

## Chapitre 5

# Equilibre électrostatique des conducteurs

### 5.1 Introduction

On peut définir un conducteur comme un milieu dans lequel existent des charges libres, positives ou négatives, qui peuvent être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique, si petit soit-il. De la sorte, les propriétés générales des conducteurs peuvent s'appliquer aussi bien aux métaux, aux semi-conducteurs, aux électrolytes et aux gaz ionisés. Cependant, notre étude portera uniquement sur les conducteurs *métalliques*. Un déplacement de charges peut être provoqué par diverses causes, comme des hétérogénéités de constitution ou de température, la présence d'un champ de gravitation, etc. Nous supposons que le milieu conducteur est placé dans des conditions telles que ces effets sont inexistantes et que la seule cause possible d'un mouvement d'ensemble des charges libres<sup>1</sup> est due à l'application d'un champ électrique *extérieure*.

Un conducteur est dit en *équilibre électrostatique* si l'on n'observe aucun mouvement d'ensemble de ses charges libres, c'est-à-dire si aucune force provenant d'une action extérieure au conducteur n'agit sur celles-ci. Sous les conditions énoncées plus haut, cet équilibre ne peut donc être réalisé que si, à l'intérieur du conducteur, le champ électrostatique est *nul*. Bien sûr, il s'agit ici du champ observé à l'échelle *macroscopique* et non à l'échelle *microscopique*, où, dans un métal par exemple, il peut présenter d'énormes variations qui cependant se compensent en moyenne si l'on considère un élément de volume suffisamment grand. A l'échelle *macroscopique*, l'équilibre d'un conducteur est donc caractérisé par les propriétés suivantes.

♠ Le champ électrique (macroscopique) est nul :

$$\boxed{\vec{E} = 0} \quad (5.1)$$

♠ La densité volumique de charges (macroscopique) est nulle, puisque

$$\boxed{\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 0} \quad (5.2)$$

♠ Le potentiel (macroscopique) est constant dans tout le volume du conducteur, puisque

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire, un mouvement global de dérive.

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V = 0} \quad (5.3)$$

En particulier, la *surface* du conducteur est alors une *équipotentielle*, et les lignes de champ lui sont donc *normales*.

Puisque la densité volumique de charges est nulle, un excédent éventuel de charges du conducteur ne peut se trouver qu'à la surface de celui-ci. Un ensemble de conducteurs en équilibre électrostatique est donc l'exemple type de distribution superficielle de charges.

Si le conducteur présente une cavité interne *ne contenant aucune charge*, le potentiel est constant dans cette cavité car il ne peut avoir ni de maximum ni de minimum dans une région dépourvue de charge. Le potentiel y a la même valeur que dans le corps du conducteur, le champ y est nul, et il n'y a aucune charge sur la surface de cette cavité. On en déduit notamment que si l'on apporte une charge sur la surface intérieure d'un conducteur creux, celle-ci passe immédiatement sur la surface extérieure du conducteur.

## 5.2 Champ au voisinage d'un conducteur

Soit  $M$  un point sur la surface extérieure  $S$  d'un conducteur, et  $\sigma(M)$  la densité superficielle de charge en ce point. Construisons une surface fermée  $S'$  entourant  $M$ , que, pour simplifier, nous prendrons de forme cylindrique. La partie cylindrique de  $S'$  est perpendiculaire à  $S$  et découpe sur  $S$  un disque  $\mathcal{D}$  de centre  $M$  et d'aire infinitésimale  $dS$ . L'une des bases du cylindre,  $B$ , se trouve à l'intérieur du conducteur tandis que l'autre,  $B'$ , est à l'extérieur du conducteur, au voisinage immédiat du point  $M$ , et est parallèle à  $S$ . Son aire est donc aussi égale à  $dS$  (voir figure 5.1).

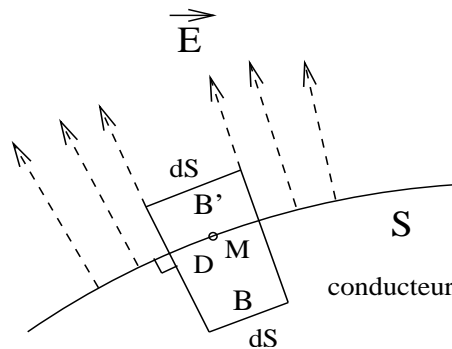


Figure 5.1

Appliquons le théorème de Gauss à la surface (fermée)  $S'$ . Comme, d'une part, le champ est nul à l'intérieur du conducteur et que, d'autre part, les lignes de champ partant du conducteur lui sont perpendiculaires et donc parallèles à la partie cylindrique de  $S'$ , le flux sortant du champ électrostatique à travers  $S'$  se réduit à son flux à travers  $B'$ , égal à  $E dS$ ,  $E$  étant ici la valeur algébrique du champ suivant la normale sortante à  $S$  en  $M$ . Comme la charge à l'intérieur de  $S'$  est  $\sigma(M)dS$ , on en déduit le *théorème de Coulomb* :

- *Au voisinage immédiat de la surface extérieure d'un conducteur, le champ électrostatique est*

$$\boxed{\vec{E}_>(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}(M)} \quad (5.4)$$

$M$  étant le point de la surface du conducteur vers lequel on s'approche.

La distribution des charges à la surface d'un conducteur n'est généralement pas uniforme, même si le conducteur est seul dans l'espace. Elle dépend de la géométrie du conducteur. On montre notamment que les charges s'accumulent vers les régions convexes de forte courbure. C'est ce qu'on appelle le *pouvoir des pointes*. Au voisinage d'une zone pointue, la valeur du champ peut devenir telle qu'elle provoque une ionisation de l'air ambiant<sup>2</sup> et par voie de conséquence un courant d'air, ou vent électrique, que l'on peut mettre en évidence, par exemple, en présentant la flamme d'une bougie qui peut éventuellement s'éteindre brusquement sous l'effet de ce courant d'air.

On peut comprendre qualitativement ce phénomène d'accumulation de charges de la façon suivante. Dans une zone de forte courbure (faible rayon de courbure), la section droite  $S$  d'un tube de champ croît rapidement à partir du conducteur. Or, le flux du champ à travers cette section droite se conserve le long d'un même tube de champ, ce qui signifie notamment que l'intensité du champ décroît rapidement à partir du conducteur, l'aire  $S$  étant croissante. Cependant, loin du conducteur, ce dernier peut être assimilé à une charge ponctuelle et l'intensité du champ est alors la même en tous les points situés à la même distance du conducteur. En remontant les lignes de champ vers le conducteur à partir de cette région, on conçoit bien que le champ augmente plus vite si l'on se dirige vers les zones de plus forte courbure que vers celles de plus faible courbure.

