Chapitre 4

Notions élémentaires d'Electrocinétique

Par opposition à l'Electrostatique où les charges sont en principe strictement immobiles, l'Electrocinétique est la partie de l'Electricité qui étudie les courants de charges en mouvement[1] dans un milieu donné, leur évolution au cours du temps et leur répartition dans ce milieu. Tout d'abord, donnons une description sommaire de la *conduction* dans les solides.

4.1 Conduction dans les solides : Milieux conducteurs, isolants, semi-conducteurs

4.1.1 Les conducteurs

Les *conducteurs* solides, essentiellement les métaux, ont la propriété de permettre un passage facile d'un courant électrique, ici constitué d'électrons. Cette propriété tient au fait essentiel que dans ces milieux il existe des électrons qui sont peu liés aux atomes. Leur *énergie de liaison* avec les atomes est relativement faible, ce qui fait qu'ils peuvent être facilement libérés de leur liaison par une perturbation extérieure, telle que, par exemple, la présence d'un champ électrique. Ils ne sont plus alors attachés à un atome particulier et peuvent circuler librement, de façon désordonnée, à travers le réseau d'ions constituant le solide[2]. Ils ne sont pas tout à fait libres cependant, puisque, pour les extraire complètement du solide, il faut leur fournir une énergie supplémentaire appelée "travail de sortie".

Ces électrons "libres" sont aussi appelés *électrons de conduction* car ils participent à la *conductivité* du métal. Leur proportion est en gros de un par atome, ce qui donne pour le Cuivre environ 10^{29} électrons libres par mètre cube de métal.

4.1.2 Les Isolants

Par opposition aux conducteurs, les *isolants* interdisent quasiment le passage d'un courant car tous les électrons restent très liés aux noyaux et seul un champ électrique très intense permettrait leur libération. Si cette circonstance se produit, on dit qu'il y a "claquage" de l'isolant. En réalité, aucun isolant n'est parfait et présente une résistivité élevée mais finie.

[1] Communément appelés *courants électriques.*

[2] A la température ordinaire, leur énergie cinétique moyenne est de l'ordre de quelques électron-volts, ce qui correspond à un module de vitesse de l'ordre de 10^6m/s, tandis que leur *vecteur vitesse* moyen est nul en l'absence de champ électrique appliqué.

4.1.3 Les semi-conducteurs

Ce sont des corps qui sont des isolants presque parfaits à très basse température mais qui présentent une résistivité intermédiaire entre celle des conducteurs et celle des isolants à température ordinaire. Ils sont qualifiés d'*intrinsèques* lorsqu'ils sont parfaitement purs et d'*extrinsèques* lorsqu'ils comportent des impuretés (atomes étrangers).

La description précédente n'est que très rudimentaire. La théorie complète de la conduction dans les solides ne peut être menée à bien que dans le cadre de la Mécanique Quantique qui seule fournit le formalisme correct pour décrire les phénomènes se déroulant à l'échelle microscopique. La différence entre conducteurs, isolants et semi-conducteurs peut alors être expliquée de façon cohérente dans le cadre de la théorie dite "théorie des bandes".

4.1.4 Intensité d'un courant, loi de conservation de la charge

Une mesure quantitative d'un déplacement de charges est donnée par ce qu'on appelle une *intensité de courant*. En premier lieu, une intensité de courant est toujours définie par rapport à une surface S. Considérons alors un flux de particules de charge q ayant la même vitesse $\overrightarrow{v}$ [3] et évaluons le nombre de ces charges qui, pendant le laps de temps δt compté à partir d'une date t_0, passent à travers une surface plane (pour simplifier) S dont le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ fait l'angle α avec $\overrightarrow{v}$ (figure 4.1).

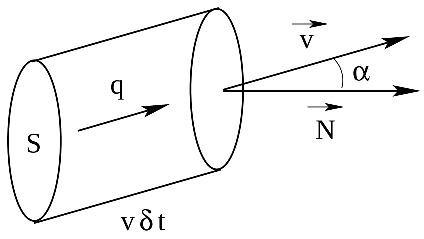

Figure 4.1

Soit n le nombre de charges mobiles par unité de volume. A la date t_0, toutes les charges qui vont passer à travers S pendant δt à partir de t_0 sont contenues dans le volume de base S et d'arête $v\delta t$ où $v = |\overrightarrow{v}|$. Le nombre cherché est donc $\delta N = nv\delta t \cos\alpha S$ et la charge correspondante est $\delta Q = q\delta N$. L'intensité I du courant des charges de vitesse $\vec{v}$ passant à travers S est le *débit* de ces charges à travers la surface en question, c'est-à-dire la charge totale passant à travers S par unité de temps, soit

$$I = \delta Q/\delta t = nqSv\cos\alpha \tag{4.1}$$

On définit un *vecteur densité volumique de courant* par

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \rho \overrightarrow{v}} \tag{4.2}$$

où

[3]Qui peut représenter le *vecteur vitesse moyen* des porteurs de charges mobiles s'il s'agit d'un courant dans un milieu conducteur

$$\boxed{\rho \; = qn} \tag{4.3}$$

est la densité volumique de porteurs de charge. S'il y a plusieurs espèces de porteurs ayant chacun une charge élémentaire q_i, une densité numérique n_i et une vitesse moyenne $\overrightarrow{v_i}$, on écrira le vecteur densité de courant total sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \sum_i q_i n_i \; \overrightarrow{v_i}} \tag{4.4}$$

L'intensité (4.1) apparaît alors comme le flux du vecteur densité volumique de courant à travers la surface S, puisque

$$\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{N} \; S = nqS \; \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N} = nqSv\cos\alpha = I$$

