

Chapitre 11

Les ondes électromagnétiques

11.1 Les équations de Maxwell

Rappelons les équations locales obtenues jusqu'à présent concernant les interactions électromagnétiques. Les premières furent rencontrées en Electrostatique, où sont étudiées les actions de charges électriques au repos. Ces actions sont décrites au moyen du champ de vecteurs *champ électrostatique* \vec{E} . Nous avons constaté que celui-ci dérive d'un *potentiel scalaire* V , ce qui s'exprime par les relations

$$\vec{E} = - \text{grad } V, \quad \text{ou} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (11.1)$$

Le lien entre le champ électrostatique et ses charges sources est exprimé par le théorème de Gauss, qui se traduit, en termes de densité volumique de charges ρ , par l'équation locale

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.2)$$

L'étude des actions des courants continus de charges, domaine de la *Magnétostatique*, se fait également au moyen d'un champ de vecteurs, le *champ magnétostatique* \vec{B} . Celui-ci est à flux conservatif, ce qui s'exprime par l'équation

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (11.3)$$

qui signifie aussi que ce champ dérive d'un *potentiel-vecteur* \vec{A} , et satisfait l'équation

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.4)$$

Le lien entre le champ magnétostatique et les sources de courants qui le créent est exprimé par le théorème d'Ampère, qui se traduit, en termes de densité volumique de courant \vec{J} , par l'équation locale

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (11.5)$$

L'Electrocinétique, étude des répartitions des courants dans des circuits, a révélé le principe de *conservation de la charge électrique*, qui s'exprime par l'équation dite de *continuité* :

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (11.6)$$

où l'on voit apparaître pour la première fois une dérivation partielle par rapport au temps. On aborde ici le domaine des régimes variables dans le temps. Pour ces régimes, on constate une imbrication de phénomènes électriques et magnétiques qui semblaient disjoints en régime statique. La conséquence fut seulement une modification des équations (11.1), remplacées par l'équation de Maxwell-Faraday, traduisant les phénomènes d'induction dans le cas de Neumann :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = - \frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t} \tag{11.7}$$

Cette équation montre clairement que le vecteur champ électrique a un statut plus large que le champ électrostatique. Il ne dérive plus seulement du "potentiel électrostatique" V , mais est lié aux deux potentiels, potentiel électrique V et potentiel-vecteur \overrightarrow{A} , par la relation

$$\overrightarrow{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial t} \tag{11.8}$$

En revanche, les équations (11.2), (11.3) et (11.4) ne semblent pas devoir être modifiées dans la forme. Par contre, il y a une incompatibilité entre les équations (11.5) et (11.6), puisque la première donne

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = 0 = \mu_0 \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{J}$$

c'est-à-dire un vecteur densité volumique de courant de divergence nulle, ce qui, d'après la seconde, ne peut être vrai que pour des régimes statiques. Or, le principe de la conservation de la charge est considéré comme intangible. L'équation (11.5) doit donc être adaptée au cas des régimes variables. Or, combinant (11.2) et (11.6), on trouve

$$\overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{J} + \epsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} \right) = 0$$

où l'on voit que le terme

$$\boxed{\overrightarrow{J}_D = \epsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t}} \tag{11.9}$$

appelé *courant de déplacement de Maxwell* y a le même statut qu'un courant de charge. L'hypothèse audacieuse de Maxwell fut de postuler que c'est l'ensemble

$$\overrightarrow{J} + \epsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} \tag{11.10}$$

qui doit figurer au second membre de (11.5), donnant l'équation dite de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t}} \tag{11.11}$$

qui rend compte implicitement de la conservation de la charge. Elle révèle qu'un champ électrique variable dans le temps est aussi source de champ magnétique, au même titre que les courants de charges. Le couplage entre "partie électrique" et "partie magnétique" de ce que l'on doit maintenant appeler *champ électromagnétique* est totale. A ce point, les équations locales de ce champ en présence de sources sont donc

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Faraday}), \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Maxwell} - \text{Gauss}) \quad (11.12)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Ampère}), \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Flux})$$

Telles sont les fameuses *équations de Maxwell*. On notera bien que le théorème de Gauss est toujours applicable, et que le champ magnétique garde sa propriété fondamentale d'être à flux conservatif. Mais le plus spectaculaire est obtenu lorsqu'on écrit les équations du champ dans le vide, en l'absence de sources :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad (11.13)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

qui conduit à un système d'équations qui se suffit à lui-même, sans avoir à imaginer des sources de champ. C'est cela qui justifie que l'on dise que c'est dans les régimes variables dans le temps que se révèlent les propres degrés de liberté du champ électromagnétique. Du fait de l'introduction du courant de déplacement, qui joue pour le champ magnétique un rôle très similaire à celui de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour le champ électrique, ce système possède en outre une belle *symétrie* dont on peut penser qu'elle constitue un critère de véracité de la théorie. Les deux termes en question réalisent un couplage entre champ électrique et champ magnétique, qui interdit maintenant de dissocier ces deux champs. Il est à l'origine de la conséquence la plus importante des équations de Maxwell, qui est la possibilité d'une *propagation* du champ électromagnétique. Ce phénomène fut mis en évidence pour la première fois par Hertz en 1887, confirmant la théorie que Maxwell publia sous forme définitive en 1864.

11.2 Propagation du champ électromagnétique

11.2.1 Equation de propagation

L'établissement de l'équation de propagation repose sur la formule d'analyse vectorielle suivante

$$\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{?} = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{?} + \Delta \vec{?} \quad (11.14)$$

Partant de l'équation (11.7), on obtient ainsi

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (11.15)$$

De façon similaire, on obtient pour le champ magnétique l'équation

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot } \vec{J} \quad (11.16)$$

On en déduit que dans un espace dépourvu de sources ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$), l'une quelconque Φ des composantes cartésiennes du champ électromagnétique satisfait l'équation

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.17)$$

On vérifie sans peine que le produit $\epsilon_0 \mu_0$ a pour dimension l'inverse du carré d'une vitesse. Soit c cette vitesse, donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (11.18)$$

Puisque $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ S.I., $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ S.I., c a pour valeur numérique

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (11.19)$$

Avec cette notation, l'équation (11.17) se réécrit comme

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.20)$$

équation connue aussi sous le nom *d'équation de d'Alembert*. Avant l'établissement de la Théorie de la Relativité Restreinte d'Einstein, Lorentz avait entrepris de trouver quel type de transformations sur l'ensemble des coordonnées x, y, z et t pouvait laisser invariante la forme de l'équation (11.20), tout en gardant le même paramètre de vitesse c . Il avait abouti aux *transformations de Lorentz*, qui portent maintenant son nom et qui, depuis, sont devenues la base du formalisme de la Relativité. L'invariance galiléenne de c fut établi expérimentalement par les célèbres expériences de Michelson et Morley. Prenant acte de ce fait irréfutable, la théorie de la Relativité affirme que c , qui représente la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, est bien une constante indépendante du référentiel galiléen, et que l'équation de propagation doit garder *la même forme pour tout référentiel galiléen*, faisant ainsi entrer les phénomènes électromagnétiques dans le cadre d'un principe général de Relativité.

11.2.2 Solutions de l'équation de propagation à une dimension

Considérons une fonction $\Phi(x, t)$ des deux variables x et t satisfaisant l'équation de d'Alembert pour une seule dimension spatiale x :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.21)$$

Faisons le changement de variables

$$t = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad x = c \frac{\beta - \alpha}{2} \quad \text{donc} \quad \alpha = t - \frac{x}{c}, \quad \beta = t + \frac{x}{c}$$

On peut tout aussi bien considérer que Φ est fonction de α et β . Calculons alors les dérivées partielles de Φ par rapport à ces nouvelles coordonnées. On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - c \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right] \Phi = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = 0$$

Cette dernière équation montre, par exemple, que $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ ne dépend pas de β . C'est donc une fonction $f(\alpha)$ de α uniquement. Soit $F(\alpha)$ une primitive de cette fonction. La fonction $\Phi(\alpha, \beta)$ est donc égale à cette primitive, à une fonction $G(\beta)$ de la variable β près :

$$\Phi(\alpha, \beta) = F(\alpha) + G(\beta) \quad (11.22)$$

Telle est la forme générale de la solution, où F et G sont deux fonctions *arbitraires*, qui dépendent en fait du problème physique sous-jacent. Bien entendu, on aurait abouti à cette même forme générale en intégrant d'abord par rapport à α puis par rapport à β . Interprétons chacun des deux termes. La subtilité ici est qu'une valeur donnée de α , par exemple, est réalisée par une infinité de couples de variables (x, t) . Supposons par exemple que (x, t) et (x', t') réalisent la même valeur α_0 . On a donc

$$\alpha_0 = t - \frac{x}{c} = t' - \frac{x'}{c}, \quad \text{soit} \quad x' - x = c(t' - t), \quad \text{ou} \quad t' - t = \frac{x' - x}{c}$$

Aussi, en supposant $x' > x$, on constate que la valeur $F(\alpha_0)$, observée au point d'abscisse x à la date t , s'observe également en un autre point d'abscisse plus grande x' , mais à la *date ultérieure* t' . Considérant $F(\alpha_0)$ comme un *signal*, on constate donc que celui-ci s'est *propagé* de l'abscisse x à l'abscisse x' à la vitesse c (figure 11.1). Un tel signal est aussi appelé *onde*, et l'équation (11.21) qui régit son évolution est aussi appelée *équation d'onde*. La partie associée à $F(\alpha)$ se propage donc le long de l'axe x' , dans le sens croissant des abscisses. On dit que c'est une onde *progressive*. Manifestement, la partie $G(\beta)$ correspond à une onde se propageant dans le sens *décroissant* des abscisses : c'est une onde *rétrograde*.

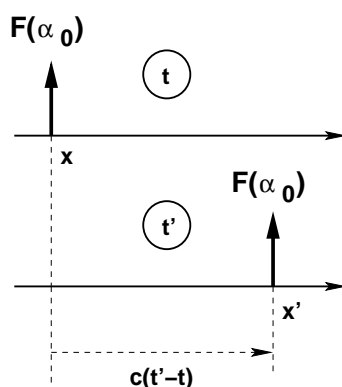


Figure 11.1 : Phénomène de propagation

D'une façon générale, on appelle *onde plane* une onde dont l'amplitude ne dépend que d'une seule coordonnée cartésienne. On obtient alors le résultat qu'une onde plane *se propage en ligne droite*. Ici, l'axe des x est la direction de propagation de l'onde.

11.2.3 Structure d'une onde électromagnétique plane

Nous envisagerons ici la propagation dans le vide et en dehors des sources d'un champ électromagnétique ne dépendant que de la seule coordonnée d'espace x (cartésienne) et du temps t . D'après ce qui précède, les champs électriques et magnétiques correspondants s'écrivent sous les formes respectives

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(\alpha) + \vec{E}_2(\beta), \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_1(\alpha) + \vec{B}_2(\beta) \quad (11.23)$$

Les équations de Maxwell (11.13) impliquent, entre les composantes des deux champs, des relations que nous allons maintenant établir. Dans ce qui suit, il est tenu compte du fait que les dérivées partielles par rapport aux coordonnées y et z sont nulles. Un premier résultat important est obtenu en exploitant le fait que, dans cette propagation libre, les deux champs sont à divergence nulle. En effet, écrivons

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{c} \left[\frac{dE_{2x}}{d\beta} - \frac{dE_{1x}}{d\alpha} \right]$$

On en déduit que, α et β étant indépendants, on a nécessairement

$$\frac{dE_{2x}}{d\beta} = \frac{dE_{1x}}{d\alpha} = \text{constante}$$

et que la constante doit être nulle car une solution du type $E_{1x} = K\alpha$, croissante avec t ou x , est inacceptable physiquement. La seule solution envisageable serait donc des champs E_{1x} et E_{2x} constants. Mais cette solution statique ne cadre pas avec l'idée que l'on se fait d'un phénomène variable dans l'espace et dans le temps, se propageant à la vitesse c . La description correcte doit nécessairement correspondre à

$$E_{1x} = E_{2x} = E_x = 0 \quad (11.24)$$

De façon évidente, on a de même

$$B_{1x} = B_{2x} = B_x = 0 \quad (11.25)$$

Ce simple raisonnement permet d'obtenir le résultat remarquable qu'une onde électromagnétique plane est nécessairement *transversale*, c'est-à-dire, ses champs électrique et magnétique sont *perpendiculaires* à la direction de propagation. Dédit directement de la théorie de Maxwell, ce résultat en fut un autre succès retentissant.

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à son tour aux relations

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Exprimée à l'aide des variables α et β , la première donne

$$\frac{dB_{1y}}{d\alpha} + \frac{1}{c} \frac{dE_{1z}}{d\alpha} = \frac{1}{c} \frac{dE_{2z}}{d\beta} - \frac{dB_{2y}}{d\beta} = \text{constante}$$

et en raisonnant comme précédemment, on en déduit

$$B_{1y} = -\frac{1}{c} E_{1z}, \quad B_{2y} = \frac{1}{c} E_{2z} \quad (11.26)$$

On obtient de même

$$B_{1z} = \frac{1}{c}E_{1y}, \quad B_{2z} = -\frac{1}{c}E_{2y} \quad (11.27)$$

Un autre résultat remarquable apparaît alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{B}_1 &= E_{1y}\left(-\frac{1}{c}E_{1z}\right) + E_{1z}\left(\frac{1}{c}E_{1y}\right) = 0 \\ \vec{E}_2 \cdot \vec{B}_2 &= E_{2y}\left(\frac{1}{c}E_{2z}\right) + E_{2z}\left(-\frac{1}{c}E_{2y}\right) = 0 \end{aligned} \quad (11.28)$$

La conclusion est que, pour une onde plane se propageant selon une direction donnée suivant un sens donné, progressif ou rétrograde, les champs électrique et magnétique correspondants sont perpendiculaires entre eux. De plus, notant \vec{u} le vecteur unitaire définissant la direction et le sens de propagation, le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est *direct* (figure 11.2). En effet, on vérifie aisément que, posant $\vec{c} = c \vec{e}_x$, on a

$$\boxed{\vec{E}_1 = \vec{B}_1 \wedge \vec{c}, \quad \vec{B}_1 = \frac{\vec{c}}{c^2} \wedge \vec{E}_1} \quad (11.29)$$

pour la partie progressive, et

$$\boxed{\vec{E}_2 = -\vec{B}_2 \wedge \vec{c}, \quad \vec{B}_2 = -\frac{\vec{c}}{c^2} \wedge \vec{E}_2} \quad (11.30)$$

pour la partie rétrograde. On notera également que

$$\|\vec{E}_1\| = c \|\vec{B}_1\|, \quad \|\vec{E}_2\| = c \|\vec{B}_2\| \quad (11.31)$$

Le rapport des amplitudes des champs électrique et magnétique est alors simplement égal à c .

