d'un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E},\ \overrightarrow{B})$.

Soit donc dans le milieu un constituant élementaire $\mathcal{C}$, de masse $m$ et de charge $q$. Sous l'effet du champ, il se voit déplacé de sa position d'équilibre. On note :

$\overrightarrow{u}$ le vecteur déplacement, $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\,\overrightarrow{u}}{dt}$ le vecteur vitesse associé ;

$\overrightarrow{f_r} = -m\omega_0^2\ \overrightarrow{u}$ la force de rappel que le milieu exerce sur le constituant déplacé de sa position d'équilibre.

Pour simplifier, on ignore tout phénomène dissipatif. Le milieu est supposé emplir tout l'espace. L'onde est une onde plane, monochromatique, de pulsation $\omega$. On notera $V$ sa vitesse de propagation.

1°) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique classique au constituant $\mathcal{C}$ soumis à la force de rappel $\overrightarrow{f_r}$ et à la force de Lorentz $\overrightarrow{f_L}$.

2°) Il est légitime d'admettre que $|\ \overrightarrow{v}\ | \ll V$. Expliquer alors pourquoi on peut négliger la partie magnétique de la force de Lorentz devant sa partie électrique.

3°) La longueur d'onde de l'onde est supposée très grande devant les distances inter-atomiques, et le champ appliqué peut donc être considéré comme indépendant de $\overrightarrow{u}$.

a) En utilisant la notation complexe, trouver l'expression complexe de $\overrightarrow{u}$ en régime sinusoïdal permanent établi.

b) En déduire le moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p} = q\ \overrightarrow{u}$ induit par le déplacement du constituant.

c) On note $N$ le nombre, par unité de volume, de constituants tels que $\mathcal{C}$ dans le milieu. Ce nombre est supposé constant. Montrer que, dans le modèle utilisé ici, le moment dipolaire $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ induit par unité de volume est lié au champ électrique appliqué par une relation de la forme

$$\overrightarrow{\mathcal{P}} = \epsilon_0\,\chi\ \overrightarrow{E} \tag{1}$$

où $\epsilon_0$ est la permittivité du vide,. On exprimera le coefficient $\chi$, susceptibilité diélectrique, en fonction des données.

4°) Dans la relation (1), le champ électrique $\overrightarrow{E}$ doit en fait être considéré comme le champ macroscopique local <u>total</u> $\overrightarrow{E}\ (M,t)$ présent dans le milieu, auquel s'appliquent les équations de Maxwell relatives au milieu ainsi excité. Celles-ci s'obtiennent à partir des équations de Maxwell valables dans le vide sans sources, en introduisant dans ces dernières le vecteur densité volumique de courants

$$\overrightarrow{J}\ (M,t) = \frac{\partial\ \overrightarrow{\mathcal{P}}}{\partial t}(M,t) = j\omega\ \overrightarrow{\mathcal{P}}\ (M,t)$$

caractérisant l'excitation du milieu. Le milieu étant globalement neutre, la densité volumique de charges est encore nulle.

a) Ecrire les équations de Maxwell correspondantes.

b) Montrer que ces équations sont similaires à celles valables pour le vide sans sources, où l'on remplacerait $\epsilon_0$ par $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$.

c) Définir l'indice de réfraction du milieu.

d) Qu'appelle-t-on vitesse de phase et vitesse de groupe ? Les calculer dans le cadre du modèle utilisé ici.

5°) On considère une onde plane, monochromatique, de pulsation $\omega$, se propageant parallèlement à l'axe $z'z$, dans le sens croissant de la cote $z$. Au point origine $O$, le champ électrique de l'onde a pour expression complexe

$$\overrightarrow{E}\ (O,t) = E_0\ \overrightarrow{e_x}\ e^{j\omega t} \qquad (j^2=-1) \tag{2}$$

où $E_0$ est une grandeur positive, et $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire de l'axe $x'x$. Trouver les expressions complexes des champs électrique et magnétique de l'onde en un point $M(x,y,z)$ et en fonction du temps.

## Partie B

Un champ magnétique statique $\overrightarrow{B_0} = B_0\ \overrightarrow{e_z}$ est maintenant appliqué au milieu et l'on ne peut plus négliger la partie magnétique de la force de Lorentz. L'onde appliquée sera supposée plane, monochromatique, de pulsation $\omega$, et se propageant de façon progressive parallèlement à l'axe $z'z$.

6°) a) Reprendre la question 3°) a) en tenant compte de ce fait pour trouver, en régime sinusoïdal permanent établi, les nouvelles équations satisfaites par les expressions complexes des composantes cartésiennes $u_x$, $u_y$ et $u_z$ du déplacement $\overrightarrow{u}$. Montrer que $u_z = 0$.

b) On pose $u_+ = u_x + ju_y$, $u_- = u_x - ju_y$. Etablir les expressions de ces grandeurs en fonction des composantes cartésiennes $E_x$ et $E_y$ du champ électrique appliqué. On posera aussi $E_+ = E_x + jE_y$, $E_- = E_x - jE_y$.