Cette relation se généralise facilement au cas où la densité de porteurs ainsi que leur vitesse moyenne sont fonctions des coordonnées, et pour des surfaces quelconques. Ainsi, l'intensité d'un courant électrique provenant d'un passage de charges à travers une surface orientée quelconque S est égale au flux à travers cette surface du vecteur densité volumique de courant associé à ce mouvement de charges

$$\boxed{I_S = \int\int_S \overrightarrow{J} \; (M) \cdot \overrightarrow{dS} \; (M)} \tag{4.5}$$

On notera ici que le vecteur densité volumique de courant est un *champ de vecteur* de caractère *polaire.*

Dans le raisonnement précédent, nous avons utilisé implicitement la loi de *conservation de la charge électrique* qui est l'une des lois fondamentales de l'Univers. En effet, nous avons affirmé que toutes les charges qui sont passées à travers S pendant δt étaient initialement contenues dans le volume de base S et d'arête $v\delta t$. Cela n'est vrai que si, entre-temps, il n'y a pas eu génération spontanée de charge ou destruction de charge.

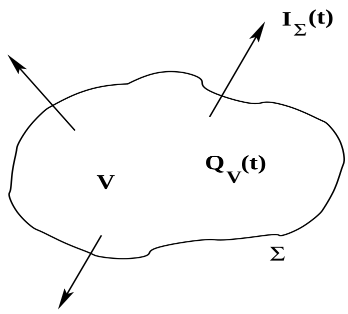

Figure 4.2

Plus généralement, considérons un certain volume $\mathcal{V}$, et désignons par $Q_{\mathcal{V}}(t)$ la charge contenue dans ce volume à la date t (figure 4.2). Soit $I_\Sigma(t)$ le débit de charges à travers la surface Σ délimitant le volume $\mathcal{V}$, à cette même date. Dire qu'il y a conservation de la charge signifie que s'il y a diminution de charge dans $\mathcal{V}$, celle-ci est exclusivement due à un transfert de charges à travers Σ. Ceci conduit à écrire que, entre les dates t et $t+dt$, on a

$$Q_{\mathcal{V}}(t+dt) - Q_{\mathcal{V}}(t) = -I_{\Sigma}(t)dt = dt\frac{dQ_{\mathcal{V}}}{dt}(t) \tag{4.6}$$

soit

$$\boxed{I_{\Sigma}(t) = -\frac{dQ_{\mathcal{V}}}{dt}(t)} \tag{4.7}$$

C'est cette dernière relation qui exprime la conservation de la charge. Dans un conducteur, en régime continu ou en régime quasi-stationnaire, on montre qu'il ne peut y avoir accumulation de charges en volume et donc que $Q_{\mathcal{V}}(t) \simeq 0$. On en déduit alors :

$$I_{\Sigma}(t) = 0 \tag{4.8}$$

ce qui signifie qu'il y a autant de charges qui sortent d'un volume donné du conducteur qu'il y a de charges qui y rentrent[4].

La loi de conservation de la charge établie plus haut peut être traduite par une équation locale. Dans un régime variable, la densité de charge ainsi que la vitesse des porteurs de charge sont généralement des fonctions variables avec le temps et avec la position du point d'observation. La charge totale contenue dans un volume $\mathcal{V}$ est donnée par

$$Q_{\mathcal{V}} \; = \; \int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{V}} \rho(M,t)\; d\mathcal{V} \tag{4.9}$$

où

$$\rho(M,t) = \sum_i q_i n_i(M,t) \tag{4.10}$$

est la densité locale de charges. D'un autre coté, l'intensité du courant de charges à travers la surface *fermée* Σ délimitant le volume $\mathcal{V}$ est donnée par l'intégrale

$$I_{\Sigma}(t) \; = \; \int\!\!\int_{\Sigma} \overrightarrow{J}\,(M,t) \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{J}\; d\mathcal{V} \tag{4.11}$$

où la seconde égalité résulte de l'application du théorème de Green-Ostrogradsky. Il vient alors

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{J}\; d\mathcal{V} \; = \; -\frac{d}{dt}\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{V}} \rho(M,t)\; d\mathcal{V} \; = \; -\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\; d\mathcal{V} \tag{4.12}$$

et comme cette relation doit être vérifiée quelle que soit l'extension du volume considéré, on en déduit l'équation locale de conservation de la charge :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \tag{4.13}$$

qui, en régime stationnaire, se réduit à

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{J} = 0} \tag{4.14}$$

[4]Il en résulte notamment que l'intensité du courant qui circule dans un fil conducteur est la même tout le long de ce fil à une date donnée. A noter aussi que cette loi conduit à la *loi des noeuds*, bien connue en Electrocinétique.

4.2 Courant électrique dans un milieu conducteur

4.2.1 Schématisation

Un courant électrique dans un conducteur est donc un mouvement d'ensemble des électrons de conduction à l'intérieur de celui-ci, mouvement produit le plus souvent par un champ électrique. Un champ électrique est en effet capable de déplacer des charges puisqu'une charge q placée dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ y est soumise à la force $\overrightarrow{F} = q\ \overrightarrow{E}$.

Un conducteur est dit à l'équilibre si, à l'échelle macroscopique, on n'observe pas de déplacement de charges à l'intérieur de celui-ci. Donc, nécessairement, le champ électrique (macroscopique) y est nul et le potentiel électrique (macroscopique) y est le même partout.

Si, entre deux points d'un métal apparaît un déséquilibre en potentiel électrique, un champ électrique prend naissance et provoque le déplacement des électrons de conduction. Ce déplacement s'effectue conformément au principe général *d'atténuation* ou de *modération*, principe qui est observé dans de nombreux phénomènes naturels et qui est donc de portée générale : le déplacement se fait dans le sens visant à réduire le déséquilibre. En effet, un champ électrique est créé par un déséquilibre de charges électriques. Le sens du champ va de la région d'accumulation de charges positives vers la région d'accumulation de charges négatives. Une charge négative est soumise à une force de sens opposé à celui du champ et va donc se diriger vers les charges positives dans le but d'annihiler celles-ci et de provoquer ainsi une atténuation du champ.