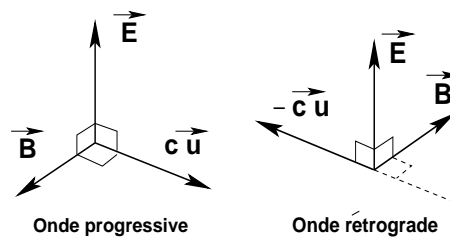


Figure 11.2 : Structure d'une onde plane

11.3 L'Énergie électromagnétique

Nous allons montrer que la propagation d'une onde électromagnétique s'accompagne d'un transport d'énergie électromagnétique. Mais avant, voyons comment on peut, en toute généralité, établir une *équation bilan*.

11.3.1 Equation bilan

Supposons que nous voulions étudier l'évolution temporelle d'une certaine grandeur physique \mathcal{E} . Le plus souvent, il s'agit d'une grandeur de caractère *extensif*. Soit alors $E(t)$ la quantité de cette grandeur contenue à la date t dans un volume invariable \mathcal{V} . Une variation temporelle de $E(t)$ peut être due à de multiples causes physiques difficilement analysables d'une façon générale. Cependant, comme nous allons le voir, la description même de cette variation fait appel à un nombre restreint de concepts simples. Tout d'abord, le caractère extensif de \mathcal{E} permet d'en définir une *densité volumique*, variable dans l'espace et dans le temps, que nous noterons $\mu(M, t)$. Ainsi, $E(t)$ s'exprime comme l'intégrale de volume

$$E(t) = \int_{\mathcal{V}} \mu(M, t) d\mathcal{V}(M)$$

L'étude d'une variation temporelle se fait de façon incontournable au moyen d'une dérivée temporelle. La grandeur à analyser en dernier ressort sera donc

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(M, t) d\mathcal{V}(M)$$

La première cause de variation temporelle de $E(t)$ peut être due par une absorption spontanée de la grandeur \mathcal{E} à l'intérieur même du volume \mathcal{V} . Nous tiendrons compte de cette possibilité en disant qu'à l'intérieur d'un volume élémentaire $d\mathcal{V}(M)$ autour d'un point M dans le volume \mathcal{V} disparaît par unité de temps une certaine quantité $a(M, t)d\mathcal{V}(M)$ de la grandeur \mathcal{E} . La deuxième cause de variation de $E(t)$ peut être due à des processus inverses de création spontanée de \mathcal{E} . Ce phénomène sera pris en compte en disant qu'une certaine quantité $g(M, t)d\mathcal{V}(M)$ de la grandeur \mathcal{E} peut apparaître par unité de temps dans le même élément de volume $d\mathcal{V}(M)$. Ce sont les deux seuls phénomènes envisageables à l'intérieur du volume \mathcal{V} .

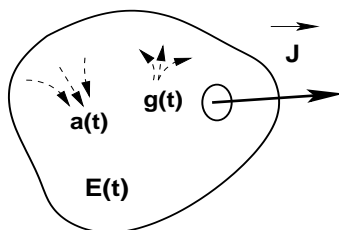


Figure 11.3 : Phénomènes associés à une équation bilan

Il existe cependant une troisième cause de variation de $E(t)$. Elle implique une inévitable réaction de l'univers face à cette variation même. Ceci est conforme à un principe général de *modération*. Une valeur constante de E correspondrait à un certain équilibre naturel, forcé ou non. Une variation de cette quantité est consécutive à une rupture de cet équilibre. Dès lors sont mis en jeu des processus dont l'action vise à rétablir l'équilibre, ou de mener vers un nouvel équilibre, a priori plus stable que le précédent. En se plaçant du point de vue du système contenu dans le volume \mathcal{V} , il s'agit de processus d'interaction avec le monde extérieur qui nécessairement se déroulent à sa frontière, c'est-à-dire en tous les points de la surface Σ délimitant le volume \mathcal{V} . Il y a de plus un effet directionnel dans cette interaction. En effet, une diminution de $E(t)$ devrait conduire à une action orientée vers l'intérieur du volume visant à augmenter la quantité de \mathcal{E} qui y est contenue. L'action est inverse s'il s'agit d'une augmentation. Les caractéristiques de cette action sont bien prises en compte par une intégrale de flux. Ceci amène donc à définir un *vecteur densité de courant* dont le flux à travers la surface fermée Σ

$$\int_{\Sigma} \vec{J}(P, t) \cdot d\vec{\Sigma}(P)$$

décrit, par unité de temps, la réaction de l'univers face à la variation de $E(t)$. En prenant soin d'affecter un signe “-” aux processus contrant une augmentation de $E(t)$, on établit ainsi l'équation intégrale du bilan :

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\mathcal{V}} [g(M,t) - a(M,t)] d\mathcal{V}(M) - \int_{\Sigma} \vec{J}(P,t) \cdot \vec{d\Sigma}(P) \quad (11.32)$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, on sait que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée peut être transformée en une intégrale de la divergence de ce vecteur dans le volume délimité par cette surface. Ceci oblige finalement à étendre à tout le volume \mathcal{V} notre modélisation de la réaction de l'univers à la variation de $E(t)$, c'est-à-dire d'accepter que \vec{J} existe même à l'intérieur de ce volume. On en déduit l'équation

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t) d\mathcal{V}(M) = \int_{\mathcal{V}} [g(M,t) - a(M,t) - \text{div } \vec{J}(M,t)] d\mathcal{V}(M) \quad (11.33)$$

Celle-ci est finalement valable quelle que soit l'extension du volume. Passant à la limite d'un volume infinitésimal, on en déduit l'équation locale de bilan :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t) + \text{div } \vec{J}(M,t) = g(M,t) - a(M,t)} \quad (11.34)$$

Bien entendu, les expressions de g , a et \vec{J} sont spécifiques du système physique étudié, mais cette équation est de portée très générale. Dans le cas où $g = 0$, $a = 0$, la variation de la grandeur \mathcal{E} ne peut qu'être due à un transfert de cette grandeur à travers la surface Σ . Ce transfert sera alors décrit au moyen d'un vecteur densité de courant de cette grandeur. Si \vec{V} est le champ des vitesses de son transport, on écrira

$$\vec{J}(M,t) = \mu(M,t) \vec{V}(M,t) \quad (11.35)$$

L'équation bilan devient

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t) + \text{div } \vec{J}(M,t) = 0} \quad (11.36)$$

et l'on parle alors d'équation de conservation car globalement, la quantité de \mathcal{E} n'est pas détruite : à une diminution $dE(t)$ de $E(t)$ correspond un passage de la même quantité à travers Σ , vers l'extérieur. Le principe de conservation de la charge électrique nous en fournit un exemple par l'équation (11.6) où \vec{J} est le vecteur densité volumique de courant de charge qui s'exprime comme le produit de la densité volumique de charges en mouvement par la vitesse moyenne des porteurs de charge, et plus généralement comme une somme vectorielle de tels produits lorsque plusieurs espèces de porteurs sont à considérer.

11.3.2 Le vecteur de Poynting

Qu'en est-il de l'énergie électromagnétique ? D'une part, nous avons établi que l'énergie électrostatique emmagasinée par un système de charges peut être interprétée en termes de *densité volumique d'énergie*, donnée par

$$w_E = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \quad (11.37)$$

et homogène à une pression. Partout où existe un champ électrostatique, c'est cette pression qui, selon leur signe, repousse ou attire les charges soumises au champ. D'autre part, l'énergie magnétostatique emmagasinée par un système de courants s'interprète, elle aussi, en termes de densité volumique d'énergie, donnée par

$$w_M = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (11.38)$$

Nous admettrons qu'en régime variable, partout où un champ électromagnétique est en action, il existe une densité volumique d'énergie électromagnétique donnée par

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (11.39)$$

Une justification est fournie par l'équation bilan que nous allons établir maintenant. On a

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \vec{J} \right] - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E}$$

Or, on a

$$\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \text{div}[\vec{E} \wedge \vec{B}]$$

d'où, finalement, la relation

$$\frac{1}{\mu_0} \text{div}[\vec{E} \wedge \vec{B}] + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (11.40)$$

Au second membre de cette dernière relation, on reconnaît le travail, par unité de temps et par unité de volume, développé par le champ électrique sur des charges en mouvement, cause de déperdition d'énergie électromagnétique. Ce fait est suffisamment convaincant pour que l'on considère cette équation comme une équation bilan sur l'énergie. Le vecteur

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (11.41)$$

doit donc être associé à une diffusion, un *rayonnement*, d'énergie électromagnétique. C'est le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, qui porte le nom de *vecteur de Poynting*. Son flux à travers une surface, fermée ou non, représente la puissance électromagnétique traversant cette surface. Ci-après, nous considérons deux exemples simples confortant l'interprétation du vecteur de Poynting.

11.3.3 Le vecteur de Poynting en action-I

Ce premier exemple est quelque peu inattendu puisqu'il concerne un régime... indépendant du temps!

Considérons un matériau conducteur se présentant sous la forme d'un fil cylindrique de rayon a et de longueur supposée infinie. Il y circule dans le sens $z'z$ de sa longueur un courant électrique d'intensité constante I . Envisageons une tranche de ce conducteur, située entre les cotes $z = 0$ et

$z = h$. Notons V la différence de potentiel électrique entre ces deux cotes. Le champ électrique régnant à l'intérieur du conducteur est indépendant de la cote et donné par

$$\vec{E} = \frac{V}{h} \vec{e}_z$$

Exprimé en coordonnées cylindriques, le champ magnétique créé par le courant sur la surface du conducteur est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\varphi$$

Il existe donc un vecteur de Poynting à la surface du conducteur. Son expression est

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{VI}{S} (-\vec{e}_\rho), \text{ avec } S = 2\pi ah$$

Il est orienté *vers l'intérieur* du conducteur (figure 11.4). Son flux *rentrant* à travers la surface de l'échantillon est

$$\vec{P} \cdot (-\vec{e}_\rho S) = VI$$

Il est égal à la puissance électrique développée entre les deux cotes $z = 0$ et $z = h$ par le champ électrique qui impose la circulation du courant. Nous avons ici une belle interprétation du phénomène en termes de vecteur de Poynting : c'est lui qui apporte à travers la surface du conducteur la puissance nécessaire à la circulation des charges dans le conducteur.

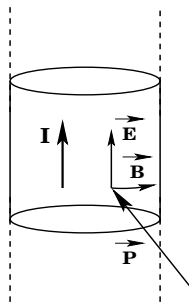


Figure 11.4 : Le vecteur de Poynting en action-I

11.3.4 Le vecteur de Poynting en action-II

Le deuxième exemple se rapporte à la charge d'un condensateur. Les armatures de celui-ci sont deux disques conducteurs d'axe commun $z'z$, de rayon a , l'un à la cote $z = 0$, l'autre à la cote $z = h$. L'espace inter-conducteur est le vide. Pour simplifier, on néglige tout effet de bord. A la date $t = 0$, on branche le condensateur aux bornes d'un générateur de fem E . Soit $u(t)$ la différence de potentiel électrique entre les deux armatures, à la date t . A cette date, il existe entre les deux armatures le champ électrique

$$\vec{E} = \frac{u(t)}{h} \vec{e}_z$$

Ce champ électrique étant variable avec la date t , l'équation de Maxwell-Ampère révèle l'apparition d'un champ magnétique. Dans l'espace inter-conducteur, on a

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\epsilon_0}{h} \frac{du}{dt} \vec{e}_z$$

Cette équation est tout à fait similaire à une équation de magnétostatique où le vecteur densité de courant serait

$$\vec{J} = J \vec{e}_z, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\epsilon_0}{h} \frac{du}{dt}$$

Compte-tenu des symétries et ignorant tout effet de bord, le champ magnétique dû à ce courant est

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{\rho J}{2} \vec{e}_\varphi$$

Ce champ magnétique est lui-même variable dans le temps et devrait de ce fait modifier le champ électrique écrit plus haut. Cependant, nous nous contenterons ici d'un calcul de première approximation en négligeant les effets itératifs d'ordres supérieurs, et tiendrons pour vraies les expressions précédentes des champs. Dans ces conditions, on voit qu'au bord du condensateur, pour $\rho = a$, est apparu le vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\epsilon_0 a}{2h} u \frac{du}{dt} (-\vec{e}_\rho)$$

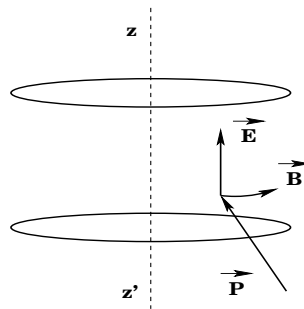


Figure 11.5 : Le vecteur de Poynting en action-II

orienté vers l'intérieur du condensateur (figure 11.5). Son flux *rentrant* à travers la surface latérale cylindrique délimitant l'espace entre les armatures est

$$\Phi = (2\pi a h) \left(\frac{\epsilon_0 a}{2h} u \frac{du}{dt} \right) = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{h} u \frac{du}{dt} = \mathcal{C} u \frac{du}{dt}$$

où $\mathcal{C} = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{h}$ est la capacité du condensateur. Il représente la puissance électromagnétique qui s'accumule entre les armatures dans le processus de charge du condensateur. L'énergie totale ainsi emmagasinée par le condensateur est obtenu par intégration de cette puissance et vaut

$$W_E = \int_0^\infty dt \Phi = \mathcal{C} \frac{E^2}{2}$$

ce qui correspond bien au résultat attendu pour l'énergie potentielle finale du condensateur chargé. Ainsi, le bilan énergétique de cet autre processus électromagnétique peut lui aussi s'interpréter en terme de vecteur de Poynting¹.

¹Procéder à un calcul similaire pour trouver l'énergie "magnétique" disponible après établissement d'un courant dans un solénoïde.

11.4 Ondes em planes, progressives, sinusoïdales

11.4.1 Analyse de Fourier

Rappelons qu'un signal $F(t)$ est sinusoïdal si son évolution dans le temps est décrite par une fonction sinusoïdale du type

$$F(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Ses paramètres sont les suivants

- ♣ sa pulsation ω ;
- ♣ son amplitude maximum A ;
- ♣ sa phase φ .

Les évolutions de ce signal se répètent périodiquement dans le temps. En effet, les deux valeurs $F(t + \frac{2\pi}{\omega})$ et $F(t)$ sont égales. La quantité $T = \frac{2\pi}{\omega}$, homogène à un temps, est la *période* de répétition du signal. Le nombre de périodes effectuées par unité de temps, soit $f = 1/T$ est la *fréquence* de répétition du signal. Ce nombre est homogène à l'inverse d'un temps et s'exprime en Hertz. Si par exemple $f = 50$ Hz, cela signifie que le signal effectue 50 périodes (ou oscillations) pendant 1 seconde. Une représentation en est donnée à la figure 11.6.

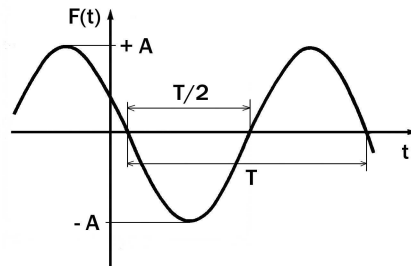


Figure 11.6

Bien sûr, un signal sinusoïdal pur qui évolue éternellement comme une fonction sinusoïdale du temps ne peut qu'être un signal idéal, une abstraction, car tous les signaux réels ont un début et une fin. Néanmoins, on peut utiliser ce modèle pour décrire avec une bonne approximation bon nombre de signaux ayant des variations quasi-sinusoïdales pendant un laps de temps suffisamment long.