En prenant pour exemple un conducteur en forme d'ellipsoïde de révolution de centre  $O$ , dont le grand axe de longueur  $2a$  est selon l'axe  $z'Oz$  et dont le petit axe a pour longueur  $2b$  ( $b < a$ ), la densité superficielle de charge a pour expression

$$\sigma(z) = \frac{Q}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}} \quad (5.5)$$

$Q$  étant la charge totale portée par le conducteur. De là on déduit les valeurs suivantes du champ au voisinage de la surface du conducteur :

$$E(z = 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ab}, \quad E(z = a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \quad (5.6)$$

et le rapport

$$\frac{E(z = a)}{E(z = 0)} = \frac{a}{b} \quad (5.7)$$

qui peut être très grand pour un ellipsoïde très "effilé" ( $a \gg b$ ).

### 5.3 Influence électrostatique

La répartition des charges sur la surface d'un conducteur ne dépend pas seulement de sa géométrie propre mais aussi de la présence ou non d'autres conducteurs chargés dans son voisinage, ainsi que de leurs positions. Le phénomène qui résulte de cette interaction est appelé *influence électrostatique*.

Pour l'illustrer, considérons le dispositif suivant. Un conducteur métallique  $C$  de grande taille est modélisé comme un milieu conducteur emplissant tout le domaine  $x \leq 0$ . Sa surface est donc

<sup>2</sup>le champ *disruptif* de l'air vaut  $3 \cdot 10^6$  V/m.

représentée par le plan  $yOz$ . Au point  $A$ , d'abscisse  $x = a > 0$  et situé sur l'axe  $Ox$ , se trouve une charge  $q > 0$ , supposée ponctuelle. Initialement, le conducteur ne possédait aucune charge excédentaire : il était neutre. La présence de la charge  $q$  va modifier la répartition initialement uniforme des électrons libres dans le conducteur  $C$ . En effet, dans un régime transitoire, le champ créé par la charge  $q$  va mettre en mouvement les électrons libres de  $C$  et ceux-ci vont se replacer en surface, dans le plan  $yOz$ , en créant petit à petit un champ ayant tendance à compenser le champ de la charge  $q$  à l'intérieur de  $C$ . Lorsque l'équilibre est atteint, cette compensation est complète. Bien entendu, puisque  $C$  est toujours globalement neutre, des charges positives (résultant d'un défaut d'électrons) doivent apparaître, mais celles-ci sont rejetées sur l'autre surface du conducteur, représentée, dans la modélisation choisie, par une surface se trouvant dans la région  $x \rightarrow -\infty$ . L'équilibre sera caractérisé par la relation

$$\vec{E}^C + \vec{E}_q = 0, \quad \text{pour } x < 0 \quad (5.8)$$

où  $\vec{E}^C$  est le champ créé par les électrons de  $C$  et  $\vec{E}_q$  celui de la charge  $q$ . On en déduit qu'en un point  $M$  tel que  $x < 0$ , le champ de "réaction" du conducteur  $C$  a pour expression

$$\vec{E}^C(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5.9)$$

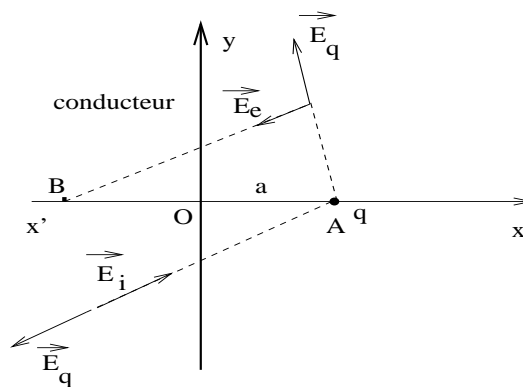


Figure 5.2

Le champ créé par  $C$  dans la région  $x > 0$  peut être obtenu simplement en observant que le plan  $yOz$  est manifestement un plan de symétrie positive pour la distribution des électrons sur ce plan. On en déduit que pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} E_y^C(x, y, z) &= E_y^C(-x, y, z) \\ E_z^C(x, y, z) &= E_z^C(-x, y, z) \\ E_x^C(x, y, z) &= -E_x^C(-x, y, z) \end{aligned} \quad (5.10)$$

d'où

$$\vec{E}^C(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x+a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5.11)$$

On voit alors que dans la région  $x > 0$ , la distribution des électrons de  $C$  agit exactement comme une charge  $-q$  situé sur l'axe  $Ox$  au point  $B$  d'abscisse  $x = -a$ , symétrique de  $A$  par rapport à

$yOz^3$ . On en déduit le champ total dans la région  $x > 0$  :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{AM}}{AM^3} - \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right] \quad (5.12)$$

Pour  $x = 0$ , ce champ devient

$$\vec{E}(0, y, z) = -\frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5.13)$$

d'où la densité superficielle de charge

$$\sigma(\rho) = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{[a^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (5.14)$$

où  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Son maximum est au point  $O$  et a pour valeur

$$\sigma(\rho) = -\frac{q}{2\pi a^2} \quad (5.15)$$

ce qui montre que les électrons ont tendance à s'accumuler au point situé juste en regard de la charge qui a influencé le conducteur  $C$ <sup>4</sup>.

Ainsi, la charge  $q$  impose par influence une répartition bien déterminée des charges sur  $C$ . D'une façon générale, l'influence électrostatique est *réciproque* : si la charge  $q$  n'était plus ponctuelle mais distribuée sur une petite sphère, cette distribution serait elle-même modifiée par celle de  $C$ . L'évaluation des nouvelles distributions à l'équilibre est alors plus compliquée. Cependant, on observe toujours le phénomène de *condensation de l'électricité* : les charges se concentrent sur les parties les plus en face de deux conducteurs que l'on rapproche l'un de l'autre.

## 5.4 Coefficients d'influence

Considérons un système de  $N$  conducteurs immobiles  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , en équilibre électrostatique les uns avec les autres et éloignés de tout autre système de corps électrisés. Nous noterons  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  leurs charges totales respectives, et  $V_1, V_2, \dots, V_N$  leurs potentiels respectifs. Ces potentiels seront définis par rapport à un potentiel de référence. Par convention, celui-ci, fixé à zéro, est celui de la Terre (ou de la *masse*). C'est aussi le potentiel en tout point situé à distance infinie du système de conducteurs étudié. Dans ces conditions, le potentiel total créé en un point  $M$  quelconque par l'ensemble du système prend la forme

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{S_i} \frac{\sigma_i(P_i) dS_i}{P_i M} \quad (5.16)$$

où  $S_i$  est la surface du conducteur  $A_i$ ,  $P_i$  un point courant de cette surface et  $\sigma_i(P_i)$  la densité superficielle de charges en ce point.

De la sorte, on met en évidence la relation de *linéarité* entre les potentiels ainsi définis et les charges des conducteurs, qui provient du fait général que les équations de l'Electrostatique sont *linéaires*. Il en résulte d'une part que si les densités de charges des conducteurs sont toutes multipliées par un facteur commun constant  $\alpha$ , les charges totales  $Q_i$  ainsi que le potentiel seront eux aussi multipliés par ce même facteur. D'autre part, si  $V'(M)$  est la fonction potentiel pour un équilibre des conducteurs où leurs densités de charges respectives sont  $\sigma'_1(P_1), \sigma'_2(P_2), \dots, \sigma'_N(P_N)$ , la fonction  $\alpha V(M) + \beta V'(M)$  est la fonction potentiel correspondant à un équilibre

<sup>3</sup>On dit que cette charge représente l'*image électrique* du conducteur en tout point à l'*extérieur* de celui-ci.