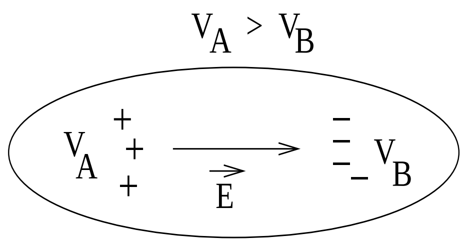

Figure 4.3

Comment s'ordonne le mouvement des électrons libres d'un métal à l'intérieur duquel règne un champ électrique $\overrightarrow{E}$, que l'on supposera ici uniforme ?

Si l'on supposait que les électrons de conduction pouvaient évoluer dans le milieu conducteur comme s'il étaient dans le vide, étant soumis au champ électrique extérieur ils devraient être continûment accélérés et leur vitesse ne cesserait de croître. La conductivité serait alors infinie, contrairement à ce qu'on observe expérimentalement. On doit donc admettre que des processus de freinage font régulièrement perdre leur vitesse et leur énergie aux électrons, les empêchant ainsi d'être indéfiniment accélérés.

Un électron libre dans un métal n'y a pas de mouvement régulier car il est soumis non seulement à l'influence du champ électrique extérieur mais aussi aux actions des ions positifs du réseau cristallin constituant ce solide conducteur, c'est-à-dire les atomes qui ont perdu leurs électrons de conduction. Notons qu'il faudrait également tenir compte des actions répulsives des électrons de conduction entre eux, mais dans une première approche grossière du phénomène, on peut négliger cet effet.

L'expérience montre que la mobilité des électrons est en fait limitée, d'une part, par les impuretés ou les défauts inévitables dans le conducteur (lacunes, intersticiels, dislocations), et, d'autre part, par l'agitation thermique du réseau d'ions. Ce sont les deux causes majeures qui ont pour effet d'entraver l'avance des électrons (en sens inverse du champ extérieur). Il en résulte qu'un électron de conduction subit dans le milieu conducteur des collisions multiples incessantes qui lui font perdre l'énergie qu'il acquiert dans l'accélération par le champ électrique extérieur. Ce nombre peut être gigantesque et atteindre, en moyenne, 10^{14} par seconde !

Dans une première approche classique, on peut modéliser l'action de ces chocs par une force de freinage $\overrightarrow{f} = -f\ \overrightarrow{u}$ opposée à la vitesse $\overrightarrow{u}$, semblable à une force de frottement fluide. Si l'on applique alors la Relation Fondamentale de la Dynamique Classique à un électron libre, on obtient l'équation

$$m\frac{d\ \overrightarrow{u}}{dt} = q\ \overrightarrow{E}\ -f\ \overrightarrow{u} \tag{4.15}$$

qui est analogue à celle qui régit le mouvement d'un parachute dans l'atmosphère terrestre, le champ de pesanteur terrestre prenant alors la place du champ électrique. On sait que si la hauteur de chute est suffisamment grande le parachutiste prend une vitesse limite. Celle-ci, étant constante, peut être obtenue mathématiquement en posant $d\ \overrightarrow{u}\ /dt = \overrightarrow{0}$ dans l'équation du mouvement. Pour l'électron, on obtiendrait ainsi la vitesse limite

$$\overrightarrow{u}_{\text{lim}} = q\ \overrightarrow{E}\ /f \tag{4.16}$$

donc une vitesse proportionnelle au champ électrique. Comme nous allons le voir, cette relation est à la base de la loi d'Ohm. En l'absence de champ électrique, la vitesse moyenne dans le temps $<\overrightarrow{v_e}>$ d'un électron est nulle. Nous admettrons ici qu'en présence d'un champ, cette vitesse moyenne est la vitesse limite trouvée plus haut, qui représente ainsi la *vitesse de dérive* $\overrightarrow{v}$ des électrons sous l'action du champ électrique appliqué.

La relation précédente est généralement présentée sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \mu\ \overrightarrow{E}} \tag{4.17}$$

où le coefficient de proportionnalité μ est la *mobilité* des porteurs. Le modèle classique utilisé ci-dessus donne $\mu = q/f$. Le vecteur densité volumique de courant est lui aussi proportionnel au champ appliqué, puisque

$$\overrightarrow{J} = qn\ \ \overrightarrow{v} = nq\mu\ \overrightarrow{E} \tag{4.18}$$

soit

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{J} = \sigma\ \overrightarrow{E}}} \tag{4.19}$$

en posant

$$\boxed{\sigma = nq\mu = nq^2/f} \tag{4.20}$$

Ce dernier coefficient s'appelle la *conductivité électrique* du matériau conducteur considéré. Etant proportionnel au carré de la charge des porteurs, il ne dépend pas du signe de celle-ci. La relation (4.19) constitue la *forme locale de la loi d'Ohm.*

Remarquons enfin que le sens de déplacement des électrons de conduction est l'inverse du sens conventionnel qui a été choisi pour définir l'intensité du courant. Historiquement, ce sens a été fixé arbitrairement avant que ne soit connu le mécanisme microscopique de la conduction.

4.3 Loi d'Ohm

4.3.1 Loi d'Ohm

Considérons un fil conducteur cylindrique AB de longueur ℓ et de section droite S dont les deux bouts A et B présentent entre eux la différence de potentiel $V = V_A - V_B > 0$. A l'intérieur du conducteur règne donc un champ électrique d'intensité $E = V/\ell$, dirigé de A vers B. En conséquence, il circule de A vers B un courant électrique d'intensité $I = nqvS$ (où cette fois $\overrightarrow{v}$ est, comme $\overrightarrow{E}$, parallèle à $\overrightarrow{AB}$).