Pourquoi, dans les régimes variables dans le temps, parle-t-on le plus souvent des signaux sinusoïdaux ? Qu'est-ce qui justifie leur importance ? Il y a tout d'abord une réponse pratique immédiate : on sait fabriquer des générateurs de tensions variables, tels que les alternateurs industriels, qui délivrent des tensions quasi-sinusoïdales ; de même, les ondes porteuses utilisées dans les transmissions sont de nature quasi-sinusoïdale. Mais il y a aussi une raison théorique profonde qui rend incontournable l'étude des régimes sinusoïdaux. Elle fut établie par Fourier. Nous ferons seulement état du résultat essentiel, sans y mêler la rigueur mathématique qui ne serait pas de mise dans ce cours.

Soit $F(t)$ un signal quelconque. Ce peut être aussi bien une tension variable appliquée aux bornes d'un circuit électrique, qu'une onde radio ou une onde acoustique. D'après la théorie de Fourier, ce signal peut être envisagé comme une superposition de signaux sinusoïdaux de diverses pulsations, selon une relation du type suivant

$$F(t) = \sum_{\omega} \mathcal{F}(\omega) \exp(j\omega t) , \text{ avec } j = +\sqrt{-1}$$

Le plus souvent, cette somme est plutôt une somme continue, c'est-à-dire une intégrale, et l'on parle alors d'intégrale de Fourier

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \tag{11.42}$$

L'amplitude *complexe* (au sens des nombres complexes!) $\mathcal{F}(\omega)$ que l'on appelle aussi amplitude spectrale, définit le poids selon lequel le signal sinusoïdal élémentaire $\exp(j\omega t)$ intervient dans la somme ci-dessus. Plus précisément, son module $|\mathcal{F}(\omega)|$ est ce qu'on appelle le *spectre* en pulsation de $F(t)$. Si l'on connaît, pour toutes les fréquences (ou pulsations), la répartition en fréquence, c'est-à-dire la fonction $\mathcal{F}(\omega)$, alors, la formule ci-dessus permet en principe de reconstruire le signal $F(t)$ par une recombinaison adéquate de signaux sinusoïdaux. Inversement, si l'on connaît le signal $F(t)$ pour toutes les dates courant de $-\infty$ à $+\infty$, on peut déduire l'amplitude spectrale associée à ce signal au moyen de *l'inversion* de Fourier

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt \tag{11.43}$$

Ces relations s'interprètent en disant que l'ensemble des fonctions telles que $F(t)$ forme un espace vectoriel complexe pour lequel les fonctions $\exp(j\omega t)$, où ω court de $-\infty$ à $+\infty$, constituent une base. Un *vecteur* quelconque $F(t)$ de cet espace vectoriel peut être développé suivant cette base au moyen de l'intégrale de Fourier, et la fonction $\mathcal{F}(\omega)$ apparaît alors comme la composante de $F(t)$ sur $\exp(j\omega t)$, obtenue par un produit scalaire défini par la formule inverse de Fourier. On établit également la *relation de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \tag{11.44}$$

qui est en fait une identité sur la norme de F : le membre de gauche est une définition de cette norme et le membre de droite indique que cette norme peut s'exprimer comme la "somme" (intégrale) des carrés des composantes sur la base des fonctions $\exp(j\omega t)$ (au facteur 2π près). Elle s'interprète en termes énergétiques : l'énergie transportée par un signal étant proportionnelle au carré de son amplitude, le membre de droite représente l'énergie totale transportée par le signal $F(t)$, qui doit être égale à la somme des énergies transportées par ses composantes.

On notera que la représentation de Fourier d'un signal force l'utilisation de la notation complexe. Dans la suite, nous ferons donc un usage systématique de celle-ci.

Nous avons vu qu'une composante quelconque du champ électromagnétique d'une onde plane progressive se propageant à la vitesse c suivant un axe $z'z$ est une fonction $F(\alpha)$ de la variable $\alpha = t - z/c$. On peut en effectuer la décomposition de Fourier² et écrire

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\alpha} d\omega , \text{ avec } S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-j\omega\alpha} d\alpha$$

On est ainsi amené à écrire, par exemple, le champ électrique de l'onde sous la forme

$$\vec{E}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathcal{E}}_{\omega}(\alpha) d\omega , \text{ avec } \vec{\mathcal{E}}_{\omega}(\alpha) = \vec{\mathcal{E}}_{\omega} e^{j\omega\alpha} \tag{11.45}$$

Les composantes du vecteur $\vec{\mathcal{E}}_{\omega}$ sont généralement complexes. Se rappelant que la composante du champ suivant la direction de propagation est nulle, on écrira donc

²Qualifiée aussi de *décomposition spectrale*.

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega = E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y \quad (11.46)$$

où E_{0x} et E_{0y} sont des quantités réelles positives pouvant dépendre de ω . Les phases φ_x et φ_y peuvent également dépendre de ω . Le champ mesurable est le champ réel. Pour une composante sinusoïdale, il s'agit du champ

$$\vec{E}_\omega(\alpha) = \Re(\vec{\mathcal{E}}_\omega(\alpha)) \quad (11.47)$$

dont les composantes dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation auront donc pour expressions

$$E_{\omega x}(\alpha) = E_{0x} \cos(\omega\alpha + \varphi_x), \quad E_{\omega y}(\alpha) = E_{0y} \cos(\omega\alpha + \varphi_y) \quad (11.48)$$

C'est ainsi qu'est paramétrisée d'une façon générale une onde plane progressive sinusoïdale³. Une telle onde est aussi qualifiée de *monochromatique* car, en Optique, à une onde lumineuse de fréquence donnée dans le domaine dit *optique*, est associée sa *couleur*, telle que l'oeil humain la perçoit.

Donnons encore une autre expression du champ d'une onde plane, progressive, monochromatique, qui soit indépendante du repère d'espace choisi. Supposons que la propagation de l'onde s'effectue parallèlement à une direction définie par un vecteur unitaire \vec{u} . Soit M le point où l'on observe le champ, et Δ la droite parallèle à \vec{u} passant par M (figure 11.7). Soit encore O' un point origine sur cette droite. On note $z' = \vec{O'M}$. Le champ complexe en M sera écrit sous la forme⁴

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega(z', t) = \vec{\mathcal{E}}_\omega e^{j\psi}, \quad \text{avec} \quad \psi = \omega(t - z'/c)$$

Comme

$$\vec{u} \cdot \vec{OM} = \vec{u} \cdot \vec{OO'} + \vec{u} \cdot \vec{O'M}$$

et que l'on peut toujours choisir O' tel que $\vec{u} \cdot \vec{OO'} = 0$, la phase ψ peut être réécrite comme

$$\psi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{OM}, \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u} \quad (11.49)$$

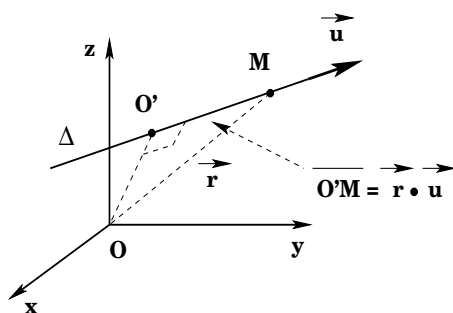


Figure 11.7

³Corrélativement, on a $B_x = -\frac{E_y}{c} = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega\alpha + \varphi_y)$, $B_y = \frac{E_x}{c} = \frac{E_{0x}}{c} \cos(\omega\alpha + \varphi_x)$.

⁴Avec $\vec{\mathcal{E}}_\omega \cdot \vec{u} = 0$.

Le vecteur \vec{k} est appelé *vecteur d'onde*. En supposant $\omega > 0$, son module est $k = \omega/c$. On aboutit ainsi à l'expression du champ

$$\vec{\mathcal{E}}_{\omega}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (11.50)$$

A t fixé, le champ est une fonction périodique de z' . La période, qui est une période *spatiale*, est appelée *longueur d'onde* et est notée λ . Elle est telle que

$$\lambda \frac{\omega}{c} = 2\pi$$

soit, en fonction de la fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$,

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (11.51)$$

En fonction de cette longueur d'onde, le vecteur d'onde s'écrit

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \quad (11.52)$$

Donnons quelques valeurs repères des longueurs d'ondes (Voir aussi figure 11.8). Typiquement, les émissions radio en modulation de fréquence ont des fréquences de l'ordre de 100 Mhz. Leurs longueurs d'onde sont donc de l'ordre de 3m. La teinte sensible "jaune-vert" dans le domaine du visible a pour longueur d'onde $\lambda = 5500 \text{ \AA} = 0,55\mu\text{m}$ (fréquence $\nu \simeq 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$). Le laser au rubis émet une onde de longueur d'onde $\lambda = 6940 \text{ \AA}$. Les rayons X ont des longueurs d'onde de l'ordre de 1 Å. Dans certains accélérateurs de particules, des particules acquièrent une énergie de 200 GeV. Ceci correspond à une longueur d'onde de $6 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ ⁵. Dans les rayons cosmiques, on a observé quelquefois des particules ayant une énergie faramineuse atteignant 10^{20} eV ($\simeq 16 \text{ J}$). La longueur d'onde correspondante est de $1,25 \cdot 10^{-26} \text{ m}$...

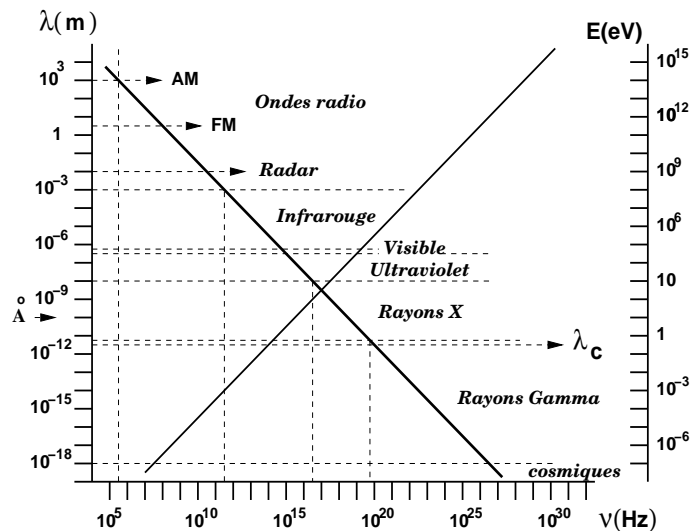


Figure 11.8 : Longueur d'onde d'une onde em (λ , en mètre) et énergie du photon associé (E , en électron-Volt), en fonction de la fréquence ν

⁵A noter que la "taille" d'un proton est estimée à 10^{-15} m .

11.4.2 Polarisation, hélicité

Considérons une onde dont les composantes du champ électrique sont données par (11.48), et examinons deux cas simples particulièrement intéressants.

♣ **Cas** $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \varphi_x = 0, \varphi_y = -\pi/2$.

Pour z donné, par exemple $z = 0$, l'extrémité du vecteur champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (en l'occurrence le plan xOy) décrit de façon uniforme à la vitesse angulaire ω un cercle de rayon E_0 , puisqu'alors

$$E_x = E_0 \cos \omega t, \quad E_y = E_0 \sin \omega t$$

Comme ω sera supposé positif, le cercle est parcouru dans le sens direct. Lors de la propagation, on voit en fait l'extrémité du champ électrique décrire une hélice d'axe $z'z$. Comme la rotation est directe, il s'agit d'une hélice *droite*. On dit dans ce cas que l'onde est *polarisée* circulairement avec une *hélicité* égale à $+1$. Dans la représentation complexe, on a alors

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega = E_0 \sqrt{2} \vec{e}^{(+)}, \quad \text{avec} \quad \vec{e}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - j \vec{e}_y) \quad (11.53)$$

♣ **Cas** $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \varphi_x = 0, \varphi_y = \pi/2$.

On a cette fois (toujours pour $z = 0$)

$$E_x = E_0 \cos \omega t, \quad E_y = -E_0 \sin \omega t$$

et l'on a affaire à une *hélice gauche*. On dit dans ce cas que l'onde est polarisée circulairement avec une *hélicité* égale à -1 (figure 11.9).

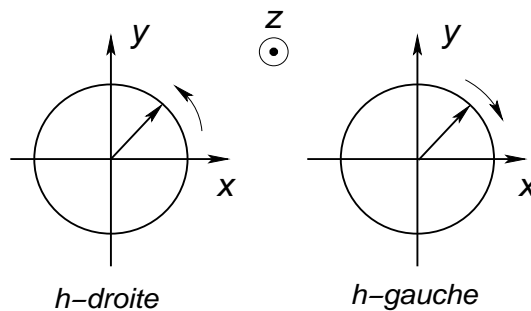


Figure 11.9 : Etats de polarisation circulaire

L'amplitude complexe du champ s'écrit alors

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega = E_0 \sqrt{2} \vec{e}^{(-)}, \quad \text{avec} \quad \vec{e}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + j \vec{e}_y) \quad (11.54)$$

Comme

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}^{(+)} + \vec{e}^{(-)}), \quad \vec{e}_y = \frac{j}{\sqrt{2}} (\vec{e}^{(+)} - \vec{e}^{(-)}) \quad (11.55)$$

il est toujours possible de réexprimer l'amplitude (11.46) du champ d'une onde plane quelconque au moyen des deux vecteurs d'hélicité définie $\vec{e}^{(\pm)}$. On obtient

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega = c_+ \vec{e}^{(+)} + c_- \vec{e}^{(-)}$$

avec

$$c_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{0x} e^{j\varphi_x} + jE_{0y} e^{j\varphi_y}), \quad c_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{0x} e^{j\varphi_x} - jE_{0y} e^{j\varphi_y})$$
(11.56)

Ceci montre clairement que le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale quelconque peut toujours être considéré comme la résultante des champs d'ondes de même nature, l'une d'hélicité +1, l'autre d'hélicité -1.

D'une façon générale, le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale décrit à sa pointe une ellipse (figure 11.10). C'est pourquoi l'on dit que la polarisation d'une telle onde est *elliptique*⁶

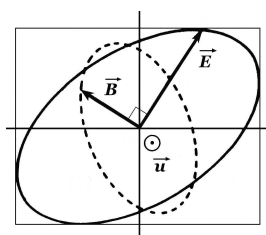


Figure 11.10 : Onde de polarisation elliptique

Enfin, une onde est dite polarisée *rectilignement* si le champ électrique n'a qu'une seule composante de direction fixe. Par exemple, si $E_y = 0$, $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$ (figure 11.11).