7°) a) Puis on procèdera comme au 4°). A partir des équations de Maxwell, établir, pour le champ électromagnétique de l'onde traversant le milieu, les équations que doivent satisfaire les combinaisons $E_+$ et $B_+ = B_x + jB_y$ de ses composantes d'une part, et celles satisfaites par les combinaisons $E_-$ et $B_- = B_x - jB_y$ de ses composantes d'autre part. Montrer que les deux séries d'équations obtenues sont découplées.

b) Montrer que l'on est conduit à définir deux indices de réfraction $n_+$ et $n_-$ dont on donnera les expressions en fonction des données.

c) En déduire que, du fait de la présence du champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$, les combinaisons "+" et les combinaisons "-" ne se propagent pas à la même vitesse dans le milieu. Donner les expressions des vecteurs d'onde $k_+$ et $k_-$ correspondants. On posera $k_0 = \omega/c$, $c$ étant la célérité de la lumière dans le vide.

8°) On suppose que $qB_0/m \ll |\omega_0^2 - \omega^2|/\omega$. Montrer que l'on a approximativement

$$n_\pm \simeq n \pm \frac{Nq^3\omega B_0}{2\,m^2\,n\,\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

où $n$ est l'indice de réfraction du milieu en l'absence de champ statique (lorsque $B_0 = 0$).

9°) On considère une onde dont le champ électrique à l'origine $O$ est encore donné par (2).

a) Trouver les expressions des combinaisons $E_+$ et $E_-$ en un point $M(x, y, z > 0)$ et en fonction du temps.

b) En déduire celles des composantes $E_x$ et $E_y$ au même point.

c) Montrer qu'au point $M$ le champ électrique garde une orientation constante au cours du temps, mais que celle-ci n'est plus l'axe $x'x$ (effet découvert par Faraday en 1845).

10°) Montrer que l'angle $\theta$ entre cette direction et l'axe $x'x$ peut se mettre sous la forme

$$\theta = K\,B_0\,z$$

et exprimer le coefficient $K$, appelé *constante de Verdet*, en fonction des données.

**TSVP**

On rappelle ci-dessous les expressions, en coordonnées cylindriques, du rotationnel et de la divergence d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{V}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho \text{V}_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \text{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \text{V}_\text{z}}{\partial \text{z}}$$

L'espace est rapporté à un repère cartésien $R(O,x,y,z)$ dont les axes $x'x$, $y'y$ et $z'z$ ont pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, respectivement.

Les régions définies par $x < 0$ et $x > a > 0$ sont remplies d'un même matériau conducteur dont la conductivité électrique peut être considérée comme infinie (conducteur parfait). Le domaine $0 < x < a$ entre ces deux régions conductrices comporte deux matériaux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes (l.h.i.). Le premier, milieu (I), de permittivité $\epsilon_1$, occupe la région $z < 0$. Le second, milieu (II), de permittivité $\epsilon_2$, occupe la région $z > 0$.

On envisage la propagation, uniquement le long de l'axe $z'z$, d'une onde électromagnétique. Cette onde sera supposée monochromatique, de pulsation $\omega$. La notation complexe des champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ sera systématiquement utilisée.

On admettra ici que les champs ne dépendent que des variables $x$, $z$ et $t$ et que l'on a $E_y = 0$, $B_x = 0$ et $B_z = 0$.

1°) Ecrire les équations de Maxwell valables dans un milieu diélectrique l.h.i. de permittivité $\epsilon$.

2°) Montrer que, dans chaque diélectrique, $B_y$ satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -k^2 \; B_y$$

et donner les expressions correspondantes $k_1$ et $k_2$ de $k$ pour chacun des deux diélectriques (I) et (II), en fonction de la pulsation $\omega$, de la célérité $c$ de la lumière dans le vide et des indices de réfraction $n_1$ et $n_2$ de (I) et (II) respectivement.

3°) On cherche des solutions de l'équation précédente se présentant sous la forme d'un produit :

$$B_y = f(x) \; g(z) \; e^{j\omega t}$$

où $f$ n'est fonction que de $x$ et $g$ n'est fonction que de $z$.

a) Démontrer que $f$ doit satisfaire l'équation

$$f''(x) = \gamma \; f(x)$$

où $\gamma$ est une constante.

b) A quelles conditions aux limites doit satisfaire le champ électromagnétique en $x = 0$ et en $x = a$ ?

c) Démontrer que ces conditions ne peuvent être satisfaites que si l'on a

$$\gamma = -p^2 \; \frac{\pi^2}{a^2}$$

où $p$ est un entier strictement positif.

4°) a) Trouver l'équation différentielle satisfaite par la fonction $g$.

b) Montrer que, pour un milieu diélectrique donné d'indice de réfraction $n$, la propagation ne peut avoir lieu sans absorption que pour des fréquences supérieures à une fréquence de coupure $\nu_c$ que l'on explicitera en fonction des données.

c) On donne $a = 1$ cm, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. La longueur d'onde dans le vide de l'onde envisagée est $\lambda = 1,5$ cm. Quel mode peut être transmis sans atténuation (c'est-à-dire, quelle doit être la valeur de $p$) ?