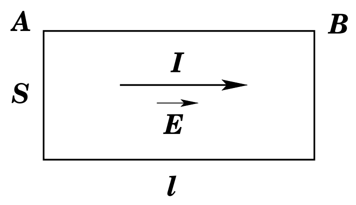

Figure 4.4

Comme $nqv = \sigma E = \sigma V/\ell$, on a

$$I = \sigma SV/\ell \tag{4.21}$$

Ainsi, pour un matériau conducteur, il existe une relation de proportionnalité entre la *tension* V imposée aux bornes de ce conducteur et l'intensité I du courant qui s'y établit du fait de cette tension, que l'on écrit sous la forme

$$\boxed{V = RI} \tag{4.22}$$

Cette relation célèbre constitue la *loi d'Ohm*. Le coefficient de proportionnalité R est la *résistance* du morceau de matériau conducteur considéré. D'après ce qui précède, la résistance d'un échantillon de matériau de conductivité σ ayant la forme d'un cylindre de longueur ℓ et de section droite S est

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \tag{4.23}$$

Elle dépend non seulement des propriétés intimes du matériau, par l'intermédiaire de σ, mais aussi de la géométrie de l'échantillon. La quantité $\rho = 1/\sigma$ est la *résistivité* du matériau. Dans l'approche classique, cette grandeur est proportionnelle au paramètre f qui est censé représenter l'effet des collisions entre les électrons de conduction et le réseau d'ions du matériau. On peut donc prévoir que la résistivité sera d'autant plus grande que le nombre de ces collisions est grand. Or, ce nombre croît avec la température. Ainsi, la résistivité d'un conducteur est une fonction croissante de la température. Dans le cas d'un métal pur, cette croissance est linéaire en première approximation :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \tag{4.24}$$

où t est ici la température Celsius, $\alpha \simeq 1/250$ et ρ_0 est la résistivité pour $t = 0°C$.

4.3.2 Unités, ordres de grandeur

Comme on sait, l'unité S.I. des intensités de courant électrique est l'Ampère (symbole A, voir le chapitre 7 pour sa définition)[5].

L'unité S.I. des résistances est l'Ohm (symbole Ω). Les résistivités s'expriment en Ω m et les conductivités en $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ ou mho par mètre, ou encore Siemens par mètre (le Siemens est l'unité inverse de l'Ohm).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs, en Ωm, des résistivités de divers matériaux ou substances[6].

Matériaux		ρ (Ωm)
Métaux purs		
	Argent	1,5 10^{-8}
	Cuivre	$1,6\ 10^{-8}$
	Aluminium	$2,1\ 10^{-8}$
	Fer	$8,53\ 10^{-8}$
	Plomb	$19,8\ 10^{-8}$
	Tungstène	5 10^{-8}
Alliages		
	Maillechort (Cu : 60 %, Zn : 25 %, Ni : 15 %)	22 10^{-8} à 43 10^{-8}
	Manganite (Cu : 80%, Mn : 12%, Ni : 4%)	42 10^{-8}
	Nichrome (Ni : 80%, Cr : 20%)	10^{-6}
Electrolytes		
	NaOH à 18^{o}C, titre à 5%	0,062
	NaOH à 18^{o}C, titre à 10%	0,032
	Kcl titre à 5%	0,17
	Kcl titre à 10%	0,071
Semi-conducteurs		
	Graphite	13 10^{-6}
	Germanium (à 27^{o}C)	0,47
	Silicium (à 27^{o}C)	630
Isolants		
	Diamant	10^{12}
	Mica	10^{10} à 10^{15}

4.3.3 Retour sur les semi-conducteurs intrinsèques

Dans les milieux semi-conducteurs, les atomes sont liés entre eux par des liaisons covalentes pour lesquelles l'énergie de liaison des électrons qui y sont engagés est faible. Ceci fait que la simple agitation thermique, même à température ordinaire, suffit pour arracher quelques électrons de ces liaisons. Ces électrons sont alors libres de se mouvoir sous l'action d'un champ électrique, comme dans un métal, à la différence qu'ils sont moins nombreux que dans ce dernier.

Lorsqu'une liaison covalente se rompt, l'électron libéré laisse à sa place un vide appelé *trou*. Un électron d'une liaison voisine peut venir combler celui-ci et laisse alors lui-même derrière lui un autre trou qui peut être comblé par un électron suivant et ainsi de suite. Ainsi, l'agitation thermique créé des paires "électron-trou" par rupture des liaisons covalentes. Les déplacements

[5] A noter que l'application de la formule $I = nqv$ au cas d'un courant continu d'intensité 1 A circulant dans un fil de cuivre ($n \simeq 10^{29}/m^3$, $q = 1,6\ 10^{-19}$ C) dont la section droite a un diamètre de 2 mm donne une vitesse de dérive v des électrons de moins de 10 cm/h ! Il ne faut pas confondre cette vitesse, qui est une vitesse moyenne de déplacement global du courant d'électrons, avec la vitesse réelle de ceux-ci, laquelle, comme nous l'avons écrit ailleurs, peut être prodigieusement plus grande en module.

[6] A noter la valeur élevée de la conductivité du graphite, qui en fait un "semi-métal".

de l'électron et du trou sont ensuite indépendants l'un de l'autre. Un trou peut non seulement être comblé par un électron de valence mais aussi bien par un électron libéré passant à côté. On dit alors qu'il y a *recombinaison électron-trou.*

Alors que les électrons sont des porteurs de charge négative, les trous sont assimilables à des porteurs de charge positive. Ces électrons libérés et ces trous sont qualifiés de *porteurs libres.* Dans un semi-conducteur intrinsèque, les concentrtions en porteurs négatifs et en porteurs positifs sont égales. Il en va tout autrement dans les semi-conducteurs extrinsèques où des atomes étrangers sont présents dans le réseau cristallin et modifient considérablement la conductivité du matériau.