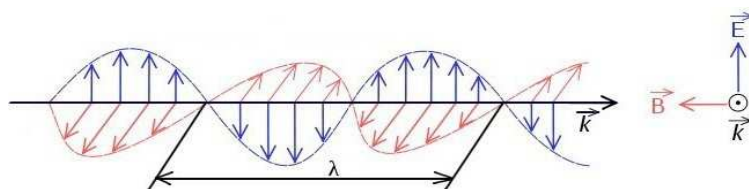


Figure 11.11 : Propagation d'une onde polarisée rectilignement

On peut aussi envisager la description des états de polarisation d'une onde dans un espace vectoriel \mathcal{H} à deux dimensions, dont le corps de définition est l'ensemble des nombres complexes. Dans cet espace hermitien, les vecteurs d'hélicité sont représentés par les vecteurs unicolonnes

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}, \quad e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$
(11.57)

qui forment une base orthonormée puisque

$$e_\pm^\dagger e_\pm = 1, \quad e_\mp^\dagger e_\pm = 0, \quad \text{avec } e^\dagger = {}^t e^*$$

Ces vecteurs peuvent être considérés comme les vecteurs propres de la matrice d'hélicité

⁶A titre d'exercice, montrer que dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation, les axes de l'ellipse font avec les axes de référence Ox et Oy un angle θ tel que $\tan 2\theta = 2 \cos(\varphi_y - \varphi_x) \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.58)$$

Dans la base constituée par ces vecteurs propres, le champ électrique d'une onde polarisée elliptiquement sera représenté par le vecteur unicolonne

$$E = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad (11.59)$$

L'identité

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{b+c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + j \frac{b-c}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$$

montre que toute matrice 2x2 peut être décomposée sur une base constituée des quatre matrices

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$$

On montre que l'état de polarisation de l'onde représentée par (11.59) est complètement caractérisé par les *valeurs moyennes* de ces matrices, définies comme

$$\langle \tau_k \rangle = \frac{E^\dagger \tau_k E}{E^\dagger E}, \quad k = 1, 2, 3$$

On trouve

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 \rangle &= \frac{c_+^* c_- + c_-^* c_+}{|c_+|^2 + |c_-|^2} = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \\ \langle \tau_2 \rangle &= j \frac{c_-^* c_+ - c_+^* c_-}{|c_+|^2 + |c_-|^2} = -2 \cos(\varphi_y - \varphi_x) \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \\ \langle \tau_3 \rangle &= \langle H \rangle = \frac{|c_+|^2 - |c_-|^2}{|c_+|^2 + |c_-|^2} = -2 \sin(\varphi_y - \varphi_x) \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \end{aligned} \quad (11.60)$$

Ces valeurs moyennes sont directement reliées aux célèbres *paramètres de Stokes*⁷.

11.5 Les potentiels électromagnétiques

11.5.1 Le potentiel vecteur, le potentiel scalaire, jauge

L'équation $\text{div } \vec{B} = 0$ restant valable même en régime variable, le champ magnétique peut toujours s'exprimer comme le rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{A} , encore appelé potentiel vecteur

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.61)$$

⁷G.G. STOKES, "On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources", Trans Cambridge Phil. Soc., vol. 9, 339-416 (1852); H. POINCARÉ, "Théorie mathématique de la lumière", Gauthiers-Villars, vol.2, Paris (1892).

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit alors

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{A}, \quad \text{soit} \quad \vec{\text{rot}} \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{0}$$

Le champ $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ayant un rotationnel nul est donc le gradient d'un champ scalaire. Dans le cas d'un régime statique, il se confond au champ électrostatique dont on sait qu'il dérive du potentiel électrostatique V selon la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. Nous admettrons qu'en régime variable avec le temps, le lien entre le champ électrique, le potentiel vecteur et le potentiel électrique, ou potentiel scalaire, V s'exprime par la relation

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (11.62)$$

On sait que la relation (11.61) ne permet pas de définir le potentiel vecteur de façon univoque : l'ajout à \vec{A} du gradient d'un champ scalaire quelconque laisse le champ magnétique inchangé puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul. On dit qu'il y a *invariance de jauge*, le terme de *jauge* se référant à un choix particulier de potentiel vecteur.

Cependant, si l'on change de jauge en prenant comme nouveau potentiel vecteur

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} H$$

la relation (11.62) impose de changer la définition du potentiel scalaire V si l'on veut que ce changement de jauge laisse aussi le champ électrique inchangé, ce qui est une nécessité car le champ électrique comme le champ magnétique sont des grandeurs physiques directement associées à des forces qui ne doivent pas dépendre de tel ou tel choix de jauge. Ecrivons alors

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \left[V' + \frac{\partial H}{\partial t} \right] - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

d'où il résulte que le choix $V' = V - \frac{\partial H}{\partial t}$ réalise l'invariance du champ électrique.

On appelle *transformation de jauge* l'opération qui consiste à remplacer *simultanément* les potentiels \vec{A} et V respectivement par

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} H \quad \text{et} \quad V' = V - \frac{\partial H}{\partial t}} \quad (11.63)$$

H étant une fonction quelconque des coordonnées et du temps. Dans une telle opération, les champs électrique et magnétique restent inchangés. C'est pourquoi l'on dit que les équations de Maxwell sont *invariantes de jauge*.

11.5.2 Equations de propagation pour les potentiels, jauge de Lorenz

Ecrivons

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

d'où

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \text{grad} \left[\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (11.64)$$

D'un autre côté, on a

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\text{div} \left[\text{grad} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}$$

équation que l'on peut récrire sous la forme

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (11.65)$$

Il est évident que les densités sources \vec{J} et ρ sont indépendantes du choix de jauge. On peut alors ajuster la définition des potentiels de telle sorte à obtenir pour eux des équations de propagation simplifiées. La jauge dite *de Lorenz*⁸ consiste à imposer entre les potentiels la relation

$$\boxed{\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (11.66)$$

Avec ce choix, les équations (11.64) et (11.65) deviennent

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}, \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.67)$$

lesquelles, en dehors des sources, se réduisent à des équations de d'Alembert

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (11.68)$$

On remarquera que même dans la jauge de Lorenz, il subsiste une invariance de jauge réduite à des fonctions H satisfaisant l'équation de d'Alembert. En effet, comme

$$\text{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

alors, en annulant le membre de gauche de cette équation ainsi que l'ensemble des deux premiers termes du second membre, on peut encore trouver une infinité de fonctions H (non nulles!) satisfaisant

$$\Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

⁸Cette jauge fut introduite pour la première fois dans l'article "On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents", Philos. Mag. 34, 287-301, 1867, écrit par le physicien danois Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891), lequel ne doit pas être confondu avec le célèbre physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928).

11.5.3 Les potentiels retardés

Cherchons tout d'abord quel peut être le potentiel électrique que crée dans l'espace une particule ayant une position fixe dans le référentiel d'étude, mais dont la charge électrique $Q(t)$ est variable dans le temps. Soit O la position de la particule supposée ponctuelle. Nous prendrons cette position comme origine d'un repère cartésien (O, x, y, z) . La particule ponctuelle sera supposée n'avoir aucune structure spatiale décelable. Dans ces conditions, il est naturel d'admettre que le potentiel électrique V possède la symétrie sphérique autour de O . On est donc conduit à repérer la position d'un point quelconque M de l'espace par ses coordonnées sphériques définies relativement au repère cartésien attaché à O . Notant $r = OM$, le potentiel électrique, en tant que fonction des coordonnées spatio-temporelles ne dépend donc que de r et de t .

Pour une fonction à symétrie sphérique, le Laplacien se réduit à

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV)$$

En tout point différent de O , le potentiel satisfait l'équation de d'Alembert. Ici, elle peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial t^2}$$

La solution générale de cette dernière équation est de la forme

$$rV = F(\alpha) + G(\beta), \quad \text{avec} \quad \alpha = t - \frac{r}{c}, \quad \beta = t + \frac{r}{c}$$

où F et G sont des fonctions à ajuster selon les conditions du système physique étudié. A cet égard, on s'attend à ce que les variations temporelles de la charge de la particule, qui est supposée se trouver seule dans l'espace, provoquent la propagation d'une onde électromagnétique à partir du point O . La seule forme acceptable est donc celle d'une onde progressant à partir de O . Autrement dit, on écarte une solution du type $G(\beta)$. Le potentiel électrique est donc de la forme

$$V(r, t) = \frac{F(\alpha)}{r}$$

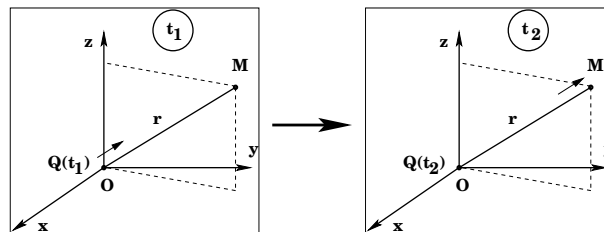


Figure 11.12 : Emission d'un signal en O à $t = t_1$ et sa réception en M à $t_2 = t_1 + r/c$.

Comment déterminer $F(\alpha)$? Comme nous l'avons déjà spécifié, $F(\alpha)$ garde la même valeur pour tous les couples (t, r) donnant la même valeur au paramètre α . Prenons alors un couple (t', r') tel que $t' - \frac{r'}{c} = \alpha$, et faisons tendre r' vers zéro (figure 11.12). De cette manière, on se rapproche de plus en plus de la particule et, à la limite, on peut ignorer tout effet de propagation. Il est manifeste que le potentiel doit alors retrouver la forme qu'on lui connaît en Electrostatique, c'est à-dire

$$V(r', t') \rightarrow \frac{Q(t')}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

On en déduit

$$F(\alpha) = rV(r, t) = \lim_{r' \rightarrow 0} [r'V(r', t')] = \frac{Q(t')}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{avec } t' = \alpha = t - \frac{r}{c}$$

D'où l'expression suivante du potentiel

$$V(r, t) = \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (11.69)$$

Par le principe de superposition, cette expression se généralise au cas d'une assemblée de charges ponctuelles situées en des points *fixes* P_k :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{Q_k\left(t - \frac{P_k M}{c}\right)}{P_k M} \quad (11.70)$$

et tout aussi bien à des distributions continues. Par exemple, pour des charges distribuées dans un volume fixe \mathcal{V} avec une densité volumique $\rho(P, t)$, le potentiel qu'elles créent en tout point M s'écrit

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d\mathcal{V}(P) \quad (11.71)$$

Nous admettrons que l'on obtient pour le potentiel vecteur une expression similaire dans le cas d'une distribution volumique de courants

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d\mathcal{V}(P) \quad (11.72)$$

A cause de la présence de la variable $t - PM/c$, les expressions des potentiels trouvées ci-dessus portent le nom de *potentiels retardés*. On vérifie qu'elles satisfont la jauge de Lorenz.

11.5.4 Potentiels d'une onde plane progressive

Dans le cas d'une onde plane progressive se propageant en dehors de sources dans le vide selon un axe $z'z$, il est évident que les potentiels sont des fonctions de la variable $\alpha = t - z/c$ uniquement. On a

$$E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{dV}{d\alpha} - \frac{dA_z}{d\alpha}$$

On en déduit

$$V = cA_z \quad (11.73)$$

Par ailleurs,

$$E_x = -\frac{dA_x}{d\alpha}, \quad E_y = -\frac{dA_y}{d\alpha}, \quad B_x = -\frac{E_y}{c}, \quad B_y = \frac{E_x}{c}, \quad B_z = 0 \quad (11.74)$$

ce qui montre que pour déterminer les champs électrique et magnétique à partir des potentiels, on a juste besoin des composantes A_x et A_y du potentiel vecteur. Pour ce type d'onde, on peut

donc faire le choix $V = 0$, $A_z = 0$. Dans le cas d'une onde monochromatique de pulsation ω , on aura simplement, en notation complexe,

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} \quad (11.75)$$

11.6 Production d'ondes électromagnétiques par des dipôles

11.6.1 Le dipôle électrique

Nous supposons qu'à l'aide d'un montage électrique approprié qu'il n'est pas utile de préciser, on réalise un système de deux charges, supposées ponctuelles, prenant des valeurs opposées à toute date pour tout observateur à équidistance de leurs positions respectives. La première charge, notée $Q(t)$, est en un point A , la seconde, $-Q(t)$, est en un point B . On note O le milieu du segment AB , de longueur $2a$. Nous prendrons O comme origine d'un repère cartésien dont l'axe $z'z$ passe par les points A et B en étant orienté suivant \vec{BA} .

D'après (11.70), le potentiel électrique créé par cet ensemble en un point M est

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(t - MA/c)}{MA} - \frac{Q(t - MB/c)}{MB} \right]$$

Considérons un point M à grande distance de cet ensemble : $r = OM \gg a$. On peut alors effectuer un développement du potentiel suivant les puissances de a/r et se limiter au premier ordre non nul. Nous procéderons comme suit. Le point M étant repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ , on a approximativement

$$MA \approx r - a \cos \theta, \quad MB \approx r + a \cos \theta$$

et

$$Q(t - MA/c) \approx Q\left(t - \frac{r}{c} - \frac{a}{c} \cos \theta\right) \approx Q\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{a}{c} \cos \theta \dot{Q}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$Q(t - MB/c) \approx Q\left(t - \frac{r}{c} + \frac{a}{c} \cos \theta\right) \approx Q\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{a}{c} \cos \theta \dot{Q}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

D'où

$$\frac{Q(t - MA/c)}{MA} - \frac{Q(t - MB/c)}{MB} \approx Q\left(t - \frac{r}{c}\right) \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} \right) + \frac{a}{c} \cos \theta \dot{Q}\left(t - \frac{r}{c}\right) \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \right)$$

La différence $\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} \approx \frac{2a \cos \theta}{r^2}$ donne un terme en $1/r^2$ que l'on peut négliger. Prenant $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \approx 2/r$, il vient

$$V(M, t) \approx \frac{2a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r c} \dot{Q}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Posons

$$\vec{p} = \vec{BA} Q(t) = p(t) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad p(t) = 2aQ(t) \quad (11.76)$$

C'est le *moment dipolaire électrique* du système des deux charges, qui apparaît bien comme un dipôle à grande distance du point O . A l'ordre d'approximation considéré, on a donc

$$V(M, t) = \frac{\cos \theta \dot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c} \quad (11.77)$$

La variation des charges est équivalente au passage d'un courant électrique d'intensité $I = \dot{Q}$ entre A et B , auquel on associera l'élément de courant $I \overrightarrow{BA}$. Il s'ensuit qu'en première approximation, le potentiel vecteur sera donné par

$$\overrightarrow{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{BA} I(t - r/c)}{r}$$

soit, puisque $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$,

$$\overrightarrow{A}(M, t) = \frac{\dot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \overrightarrow{e_z} \quad (11.78)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les expressions (11.77) et (11.78) satisfont, au premier ordre, la condition de Lorenz.