5°) a) On se place dans les conditions où la propagation s'effectue sans atténuation du milieu (I) vers le milieu (II) (donc sans le sens $z'z$). Montrer que l'on a alors

$$B_y = \cos\alpha x \ \left(B_0 \ e^{-j\chi_1 z} + B_1 \ e^{j\chi_1 z}\right) \ e^{j\omega t} \qquad \text{pour } z < 0$$

et

$$B_y = \cos\alpha x \ B_2 \ e^{-j\chi_2 z} \ e^{j\omega t} \qquad \text{pour } z > 0$$

où $B_0$, $B_1$ et $B_2$ sont des constantes, et expliciter les constantes (positives) $\alpha$, $\chi_1$ et $\chi_2$.

b) Interpréter physiquement le terme en facteur de $B_1$.

c) Donner les expressions de $E_x$ et $E_z$ pour chacune des deux régions (I) et (II).

6°) a) A quelles conditions aux limites doit satisfaire le champ électromagnétique en $z = 0$ ?

b) On pose $r = \dfrac{B_1}{B_0}$, $\tau = \dfrac{B_2}{B_0}$, $\rho_1 = \dfrac{\epsilon_1}{\chi_1}$, $\rho_2 = \dfrac{\epsilon_2}{\chi_2}$. Trouver les expressions de $r$ et $\tau$ en fonction de $\rho_1$ et $\rho_2$.

7°) a) Déterminer les flux d'énergie électromagnétique $\Phi_1$ et $\Phi_2$ traversant une section droite $0 \le x \le a$, $-h \le y \le h$, dans les régions (I) et (II), respectivement.

b) Quelle relation doit-il y avoir entre ces flux pour $z = 0$ ? Vérifier explicitement cette relation.

c) Définir les coefficients de réflexion en énergie $R$ et de transmission en énergie $T$ de l'interface en $z = 0$, et les exprimer en fonction de $\rho_1$ et $\rho_2$.

## Modèle plan d'une fibre optique

Dans ce problème, on envisage la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique hétérogène constitué comme suit, relativement à un repère cartésien $R(O, x, y, z)$ (voir figure 1).

Un premier milieu diélectrique l.h.i. (I) d'indice de réfraction $n_1$ emplit la région (1) définie par

$$\text{région } (1) \; : \quad -a < x < a \;\; , \; -\infty < y < +\infty \;\; , \; -\infty < z < +\infty$$

où $a > 0$. Un second milieu diélectrique l.h.i. (II) d'indice de réfraction $n_2$ emplit les deux régions (2) et (3) définies par

$$\text{région } (2) \; : \quad a < x < +\infty \;\; , \; -\infty < y < +\infty \;\; , \; -\infty < z < +\infty$$

$$\text{région } (3) \; : \quad -\infty < x < -a \;\; , \; -\infty < y < +\infty \;\; , \; -\infty < z < +\infty$$

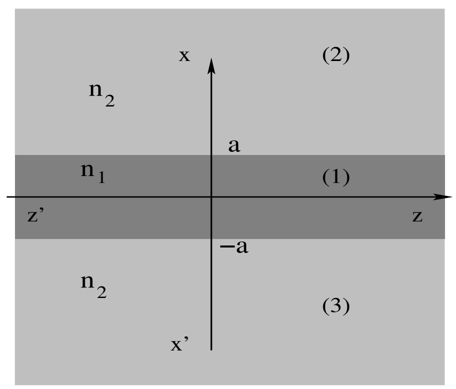



**Figure 1**

Les indices $n_1$ et $n_2$ sont supposés réels et indépendants de la fréquence de l'onde. L'onde est supposée monochromatique, de pulsation $\omega$, et se propager progressivement dans la direction $z'z$, avec la vitesse $\omega/k$, où $k$ sera pris identique dans les deux milieux (I) et (II) (donc dans les trois régions). Ainsi, on considèrera que les composantes complexes du champ électromagnétique de l'onde sont toutes proportionnelles au facteur $e^{j(\omega t - kz)}$ dans les deux milieux : chacune d'elles sera donc prise sous la forme $F(x,y)\, e^{j(\omega t - kz)}$, la fonction $F$ correspondante pouvant être différente d'un milieu à l'autre. On notera $v = c/n$ où $c$ est la célérité de la lumière dans le vide, et $n$ l'indice de réfraction du milieu considéré ($v = v_1$ si $n = n_1$, $v = v_2$ si $n = n_2$).

♠ Dans les questions qui suivent, on recherchera uniquement des solutions pour lesquelles le champ électromagnétique s'annule pour $|x| \to +\infty$.

**1°)** Ecrire les équations de Maxwell pour l'onde considérée se propageant parallèlement à l'axe $z'z$ dans un milieu diélectrique l.h.i. d'indice de réfraction $n$. On utilisera systématiquement la notation complexe.

**2°)** En prenant en compte les symétries du modèle utilisé ici, expliquer pourquoi les composantes du champ électromagnétique ne peuvent dépendre de la variable $y$.

**3°)** Compte-tenu de ce fait, expliciter les équations satisfaites par les composantes cartésiennes du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de l'onde dans un tel milieu.

**4°)** Rappeler les conditions de continuité du champ électromagnétique au passage d'un milieu diélectrique vers un autre, et expliciter ces conditions pour le problème posé ici.