Comme dans le cas d'un conducteur, si l'on applique un champ électrique à l'intérieur d'un semi-conducteur, les porteurs libres prennent, en moyenne, un mouvement d'ensemble dans le sens du champ pour les porteurs positifs et dans le sens opposé du champ pour les électrons. C'est ce double déplacement qui constitue le courant électrique dans un semi-conducteur. Par analogie avec le cas des conducteurs, on a

$$\overrightarrow{v_n} = \mu_n \ \overrightarrow{E}$$

pour les électrons et

$$\overrightarrow{v_p} = \mu_p \ \overrightarrow{E}$$

pour les trous. Les conductivité correspondantes sont $\sigma_n = en\mu_n$ et $\sigma_p = ep\mu_p$ où n et p sont, respectivement, les nombres de porteurs négatifs et positifs par unité de volume. La conductivité totale est la somme $\sigma = \sigma_n + \sigma_p$ et la résistivité du matériau est $\rho = 1/\sigma$.

Toute élévation de température s'accompagne d'un accroissement de l'agitation thermique et d'une multiplication des ruptures de liaisons. Il s'ensuit que la résistivité d'un semi-conducteur est une fonction *décroissante* de la température[7], approximativement de la forme

$$\rho \sim A \exp\left(\frac{W}{kT}\right)$$

où A, W et k sont des grandeurs positives et T la température Kelvin.

4.4 Effet Joule

Il y a un effet thermique dû au déplacement des électrons de conduction dans un conducteur : c'est *l'effet Joule.*

Comme précédemment, considérons un fil conducteur cylindrique AB présentant entre ses deux bornes A et B la tension $V = V_A - V_B$. Chaque électron de conduction y est soumis à la force $\overrightarrow{F} = -e \ \overrightarrow{E}$. Le travail que cette force développe lorsque l'électron va de B en A est $W_1 = -e \ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{BA} = eV$. Le travail total correspondant à l'ensemble des électrons qui passent pendant le laps de temps δt à travers la section droite en B est $\delta W = nSv\delta t W_1 = nSveV\delta t = VI\delta t$. La puissance développée par le champ électrique, définie par $P = \delta W/\delta t$, est donc égale à :

$$P = VI \tag{4.25}$$

étant l'intensité du courant. Comme ici on a la relation $V = RI$, on obtient

$$\boxed{P = RI^2} \tag{4.26}$$

[7] Au moins dans un certain domaine de température.

Comme en A et en B les électrons ont la même vitesse (en moyenne), leur énergie cinétique n'a pas varié. La puissance développée par le champ électrique s'est donc entièrement dissipée dans les chocs successifs que subissent les électrons. Elle a été transmise à tout le matériau et s'est convertie en chaleur : c'est l'effet Joule.

Notons que l'on peut réexprimer la puissance dissipée en fonction de la tension appliquée

$$P = V^2/R \tag{4.27}$$

qui permet de s'affranchir de la connaissance de l'intensité lorsque la tension est donnée directement.

Remarquons enfin que l'on peut définir comme suit une puissance dissipée par effet Joule, par unité de volume. En effet, nous avons écrit

$$\delta W = nSv\delta t W_1 = -enSv\delta t \ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{BA} = enSv\delta t \ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Posant $\ell = AB$ et considérant que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a la même orientation que celle du vecteur densité de courant, on peut écrire

$$\delta W = nSv\delta t W_1 = -enSv\delta t \ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{E} \ S\ell\delta t$$

On en déduit une puissance dissipée par unité de volume, égale à

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{S\ell}\frac{\delta W}{\delta t} = \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{E}} \tag{4.28}$$

4.5 Complément 1 : Associations de résistances

Pour une résistance *pure*, la tension u (différence de potentiel) imposée entre ses bornes est, selon la loi d'Ohm, proportionnelle à l'intensité du courant qui la traverse. Un matériau qui présente cette propriété est aussi qualifié de *conducteur ohmique*. Le coefficient de proportionnalité R est, pour ce *résistor*, indépendant à la fois de la tension et du courant : c'est la valeur de la résistance du résistor, et l'on a toujours $i = u/R$. Pour un conducteur, la variation de R avec la température reste assez faible et R est de ce fait pratiquement indépendant de i.

4.5.1 Associations de résistances en série

Considérons un élément de circuit comportant des résistances branchées les unes à la suite des autres. C'est ce qu'on appelle un branchement en série de résistances.

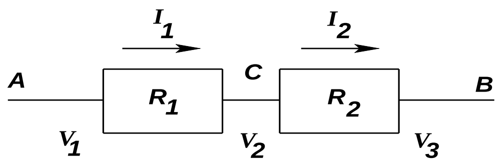

Figure 4.5

Dans le branchement de la figure 4.5, notons $V_1 - V_2$ la tension aux bornes de R_1, $V_2 - V_3$ celle aux bornes de R_2. L'intensité du courant traversant R_1 est notée I_1, celle du courant traversant R_2 est notée I_2. D'après la loi de conservation de la charge, on a , en régime quasi-stationnaire, conservation de l'intensité du courant tout le long de la chaîne de conducteurs en série, et donc $I_1 = I_2$. Or, d'après la loi d'Ohm appliquée à chacune des résistances, on a

$$V_1 - V_2 = R_1 I_1 \quad , \quad V_2 - V_3 = R_2 I_2$$

et par conséquent

$$V_1 - V_3 = V_1 - V_2 + V_2 - V_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2)\, I$$

$I = I_1 = I_2$ étant l'intensité du courant traversant cette association. Ainsi, cette dernière se comporte comme une résistance unique dont la valeur R est la *somme* des résistances en série, soit ici

$$R = R_1 + R_2$$

Par récurrence, on généralise facilement au cas d'un nombre quelconque $R_1, R_2, \ldots R_n$ de résistances en série. Du point de vue électrique l'ensemble se comporte donc comme une unique résistance de valeur

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

De façon évidente, la résistance R équivalente à cette association est *plus grande* que la plus grande des résistances impliquées.