Calculons ensuite les composantes sphériques des champs électrique et magnétique à partir de ces potentiels, compte-tenu de ce que celles du potentiel vecteur sont

$$A_r = \frac{\dot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \cos \theta = \frac{V}{c}, \quad A_\theta = -\frac{\dot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin \theta, \quad A_\varphi = 0$$

En négligeant tout terme contenant des puissances supérieures à 1 en $1/r$, on obtient ainsi

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{\cos \theta \dot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \approx 0, \quad E_\varphi = 0$$

et

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \approx -\frac{\partial A_\theta}{\partial t}$$

soit

$$E_\theta = \frac{\sin \theta \ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (11.79)$$

Puis

$$B_r = 0, \quad B_\theta \approx 0, \quad B_\varphi \approx \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta)$$

soit

$$B_\varphi = \frac{\sin \theta \ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} = \frac{E_\theta}{c} \quad (11.80)$$

On constate donc que, au voisinage d'une direction donnée caractérisée par les angles θ et φ , et sur une distance ℓ suffisamment petite par rapport à r , l'onde électromagnétique émise par le dipôle exhibe une structure similaire à celle d'une onde plane polarisée rectilignement : propagation selon $\overrightarrow{e_r}$, champs perpendiculaires à cette direction, les trois vecteurs \overrightarrow{E} , \overrightarrow{B} et $\overrightarrow{e_r}$, pris dans cet ordre, formant un trièdre direct (figure 11.13).

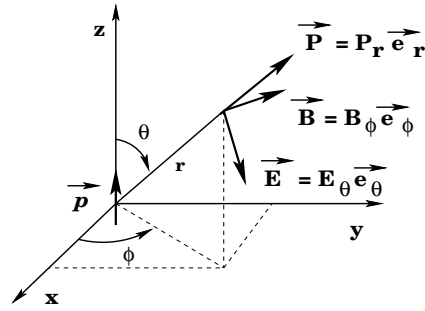


Figure 11.13 : Structure à grande distance de l'onde émise par un dipôle électrique variable.

Comparativement au cas statique, on relève le fait qu'au plus bas ordre, les champs ne sont plus en $1/r^3$ mais en $1/r$. La conséquence la plus spectaculaire concerne la propagation d'énergie. En effet, le vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E_\theta^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r \quad (11.81)$$

décroit comme $1/r^2$. Il en résulte que son flux à travers une sphère de centre O et de rayon r reste fini lorsque $r \rightarrow \infty$. Ce flux représente la puissance électromagnétique totale diffusée par le dipôle dans toutes les directions. Il est égal à

$$W = \int_{S(O,r)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 P_r$$

soit, tout calcul fait

$$W = \frac{[\ddot{p}(t - r/c)]^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (11.82)$$

On remarquera que cette propagation d'énergie n'existe que si la dérivée seconde du moment dipolaire est non nulle. On notera aussi que le vecteur de Poynting étant proportionnel à $\sin^2\theta$, le rayonnement du dipôle est directionnel. Il est le plus faible dans les directions parallèles au moment dipolaire, maximum dans les directions perpendiculaires à celui-ci. La puissance électromagnétique rayonnée par unité d'angle solide est définie par

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 P_r, \text{ avec } d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \quad (11.83)$$

ce qui donne ici

$$\frac{dW}{d\Omega} = \sin^2\theta \frac{[\ddot{p}(t - r/c)]^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \quad (11.84)$$

Les formules obtenues ci-dessus pour le rayonnement dipolaire sont en fait applicables à toute structure se comportant comme un dipôle, quelle qu'en soit la nature. Notamment lorsqu'il s'agit d'étudier le rayonnement d'ondes électromagnétiques secondaires par un milieu traversé par une onde électromagnétique. Ce phénomène s'explique en disant que le champ électrique \vec{E}_p de l'onde perturbatrice provoque dans le milieu des distorsions au niveau microscopiques dans les répartitions des charges élémentaires qui y sont présentes, avec pour conséquence l'apparition

de moments dipolaires électriques *induits*. Dans le cas des milieux dilués (gaz), on peut admettre comme une bonne approximation une simple relation de proportionnalité entre ces moments dipolaires et le champ appliqué :

$$\vec{p} \propto \vec{E}_p$$

avec un coefficient de proportionnalité qu'il est inutile de préciser ici (Voir section 6.2). Tout comme le champ appliqué, ces moments sont variables dans le temps et sont donc potentiellement sources d'émission d'ondes secondaires dans tout l'espace. On dit qu'il y a *diffusion* de l'onde incidente par le milieu.

Envisageons donc la traversée d'un milieu par une onde plane, monochromatique de pulsation ω , se propageant dans la direction et le sens de l'axe $z'z$ d'un repère cartésien O, x, y, z , O étant un point central dans le milieu. Nous choisirons l'axe Ox dans le plan contenant l'axe Oz et le vecteur \vec{OM} , M étant le point d'observation, dont la distance $r = OM$ par rapport à O peut être généralement considérée d'ordre macroscopique en comparaison des dimensions microscopiques des dipôles induits.

En un point P du milieu où se trouve un dipôle de moment \vec{p} , le champ électrique de l'onde incidente peut être écrit sous la forme

$$\vec{E}_p = E_{0x} \vec{e}_x \cos(\omega t + \varphi_x) + E_{0y} \vec{e}_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

où les angles φ_x et φ_y dépendent éventuellement de la position de P . On aura donc

$$\vec{p}(P, t - PM/c) = \Lambda [E_{0x} \vec{e}_x \cos(\omega(t - PM/c) + \varphi_x) + E_{0y} \vec{e}_y \cos(\omega(t - PM/c) + \varphi_y)]$$

Λ étant une certaine constante. Pour simplifier, envisageons la situation où le milieu se réduit à un tel dipôle en O . Notons ψ l'angle entre le vecteur \vec{OM} et \vec{p} . Alors, la puissance électromagnétique par unité d'angle solide au voisinage de M prend la forme

$$\frac{dW}{d\Omega} = \sin^2 \psi \omega^4 \frac{p_x^2(t - r/c) + p_y^2(t - r/c)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}$$

Or

$$\sin^2 \psi [p_x^2 + p_y^2] = p_x^2 + p_y^2 - [p_x^2 + p_y^2] \cos^2 \psi$$

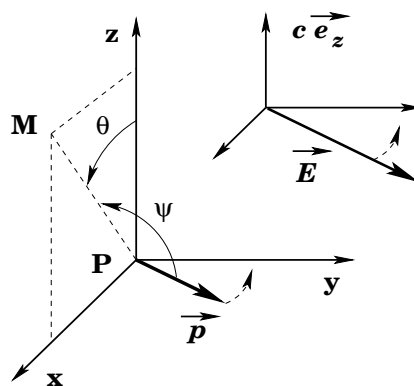


Figure 11.14

et comme (Voir figure 11.14)

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \cos \psi = \sin \theta p_x$$

θ étant l'angle entre \vec{OM} et $z'z$. Par suite, la *moyenne temporelle* de cette distribution de puissance est

$$\frac{d\langle W \rangle}{d\Omega} = A\omega^4 \langle E_x^2 + E_y^2 - E_x^2 \sin^2 \theta \rangle = A\omega^4 [E_{0y}^2 + E_{0x}^2 \cos^2 \theta]/2$$

A étant une constante. Posons $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde de l'onde incidente, et

$$\eta = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \quad I_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$$

Le paramètre η caractérise le degré de polarisation de l'onde incidente. On trouve finalement

$$\frac{d\langle W \rangle}{d\Omega} = I_0 \frac{B}{\lambda^4} [1 + \cos^2 \theta - \eta \sin^2 \theta] \quad (11.85)$$

B étant une nouvelle constante. Du fait de la présence du facteur $1/\lambda^4$, on conclut que, à intensité de rayonnement I_0 donnée, le rayonnement diffusif est d'autant plus important que la longueur d'onde de l'onde incidente est courte. Cet effet sélectif, appelé effet Tyndall ou encore diffusion Rayleigh, permet d'expliquer la couleur bleue du ciel. Éclairées par la lumière solaire, les molécules de l'atmosphère la diffusent. La lumière solaire est composée de radiations monochromatiques dont les longueurs d'onde se répartissent dans un large spectre. Pour ce qui concerne le domaine du visible, la loi de diffusion en $1/\lambda^4$ montre, par exemple, que la réémission de radiation bleue ($\lambda \simeq 0,4\mu$) est environ 16 fois plus intense que celle de radiation rouge ($\lambda \simeq 0,8\mu$).

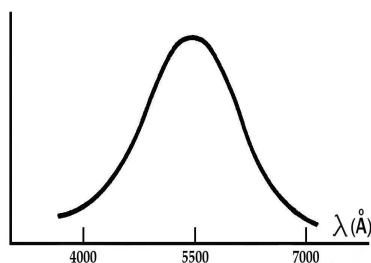


Figure 11.15 : Courbe qualitative de la sensibilité de l'oeil

D'un autre côté, la captation de lumière par l'oeil humain en vision photopique⁹ est également sélective en longueur d'onde. La courbe de sensibilité correspondante est en forme de cloche avec un maximum autour du vert (le jaune-vert est la *teinte sensible* de longueur d'onde $\lambda = 0,555\mu$), tandis que, par rapport à ce maximum, la sensibilité est 100 fois plus faible vers le violet (figure 11.15). Ces deux effets combinés font que, finalement, le ciel clair nous apparaît bleu.

Il est à noter que l'atmosphère diffuse de la lumière *incohérente*¹⁰. Ceci a pour conséquence que ce ne sont pas les champs des ondes émises par les divers centres émetteurs qui s'ajoutent, mais seulement les énergies correspondantes. De ce fait, la formule (11.85) peut être appliquée à l'atmosphère, en changeant la constante de façon adéquate. En outre, la lumière solaire n'est pas polarisée, ce qui conduit à prendre $\eta = 0$. On aboutit ainsi à la célèbre formule de Rayleigh

⁹C'est la vision diurne, par opposition à la vision *scotopique* qui est la vision nocturne ou par faible éclairage.

¹⁰Cette expression sera expliquée plus en détail dans le chapitre dédié aux interférences en Optique.

$$\boxed{\frac{d\langle W \rangle}{d\Omega} = I_0 \frac{B}{\lambda^4} [1 + \cos^2 \theta]} \quad (11.86)$$

qui donne, pour une radiation incidente de longueur d'onde λ , la répartition angulaire de la lumière diffusée de façon incohérente par des centres émetteurs analogues à des dipôles électriques.

11.6.2 Le dipôle magnétique

Nous modéliserons un dipôle magnétique par une petite spire conductrice circulaire de rayon a , dont le centre est à l'origine O d'un repère cartésien (O, x, y, z) , la spire étant en outre dans le plan xOy . Pour O , l'intensité du courant circulant dans la spire est la même pour tous les points P de celle-ci. Soit $I(t)$ cette intensité à la date t . Nous évaluerons le potentiel vecteur créé par cette spire en un point M à grande distance $r = OM$ de O ($r \gg a$), en ne retenant que les premiers termes non nuls d'un développement suivant les puissances de a/r . Nous partirons de l'expression

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I(t - PM/c)}{PM} d\vec{\ell}(P)$$

l'intégration étant effectuée le long de la spire. Ecrivons

$$PM \approx r - \vec{e}_r \cdot \vec{OP}$$

Le développement de $1/PM$ donne $1/r$, les termes suivants étant d'ordre supérieurs sont négligés. Puis

$$I(t - PM/c) \approx I\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{OP}}{c}\right) \approx I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{OP}}{c} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Comme $\oint d\vec{\ell}(P) = \vec{0}$, on obtient pour première approximation du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) \oint \left(\vec{e}_r \cdot \vec{OP}\right) d\vec{\ell}(P)$$

Or, φ_P étant l'angle azimutal de P ,

$$\left(\vec{e}_r \cdot \vec{OP}\right) d\vec{\ell}(P) = a^2 d\varphi_P \left(-\sin \varphi_P \vec{e}_x + \cos \varphi_P \vec{e}_y\right) \left(\cos \varphi_P \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r + \sin \varphi_P \vec{e}_y \cdot \vec{e}_r\right)$$

et comme

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi_P d\varphi_P = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_P d\varphi_P = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi_P \sin \varphi_P d\varphi_P = 0$$

il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\vec{e}_r \cdot \vec{OP}\right) d\vec{\ell}(P) &= \pi a^2 \left(\vec{e}_y (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_x (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_r)\right) \\ &= \pi a^2 (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) \wedge \vec{e}_r = \pi a^2 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r \end{aligned}$$

Introduisant alors le *moment dipolaire magnétique*

$$\vec{\mathcal{M}}(t) = \pi a^2 \vec{e}_z I(t) \quad (11.87)$$

on obtient pour le potentiel vecteur une formule qui ne fait plus apparaître la véritable structure du dipôle :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \vec{\mathcal{M}}(t - r/c) \wedge \vec{e}_r \quad (11.88)$$

et qui est donc applicable à tout système s'apparentant à un dipôle magnétique. En coordonnées sphériques, la seule composante non nulle du potentiel vecteur est

$$A_\varphi(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \dot{\mathcal{M}}(t - r/c) \sin \theta = \frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \dot{\mathcal{M}}(t - r/c) \quad (11.89)$$

Il s'ensuit que puisque

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

la jauge de Lorenz donne $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire, un potentiel électrique indépendant du temps. Pour décrire l'onde émise par le dipôle, on peut donc choisir sans inconvénient $V \equiv 0$. On obtient ainsi pour les composantes des champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} E_r = 0, \quad E_\theta = 0, \quad E_\varphi = -\frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \ddot{\mathcal{M}}(t - r/c) \\ B_r = 0, \quad B_\varphi = 0, \quad B_\theta = -\frac{E_\varphi}{c} \end{aligned} \quad (11.90)$$

On trouve ainsi que le champ électromagnétique produit par un dipôle magnétique "ponctuel" présente aussi une structure analogue à une onde plane dans le voisinage immédiat d'un point d'observation. Les expressions des champs sont similaires à celles obtenues pour le dipôle électrique : pour passer d'un jeu de formules à l'autre, il suffit de faire la substitution

$$p \leftrightarrow \frac{\mathcal{M}}{c} \quad (11.91)$$

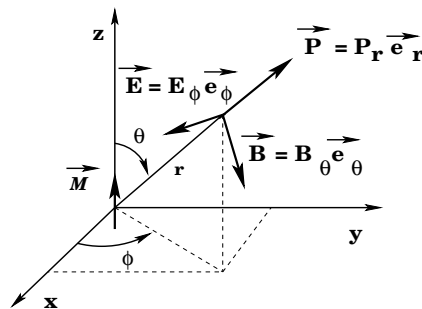


Figure 11.16 : Structure à grande distance de l'onde émise par un dipôle magnétique variable.