<sup>4</sup>A titre d'exercice, montrer que  $\int \int \sigma dydz = -q$ , l'intégrale étant étendue à tout le plan  $yOz$ .

des conducteurs pour lequel les densités de charges sont, respectivement,  $\alpha \sigma_1(P_1) + \beta \sigma'_1(P_1)$ ,  $\alpha \sigma_2(P_2) + \beta \sigma'_2(P_2)$ , ...,  $\alpha \sigma_N(P_N) + \beta \sigma'_N(P_N)$ . Les charges et potentiels respectifs des conducteurs sont alors, avec des notations évidentes,  $\alpha Q_1 + \beta Q'_1$ ,  $\alpha Q_2 + \beta Q'_2$ , ...,  $\alpha Q_N + \beta Q'_N$  et  $\alpha V_1 + \beta V'_1$ ,  $\alpha V_2 + \beta V'_2$ , ...,  $\alpha V_N + \beta V'_N$ .

Ceci démontre en fait le *théorème de superposition* des états d'équilibre.

Supposons alors que le conducteur  $A_1$  ait le potentiel  $+1$  V, tous les autres conducteurs étant au potentiel zéro. Par influence, ces derniers vont se charger négativement car les lignes de champ partent nécessairement du conducteur  $A_1$  pour rejoindre l'un des conducteurs  $A_2, A_3, \dots, A_N$  ou l'infini (potentiel zéro aussi). Seul  $A_1$  porte une charge *positive* notée  $C_{11}$ . Les autres conducteurs portent des charges *négatives* notées respectivement  $C_{21}, C_{31}, \dots, C_{N1}$ .

En superposant  $V_1$  états d'équilibre identiques à celui-ci, on obtient un nouvel état d'équilibre où le potentiel et la charge de  $A_1$  sont  $V_1$  et  $C_{11}V_1$  respectivement et où les autres conducteurs, toujours au potentiel zéro, portent les charges  $C_{21}V_1, C_{31}V_1, \dots, C_{N1}V_1$  respectivement.

En recommençant cette opération avec  $A_2$  comme conducteur influençant, les autres conducteurs étant au potentiel zéro, on obtient un état d'équilibre où le potentiel et la charge de  $A_2$  sont  $V_2$  et  $C_{22}V_2$ , les charges des autres conducteurs étant  $C_{12}V_2, C_{32}V_2, \dots, C_{N2}V_2$  respectivement.

Poursuivant cette série d'opérations jusqu'à choisir  $A_N$  comme conducteur influençant, puis superposant les  $N$  états ainsi obtenus, on aboutit à l'état d'équilibre où les conducteurs ont leurs potentiels actuels respectifs  $V_1, V_2, \dots, V_N$ . On voit alors que la charge du  $i$ ème conducteur s'exprime comme une combinaison linéaire des potentiels de *tous* les conducteurs :

$$Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 + \dots + C_{ii}V_i + \dots + C_{iN}V_N \quad (5.17)$$

On peut ainsi énoncer le théorème suivant

- Dans un système de conducteurs en équilibre électrostatique, la charge totale de chacun d'eux est une combinaison linéaire des potentiels de tous ces conducteurs.

Inversement,

- le potentiel de chaque conducteur est une combinaison linéaire des charges de tous les conducteurs.

Les coefficients  $C_{ij}$  qui ne dépendent que de la géométrie du système de conducteurs portent le nom générique de *coefficients d'influence*. On réserve toutefois aux coefficients  $C_{ii}$  le nom de *capacité* du conducteur  $A_i$  en présence des autres. Comme il a été montré plus haut, les capacités sont des grandeurs *positives*. Les coefficients d'influence  $C_{ij}$  avec des indices différents sont *négatifs*.

On montre que d'une façon générale, on a

$$C_{ii} \geq |C_{1i} + C_{2i} + \dots + C_{i-1,i} + C_{i+1,i} + \dots + C_{Ni}| \quad (5.18)$$

et

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (5.19)$$

On notera avec intérêt que les coefficients  $C_{ii}$  étant positifs et les coefficients  $C_{ij}$  avec  $i \neq j$  étant négatifs, la relation (5.18) peut être réécrite comme

$$|C_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |C_{ij}| \quad (5.20)$$

et que, selon la nomenclature usuelle, la matrice  $N \times N$  des  $C_{ij}$  est donc à *diagonale dominante*. D'après un lemme de Hadamard<sup>5</sup>, il en résulte que cette matrice est inversible<sup>6</sup> et que l'on peut donc aussi bien exprimer les potentiels en fonction des charges, ce qui est bien conforme au résultat physique attendu.

♠ Dans le système d'unités S.I., les coefficients d'influence et les capacités s'expriment tous en *farads* (symbole F).

## 5.5 Les écrans électriques

Considérons un conducteur  $A$  comportant une cavité, et soit  $B$  et  $C$  deux autres conducteurs, le premier dans la cavité de  $A$ , le second à l'extérieur de  $A$ .

♣ Dans un premier montage (figure 5.3),  $A$  est relié au sol, de potentiel zéro,  $C$  porte la charge  $Q_C$  ( $Q_C > 0$  pour l'exemple),  $B$  n'est pas chargé.

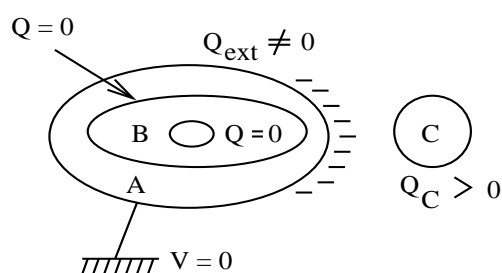


Figure 5.3

Comme il n'y a aucune charge à l'intérieur de la cavité, le potentiel ne peut y présenter d'extremum. Puisqu'il est nul dans la masse de  $A$ , il est certainement nul partout dans la cavité et ce, quel que soit la charge de  $C$ . Le champ est également nul dans la cavité. Le conducteur  $B$  ne subit donc aucune influence de la part de  $C$  : le conducteur  $A$  protège l'intérieur de la cavité des actions électriques extérieures. Par contre,  $A$  est influencé par  $C$  : il apparaît des charges sur la surface extérieure de  $A$  (fournies par la source à laquelle  $A$  est relié), mais aucune sur sa surface intérieure.