Faisons aussi la remarque suivante. Dans cette association, les diverses différences de potentiel ont toutes le même facteur commun, à savoir l'intensité I du courant traversant l'ensemble. Pour une différence de potentiel donnée, le coefficient de proportionnalité est la résistance concernée par cette différence de potentiel. Ainsi, les rapports entre les diverses différences de potentiel du même circuit sont simplement dans le rapport des résistances concernées. Par exemple, dans le montage précédent, on a

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_3} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{4.29}$$

De ce fait, le montage précédent est qualifié de *diviseur de tension* car les diverses résistances permettent de fractionner la différence de potentiel totale $V_1 - V_3$; et pour connaitre la différence de potentiel aux bornes d'une résistance, connaissant la différence de potentiel totale aux bornes de l'association en série, il suffit de faire une simple "règle de trois".

4.5.2 Association de résistances en "parallèle"

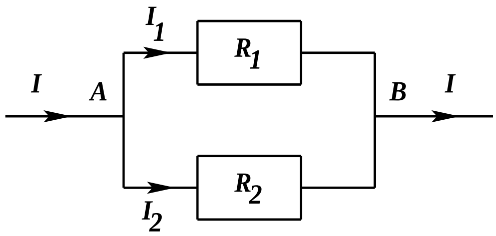

Figure 4.6

Cette fois, les résistances R_1 et R_2 sont montées en "dérivation" à partir de deux points A et B (figure 4.6). Se plaçant encore en régime quasi-stationnaire, on écrit ici que l'intensité I du courant traversant l'association est égale à la somme des intensités de courant I_1 et I_2 traversant R_1 et R_2, respectivement

$$I = I_1 + I_2$$

Or, la loi d'Ohm appliquée à chacune des résistances donne

$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

d'où

$$I = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

On obtient encore une relation de proportionnalité entre tension et intensité de courant indiquant que l'association se comporte comme une unique résistance de valeur R telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Par récurrence, ce résultat se généralise à un nombre quelconque de résistances en parallèle. La résistance équivalente R de l'ensemble est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}$$

qui indique que R est *plus petite* que la plus petite des résistances impliquées, ce qui est dû à la division du courant arrivant en A. L'inverse $Y = 1/R$ d'une résistance R est aussi appelé *conductance*. Ainsi, pour une association en parallèle, la conductance totale est la somme des conductances en parallèle. Ce résultat se généralise immédiatement aux associations comportant plus de deux branches en parallèle.

On note ici que les intensités traversant les diverses branches de l'association ont pour même facteur commun la différence de potentiel totale aux bornes de cette association, le coefficient étant la conductance de cette branche. Ainsi

$$\frac{I_1}{I} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \tag{4.30}$$

On dit que l'on a un montage *diviseur de courant*. Les intensités des diverses branches en dérivation sont dans le rapport des conductances concernées.

4.6 Complément 2 : Générateurs de tension, loi de Pouillet, récepteurs

4.6.1 Générateurs de tension, loi de Pouillet

La relation $V_A - V_B = RI$ ne peut être valable sur tout un circuit conducteur *fermé*. En effet, elle indique que le courant circule dans le sens des potentiels *décroissants*. Aussi, pour un circuit fermé (figure 4.7), à partir d'un point A où le potentiel est V_A, on devrait revenir en A avec un potentiel inférieur à V_A, ce qui est impossible car le potentiel est une fonction *uniforme* (il est continu). Pour fonctionner, un circuit électrique fermé contient nécessairement un système *électromoteur* entre deux points A et B, dont la fonction est :

• de maintenir le déséquilibre en potentiel afin de faire circuler un courant ;

• de contrebalancer l'effet électrostatique qui s'oppose au déplacement des charges de B vers A.

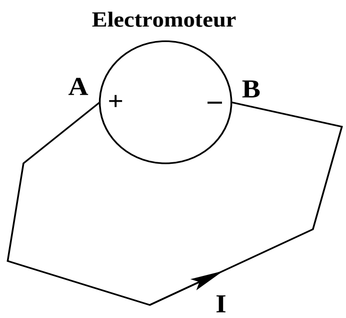

Figure 4.7

La *force électromotrice*, ou f.e.m. en abrégé, $\mathcal{E}$ du *générateur de tension* que constitue l'électromoteur est définie à partir de la puissance P_G qu'il développe, comme le rapport

$$\mathcal{E} = \frac{P_G}{I}$$

Dans le système d'unités S.I., elle se mesure en Volt. La puissance P_G :

• d'une part sert à fournir la puissance $I(V_A - V_B)$ nécessaire pour faire circuler les charges (positives) de B vers A ($V_A > V_B$) ;

• d'autre part se dissipe en partie par un effet Joule éventuel de puissance rI^2 entre B et A où r est la résistance interne du générateur.

On écrira donc l'équation bilan

$$P_G = \mathcal{E}I = I(V_A - V_B) + rI^2$$

d'où la relation, dite *loi de Pouillet*

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - rI$$

qui donne la différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension en fonction de sa f.e.m. et de sa résistance interne. Ici, puisque $V_A > V_B$, A est dite "borne positive" du générateur tandis que B en est la "borne négative". Dans les schémas, un générateur est souvent représenté par le symbôles de la figure 4.8.

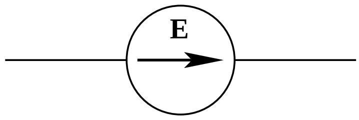

Figure 4.8

la flèche allant du pôle "-" vers le pôle "+" du générateur.