11.7 Complément I : Action d'une onde électromagnétique sur une charge liée

Dans ce paragraphe, nous envisageons l'action d'une onde plane, progressive, monochromatique, sur une charge liée. Le milieu dans lequel se trouve la charge exerce sur celle-ci des actions que nous modéliserons simplement comme suit. En l'absence d'actions extérieures et d'agitation thermique, la charge occuperait une certaine position d'équilibre O . Lorsqu'elle s'en écarte, du fait d'une perturbation quelconque, le milieu exerce sur elle une action visant à la ramener en O . Cette action sera supposée être bien décrite par la force de rappel

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -K \vec{r} \quad , \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{OM}$$

M étant la position actuelle de la charge et K un coefficient positif. En outre, l'énergie que la charge peut acquérir à la suite de cette perturbation se dissipe par des processus de relaxation interne. Nous supposons que ce phénomène dissipatif peut être décrit au moyen d'une force de frottement fluide :

$$\vec{F}_{\text{diss}} = -f \vec{v}$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse instantanée de la charge et f un autre coefficient positif. Enfin, nous supposons que la longueur d'onde λ de l'onde est bien plus grande que l'écart maximum que peut effectuer la charge par rapport à sa position d'équilibre : $\lambda \gg r$. En conséquence, nous pourrions considérer que le champ électromagnétique agissant sur la charge est localement indépendant des coordonnées de celle-ci. Enfin, la vitesse acquise par la charge est toujours de loin inférieure à c . Aussi, compte-tenu du fait que pour une onde plane progressive on a $\|\vec{B}\|/\|\vec{E}\| = 1/c$, dans l'expression de la force de Lorentz que le champ électromagnétique exerce sur la charge, il sera largement justifié de négliger la part due au champ magnétique :

$$\vec{F}_{\text{Lor}} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \approx q \vec{E}$$

q étant la valeur de la charge. Finalement, admettant que l'on puisse utiliser la mécanique classique pour décrire cette interaction, l'application de la relation fondamentale de la Dynamique Classique conduit à l'équation

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K \vec{r} - f \vec{v} + q \vec{E} \tag{11.92}$$

où m est la masse de la charge. Nous supposons établi un régime permanent d'oscillations forcées. Notant ω la pulsation de l'onde et utilisant la notation complexe, on obtient

$$\vec{r} = \frac{q \vec{E}}{K - m\omega^2 + j\omega f} \tag{11.93}$$

En prenant pour expression complexe du champ

$$\vec{E} = e^{j\omega t} (E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y)$$

on trouve le vecteur déplacement (réel) sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{q}{D} \left([K - m\omega^2] \vec{E}_r - f \frac{d \vec{E}_r}{dt} \right) \quad , \quad \text{avec} \quad D = (K - m\omega^2)^2 + \omega^2 f^2 \\ \text{et} \quad \vec{E}_r &= E_{0x} \vec{e}_x \cos(\omega t + \varphi_x) + E_{0y} \vec{e}_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{aligned} \tag{11.94}$$

D'où le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{q}{D} \left([K - m\omega^2] \frac{d\vec{E}_r}{dt} + f\omega^2 \vec{E}_r \right) \quad (11.95)$$

La quantité d'énergie fournie pendant une période par le champ agissant sur la charge est donnée par

$$\Delta W = \int_0^T dt q \vec{v} \cdot \vec{E}_r = qT \langle \vec{v} \cdot \vec{E}_r \rangle$$

où le symbole $\langle .. \rangle$ représente ici une moyenne temporelle sur une période du champ. On trouve ainsi

$$\Delta W = \frac{\pi q^2 \omega f}{D} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \quad (11.96)$$

On notera avec intérêt que cette énergie transférée est proportionnelle à la valeur moyenne $\frac{\epsilon_0}{2}(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)$ de la densité d'énergie électromagnétique de l'onde.

D'après le théorème du moment cinétique, la partie de la variation de moment cinétique par unité de temps qui est due à l'action du champ est donnée par

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_c = q \vec{r} \wedge \vec{E}_r = -\frac{q^2 f}{D} \frac{d\vec{E}_r}{dt} \wedge \vec{E}_r = \vec{e}_z \frac{q^2 \omega f}{D} E_{0x} E_{0y} \sin(\varphi_x - \varphi_y)$$

La quantité de moment cinétique que le champ électromagnétique a transféré à la charge pendant une période est donc

$$\Delta \vec{L}_c = \vec{e}_z \frac{\pi q^2 f}{D} [-2E_{0x} E_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x)] \quad (11.97)$$

On en déduit le résultat remarquable suivant

$$\frac{\Delta \vec{L}_c}{\Delta W} = -2E_{0x} E_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \frac{1}{\omega} \vec{e}_z = \vec{e}_z \frac{\langle H \rangle}{\omega} \quad (11.98)$$

où $\langle H \rangle$ est la moyenne de l'hélicité évaluée en (11.60). Ce calcul simplifié a le mérite de montrer le lien entre hélicité et moment cinétique. L'hélicité représente pour l'onde électromagnétique un moment cinétique propre, qu'elle transporte comme elle transporte de l'énergie. On sait qu'à une onde électromagnétique est associée une particule élémentaire, le photon. Lorsqu'il s'agit d'une onde plane, progressive et monochromatique se propageant parallèlement à \vec{e}_z , ce photon a les caractéristiques suivantes :

♣ Energie $E = \hbar\omega$, où $\hbar = h/(2\pi)$, h étant la constante de Planck¹¹ ;

♣ quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{E}{c} \vec{e}_z$, où \vec{k} est le vecteur d'onde.

Considérons par exemple une onde polarisée circulairement, d'hélicité +1. Si la charge absorbe un certain nombre n de photons pendant une période, on a $\Delta W = n\hbar\omega$. Corrélativement, le champ aura transmis à la charge le moment cinétique $\Delta \vec{L}_c = n\hbar \vec{e}_z$. On en conclut qu'un

¹¹ $h = 6,626068 \cdot 10^{-34}$ J/s (ou $m^2 \text{ kg s}^{-1}$).

photon associé à cette onde possède un moment cinétique propre égal à $\vec{H} = \hbar \vec{e}_z$. L'hélicité est donc bien une propriété propre au photon, son *spin*, qui est une grandeur de même statut qu'un moment cinétique, et qu'il peut transmettre lors d'une interaction du champ avec des charges électriques. On notera encore une fois que toutes ces propriétés sont bien indépendantes de celles des charges qui interagissent par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique, et constituent les degrés de liberté propres à ce champ.

Alors qu'en règle générale une composante de spin n'est jamais invariante par changement de référentiel galiléen, l'hélicité du photon est un invariant relativiste. La raison simple est que cette particule se déplace constamment à la vitesse c , ce qu'aucun objet matériel ne peut réaliser. Par conséquent, un photon d'hélicité donnée sera vu avec cette même hélicité par tous les observateurs galiléens. Il en serait autrement si le photon se déplaçait à une vitesse moindre : un observateur se déplaçant moins vite verrait le champ électrique tourner dans un certain sens, alors qu'un autre observateur se déplaçant plus vite (ce qui serait permis !) le verrait tourner dans l'autre sens. Cette invariance relativiste de l'hélicité est directement liée au fait que le photon est sans masse.

11.8 Complément II : Modélisation d'antennes filaires

Prenons comme modèle d'antenne un cylindre d'axe $z'z$, de rayon a et de longueur $h \gg a$, fait d'un métal supposé parfaitement conducteur. Cette antenne est excitée électriquement au niveau de son milieu O de cote $z = 0$ et l'intensité du courant électrique dans l'antenne en ce point est donnée sous forme complexe en fonction du temps par

$$I(0, t) = I_0 e^{j\omega t} \quad (11.99)$$

où les deux grandeurs positives I_0 et ω sont respectivement l'intensité maximum et la pulsation dudit courant. Cette excitation provoque l'apparition d'une distribution superficielle de courant électrique se propageant le long de l'antenne, uniquement dans la direction $z'z$, et dont l'intensité en un point de cote z de l'antenne est noté $I(z, t)$. On suppose établi un régime sinusoïdal permanent.

Étudions tout d'abord le champ électromagnétique accompagnant cette distribution, au voisinage de l'antenne. Le milieu ambiant est de l'air, dont les constantes électromagnétiques sont prises égales à ϵ_0 et μ_0 . La position d'un point M est repérée au moyen de ses coordonnées cylindriques ρ, φ, z et les champs électrique et magnétique sont notés \vec{E} et \vec{B} , respectivement.

Le dispositif possède manifestement la symétrie cylindrique autour de $z'z$. De ce fait, le champ magnétique est orthoradial : $B_\rho = B_z = 0$. Pour la même raison, on a $E_\varphi = 0$. En outre, les composantes restantes des champs ne dépendent que de ρ, z , et t et leur dépendance vis-à-vis de t est toute entière contenue dans le facteur commun $e^{j\omega t}$.

À l'extérieur de l'antenne, \vec{J} est inexistant et pour cette région les équations de Maxwell conduisent aux relations¹²

$$E_\rho = j \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = -j \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -j\omega B_\varphi$$

Cherchons B_φ sous la forme

$$B_\varphi = \frac{F(z)}{\rho} e^{j\omega t} \quad (11.100)$$

On a alors $E_z = 0$ et

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = j \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} = -j\omega B_\varphi$$

soit

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} = -k^2 B_\varphi \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

On en déduit que la fonction $F(z)$ doit satisfaire l'équation

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = -k^2 F$$

dont la solution générale s'écrit

$$F(z) = A e^{jkz} + B e^{-jkz}$$

A et B étant deux constantes à ajuster au moyen de conditions aux limites. La composante restante du champ électrique est déduite de

¹²On rappelle que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

$$E_\rho = j \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = \frac{c}{\rho} e^{j\omega t} (A e^{jkz} - B e^{-jkz})$$

La densité du courant superficiel qui est induit sur la surface de l'antenne est trouvée en écrivant qu'à la surface de l'antenne la composante tangentielle B_φ du champ magnétique subit une discontinuité égale au produit de μ_0 par cette densité. Comme $B_\varphi = 0$ dans l'antenne (conducteur parfait, voir chapitres suivants), on a donc

$$j_z(z, t) = \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(a + 0, z, t) = \frac{e^{j\omega t}}{a\mu_0} (A e^{jkz} + B e^{-jkz})$$

et l'intensité du courant à la surface de l'antenne est

$$I(z, t) = 2\pi a j_z(z, t) = \frac{2\pi}{a} e^{j\omega t} (A e^{jkz} + B e^{-jkz})$$

Cette expression doit coïncider avec (11.99) pour $z = 0$, d'où une première condition

$$A + B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \quad (11.101)$$

Il faut ensuite tenir compte du fait évident qu'il ne peut circuler de courant au-delà de l'antenne et que l'on doit donc avoir $I = 0$ pour $z = +h/2$ et pour $z = -h/2$ (nœuds de courant), ce qui conduit aux conditions

$$A e^{jkh/2} + B e^{-jkh/2} = 0 \quad \text{et} \quad A e^{-jkh/2} + B e^{jkh/2} = 0 \quad (11.102)$$

soit $A^2 = B^2$. D'après (11.101), on ne peut avoir $B = -A$; il reste donc $A = B = \mu_0 I_0 / (4\pi)$. Les équations (11.102) imposent alors $\cos(kh/2) = 0$. Introduisant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, on voit que cette condition ne peut être satisfaite que si

$$h = \lambda(n + \frac{1}{2}) \quad (11.103)$$

où n est un nombre entier positif ou nul. Autrement, dit, la solution (11.100) n'est viable que si (11.103) est vérifiée, ce que nous supposons dans la suite, en considérant le cas d'une antenne dite *demi-onde*, c'est-à-dire, telle que $h = \lambda/2$. L'intensité du courant sur l'antenne s'écrit alors

$$I(z, t) = I_0 \cos kz e^{j\omega t} \quad (11.104)$$

Etudions ensuite l'onde électromagnétique émise par l'antenne en des points situés à grande distance de celle-ci. Un point M sera maintenant repéré au moyen de ses coordonnées sphériques $r = OM, \theta, \varphi$. Nous adopterons l'expression suivante du potentiel vecteur (potentiel retardé)

$$\vec{A}(M, t) = \vec{e}_z A_z = \vec{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} dz \frac{I_0 \cos kz}{PM} e^{j\omega(t - PM/c)} \quad (11.105)$$

où P est un point de cote z de l'antenne, supposée maintenant filiforme, et \vec{e}_z le vecteur unitaire de l'axe $z'z$. Il est facile de vérifier que pour $r \gg h$, on a approximativement

$$PM \simeq r - z \cos \theta, \quad A_z \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{j\omega(t - r/c)} \int_{-h/2}^{+h/2} dz \cos kz e^{jkz \cos \theta} \quad (11.106)$$

en négligeant les termes d'ordres supérieurs en $1/r$. Comme¹³

$$\int_{-h/2}^{+h/2} dz \cos kz e^{jkz \cos \theta} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

on obtient finalement

$$A_z \simeq \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2 r} e^{j\omega(t-r/c)} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (11.107)$$

Pour obtenir les composantes sphériques des champs électrique et magnétique, il nous faut tout d'abord exprimer celles du potentiel vecteur : ce sont $A_r = \cos \theta A_z$, $A_\theta = -\sin \theta A_z$ et $A_\varphi = 0$. De la relation $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ on tire

$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

soit, en ne retenant que les termes de plus bas ordre en $1/r$,

$$B_\varphi \simeq -j \frac{\omega}{c} A_\theta = j \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \quad (11.108)$$

Les composantes du champ électrique peuvent être obtenues à partir de l'équation $\text{rot } \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$. Dans la même approximation, on obtient $E_r \simeq 0$, $E_\varphi = 0$ et

$$E_\theta \simeq j \frac{c^2}{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \simeq -j\omega A_\theta \simeq cB_\varphi \quad (11.109)$$

Au voisinage d'un point M à grande distance de l'antenne, l'onde émise par celle-ci a quasiment la structure d'une onde plane. Cependant, dans une vue globale, l'antenne ne rayonne pas de façon isotrope. Le vecteur de Poynting associé à l'onde s'écrit

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{e} \wedge \vec{b} \simeq \frac{c}{\mu_0} b_\varphi^2 \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi = \frac{c}{\mu_0} b_\varphi^2 \vec{e}_r \quad (11.110)$$

où l'on a noté en lettres minuscules les parties réelles des champs. Le vecteur de Poynting a ainsi pour expression

$$\vec{P} = \frac{c\mu_0}{4\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 \sin^2 \omega(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_r \quad (11.111)$$

et la valeur moyenne temporelle de son module est

$$P = P_{d-o} = \langle |\vec{P}| \rangle = \frac{c\mu_0}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 \quad (11.112)$$

On en déduit la puissance électromagnétique moyenne émise par l'antenne dans tout l'espace :

¹³On peut intégrer directement en posant $\cos kz = (e^{jkz} + e^{-jkz})/2$, ou bien intégrer par parties en observant que la partie imaginaire de $e^{jkz \cos \theta}$ étant impaire en z ne contribue pas, tout en tenant compte de ce que $h = \lambda/2$.

$$W = \int \int r^2 \sin \theta d\theta d\varphi < | \vec{P} | > = \frac{cI_0^2 \mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} d\theta \quad (11.113)$$

Numériquement, on a

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$$

d'où

$$W = 1,22 \frac{cI_0^2 \mu_0}{4\pi} \quad (11.114)$$

On en déduit la *résistance de rayonnement* R de l'antenne, définie par la relation

$$W = R \frac{I_0^2}{2} \quad (11.115)$$

soit, numériquement, $R = 73,2 \Omega$.