**5°)** On examine tout d'abord le cas d'une onde TEM, "transverse électrique et magnétique", pour laquelle $E_z = 0$ et $B_z = 0$. Montrer que, sous la condition qu'il s'annule pour $|x| \to +\infty$, le champ électromagnétique ne peut qu'être nul partout.

**6°)** On considère ensuite le cas d'une onde TE, "transverse électrique", pour laquelle $E_z = 0$ (mais $B_z \neq 0$). On suppose maintenant que $k \neq \omega/v_1$ et $k \neq \omega/v_2$.

**a)** Montrer qu'on a alors $E_x = 0$ et $B_y = 0$ partout.

**b)** Montrer que $E_y$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{v^2})\ E_y$$

**c)** On suppose que $k > \text{Max}(\frac{\omega}{v_1}, \frac{\omega}{v_2})$ (Max$(\eta, \zeta)$ est le plus grand des deux nombres $\eta$ et $\zeta$) et l'on pose

$$\alpha_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}} \quad , \quad \alpha_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}}$$

Trouver alors les expressions générales $E_y^{(1)}$, $E_y^{(2)}$, $E_y^{(3)}$ de $E_y$ dans les régions (1), (2) et (3) respectivement, compte-tenu de la condition que $E_y$ s'annule pour $|x| \to +\infty$. On pourra omettre dans ces expressions le facteur commun $e^{j(\omega t - kz)}$.

**d)** Dire pourquoi $E_y$ et $\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$ sont continues en $x = \pm a$, et appliquer cette continuité pour démontrer que l'on devrait alors avoir

$$e^{4\alpha_1 a} = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$$

Dire pourquoi cette équation est impossible à réaliser et en conclure que pour ces valeurs de $k$, le champ électromagnétique ne peut qu'être nul.

**7°)** On suppose maintenant que $n_2 < n_1$ et que $\omega/v_2 < k < \omega/v_1$. On considère à nouveau le cas d'une onde TE et l'on pose $\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{v_1^2} - k^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{k^2 - \dfrac{\omega^2}{v_2^2}}$ restant le même.

**a)** Etablir l'expression générale de $E_y^{(1)}$, en supposant de plus que, pour $x = 0$, on a (mis à part le facteur $e^{j(\omega t - kz)}$)

$$E_y^{(1)} = E_0 \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

**b)** Appliquer à nouveau les conditions de continuité pour $x = \pm a$ et en déduire les expressions de $E_y^{(2)}$ et de $E_y^{(3)}$. Quelle particularité présente ce type de solution ?

**c)** Montrer que la solution trouvée ne peut exister que si la condition

$$\tan(\alpha_1 a) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{3}$$

est satisfaite.

**8°)** On pose

$$k = \frac{\omega}{c} n_1 \cos\theta \quad , \quad \alpha_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta$$

**a)** Montrer que dans l'intervalle de variation de $k$ considéré, $\omega/v_2 < k < \omega/v_1$, on a

$$0 < \sin\theta < \sin\theta_c = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

**b)** Exprimer ensuite la relation (3) à l'aide de $u = \sin\theta$ et de la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

**c)** Représenter graphiquement $\tan(\alpha_1 a)$ et $\alpha_2/\alpha_1$ en fonction de la variable $u = \sin\theta$ et montrer que la relation (3) est satisfaite pour des valeurs particulières de $\sin\theta$ correspondant à des *modes* de propagation particuliers de l'onde.

**d)** Pour une valeur donnée de $\lambda$, évaluer le nombre de tels modes pouvant être transmis par ce dispositif qui est un modèle plan de fibre optique.

**e)** Calculer numériquement la limite que l'on devrait donner à l'épaisseur $2a$ de la couche (1) pour que le premier mode soit le seul transmissible (fibre monomode). On donne $\lambda = 1500$ nm, $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,24$.

## Rayonnement d'une antenne

### - Partie A -

On considère une antenne, faite d'un métal parfaitement conducteur, ayant la forme d'un cylindre d'axe $z'z$, de hauteur $h$ et de faible rayon $a \ll h$. Cette antenne est excitée électriquement au niveau de son milieu $O$ de cote $z = 0$ et l'intensité du courant électrique en ce point est donnée sous forme complexe en fonction du temps par

$$I(0,t) = I_0 e^{j\omega t}$$

où $I_0$ et $\omega$ sont deux grandeurs positives. Cette excitation provoque l'apparition d'une distribution superficielle de courant électrique se propageant le long de l'antenne, uniquement dans la direction $z'z$, et dont l'intensité en un point de cote $z$ de l'antenne est notée $I(z,t)$. Dans cette première partie, on étudie le champ électromagnétique accompagnant cette distribution, au voisinage de l'antenne. Le milieu ambiant est de l'air dont les constantes électromagnétiques sont

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{SI}\ , \quad \mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{SI}$$

et l'on pose $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

La position d'un point $M$ sera repérée au moyen de ses coordonnées cylindriques $\rho, \varphi, z$ et les champs électrique et magnétique sont notés $\overrightarrow{E}\ (M,t)$ et $\overrightarrow{B}\ (M,t)$, respectivement.