La *caractéristique* d'un générateur est la courbe représentant les variations de la tension $V = V_A - V_B$ en fonction de l'intensité I. Elle peut affecter des formes variées selon la dépendance de $\mathcal{E}$ vis-à-vis de I. Les électromoteurs usuels sont des accumulateurs, des piles ou des dynamos. Tant que les courants débités ne sont pas trop intenses, on peut considérer que leurs f.e.m. sont constantes. Leurs caractéristiques sont alors des droites dont les pentes représentent, au signe près, leurs résistances internes (figure 4.9).

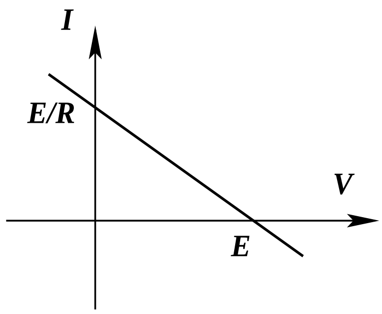

Figure 4.9

4.6.2 Récepteurs

On appelle *récepteurs* les moteurs, électrolyseurs et générateurs en opposition (accumulateurs en charge par exemple). Un récepteur aux bornes duquel est imposée la tension V reçoit la puissance VI où I est l'intensité du courant qui le traverse. Si le récepteur a une résistance interne r, une partie rI^2 de cette puissance est dissipée par effet Joule. La partie restante $P_R = VI - rI^2$ est transformée en puissance mécanique s'il s'agit d'un moteur, ou stockée en énergie chimique dans le cas d'un électrolyseur. Dans tous les cas, on définit la *force contre-électromotrice*, $\mathcal{E}'$ du récepteur, f.c.e.m. en abrégé, à partir de la puissance P_R dont il dispose réellement pour assurer sa fonction, par la relation

$$\mathcal{E}' = \frac{P_R}{I}$$

On obtient ainsi pour les récepteurs une relation analogue à la loi de Pouillet :

$$V = \mathcal{E}' + rI$$

Si le récepteur est un générateur en opposition de f.e.m. $\mathcal{E}$, on a simplement

$$\mathcal{E}' = -\mathcal{E}$$

Notons que la caractéristique $V = f(I)$ des moteurs n'est jamais rectiligne car $\mathcal{E}'$ dépend de I. Celle des électrolyseurs l'est dans un large domaine dès que la tension appliquée est supérieure à sa f.c.e.m. (figure 4.10).

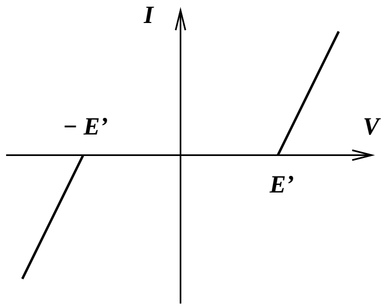

Figure 4.10

4.7 Complément 3 : Les réseaux de conducteurs

On appelle *réseau* de conducteurs toute association d'éléments de circuits, appelés *branches*, pouvant contenir en série des dipôles actifs ou passifs[8]. Ces branches sont reliées entre elles par des *noeuds*. Une *maille* est une succession de branches dont le noeud d'arrivée est identique au noeud de départ. Un exemple de réseau est représenté à la figure 4.11.

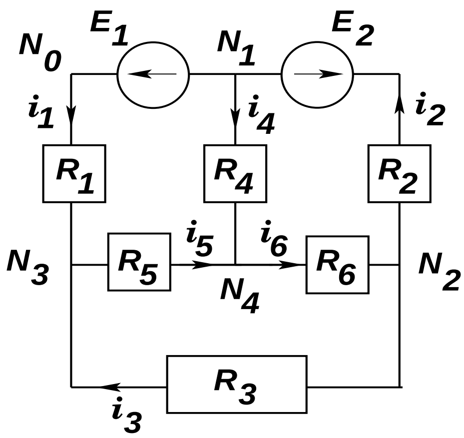

Figure 4.11

Un noeud est un point commun à trois branches au moins (sinon, il s'agit de la même branche). Ainsi, pour le réseau de la figure 4.11, N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des noeuds, mais N_0 n'en est pas un.

[8]De nombreux composants de circuits électriques présentent deux bornes de branchement et sont appelés *dipôles* pour cette raison.

Une maille est un contour fermé constitué par une suite de branches que l'on traverse chacune une seule fois en parcourant cette maille. Dans le réseau de la figure 4.11, $N_1E_1R_1R_5N_4R_4$ est un e maille, $N_3R_3N_2R_6N_4R_5$ aussi.

Le problème de la *résolution* d'un réseau consiste à déterminer les intensités des courants circulant dans les diverses branches du réseau à partir des caractéristiques supposées connues des dipôles constituant le réseau. Pour ce faire, on dispose des *lois de Kirchhoff* qui fournissent des équations permettant de mener à bien cette résolution. Les réseaux envisagés ci-après d'une part comportent des générateurs de tension ou de courant *continus*, et, d'autre part sont étudiés uniquement en régime permanent établi, qui sera ici un régime permanent de courants continus.

4.7.1 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont de deux types. L'un fournit des équations applicables aux noeuds, l'autre des équations concernant les mailles. Mais avant d'écrire ces équations, il convient de suivre la démarche suivante.

• En premier lieu, noter chaque intensité par une lettre et fixer *arbitrairement* le sens de chacun des courants, en essayant toutefois d'apporter à ce *choix* le maximum de vraisemblance, bien que cela ne soit nullement indispensable ;

• puis, fixer *arbitrairement* un sens de parcours pour chaque maille, indépendamment du choix des sens des courants.

Ce faisant, les intensités des courants doivent être considérées comme des grandeurs algébriques[9]. Ce n'est qu'après la résolution complète des équations que l'on constatera si le sens de parcours choisi *a priori* pour tel ou tel courant est ou non le sens réel, suivant qu'il apparaîtra un signe "+" ou un signe "-" devant la valeur numérique de son intensité.