Le diagramme de rayonnement de l'antenne est la représentation graphique de la répartition spatiale de l'énergie qu'elle émet, représentation obtenue en recherchant la surface pour laquelle (11.112) garde une valeur donnée¹⁴. Dans un demi-plan contenant $z'z$ (angle azimutal φ fixé), le profil de cette surface est donné par la relation

$$r = r_0 F(\theta) \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \quad (11.116)$$

r_0 étant une constante positive.

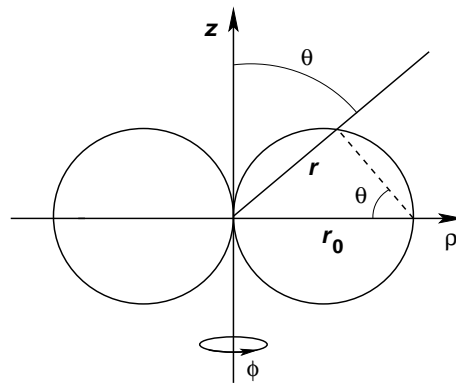


Figure 11.17 : Diagramme de rayonnement du dipôle simple

A titre de comparaison, le profil du diagramme de rayonnement du dipôle simple étudié en 11.6 est donné par

$$r = r_0 \sin \theta \quad (11.117)$$

Dans le demi-plan (ρ, z) , il s'agit du cercle d'équation

$$\left(\rho - \frac{r_0}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{r_0^2}{4}$$

¹⁴A noter qu'à proximité de l'antenne, la répartition angulaire du rayonnement dépend de la distance à l'antenne tandis qu'elle devient indépendante de cette distance lorsque celle-ci est suffisamment grande.

et passant par l'origine (figure 11.17). La rotation de ce cercle autour de $z'z$ engendre un tore de section droite circulaire et de diamètre central nul.

En fait, numériquement, la fonction $F(\theta)$ diffère peu de $\sin \theta$. On a notamment $F(0) = F(\pi) = 0 = \sin 0$, $F(\pi/2) = 1 = \sin \pi/2$, $F(\pi/3)/\sin(\pi/3) = 0,942$, $F(\pi/4)/\sin(\pi/4) = 0,888$. Le rayonnement d'une antenne demi-onde est donc assez similaire à celui d'un dipôle simple.

Le diagramme de rayonnement d'une antenne filaire dont la longueur est donnée par (11.103) avec $n \geq 1$ est plus complexe. Tout d'abord, introduisons la grandeur

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\pi}{\lambda} \sin \theta \frac{1}{I_0} \int_{-h/2}^{+h/2} dz I(z) e^{jkz \cos \theta} \quad (11.118)$$

appelée *fonction caractéristique* de l'antenne. A l'aide de celle-ci, les composantes des champs et la puissance moyenne émis à grande distance s'écrivent

$$E_\theta = cB_\varphi = j \frac{c\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{r} \mathcal{F}(\theta) \quad (11.119)$$

et

$$P = \frac{c\mu_0}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{r^2} |\mathcal{F}(\theta)|^2 \quad (11.120)$$

On notera ici que, numériquement, $\frac{c\mu_0}{2\pi} = 60\Omega$. Pour h donnée par (11.103), on obtient

$$|\mathcal{F}(\theta)| = |\mathcal{F}_n(\theta)| = \left| \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right| \quad (11.121)$$

Dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi$, cette fonction possède $2(n+1)$ zéros correspondant à

$$\cos \theta = \frac{m + 1/2}{n + 1/2} \quad \text{avec} \quad m = -n - 1, -n, \dots, n$$

Entre deux de ses zéros, (11.121) présente un maximum, et possède donc au total $2n+1$ maxima. Puisque l'un correspond à $\theta = \pi/2$, il y a n maxima de part et d'autre du plan médiateur de l'antenne. Chaque maximum fait apparaître un lobe dans le diagramme de rayonnement. Une illustration en est donnée à la figure 11.18.

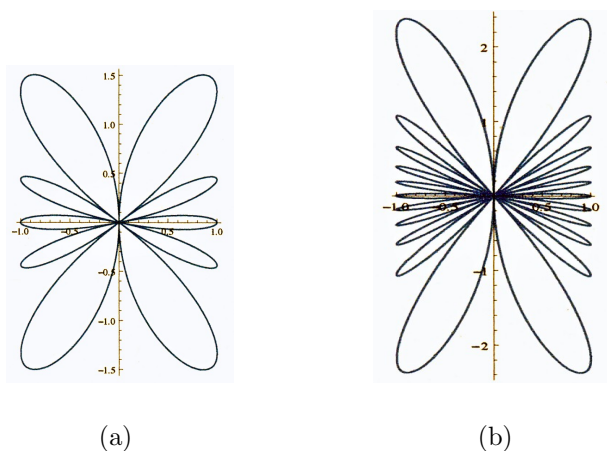


Figure 11.18 : Représentation polaire de $|\mathcal{F}_n(\theta)|$: (a) pour $n = 2$; (b) pour $n = 5$

Il est facile de montrer que les valeurs des maxima de $[\mathcal{F}_n(\theta)]^2$ s'inscrivent sur la courbe d'équation

$$G(\theta_m) = \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta_m}{\cos^2 \theta_m + \alpha^2 \sin^4 \theta_m} \quad \text{avec} \quad \alpha = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (11.122)$$

où les angles θ_m correspondant aux maxima de $[\mathcal{F}_n(\theta)]^2$ satisfont la relation

$$\alpha \tan(\alpha \cos \theta_m) = \frac{\cos \theta_m}{\sin^2 \theta_m} \quad (11.123)$$

La fonction (11.122), positive, présente un minimum nul pour $\theta_m = 0$, un autre minimum égal à 1 pour $\theta_m = \pi/2$ et un maximum pour $\theta_m = \theta_1 = \sin^{-1}(1/\sqrt{\alpha})$ où elle prend la valeur

$$G_M = \frac{\alpha}{1 - 1/\alpha}$$

qui croît avec n tandis que θ_1 se rapproche alors de zéro. Cette tendance indique que dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, le premier maximum de $|\mathcal{F}_n(\theta)|$ se trouvant au voisinage de $\theta = 0$ devient de plus en plus prononcé à mesure que n augmente. Pour en estimer la valeur, posons $\cos \theta_m = 1 - x$, pour réexprimer (11.123) sous la forme

$$\frac{\tan(\alpha x)}{\alpha x} = \frac{2 - x}{1 - x} \quad (11.124)$$

Pour les valeurs de θ_m proche de zéro, x doit tendre vers zéro à mesure que n augmente. L'équation précédente montre alors que la quantité αx doit tendre vers une constante χ satisfaisant la relation

$$\frac{\tan \chi}{\chi} = 2 \quad (11.125)$$

qui admet un ensemble discret de solutions. Leurs valeurs numériques sont

$$\chi = 1,165 ; 4,6 ; 7,79 ; 10,95 ; 14,1 ; 17,25 \dots \quad (11.126)$$

Prenant $\cos \theta_m \simeq 1$, $\sin^2 \theta_m \simeq 2x \simeq 2\chi/\alpha$, on trouve

$$G(\theta_m)|_{\max} = \kappa (n + \frac{1}{2}) \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{2\chi\pi}{1 + 4\chi^2} \quad (11.127)$$

valeurs croissantes avec n , comme attendu. Pour les premiers maxima on obtient

$$\kappa_1 = 1,1386 ; \kappa_2 = 0,337 ; \kappa_3 = 0,2 ; \kappa_4 = 0,143 \dots \quad (11.128)$$

Le premier lobe, le plus proche de l'axe de l'antenne, est préminent ; son amplitude est $\kappa_1/\kappa_2 = 3,38$ fois plus grande que celle du second lobe, $\kappa_1/\kappa_3 = 5,7$ fois plus grande que celle du troisième, etc.

Du point de vue pratique, les antennes sont utilisées pour l'émission ou la réception d'ondes électromagnétiques. Dans ce cadre, il est plus avantageux de disposer d'antennes *directives* pour lesquelles l'émission (ou la réception) est orientée vers une seule direction. De telles antennes permettent un meilleur rendement énergétique, puisque l'énergie rayonnée est alors concentrée en un faisceau plus ou moins étroit qui peut porter beaucoup plus loin. Les antennes filaires étudiées plus haut vibrant sur les harmoniques d'indice $n \geq 1$ ne répondent pas à cette exigence pratique, l'énergie émise se partageant inutilement entre les différents lobes du diagramme de rayonnement. On conçoit dès lors que la réalisation d'une émission ou d'une réception dirigée nécessite des assemblages plus sophistiqués d'éléments émetteurs ou récepteurs, comme par exemple les antennes Yagi comportant plusieurs brins ayant des fonctions spécifiques, ou bien les antennes paraboliques (figure 11.19).

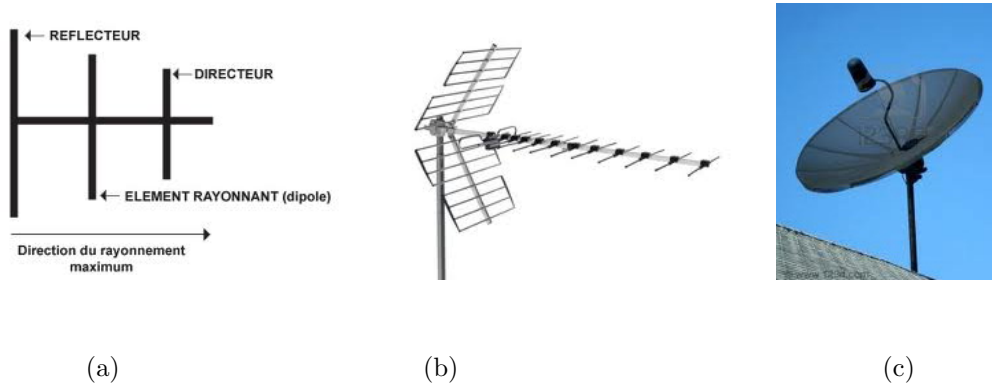


Figure 11.19 : (a) antenne Yagi simple ; (b) antenne Yagi ; (c) antenne parabolique

L'émission et la réception dirigées présentent des avantages pratiques importants. Elles permettent : de réduire beaucoup les brouillages et l'action de parasites au récepteur, puisqu'on reçoit beaucoup plus d'énergie¹⁵ ; d'assurer en partie le secret de communications, puisque, si le récepteur n'est pas dans la direction du faisceau émis, il ne reçoit rien ; d'effectuer le radio-guidage aérien ; de mettre en œuvre des radars détectant des objectifs plus ou moins lointains en angle orbital comme en angle azimutal.

Par contre, si l'on souhaite faire de la diffusion qui soit non sélective en orientation, ou si l'on désire recevoir des émissions provenant de diverses directions, on a plutôt intérêt à utiliser une antenne de caractéristiques similaires à celle de l'antenne filaire demi-onde¹⁶.

Dans la technologie des antennes, on a coutume de comparer le diagramme de rayonnement d'une antenne à celui d'une antenne qui rayonnerait la même puissance, mais de façon *isotrope*. Il s'agit bien sûr d'une antenne fictive, car une antenne réelle présente toujours une certaine directivité. Pour cette antenne *isotrope*, on aurait

$$P_{\text{iso}} = \langle | \vec{P} | \rangle_{\text{iso}} = \frac{W}{4\pi r^2} \quad (11.129)$$

où W est donné par (11.114). La directivité d'une l'antenne est alors caractérisée au moyen du rapport

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P}{P_{\text{iso}}} \quad (11.130)$$

appelé aussi *directivité*. Pour l'antenne demi-onde il a pour expression (indépendante de φ)

$$D(\theta, \varphi)|_{\text{d-o}} = \frac{2}{1,22} F^2(\theta) = 1,64 F^2(\theta) \quad (11.131)$$

A titre de comparaison, la directivité du dipôle simple est

$$D(\theta, \varphi)|_{\text{dip}} = 1,5 \sin^2 \theta \quad (11.132)$$

¹⁵En milieu urbain, l'utilisation d'antennes de réception directives, que l'on oriente vers l'émetteur, est rendue nécessaire pour minimiser l'influence de signaux parasites provenant de réflexions du signal principal sur les bâtiments et qui, s'agissant de télévision, provoquent des images fantômes sur les écrans.

¹⁶Antenne classique de Hertz.

Le *gain* en directivité d'une antenne est défini par

$$G_i = 10 \log_{10} D_{\max} \tag{11.133}$$

Il s'exprime en décibel, dB, ou plus précisément, en dBi. Ainsi, pour l'antenne demi-onde, le gain est de $\log_{10} 1,22 = 2,15$ dBi, dans le plan médiateur de l'antenne ($\theta = \pi/2$). Pour le dipôle, il vaut $\log_{10} 1,5 = 1,76$ dBi. On définit également un gain en directivité en prenant cette fois pour référence l'antenne demi-onde elle-même¹⁷ :

$$G_d = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\max}}{(P_{d-o})_{\max}} \right) \tag{11.134}$$

Il s'exprime en dBd. On a donc $G_d = G_i - 2,15$.

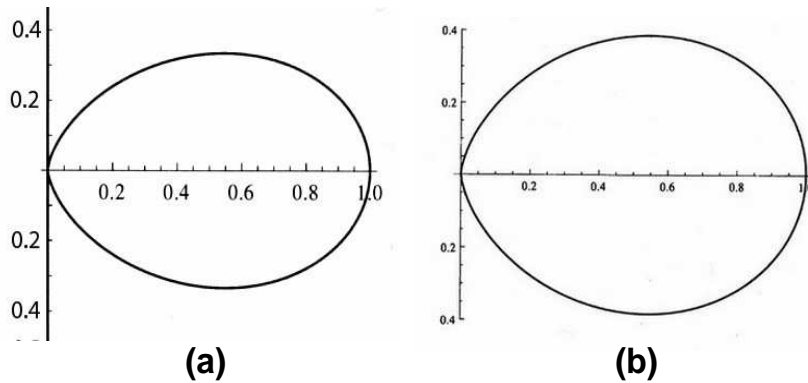


Figure 11.20 : Diagramme de directivité : (a) antenne demi-onde ; (b) dipôle simple

La directivité d'une antenne filaire dans un plan qui la contient¹⁸ est couramment représentée par un diagramme bi-dimensionnel où les coordonnées polaires d'un point sont, d'une part, le rapport $D(\theta)/D_{\max}$ où D_{\max} est la valeur maximum de la directivité dans ledit plan, et, d'autre part, l'angle orbital θ . Pour l'antenne demi-onde, ce diagramme ne fait que donner la représentation en coordonnées polaires de $F^2(\theta)$ en fonction de θ (figure 11.20).