**1°)** Montrer que, du fait de la symétrie du problème, on a

$$B_\rho = B_z = 0$$

**2°)** A partir des équations de Maxwell, montrer que pour $\rho > a$ on a

$$E_\rho = j\frac{c^2}{\omega}\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\ , \quad E_z = -j\frac{c^2}{\omega}\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial \rho}\ , \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -j\omega B_\varphi$$

**3°)** On cherche $B_\varphi$ sous la forme

$$B_\varphi = \frac{F(z)}{\rho}\ e^{j\omega t}$$

Montrer qu'alors $F(z)$ a nécessairement pour expression

$$F(z) = A\,e^{-jkz} + B\,e^{jkz}$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes et où $k = \omega/c$.

**4°) a)** Il ne peut y avoir de courant qu'à la surface de l'antenne. Montrer que le vecteur densité de courant superficiel correspondant, orienté suivant $z'z$, a pour composante

$$j_z = \frac{F(z)}{\mu_0 a}\, e^{j\omega t}$$

**b)** En déduire que l'intensité du courant superficiel en un point de cote $z$ de l'antenne a pour expression

$$I(z,t) = \frac{2\pi F(z)}{\mu_0}\, e^{j\omega t}$$

**5°)** Les deux extrêmités de l'antenne aux cotes $z = +h/2$ et $z = -h/2$ respectivement n'étant relièes à aucun circuit (ligne ouverte), l'intensité $I(z,t)$ doit y être nulle. En déduire que l'on doit avoir

$$I(z,t) = I_0 \cos kz\, e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad h = (n + \frac{1}{2})\, \lambda$$

où $n$ est un entier positif ou nul et $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ (longueur d'onde). Dans la suite, on prendra $n = 0$, soit $h = \lambda/2$ (antenne demi-onde).

## - Partie B -

Dans cette seconde partie, on étudie l'onde électromagnétique émise par l'antenne en des points situés à grande distance de celle-ci. Un point $M$ sera maintenant repéré au moyen de ses coordonnées sphériques $r = OM, \theta, \varphi$. On adoptera l'expression suivante du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}\ (M,t)$ :

$$\overrightarrow{A}\ (M,t) = \overrightarrow{e_z}\ A_z = \overrightarrow{e_z}\ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} dz\ \frac{I_0 \cos kz}{PM}\, e^{j\omega(t - PM/c)}$$

où $P$ est un point de cote $z$ de l'antenne, supposée ici filiforme et $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire de l'axe $z'z$.

**6°)** Montrer que pour $r \gg h$, on a approximativement

$$PM \simeq r - z\cos\theta \quad , \quad A_z \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r}\ e^{j\omega(t - r/c)} \int_{-h/2}^{+h/2} dz\ \cos kz\ e^{jkz\cos\theta}$$

où $z$ est la cote de $P$ et où les termes d'ordres supérieurs en $1/r$ ont été négligés.

**7°)** En tenant compte du fait que $h = \lambda/2$, montrer que

$$\int_{-h/2}^{+h/2} dz\ \cos kz\ e^{jkz\cos\theta} \ = \ \frac{\lambda}{\pi}\ \frac{\cos(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

**8°) a)** Exprimer les composantes $A_r$ et $A_\theta$ du potentiel vecteur en fonction de $A_z$ et $\theta$.

**b)** Démontrer qu'à l'ordre $1/r$ on a

$$\overrightarrow{B} = B_\varphi \,\overrightarrow{e_\varphi}\ , \quad \overrightarrow{E} = cB_\varphi \ \overrightarrow{e_\theta}$$

$\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ étant deux des vecteurs unitaires de la base locale des coordonnées sphériques, et que

$$B_\varphi \simeq j\,\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\ e^{j\omega(t-r/c)}\ \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$$

**9°)** On note $W$ la moyenne temporelle de la puissance totale rayonnée par l'antenne dans toutes les directions de l'espace.

**a)** Trouver l'expression de $W$.

**b)** En déduire la valeur numérique de la résistance de rayonnement $R$ de l'antenne, définie par la relation

$$W = \frac{1}{2}\ R\ I_0^2$$

On donne : $\displaystyle\int_0^\pi d\theta\ \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\ = 1,22.$

Ci-dessous sont données les expressions du rotationnel d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\ (M)$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

- Coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{e_z}$$

- Coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\ \left(\frac{\partial(V_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$$

**Diffraction par une fente rectangulaire - Apodisation**

Une onde lumineuse, onde électromagnétique plane, monochromatique, de longueur d'onde $\lambda$, se propage dans le vide parallèlement à l'axe $z'z$ d'un repère cartésien $(O, x, y, z)$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$. L'onde rencontre un écran opaque coïncidant avec le plan $xOy$, dans lequel est ménagée une ouverture rectangulaire $\Sigma$ centrée sur $O$, dont les côtés parallèles à $x'x$ ont pour longueur $a$ et dont les côtés parallèles à $y'y$ ont pour longueur $b$.