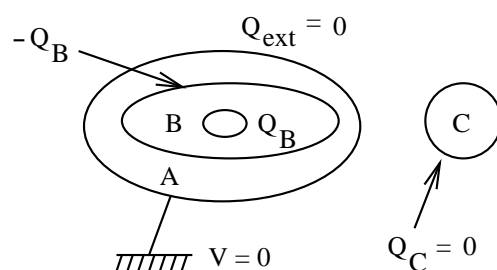


Figure 5.4

♣ Dans un second montage (figure 5.4),  $A$  est toujours relié au sol. Le conducteur  $B$  porte maintenant la charge  $Q_B$ ,  $C$  n'est pas chargé. A l'extérieur de  $A$  il n'y a aucune charge. Dans cette région, le potentiel ne peut y avoir d'extremum. Or, le potentiel de  $A$  est nul, de même que

<sup>5</sup>[http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_à\\_diagonale\\_dominante](http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_à_diagonale_dominante)

<sup>6</sup>Les inégalités (5.18) ne peuvent éventuellement devenir des égalités qu'en nombre limité, en vertu de la positivité de l'énergie potentielle de l'ensemble des conducteurs.

le potentiel à l'infini. Le potentiel est donc nul partout à l'extérieur de  $A$ , ainsi que le champ. Aucune charge ne se trouve sur la surface extérieure de  $A$  et le conducteur  $C$  ne peut être influencé par  $B$ . Cette fois,  $A$  protège l'extérieur contre les charges intérieures.

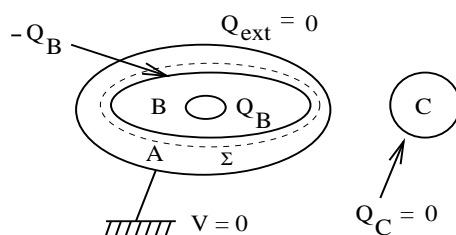


Figure 5.5

Comme le champ est nul dans  $A$ , son flux à travers une surface fermée  $\Sigma$  située toute entière dans la masse de  $A$  est nul (figure 5.5). D'après le théorème de Gauss, il s'ensuit que la charge totale contenue à l'intérieur de cette surface est nulle. Comme il ne peut y avoir de charge dans la masse de  $A$ , une charge  $-Q_B$  se trouve donc répartie sur toute la surface intérieure de  $A$ .

♣ Dans un troisième montage (figure 5.6),  $A$  n'est plus relié au sol. Il est isolé et non chargé,  $B$  n'est pas chargé non plus. Si l'on charge  $C$ , il apparaît sur la surface extérieure de  $A$  des charges dont la somme est nulle. En effet, comme précédemment, le potentiel à l'intérieur de  $A$  et de sa cavité est constant et le champ y est partout nul. Il ne peut y avoir de charge sur la surface intérieure de  $A$ . Comme  $A$  reste globalement neutre, la somme des charges sur sa surface extérieure est bien nulle.

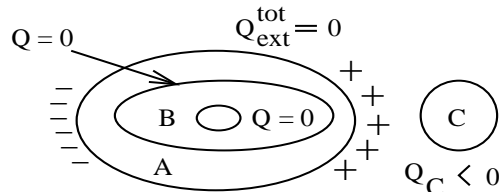


Figure 5.6

Notons que dans ce montage, si  $B$  est chargé, il peut influencer le conducteur extérieur  $C$  par l'intermédiaire de  $A$  (figure 5.7).

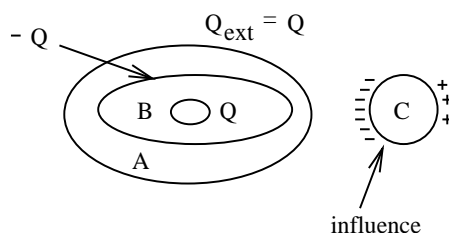


Figure 5.7

En conclusion, une enceinte conductrice reliée au sol ou maintenue à un potentiel constant constitue un *écran électrique parfait* : elle protège les corps intérieurs et (éventuellement) les corps extérieurs des actions électrostatiques réciproques<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Voir l'expérience de la cage de Faraday.



## 5.6 Les condensateurs

On dit que deux conducteurs sont en *influence totale* si les lignes de champs issues de l'un d'entre eux aboutissent toutes sur l'autre. Cette circonstance est réalisée si l'un des conducteurs,  $A$ , entoure complètement l'autre,  $B$ . Un tel système constitue au sens strict un *condensateur* dont les deux conducteurs forment les *armatures*. L'espace séparant les deux armatures est soit le vide, soit le plus souvent un milieu isolant appelé diélectrique.

Soient  $V_A$  et  $V_B$  les potentiels respectifs de  $A$  et  $B$ . Les charges  $Q_A$  et  $Q_B$  de  $A$  et  $B$  respectivement s'expriment comme des combinaisons linéaires de  $V_A$  et  $V_B$  faisant intervenir les coefficients d'influence

$$Q_A = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B, \quad Q_B = C_{BA}V_A + C_{BB}V_B \quad (5.21)$$

Supposons tout d'abord que  $A$  et  $B$  soient reliés à la même source de potentiel  $V_0$ . Dans ce cas, on peut considérer que  $A$  et  $B$  forment un conducteur unique à l'intérieur duquel le champ est nul. Par suite,  $Q_B$  est nécessairement nulle, ce qui conduit à la relation

$$C_{BA} = -C_{BB} \quad (5.22)$$

Supposons ensuite que le conducteur  $A$  soit relié à la Terre et que  $B$  porte une charge  $Q$ . Le potentiel de  $A$  est alors nul. Dans ce cas, comme nous l'avons vu précédemment, le potentiel et le champ sont tous deux nuls dans l'espace extérieur à  $A$ . Ce dernier ne comporte donc aucune charge sur sa surface extérieure. Par contre, sa surface intérieure doit porter la charge  $-Q$ . On en déduit

$$Q_A = -Q = C_{AB}V_B = -C_{BB}V_B \quad (5.23)$$

d'où

$$C_{AB} = -C_{BB} = C_{BA} \quad (5.24)$$

Pour des potentiels quelconque de  $A$  et  $B$  on peut ainsi écrire

$$Q_B = C_{BB}(V_B - V_A), \quad Q_A = [C_{AA} - C_{BB}]V_A - C_{BB}(V_B - V_A) \quad (5.25)$$

Puisque  $B$  porte la charge  $Q_B$ , la surface intérieure de  $A$ , en influence totale avec  $B$ , doit porter la charge  $-Q_B$ . On voit ainsi que la charge portée par la surface extérieure de  $A$  est

$$Q_A^{\text{ext}} = Q_A + Q_B = [C_{AA} - C_{BB}]V_A \quad (5.26)$$

Elle est indépendante de celle de  $B$ , et subsisterait même si  $B$  n'était pas chargé. Mais dans ce cas, l'ensemble des deux conducteurs équivaut au conducteur  $A$  isolé au potentiel  $V_A$ , portant ladite charge. La grandeur

$$C_A = C_{AA} - C_{BB} \quad (5.27)$$

représente donc la *capacité de A seul* (c'est-à-dire, seul dans l'espace). La grandeur

$$C = C_{BB} \tag{5.28}$$

porte le nom de *capacité* du condensateur. Généralement,  $C_A$  est beaucoup plus petit que  $C$ , et la charge extérieure de  $A$  est négligeable devant  $|Q_B|$ . Ceci justifie le nom de *charge du condensateur* donné à la charge  $Q_B$  de l'armature interne<sup>8</sup>. Posant  $Q = Q_B$  et  $V = V_B - V_A$ , différence entre le potentiel de l'armature interne et celui de l'armature externe, la relation fondamentale des condensateurs s'écrit

$$Q = CV \tag{5.29}$$

**La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre ses armatures, le coefficient de proportionnalité étant la capacité du condensateur**

Les condensateurs usuels n'ont pas vraiment la configuration décrite ci-dessus. Cependant, l'influence totale est généralement bien réalisée, à savoir, les charges des armatures en regard sont opposées et la relation  $Q = CV$  peut être appliquée avec une excellente précision.