On caractérise aussi la propriété de directivité d'une antenne par un angle d'ouverture $\Delta\theta$ qui définit le secteur angulaire à l'intérieur duquel la puissance moyenne $\langle |\vec{P}| \rangle$ est affaiblie de moins de 3 dB par rapport à sa valeur maximum, c'est-à-dire le secteur pour lequel¹⁹

$$P = \langle |\vec{P}| \rangle \geq \frac{P_{\max}}{2}$$

à r fixé, soit, aussi bien

$$D(\theta)/D_{\max} \geq 1/2$$

Pour l'antenne demi-onde, l'ouverture $\Delta\theta$ est de 78° , symétriquement autour de $\theta = \pi/2$. Le diagramme de la figure 11.21 est un diagramme de directivité typique. Il prend en compte non seulement le demi-plan contenant la direction d'émission (ou de réception) caractéristique de l'antenne (*avant*) mais aussi le demi-plan opposé (*arrière*). Du premier coup d'œil, il permet d'identifier les directions vers lesquelles l'antenne émet (ou reçoit) préférentiellement.

¹⁷Toujours avec la même puissance moyenne rayonnée.

¹⁸Le rayonnement d'une telle antenne ayant la symétrie de révolution autour de son axe, un diagramme de sa directivité dans un plan perpendiculaire à l'antenne présente peu d'intérêt. On dit que l'antenne est *omnidirectionnelle* dans ce plan.

¹⁹ $10 \log_{10} 2 \simeq 3$.

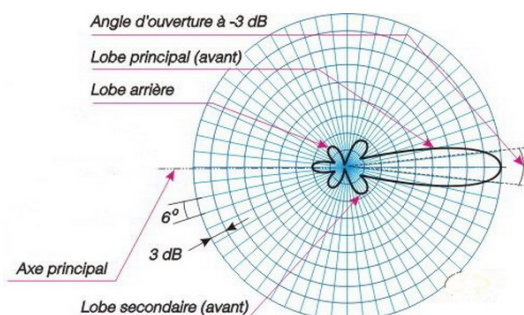


Figure 11.21 : Diagramme d'une antenne directive

A cet égard, on notera qu'une antenne réellement directive l'est aussi bien en angle orbital²⁰ qu'en angle azimutal et que cette propriété doit être caractérisée par deux diagrammes de directivité, un pour chaque angle (figure 11.22).

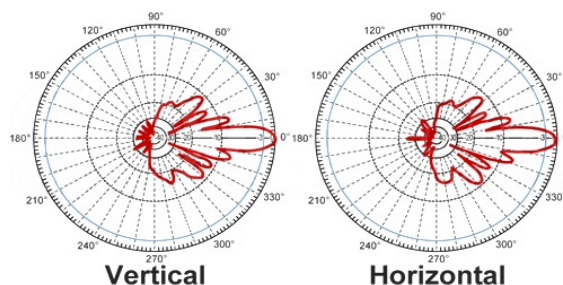


Figure 11.22 : Diagrammes en vertical et en horizontal d'une antenne directive

De nos jours, il existe un très grande variété d'antennes²¹ de toutes formes et de toutes tailles correspondant à des utilisations très diversifiées. Cela va des toutes petites antennes de moins de 5cm, en forme de ressort (antenne "boudin"), qui équipent certains appareils mobiles, au gigantesque radiotélescope d'Arecibo (Porto-Rico) de 305m de diamètre. La figure 11.23 montre l'une des imposantes antennes d'une célèbre station de radio (80 m de hauteur, 180 tonnes). Actuellement, on réalise sur circuits imprimés des antennes dites *planaires* (ou *patch antenna* en anglais). Elles sont constituées de plusieurs cellules planes rayonnantes séparées d'un plan conducteur (plan de masse réflecteur) par une lame diélectrique (voir figure 11.24). Leur facilité de réalisation sur circuit imprimé les rend très attractives du point de vue d'une production industrielle et leur moindre encombrement les rendent particulièrement adaptées dans les domaines de la domotique et des télécommunications en général (téléphonie mobile, surveillance, navigation, GPS, radar,...)²². Plus leurs cellules sont nombreuses, plus leurs gains sont importants. Elles sont utilisées pour des fréquences proches du GHz, notamment en WiFi et pour la nouvelle génération d'antennes satellite.

Les diagrammes de rayonnement décrits plus haut correspondent au rayonnement dans l'espace libre. En fait, le diagramme de rayonnement réel d'une antenne terrestre dépend beaucoup de son environnement²³ et notamment de sa position vis-à-vis du sol et de l'état de celui-ci. En effet, le sol faisant office de réflecteur, il peut se produire des interférences²⁴ entre l'onde provenant

²⁰Cet angle est aussi appelé *élévation*.

²¹Voir par exemple : <http://radio.pagesperso-orange.fr/Ant.htm>.

²²Certaines peuvent avoir des dimensions de l'ordre du centimètre.

²³Y compris de son support !

²⁴Les phénomènes d'interférences seront plus particulièrement étudiés au chapitre 14.

directement de l'antenne et celle réfléchi par le sol, qui peuvent modifier profondément les diagrammes de rayonnement de l'antenne selon sa hauteur et son orientation par rapport au sol (par exemple, une antenne filaire peut être positionnée verticalement ou horizontalement). Si le sol est mauvais conducteur, la réflexion est de mauvaise qualité et les pertes par absorption de l'onde dans le sol peuvent être importantes. Pour certaines ondes, les couches ionisées de l'atmosphère peuvent également constituer des surfaces réfléchissantes. Ces phénomènes de réflexion influent largement sur la portée des ondes et dépendent du domaine de fréquences de celles-ci.

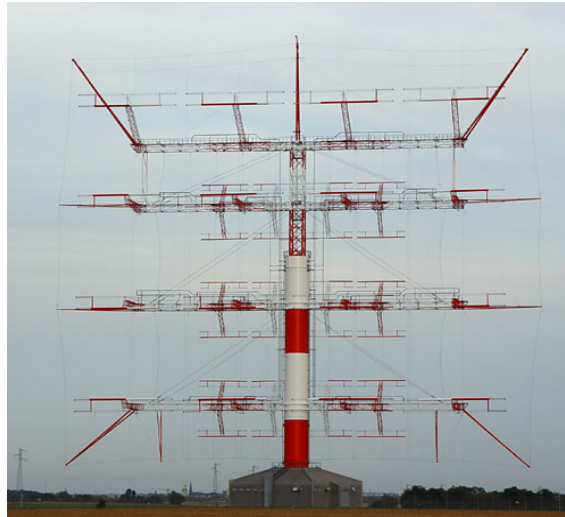


Figure 11.23 : Antenne d'une station de radio

Pour leur bon fonctionnement, certaines antennes nécessitent qu'on leur associe une surface de fort pouvoir réflecteur. C'est le cas des antennes verticales dites *quart d'onde*. Pour s'affranchir des variations de conductivité du sol dues aux intempéries, on dispose sous l'antenne une surface réfléchissante, appelée *plan de masse* ou *contrepois*. Elle peut être constituée, selon l'usage, soit par une plaque métallique (toit d'une voiture pour les antennes mobiles, toiture en zinc, ou autre) soit par des *radiants* qui sont des brins conducteurs que l'on dispose en cercle autour de l'antenne et qui, selon la circonstance, peuvent être enterrés ou bien en élévation. En servant de miroir, cette structure réfléchissante donne de l'antenne une image virtuelle qui simule et compense la partie manquante de l'antenne. Ce type d'antenne est appelé antenne Marconi²⁵.

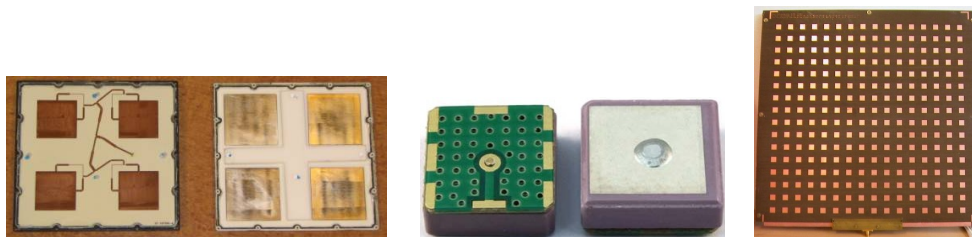


Figure 11.24 : Exemples d'antennes planaires

²⁵Par exemple, l'antenne dite "plan de Terre", ou "Ground Plane antenna" (GP) en anglais, comporte des brins réflecteurs de longueur $\lambda/4$ pouvant être soit perpendiculaires à l'antenne, soit inclinés à 60° de la verticale en "jupe conique".

11.8.1 Appendice

D'après (11.120), la résistance de rayonnement d'une antenne de fonction caractéristique (11.121) fait intervenir l'intégrale

$$K_n = \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{\cos((n + \frac{1}{2})\pi \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 d\theta \quad (11.135)$$

qui prend la forme

$$K_n = \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2((n + \frac{1}{2})\pi x)}{1 - x^2} \quad (11.136)$$

en posant $x = \cos \theta$. Utilisant la décomposition

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right)$$

et tenant compte du fait que $\cos^2((n + \frac{1}{2})\pi x)$ est pair en x , cette intégrale revient à

$$K_n = \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos^2((n + \frac{1}{2})\pi x)}{1 - x} = \int_0^2 \frac{du}{u} \cos^2((n + \frac{1}{2})\pi(1 - u))$$

où l'on a posé $u = 1 - x$. Comme

$$\cos^2((n + \frac{1}{2})\pi(1 - u)) = \frac{1}{2} (1 - \cos[\pi(2n + 1)u])$$

en effectuant le dernier changement de variable $t = \pi(2n + 1)u$, il vient

$$K_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi(2n+1)} \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad (11.137)$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide de la fonction *cosinus intégral*

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (11.138)$$

En effet, on montre que

$$\text{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \gamma + \ln x - \text{Ci}(x) \quad (11.139)$$

où $\gamma = 0,57721\dots$ est la *constante d'Euler*. On montre aisément²⁶ que pour $x = 2\pi(2n + 1)$ on a

$$\text{Ci}(x) = \frac{1}{x^2} \sum_0^\infty \frac{(-1)^p (2p + 1)!}{x^{2p}} \quad (11.140)$$

et que $|\text{Ci}(x)|$ décroît très vite dès que $n \geq 1$. Par suite, on peut utiliser avec confiance l'approximation

$$K_n \simeq \frac{1}{2} (\gamma + \ln[2\pi(2n + 1)]) \quad (11.141)$$

²⁶Par intégration par parties successives.

dès que $n \geq 1$. On note que l'écart relatif entre (11.141) et la valeur exacte de K_n est un peu moins de 1% déjà pour $n = 0$ et devient inférieur à 10^{-3} pour $n = 1$.

11.9 Complément III : Le potentiel vecteur de Hertz

Il est possible de déterminer complètement le champ électromagnétique à l'aide d'un seul champ vectoriel : le potentiel vecteur de Hertz²⁷.

Considérons l'équation locale de conservation de la charge (11.6) :

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On peut toujours exprimer le vecteur \vec{J} comme la dérivée partielle par rapport au temps d'un vecteur "polarisation" $\vec{\mathcal{P}}$

$$\vec{J}(M, t) = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}(M, t) \quad (11.142)$$

Il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho + \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}] = 0$$

d'où l'on tire

$$\rho(M, t) = \rho_0(M) - \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}(M, t) \quad (11.143)$$

Mais il est toujours possible de redéfinir le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ de façon à englober le premier terme de (11.143) dans le second, de sorte qu'on puisse écrire la charge volumique sous la forme

$$\rho(M, t) = - \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}(M, t) \quad (11.144)$$

D'après (11.142) et (11.144), le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ n'est défini qu'à un vecteur près indépendant du temps et s'exprimant comme un rotationnel. On notera cependant que dans un régime permanent purement sinusoïdal, le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ est parfaitement défini comme

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{j\omega} \vec{J}$$

Considérons ensuite la condition de jauge de Lorenz (11.66) :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Elle présente une analogie formelle avec l'équation de conservation de la charge et suggère de ce fait l'introduction d'un vecteur $\vec{\mathcal{H}}$ tel que

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \quad V = - \operatorname{div} \vec{\mathcal{H}} \quad (11.145)$$

Lorsque les potentiels \vec{A}, V sont exprimés de cette manière, la condition de Lorenz est d'emblée satisfaite. Le vecteur $\vec{\mathcal{H}}$ est appelé *potentiel vecteur électrique de Hertz*. Comme le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$, il n'est défini qu'à un vecteur près indépendant du temps et s'exprimant comme un rotationnel. Dans le cadre de la jauge de Lorenz, la transformation de jauge (11.63) est alors générée par la transformation

²⁷Heinrich Rudolf Hertz, 1889.

$$\vec{\mathcal{H}}' = \vec{\mathcal{H}} + c^2 \text{grad } \Psi \quad (11.146)$$

où Ψ est une fonction scalaire des coordonnées et du temps satisfaisant l'équation de d'Alembert

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Des équations (11.67) on déduit que le potentiel vecteur de Hertz doit satisfaire l'équation²⁸

$$\Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\mathcal{P}} \quad (11.147)$$

Quant aux champs électrique et magnétique, ils s'obtiennent par les relations²⁹

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} \quad (11.148)$$

L'introduction des potentiels \vec{A}, V permettait déjà de substituer 3+1 = 4 grandeurs aux 3+3 = 6 grandeurs que sont les composantes du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}). Celle du potentiel vecteur de Hertz permet de faire mieux en réduisant à celle d'un seul vecteur la détermination du champ électromagnétique, ce qui allège notablement les méthodes de traitement de certains problèmes³⁰. On notera que pour un régime sinusoïdal permanent, on a

$$\vec{A} = \frac{1}{j\omega} \vec{\mathcal{H}}$$

et il n'y a alors pas de différence fondamentale entre potentiel vecteur et vecteur de Hertz.

Par analogie avec les formules (11.71) et (11.72), le vecteur de Hertz peut être exprimé sous la forme "retardée"

$$\vec{\mathcal{H}}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\mathcal{P}}(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\mathcal{V}(P) \quad (11.149)$$

Ce formalisme de *super-potential* peut être généralisé au cas de la propagation d'ondes dans des milieux, notamment des milieux conducteurs. Dans un milieu conducteur de constantes électromagnétiques ϵ et μ et de conductivité σ , on a³¹ $\vec{\rho} = 0$ et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, d'où

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

soit

$$\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \mu\sigma V + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t})$$

et

$$\Delta V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{A} + \mu\sigma V + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t})$$

²⁸A démontrer.

²⁹A démontrer aussi.

³⁰Voir par exemple : M.T. Attaf, Can. J. Elect. Comput. Eng., Vol. 28, No. 2, Avril 2003, accessible par internet.

³¹Voir le paragraphe 12.3.1.

On voit que le potentiel électrique ainsi que chacune des composantes du potentiel vecteur pourront satisfaire l'équation

$$\Delta\Psi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 \quad (11.150)$$

qui est aussi celle des champs \vec{E} et \vec{B} , à condition de leur imposer la condition de jauge

$$\operatorname{div} \vec{A} + \mu\sigma V + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (11.151)$$

qui généralise celle de Lorenz au milieu considéré. Elle est automatiquement satisfaite si l'on exprime les potentiels au moyen d'un super-potential $\vec{\mathcal{H}}$ tel que

$$V = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{H}}, \quad \vec{A} = \mu\sigma \vec{\mathcal{H}} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (11.152)$$

Ce super-potential satisfait aussi l'équation (11.150).