**1**°) Décrire le phénomène de diffraction observé derrière cet écran.

**2**°) L'onde diffractée est reçue par une lentille convergente parfaite $\mathcal{L}$, d'axe optique $z'z$ (et donc perpendiculaire à cet axe), située à la distance $D$ du plan $xOy$, de foyer $F$ et de distance focale $f$. A l'aide d'un oculaire, on observe le phénomène dans le plan focal $\mathcal{F}$ de la lentille, dont les axes $Fx$ et $Fy$ sont parallèles à $Ox$ et $Oy$ respectivement.

On rappelle que, dans l'approximation d'onde scalaire et selon le principe de Huygens, l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction définie par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de composantes cartésiennes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, relativement au repère $(O, x, y, z)$, est donnée, à une constante multiplicative près, par l'expression

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \int\int_\Sigma \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{u}\right]\, dx_P dy_P \qquad \text{avec} \qquad j^2 = -1$$

$P(x_P, y_P)$ étant un point courant de l'ouverture $\Sigma$ et l'intégrale étant étendue à toute l'ouverture. On notera que le point $O$ a été choisi comme point de référence des phases.

a) Calculer $E(\alpha, \beta, \gamma)$ en fonction de $X = \dfrac{\pi a}{\lambda}\,\alpha$ et $Y = \dfrac{\pi b}{\lambda}\,\beta$.

b) Soit $M(x, y, D + f)$ un point du plan focal $\mathcal{F}$ en lesquel converge la partie du faisceau diffracté allant dans la direction définie par $\overrightarrow{u}$. Montrer que si $\overrightarrow{u}$ a une direction très voisine de $z'z$ on a approximativement

$$X \approx \frac{\pi a}{f\lambda}\,x \quad , \qquad Y \approx \frac{\pi b}{f\lambda}\,y$$

c) En déduire la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan $\mathcal{F}$.

**3**°) On donne $\lambda = 0,6$ $\mu$m, $f = 1$ m, $a = 1$ mm, $b = 3$ cm. Donner les valeurs numériques des dimensions de la région centrale de la figure de diffraction, délimitée par les premiers minima d'intensité.

**4**°) On dispose maintenant devant l'ouverture $\Sigma$ une pellicule partiellement transparente, dont le coefficient de transmission en amplitude en un point $P(x_P, y_P)$ de $\Sigma$ est

$$t(P) = \cos\pi\frac{x_P}{a}$$

L'amplitude de l'onde diffractée dans la direction $\overrightarrow{u}$ $(\alpha, \beta, \gamma)$ est alors donnée par

$$E'(\alpha, \beta, \gamma) = \int\int_\Sigma t(P)\; \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{u}\right]\, dx_P dy_P$$

Calculer $E'(\alpha, \beta, \gamma)$ en fonction de $X$ et $Y$. Il sera utile de poser

$$F(X) = \frac{\cos X}{1 - \dfrac{4X^2}{\pi^2}}$$

**5°) a)** Etudier les variations de $F(X)$ en fonction de $X$.

**b)** En déduire la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan focal $\mathcal{F}$ de la lentille $\mathcal{L}$, en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point d'observation dans ce plan. On précisera notamment la position des maximas secondaires d'intensité vis-à-vis des variations de $x$, ainsi que leurs valeurs par rapport au maximum central.

**c)** Comparer la figure de diffraction obtenue avec celle étudiée au 2°). Commenter.

**Diffraction et interférences - I**

## Partie A - Diffraction par une fente rectangulaire

Une onde lumineuse, onde électromagnétique plane, monochromatique, de longueur d'onde $\lambda$, se propage dans le vide parallèlement à l'axe $z'z$ d'un repère cartésien $(O,x,y,z)$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$. L'onde rencontre un écran opaque coïncidant avec le plan $xOy$, dans lequel est ménagée une ouverture rectangulaire $\Sigma$ centrée sur $O$, dont les côtés parallèles à $x'x$ ont pour longueur $a$ et dont les côtés parallèles à $y'y$ ont pour longueur $b$.

**1°)** Décrire le phénomène de diffraction observé derrière cet écran.

**2°)** L'onde diffractée est reçue par une lentille convergente parfaite $\mathcal{L}$, d'axe optique $z'z$ (et donc perpendiculaire à cet axe), située à la distance $D$ du plan $xOy$, de foyer $F$ et de distance focale $f$. A l'aide d'un oculaire, on observe le phénomène dans le plan focal $\mathcal{F}$ de la lentille, dont les axes $Fx$ et $Fy$ sont parallèles à $Ox$ et $Oy$ respectivement.

On rappelle que, dans l'approximation d'onde scalaire et selon le principe de Huygens, l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction définie par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de composantes cartésiennes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, relativement au repère $(O,x,y,z)$, a pour expression

$$E(\alpha,\beta,\gamma) = \int\int_\Sigma \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{u}\right]\,dx_P dy_P \qquad \text{avec} \qquad j^2=-1$$

$P(x_P,y_P)$ étant un point courant de l'ouverture $\Sigma$ et l'intégrale étant étendue à toute l'ouverture. On notera que le point $O$ a été choisi comme point de référence des phases.

a) Montrer que

$$E(\alpha,\beta,\gamma) = ab\;F(X)\;F(Y)$$

où

$$F(U)=\frac{\sin U}{U} \quad , \quad \text{et} \quad X=\frac{\pi a}{\lambda}\,\alpha \quad , \quad Y=\frac{\pi b}{\lambda}\,\beta$$

b) Soit $M(x,y,D+f)$ un point du plan focal $\mathcal{F}$ en lesquel converge la partie du faisceau diffracté allant dans la direction définie par $\overrightarrow{u}$. Montrer que si $\overrightarrow{u}$ a une direction très voisine de $z'z$ on a approximativement

$$X \approx \frac{\pi a}{f\lambda}\,x \quad , \quad Y \approx \frac{\pi b}{f\lambda}\,y$$

c) En déduire la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan $\mathcal{F}$.