Supposons que les deux armatures  $A$  et  $B$  soient très proches l'une de l'autre, d'une distance constante  $e$ . Entre  $A$  et  $B$ , les lignes de champ leur sont perpendiculaires et le champ  $y$  est quasiment uniforme, puisque,  $e$  étant supposé suffisamment petit, on a

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \approx E e \tag{5.30}$$

où, en prenant  $V_B > V_A$ ,  $E$  est le module du champ. Or, puisqu'on se trouve au voisinage des conducteurs,  $E$  vaut  $\sigma/\epsilon_0$  où  $\sigma$  est la densité superficielle de charges sur  $B$  (ici positive). On en déduit que dans ces conditions, d'une part la densité de charges est constante, et que, d'autre part,  $S$  étant l'aire de la surface de  $B$ , qui est aussi celle de la surface intérieure de  $A$ , on a la relation

$$V_B - V_A = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{Qe}{S\epsilon_0} \tag{5.31}$$

$Q$  étant la charge de  $B$ . On en déduit la capacité du condensateur :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \tag{5.32}$$

Cette formule est quasiment de portée universelle car la capacité de la plupart des condensateurs utilisés en pratique prend cette forme avec une bonne précision (voir annexe).

On note que la capacité est d'autant plus grande que la distance séparant les armatures est faible, et avec elle la charge du condensateur, à différence de potentiel donnée. Ceci reflète le phénomène, déjà évoqué, de *condensation* de l'électricité, qui a donné leur nom aux condensateurs. En fait, ce phénomène peut être compris en remarquant que du point de vue des charges, un condensateur

<sup>8</sup>A noter que le plus souvent  $A$  est relié au sol et la charge extérieure est alors nulle.

constitue un déséquilibre par rapport à la neutralité totale qui représente un état stable. Il n'est donc pas étonnant d'observer la tendance qu'ont des charges opposées à s'accumuler dans les régions où leur séparation est la plus faible, en vue de s'annihiler, si possible. La *capacité* d'un condensateur représente bien la capacité que possède un tel système à maintenir ce déséquilibre de charges. A ce déséquilibre correspond une *énergie récupérable*, qui est simplement l'énergie potentielle d'interaction entre les charges du conducteur  $B$  et celles de la surface intérieure de  $A$ <sup>9</sup>. Elle s'écrit

$$W = \frac{1}{2}Q_B V_B + \frac{1}{2}Q_A^{\text{int}} V_A = \frac{1}{2}Q_B [V_B - V_A] = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad (5.33)$$

où  $V = V_B - V_A$  et  $Q = Q_B$  comme précédemment.

A partir de cette expression, on peut calculer la force (attractive) qui s'exerce entre les deux conducteurs. Cependant, le bilan d'énergie dans un déplacement virtuel des armatures est différent selon que la transformation est effectuée à charge constante ou à différence de potentiel constante. Dans le premier cas le condensateur est un système isolé *électriquement*, dans le second cas il est nécessairement relié à des sources de potentiel pouvant lui fournir des charges tout en maintenant  $V$  constant, et n'est donc pas isolé. Toutefois, comme les forces ne dépendent que de l'état dans lequel se trouve le condensateur, les résultats obtenus suivant l'un ou l'autre protocole doivent être identiques.

• Dans le cas où le condensateur est isolé, la charge  $Q$  reste constante. La seule énergie reçue est le travail des forces extérieures, supposées compenser les forces intérieures. Une variation  $de$  de la séparation  $e$ , dans le sens de  $B$  vers  $A$ , produit la variation d'énergie

$$dW = F^{\text{ext}} de = -F^{\text{int}} de = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial e} de \quad (5.34)$$

D'où la force intérieure

$$F^{\text{int}} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial e} \quad (5.35)$$

En prenant l'expression approchée de la capacité établie plus haut, on obtient

$$F^{\text{int}} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (5.36)$$

Supposée appliquée sur  $A$ , elle est bien orientée de  $A$  vers  $B$ , c'est-à-dire attractive.

• Dans le second cas, le condensateur est relié à des sources pouvant lui fournir de l'énergie. Cette fois, l'énergie reçue est constituée d'une part par le travail des forces extérieures, et d'autre part par le travail électrique  $VdQ$  fourni par les sources. D'où

$$dW = F^{\text{ext}} de + VdQ = -F^{\text{int}} de + VdQ = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial e} de \quad (5.37)$$

d'où, avec  $Q = CV$ ,

$$F^{\text{int}} = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial e} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial e} \quad (5.38)$$

On obtient bien le même résultat, résultat que l'on peut d'ailleurs déduire plus directement à partir de la pression électrostatique<sup>10</sup> :

<sup>9</sup>Il est intéressant de noter ici que les charges portées par les conducteurs se répartissent sur leurs surfaces de telle sorte à *minimiser* leur énergie potentielle collective; voir à ce sujet : E. Durand, "Electrostatique", Tome II "Problèmes généraux, Conducteurs", Masson et Cie, 1966, p161.

<sup>10</sup>Nous laissons au lecteur le soin de montrer, par un raisonnement semblable à celui utilisé dans l'annexe 3.4 du chapitre 3, que la force s'exerçant sur un élément de charge  $\sigma(M)dS(M)$ , due à toutes les autres charges

$$F^{\text{int}} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (5.39)$$

Cependant l'analyse précédente a l'avantage de mettre en lumière les échanges énergétiques possibles entre conducteurs et sources.

## 5.7 Problème général de l'équilibre

Ce problème consiste à trouver la fonction potentiel  $V(M)$  décrivant l'équilibre des conducteurs en présence. Cette fonction doit satisfaire les contraintes suivantes.

♣ L'espace inter-conducteur ne comportant pas de charge, la fonction  $V(M)$  doit vérifier l'équation de Laplace dans cette région

$$\Delta V = 0 \quad (5.40)$$

♣ La fonction cherchée doit aussi vérifier des *conditions aux limites*, à savoir :

$$V = 0 \quad \text{à l'infini}, \quad V = V_i \quad \text{sur la surface du conducteur } A_i \quad (5.41)$$

Dans certains problèmes on se donne certaines charges de conducteurs au lieu de leurs potentiels. Dans ce cas la condition est plutôt une contrainte sur le champ, puisque, d'après le théorème de Gauss, la charge d'un conducteur peut être calculée comme le flux sortant du champ à travers sa surface.