♣ Loi des noeuds

Elle résulte de la loi plus fondamentale de conservation de la charge appliquée aux régimes continus ou quasi-stationnaires. Elle s'énonce ainsi,

• La somme *algébrique* des intensités des courants arrivant à un noeud est *nulle* :

$$\sum_k i_k = 0 \tag{4.31}$$

Dans cette relation, la convention de signe est la suivante. Compte-tenu du choix qui a été fait pour le sens des courants, l'intensité d'un courant arrivant *vers* le noeud devra être affectée d'un signe "+", alors qu'elle devra être affectée d'un signe "-" si le courant en part. Ainsi, au noeud N_4 de la figure 4.11, on a

$$i_5 + i_4 - i_6 = 0 \tag{4.32}$$

Bien entendu, on peut tout aussi bien choisir comme sens de référence le sens de divergence à partir du noeud. Dans ce cas, les signes à affecter sont simplement les opposés des précédents.

♣ Loi des mailles

Cette loi repose sur la *continuité* de la *fonction potentiel électrique* et s'énonce ainsi

• La somme des tensions u_k aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est *nulle* :

[9] C'est de toutes façons inévitable lorsqu'on étend l'étude aux réseaux en régime sinusoïdal. La convention de signe se rapporte alors à une convention de phase.

$$\sum_k u_k = 0 \tag{4.33}$$

Les tensions u_k devront ensuite être exprimées en fonction des intensités des courants, à partir des caractéristiques des dipôles.

Telles quelles, les équations des mailles, comme celles des noeuds, sont applicables à tout réseau, donc aussi bien à des réseaux comportant des éléments non linéaires, car elles résultent des lois générales de l'électrocinétique. Cependant, dans le cas des réseaux dits *linéaires*, on peut exprimer la loi des mailles sous une forme plus maniable, prête à l'emploi.

4.7.2 Réseaux linéaires

Un réseau est dit *linéaire* si les caractéristiques des dipôles qui le constituent sont toutes affines. De façon plus restreinte, cela signifie que dans les conditions d'utilisation des dipôles considérés, leurs caractéristiques sont supposées être assimilables à des droites.

Si la caractéristique est une droite passant par l'origine ($u = 0$, $i = 0$), le dipôle correspondant est assimilable à un résistor (résistance pure). Si la caractéristique ne passe pas par l'origine, le dipôle sera assimilé à un générateur ou à un récepteur ou un générateur en opposition.

Ainsi, l'étude des réseaux linéaires peut être ramenée à celle de réseaux dont les éléments passifs sont des résistances pures et dont les éléments actifs sont des générateurs de tension avec une éventuelle résistance interne ou des générateurs de courant avec une éventuelle conductance interne.

♣ Loi des mailles-bis

Pour un réseau linéaire, la loi des mailles peut être exprimée comme une généralisation de la loi de Pouillet. Pour une branche AB comportant un générateur de tension et une résistance, on a, au signe près,

$$V_A - V_B = E_a - R_a I_a \tag{4.34}$$

et, plus généralement, en présence de plusieurs générateurs et résistances en série dans cette branche,

$$V_A - V_B = \sum{}' E_a - \sum{}' R_a I_a \tag{4.35}$$

où les "primes" sur les signes sommes indiquent que les sommes sont en fait *algébriques*, comme explicité ci-après.

En appliquant la relation (4.35) aux autres branches BC, CD et DA d'une maille $ABCDA$, il vient

$$\begin{aligned} V_B - V_C &= \sum{}' E_b - \sum{}' R_b I_b \\ V_C - V_D &= \sum{}' E_c - \sum{}' R_c I_c \\ V_D - V_A &= \sum{}' E_d - \sum{}' R_d I_d \end{aligned} \tag{4.36}$$

Puis, en écrivant que la somme des tensions le long d'une maille complète est nulle, on obtient l'équation

$$0 = \sum{}' E - \sum{}' RI \tag{4.37}$$

où les sommes sont étendues à toutes les branches de la maille. On écrira cette dernière relation sous la forme plus avantageuse :

$$\sum{}' E = \sum{}' RI \tag{4.38}$$

qui est d'un usage très commode car les conventions de signe correspondantes sont aisément mémorisables, comme expliqué maintenant.

Ayant fait le choix du sens de parcours de la maille, lorsqu'un générateur est rencontré et que l'on en sort par son pôle "+", sa fem sera affecté d'un signe "+" dans la somme $\sum'$. Elle devra être affectée d'un signe "-" dans cette somme si l'on sort du générateur par son pôle "-". Il apparaît que la convention de signe pour les produits RI est similaire. Lors du parcours de la maille, si le sens du courant rencontré dans une branche est le même que le sens de parcours, son intensité sera affectée d'un signe "+". Si le courant va en sens opposé, son intensité se verra affectée d'un signe "-".

Finalement, la convention décrite ci-dessus est de nature en quelque sorte "égocentrique", car on peut l'exprimer ainsi : *tout ce qui va selon mon idée, je le considère positivement, tout ce qui s'oppose à moi, je le considère négativement*!

Ainsi, pour la maille $N_1E_1R_1N_3R_3N_2R_2E_2N_1$ du réseau de la figure 4.11, prise dans ce sens, on a

$$E_1 - E_2 = R_1 i_1 - R_3 i_3 + R_2 i_2 \tag{4.39}$$

Cette loi est généralisable au cas où des récepteurs sont présents. Ceux-ci pourront être considérés comme des générateurs en opposition, pourvu que les valeurs trouvées pour les intensités de courant qui les traversent correspondent bien à une situation physique où les récepteurs fonctionnent effectivement, c'est-à-dire correspondent à un point de fonctionnement réel du réseau.