**3°)** On donne $\lambda = 0,6$ $\mu$m, $f=1$ m, $a=1$ mm, $b=3$ cm. Donner les valeurs numériques des dimensions de la région centrale de la figure de diffraction, délimitée par les premiers minima d'intensité.

**4°)** a) On déplace maintenant le centre de l'ouverture $\Sigma$ de $O$ en $O'$ tel que $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{h}{2}\,\overrightarrow{e_x}$. Le point $O$ étant toujours choisi comme point de référence des phases, montrer que l'amplitude de l'onde diffractée devient alors

$$E'(\alpha, \beta, \gamma) = e^{j\varphi}\ E(\alpha, \beta, \gamma)$$

où $E(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'amplitude de l'onde diffractée lorsque $\Sigma$ est centrée en $O$, et

$$\varphi = \frac{\pi h}{\lambda}\ \alpha \approx \frac{\pi h}{f\lambda}\ x$$

b) Que devient la figure de diffraction dans $\mathcal{F}$ ?

### Partie B - Diffraction et interférences données par quatre fentes

Dans la suite du problème, l'observation sera limitée à la région centrale de la figure de diffraction.

L'écran opaque $xOy$ est maintenant percé de quatre ouvertures identiques à celle considérée précédemment, et dont les centres $O_1$, $O_2$, $O_3$ et $O_4$ sont tels que

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{h}{2}\ \overrightarrow{e_x} \quad , \quad \overrightarrow{OO_2} = \frac{3h}{2}\ \overrightarrow{e_x} \quad , \quad \overrightarrow{OO_3} = -\frac{h}{2}\ \overrightarrow{e_x} \quad , \quad \overrightarrow{OO_4} = -\frac{3h}{2}\ \overrightarrow{e_x}$$

**5°) a)** Montrer que l'amplitude de l'onde diffractée par l'ensemble de ces quatre fentes dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u}\ (\alpha, \beta, \gamma)$ s'écrit sous la forme

$$E'(\alpha, \beta, \gamma) = G(Z)\ F(X)\ F(Y)$$

où $F(U)$, $X$ et $Y$ sont définis comme en $2°$) a) et b), et $G$ étant une fonction à déterminer de la variable

$$Z = \cos\varphi\ \cos 2\varphi \quad , \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{\pi h}{\lambda}\ \alpha \approx \frac{\pi h}{f\lambda}\ x$$

b) En déduire l'intensité lumineuse $I(x, y)$ observée en un point $M(x, y, D + f)$ du plan focal $\mathcal{F}$.

**6°)** Sans se préoccuper de ses variations vis-à-vis de $y$, on étudie les variations de l'intensité lumineuse en fonction de $x$.

**a)** Faire une étude préalable des variations de $Z = \cos\varphi\ \cos 2\varphi$ en fonction de $\varphi$. Préciser notamment les valeurs de $\varphi$ pour lesquelles cette fonction s'annule, celles pour lesquelles elle présente des maxima ou des minima.

**b)** En déduire une représentation graphique qualitative des variations du *carré* $Z^2$ en fonction de $\varphi$.

**7°) a)** Déduire de cette étude que la lumière observée dans le plan focal de la lentille $\mathcal{L}$ se répartit en une succession de maxima principaux prononcés (franges brillantes) et de maxima secondaires de faible intensité, s'intercalant entre des zones de pénombre (franges noires).

**b)** Quelle distance sépare deux maximas principaux ?

**c)** On donne $a = 1$ mm, $h = 1$ cm. Combien de maxima principaux sont observés dans la figure centrale de diffraction ?

## Diffraction et interférences - II

### Partie A - Diffraction par une fente rectangulaire

Une onde lumineuse, onde électromagnétique plane, monochromatique, de longueur d'onde $\lambda$, se propage dans le vide selon une direction définie par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_0}$ de composantes cartésiennes $\alpha_0$, $\beta_0$ et $\gamma_0$ relativement à un repère cartésien $(O, x, y, z)$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, $\gamma_0$ étant positif. L'onde rencontre un écran opaque coïncidant avec le plan $xOy$, dans lequel est ménagée une ouverture rectangulaire $\Sigma$ centrée sur $O$, dont les côtés parallèles à $x'x$ ont pour longueur $a$ et dont les côtés parallèles à $y'y$ ont pour longueur $b$.