Montrons que si l'on se donne pour chaque conducteur soit son potentiel, soit sa charge totale, la solution du problème est *unique*.

Supposons qu'il y ait deux solutions  $V'$  et  $V''$  distinctes. Alors, d'après le théorème de superposition, la fonction  $V = V' - V''$  est une solution conduisant au champ total  $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}''$  dans l'espace inter-conducteur et aux densités superficielles  $\sigma = \sigma' - \sigma''$  en chaque point d'un conducteur. Pour cette solution, les conditions aux limites sont les suivantes.

- A l'infini,  $V = 0$ .
- Sur un conducteur  $i$  dont le potentiel a été fixé,  $V_i = V'_i - V''_i = 0$ .
- Sur un conducteur  $j$  dont la charge a été fixée,  $Q_j = Q'_j - Q''_j = 0$ .

On en conclut que pour tout conducteur  $k$ , on a  $V_k Q_k = 0$ , ce qui signifie notamment que l'énergie potentielle totale correspondant à cette solution est *nulle* :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_k Q_k V_k = 0 \quad (5.42)$$

Or, comme nous l'avons vu, l'énergie potentielle s'exprime comme l'intégrale, étendue à tout l'espace, de la densité d'énergie électrostatique  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$ . Cette densité est une grandeur positive, dont l'intégrale ne peut être nulle que si et seulement si elle est nulle en tout point. On en déduit que le champ  $\vec{E}$  doit être nul en tout point et que son potentiel  $V$  est donc constant. Comme  $V$  doit être nul à l'infini et sur les conducteurs dont on a fixé les potentiels, il est partout nul. D'où  $V' = V''$ , ce qui démontre l'unicité de la solution.

extérieures à l'élément de surface  $dS(M)$  et situées sur tous les conducteurs, y compris celui où se trouve cet élément de charge, est donnée par  $\vec{dF}(M) = \frac{\sigma^2(M)}{2\epsilon_0} \vec{dS}(M)$ .

Ce résultat est extrêmement important car si l'on arrive, par un procédé quelconque, à construire une fonction  $V$  satisfaisant l'équation de Laplace et vérifiant les conditions aux limites, il s'agit de **LA** solution car celle-ci est unique. On notera que le champ ainsi que les densités superficielles de charges sont alors parfaitement déterminés (voir les exemples en annexe).

## 5.8 Annexe 1 : boule conductrice dans un champ uniforme

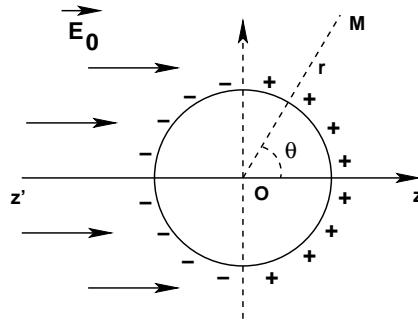


Figure 5.8

Considérons une boule conductrice  $C$  initialement neutre, de rayon  $R$  et dont le centre  $O$  est choisie comme origine d'un repère cartésien  $Oxyz$  (figure 5.8). Plaçons-la dans un champ uniforme parallèle à  $Oz$  :

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z \quad (5.43)$$

avec  $E_0 > 0$ . Par influence, les charges libres de  $C$  vont se répartir sur la surface de la boule de telle sorte à produire dans la boule le champ

$$\vec{E}^C = -E_0 \vec{e}_z \quad (5.44)$$

annulant le champ extérieur appliqué. On en déduit le potentiel créé par cette nouvelle distribution des charges de  $C$  en son intérieur :

$$V_{\text{int}}^C = E_0 z + \text{constante} \quad (5.45)$$

Nous choisirons le potentiel  $V^C$  créé par  $C$  en un point quelconque de telle sorte qu'il soit nul à distance infinie de  $C$ . Son expression générale est donc

$$V^C(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma(P)dS}{PM} \quad (5.46)$$

l'intégrale étant étendue à tous les points  $P$  de la surface de  $C$ , qui est la sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Au point  $O$ , on a  $OP = R$  quel que soit  $P$ , d'où

$$V^C(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (5.47)$$

$Q$  étant la charge totale de  $C$ . Celle-ci étant nulle, on a  $V(O) = 0$ , et la constante d'intégration apparaissant dans (5.45) doit être nulle. A l'intérieur de  $S$ , on a donc

$$V_{\text{int}}^C = E_0 z \quad (5.48)$$

On peut obtenir le potentiel créé par la distribution de  $C$  à l'extérieur de  $C$  de la façon suivante.

Montrons tout d'abord que quel que soit le point  $M$  à l'extérieur de la sphère, il existe un point unique  $N$  situé sur la demi-droite  $OM$  et à l'intérieur de la sphère, tel que le rapport  $PN/PM$

reste constant pour tous les points  $P$  de la sphère. Ceci est un fait bien connu de géométrie plane élémentaire, que nous pouvons retrouver simplement comme suit<sup>11</sup>.

Le rapport  $K = PN/PM$  doit être indépendant des coordonnées de  $P$ . Or si  $h = OM$  et  $h' = ON$ , on a

$$K^2 PM^2 = K^2 [h^2 - 2hu + R^2] = PN^2 = h'^2 - 2h'u + R^2 \quad (5.49)$$

en notant  $u$  l'abscisse de  $P$  suivant la demi-droite  $OM$ . On voit que cette relation est indépendante de  $u$  si  $K^2 h = h'$ . On aura alors

$$K^2 [h^2 + R^2] = h'^2 + R^2 = K^4 h^2 + R^2 \quad (5.50)$$

soit, en écartant la valeur  $K = 1$ ,

$$Kh = R \quad (5.51)$$

d'où

$$hh' = R^2, \text{ et } K = \frac{R}{h} = \frac{h'}{R} \quad (5.52)$$

Ces relations permettent d'exprimer le potentiel créé par  $C$  en  $M$  en fonction de celui en  $N$ . En effet, on a successivement<sup>12</sup>

$$V^C(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma(P)dS}{PM} = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma(P)dS}{PN} = K V^C(N) \quad (5.53)$$

L'expression du potentiel en termes de coordonnées sphériques de  $N$  et  $M$  est

$$V^C(M) = K E_0 h' \cos \theta = \frac{R^3 E_0}{h^2} \cos \theta = \frac{R^3 E_0}{r^2} \cos \theta \quad (5.54)$$

où, dans la dernière expression,  $h$  a été remplacé par  $r$  pour revenir à la notation usuelle.