**1°)** Décrire le phénomène de diffraction observé derrière cet écran.

**2°)** L'onde diffractée est reçue par une lentille convergente parfaite $\mathcal{L}$, d'axe $z'z$ (et donc perpendiculaire à cet axe), située à la distance $D$ du plan $xOy$, de foyer $F$ et de distance focale $f$. A l'aide d'un oculaire, on observe le phénomène dans le plan focal $\mathcal{F}$ de la lentille, d'axes $Fx$ et $Fy$ parallèles à $Ox$ et $Oy$ respectivement.

On rappelle que, dans l'approximation d'onde scalaire et selon le principe de Huygens, l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction définie par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de composantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ a pour expression

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \int\int_{\Sigma} \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0})\right]\,d\Sigma \qquad \text{avec} \qquad j^2 = -1$$

$P$ étant un point courant de l'ouverture $\Sigma$ et l'intégrale étant étendue à toute l'ouverture. On notera que le point $O$ a été choisi comme point de référence des phases.

a) Montrer que

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = ab\,\frac{\sin X}{X}\,\frac{\sin Y}{Y}$$

où

$$X = \frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha_0) \quad , \quad Y = \frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta_0)$$

b) Soient $M_0$ et $M$ les points du plan focal $\mathcal{F}$ en lesquels convergent les parties du faisceau diffracté dans les directions $\overrightarrow{u_0}$ et $\overrightarrow{u}$ respectivement, $x_0$ et $y_0$ les coordonnées de $M_0$ dans ce plan, $x$ et $y$ celles de $M$. Montrer que si $\overrightarrow{u_0}$ et $\overrightarrow{u}$ ont des directions très voisines de $z'z$ on a approximativement

$$X \approx \frac{\pi a}{f\lambda}(x - x_0) \quad , \quad Y \approx \frac{\pi b}{f\lambda}(y - y_0)$$

c) En déduire la répartition de l'intensité de lumineuse dans le plan $\mathcal{F}$.

**3°)** On donne $\lambda = 0,6\ \mu$m, $f = 1$ m, $a = 1$ mm, $b = 3$ cm. Donner les valeurs numériques des dimensions de la région centrale de la figure de diffraction, délimitée par les premiers minima d'intensité.

**4°)** a) On déplace maintenant le centre de l'ouverture $\Sigma$ de $O$ en $O'$ tel que $\overrightarrow{OO'} = \frac{h}{2}\ \overrightarrow{e_x}$. Le point $O$ étant toujours choisi comme point de référence des phases, montrer que l'amplitude de l'onde diffractée devient alors

$$E'(\alpha,\beta,\gamma) = e^{j\varphi}\ E(\alpha,\beta,\gamma)$$

où $E(\alpha,\beta,\gamma)$ est l'amplitude de l'onde diffractée lorsque $\Sigma$ est centrée en $O$, et

$$\varphi = \frac{\pi h}{\lambda}(\alpha-\alpha_0) \approx \frac{\pi h}{f\lambda}(x-x_0)$$

b) Que devient la figure de diffraction dans $\mathcal{F}$ ?

## Partie B - Fentes de Young

Dans la suite du problème, l'observation sera limitée aux régions centrales des figures de diffraction.

Dans l'écran opaque $xOy$ sont maintenant ménagées deux ouvertures identiques à celle considérée dans la question **4°)**. L'une est centrée en $O'$ (voir **5°)**), l'autre centrée en $O''$ tel que $\overrightarrow{OO''} = -\frac{h}{2}\ \overrightarrow{e_x}$.

**5°)** a) Décrire le système de franges d'interférence alors observé dans $\mathcal{F}$, parallèlement à l'axe $x'Fx$, en ignorant toute dépendance vis-à-vis de la coordonnée $y$.

b) Qu'est-ce que l'interfrange ? En préciser l'expression en fonction des données.

c) Donner l'expression de l'intensité lumineuse dans $\mathcal{F}$ et représenter qualitativement sur un graphique ses variations parallèlement à l'axe $x'Fx$. On prendra ici $h = 4a$.

d) Combien de maxima d'intensité sont observés dans la figure centrale de diffraction ?

## Partie C - Distance angulaire de deux étoiles

Le dispositif de la partie B est maintenant éclairé par la lumière provenant de deux étoiles, proches en apparence, et dont on veut mesurer la distance angulaire les séparant. La lumière de la première étoile $S$ est émise dans la direction $(\alpha_0, 0, \gamma_0 \approx 1)$ tandis que la lumière de la seconde, $S'$, est émise dans la direction $(\alpha'_0, 0, \gamma'_0 \approx 1)$. La distance angulaire des deux étoiles sera définie comme $\epsilon = \alpha_0 - \alpha'_0$.

Les lumières émises par ces étoiles sont incohérentes entre elles : elles produisent chacune leur propre système d'interférence dans $\mathcal{F}$ et leurs intensités lumineuses dans ce plan s'ajoutent. On supposera en outre que les deux étoiles produisent des lumières de même longueur d'onde $\lambda$ avec la même intensité.

**6°)** a) En supposant que l'on puisse faire varier $h$ à volonté, quelle doit en être la valeur minimum $h_m$ pour que les systèmes d'interférence de $S$ et $S'$ viennent à se brouiller complètement ?

b) En déduire $\epsilon$. Calculer numériquement $\epsilon$ sachant que $\lambda = 0,6\ \mu$m, $h_m = 50$ mm.