On obtient ainsi le résultat remarquable que pour tout point extérieur au conducteur  $C$ , ce dernier apparaît comme un dipôle, dont le moment dipolaire est donné par

$$P = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \quad (5.55)$$

Ce résultat, qui pouvait être pressenti pour un point  $M$  à grande distance de  $O$ , puisque la charge totale de  $C$  est nulle, reste vrai quel que soit  $r \geq R$ . Les composantes sphériques du champ de  $C$  sont ainsi

$$\begin{aligned} E_r^C &= \frac{2E_0 R^3 \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta^C &= \frac{E_0 R^3 \sin \theta}{r^3} \\ E_\phi^C &= 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Le potentiel dû au champ extérieur a pour expression

<sup>11</sup>Il est bien connu que l'ensemble des points dont le rapport à deux points fixes  $N$  et  $M$  donnés est constant est un cercle dont le diamètre  $AB$  est tel que l'ensemble des quatre points  $A, B, N, M$  constitue une *division harmonique*.

<sup>12</sup>Cette méthode est due à Kelvin; voir E. Durand, cours d'Electrostatique, tome I, Les Distributions, Masson ed., 1964, p. 275.

$$V^e = -E_0 r \cos \theta \quad (5.57)$$

et les composantes sphériques du champ extérieur sont

$$\begin{aligned} E_r^e &= E_0 \cos \theta \\ E_\theta^e &= -E_0 \sin \theta \\ E_\phi^e &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Les composantes sphériques du champ total à l'extérieur de  $C$  sont donc

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \cos \theta \left[ 1 + \frac{2R^3}{r^3} \right] \\ E_\theta &= E_0 \sin \theta \left[ \frac{R^3}{r^3} - 1 \right] \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

Comme il se doit, pour  $r = R$  seule subsiste la composante radiale, d'où l'on tire, en appliquant le théorème de Coulomb, la densité superficielle de charges sur  $S$  :

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta \quad (5.60)$$

Comme attendu, elle prend sa plus grande valeur pour  $\theta = 0$ , qui est la direction du champ extérieur influant sur les charges de  $C$ . Le potentiel total quant à lui est

$$V = E_0 r \cos \theta \left[ \frac{R^3}{r^3} - 1 \right] \quad (5.61)$$

Il est nul sur  $S$  et donc nul dans tout le conducteur  $C$ .

Montrons maintenant comment ce résultat peut être obtenu plus directement en appliquant le théorème d'unicité.

Envisageons la superposition du champ  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$  et de celui d'un dipôle électrique placé en  $O$  et de moment dipolaire  $\vec{p} = p \vec{e}_z$ . Le potentiel électrique résultant

$$V(M) = -E_0 r \cos \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (5.62)$$

d'une part satisfait l'équation de Laplace pour  $r \neq 0$ , et, d'autre part, a pour équipotentielle  $V = 0$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  donné par

$$R = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.63)$$

Pour tout point en dehors de cette sphère, le potentiel (5.62) vérifie l'équation de Laplace et les conditions aux limites du problème d'une sphère conductrice de centre  $O$  et de rayon  $R$  placée dans un champ uniforme, à condition de poser

$$p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \quad (5.64)$$

D'après le théorème d'unicité, c'est LA solution cherchée<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Il est bien sûr possible d'ajuster le potentiel de la sphère en rajoutant une constante au potentiel (5.61).



Le théorème d'unicité repose sur l'identification de l'énergie à l'intégrale sur tout l'espace de la densité  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$ , et celle-ci ne peut se faire que sous la condition de l'annulation du flux de  $V \vec{E}$  à travers une surface à l'infini entourant le système de charges étudié (voir le chapitre 3). Le lecteur averti pourra alors être surpris que l'on puisse utiliser le théorème d'unicité dans le cas présent, puisque cette condition n'est pas manifestement pas remplie du fait que la partie du potentiel (5.62) venant du champ extérieur n'est pas bornée pour  $r \rightarrow \infty$ .

A l'interrogation de ce lecteur, on peut tout d'abord répondre par un argument réaliste. En effet, dans la réalité, le champ extérieur est produit par des charges sources qui ne peuvent évidemment pas emplir tout l'espace. Par conséquent, le champ et le potentiel qu'elles créent satisfont très certainement la condition précitée. L'uniformité du champ extérieur ne peut sans doute être réalisée que dans une région finie de l'espace et il faut envisager l'exemple précédent comme une approximation d'une situation plus complexe, valable uniquement dans un domaine limité. L'étude qui suit permettra d'étayer cet argument.

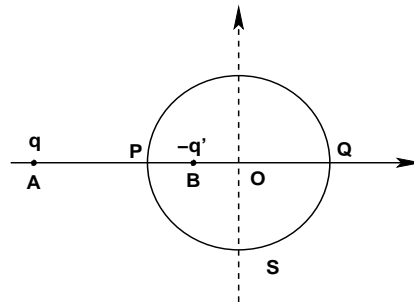


Figure 5.9

Considérons tout d'abord le système comportant une première charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $A$  et une seconde charge ponctuelle  $-q'$  placée en un point  $B$ , avec  $q > q' > 0$  (figure 5.9). Le potentiel électrique créée par ces deux charges en un point  $M$  s'écrit

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{MA} - \frac{q'}{MB} \right) \quad (5.65)$$

avec la convention  $V_1 = 0$  à l'infini. Ce potentiel possède une équipotentielle  $V_1 = 0$  à distance finie, définie par

$$\frac{MB}{MA} = \frac{q'}{q} = k < 1$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme

$$MB^2 - k^2 MA^2 = \left( \vec{MB} - k \vec{MA} \right) \cdot \left( \vec{MB} + k \vec{MA} \right) = 0 \quad (5.66)$$

Introduisons le barycentre  $P$  de  $A$  et de  $B$  affectés des coefficients  $k$  et  $1$ , et le barycentre  $Q$  de ces mêmes points affectés des coefficients  $-k$  et  $1$ , respectivement :

$$\vec{PB} + k \vec{PA} = \vec{0} \quad , \quad \vec{QB} - k \vec{QA} = \vec{0}$$

Les deux barycentres sont sur la droite  $AB$ . On a notamment

$$\vec{BP} = -\frac{k}{1+k} \vec{AB} \quad , \quad \vec{BQ} = \frac{k}{1-k} \vec{AB}$$

L'équation (5.66) devient alors  $\vec{MP} \cdot \vec{MQ} (1 - k^2) = 0$ , soit  $\vec{MP} \cdot \vec{MQ} = 0$  puisqu'on suppose  $k \neq 1$ . Dans le plan contenant la droite  $AB$  et le point  $M$ , ce point se trouve donc sur un cercle de diamètre  $PQ$ . Par suite, l'équipotentielle  $V_1 = 0$  cherchée est une sphère  $S$  dont un diamètre est  $PQ$  et dont le centre  $O$  est situé sur la droite  $AB$ . Notons  $L = AB$ ,  $D = OA$ ,  $D' = OB$ , et  $R$  le rayon de la sphère. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les relations

$$R = \frac{kL}{1 - k^2} \quad , \quad D = \frac{R}{k} \quad , \quad D' = kR$$

De par le théorème d'unicité, le potentiel (5.65) est aussi celui décrivant l'équilibre d'une boule conductrice de centre  $O$ , de rayon  $R$ , portée au potentiel  $V = 0$ , se trouvant sous l'influence d'une charge  $q$  situé au point  $A$  à la distance  $D = R/k > R$  du point  $O$ , car il satisfait toutes les conditions requises. Il en résulte que pour un point à l'extérieur de la boule, celle-ci est vue comme une charge ponctuelle  $q' = -k q$ , située entre  $A$  et  $O$ , à la distance  $D' = kR < R$  de  $O$ . La charge totale répartie sur la surface  $S$  de la boule est  $-q'$ .

Ajoutons maintenant une charge  $+q'$  en  $O$ . Le potentiel total en  $M$ , dû à l'ensemble des trois charges, est

$$V_2(M) = V_1(M) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{OM} \tag{5.67}$$

Pour ce potentiel, la sphère  $S(O, R)$  est encore une équipotentielle sur laquelle il prend la valeur (on a alors  $V_1 = 0$ )

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D}$$

On vérifie aisément que le potentiel (5.67) est aussi la solution pour le problème de la boule conductrice, cette fois *isolée*, donc de charge totale nulle, sous l'influence de la charge  $q$  en  $A$ . Ainsi, pour un point à l'extérieur de la boule, celle-ci est vue comme un ensemble de deux charges : l'une  $-q'$  placée en  $B$ , l'autre  $+q'$  placée en  $O$  : la charge *totale* portée par la surface de la boule est bien nulle.

Le problème de l'équilibre de la boule dans un champ uniforme peut être obtenu comme un cas limite du précédent, en considérant la charge  $q$  comme très éloignée de  $O$  tout en supposant que la grandeur

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^2}$$

qui représente le champ créé en  $O$  par  $q$ , reste *finie*. Dans ces conditions, le champ créé par  $q$  peut être considéré comme quasiment uniforme dans le voisinage de la boule avec pour expression  $E_0 \vec{e}_z$ , où  $\vec{e}_z = \vec{AO} / D$ . Pour  $D \gg R$ , on a  $D' = R(R/D) \ll R$ , et le point  $B$  devient très proche de  $O$ . A l'extérieur de la boule, celle-ci apparaît donc comme un dipôle placé en  $O$ , dont le moment dipolaire est

$$p = q' D' = q R k^2 = q R (R^2 / D^2) = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$$

qui est aussi une grandeur finie. Il est alors permis de faire les approximations suivantes

$$\frac{1}{MA} \simeq \frac{1}{D} \left( 1 - \frac{r}{D} \cos \theta \right) \quad , \quad \frac{1}{OM} - \frac{1}{MB} \simeq \frac{D'}{r^2} \cos \theta$$

qui donnent du potentiel (5.67) la forme approchée

$$V_2(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{D} - \frac{q}{D^2} r \cos \theta + \frac{q'D'}{r^2} \cos \theta \right) = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \text{constante}$$

et, comme attendu, on retrouve ainsi l'expression (5.62), à une constante près.

## 5.9 Annexe 2 : Calculs de capacités

### 5.9.1 Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est constitué d'une armature centrale faite d'une boule  $A$  métallique de centre  $O$  et de rayon  $R_1$ , et d'une armature externe métallique  $B$  en forme de couronne sphérique de centre  $O$ , de rayon intérieur  $R_2 > R_1$  et de rayon extérieur  $R_3$ , entourant l'armature centrale (figure 5.10).

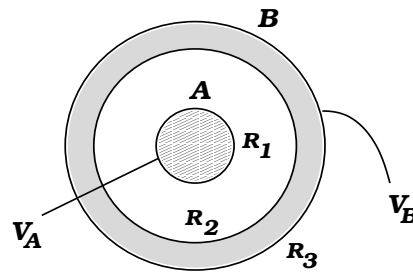


Figure 5.10

On établit entre les deux armatures la différence de potentiel  $V_0 = V_A - V_B$ . Soit alors à trouver le potentiel en tout point en dehors des armatures. La fonction

$$V(M) = \frac{K}{r} + K' \tag{5.68}$$

où  $r = OM$  et où  $K$  et  $K'$  sont des constantes, satisfait l'équation de Laplace et a pour surfaces équipotentiellles des sphères de centre  $O$ . A l'aide de cette fonction, on a donc toutes les chances de trouver la solution dont on sait qu'elle est unique.

Considérons tout d'abord la région extérieure à  $B$ . Comme il doit être nul à l'infini, le potentiel dans cette région doit être de la forme

$$V(M) = \frac{K}{r} \tag{5.69}$$

Et imposant la condition  $V = V_B$  pour  $r = R_3$ , on trouve

$$V(M) = \frac{V_B R_3}{r}, \quad \text{pour } r \geq R_3 \tag{5.70}$$

Considérons ensuite la région entre les armatures. Cherchons-y le potentiel sous la forme préconisée plus haut. En imposant  $V = V_A$  pour  $r = R_1$  et  $V = V_B$  pour  $r = R_2$ , on obtient, tous calculs faits

$$V(M) = (V_A - V_B) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r} + \frac{R_2 V_B - R_1 V_A}{R_2 - R_1}, \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \tag{5.71}$$

L'ensemble des deux équations précédentes définit la solution cherchée. On remarquera que la symétrie sphérique du potentiel est complètement imposée par celle des conditions aux limites. Le champ est radial et est donné par

$$E_r = \frac{V_B R_3}{r^2}, \quad \text{pour } r \geq R_3 \quad (5.72)$$

$$E_r = (V_A - V_B) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r^2}, \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \quad (5.73)$$

L'application du théorème de Gauss permet de trouver les charges des conducteurs. Ainsi, la charge sur la surface extérieure de  $B$  est

$$Q_B^{\text{ext}} = 4\pi r^2 \epsilon_0 E_r = 4\pi \epsilon_0 V_B R_3 \quad (5.74)$$

tandis que celle du conducteur  $A$  est

$$Q_A = 4\pi \epsilon_0 r^2 E_r = (V_A - V_B) 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.75)$$

On en déduit, d'une part, la capacité du conducteur  $B$  seul :

$$C' = 4\pi \epsilon_0 R_3 \quad (5.76)$$

et la capacité du condensateur lui-même

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.77)$$

On note que si  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ , cette capacité prend la forme

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

où  $S = 4\pi R_1^2$  est la surface de l'une ou l'autre armature dans ce cas. On retrouve ainsi la formule "universelle" (5.32). En outre

$$\frac{C'}{C} = \frac{e}{R_3} \ll 1$$

### 5.9.2 Condensateur plan

Ce dispositif peut être envisagé comme le cas limite du condensateur sphérique lorsqu'on fait tendre les rayons vers l'infini en maintenant constant l'écart  $e = R_2 - R_1$ . On peut aussi procéder comme suit. Le condensateur plan est constitué de deux armatures planes, l'une confondue avec le plan  $xOy$ , l'autre séparée de la précédente de la distance  $e$  (figure 5.11). Le potentiel doit avoir ces deux plans parallèles pour équipotentielles. La fonction définie par

$$V(z) = Kz + K', \quad \text{pour } 0 \leq z \leq e \quad (5.78)$$

satisfait cette exigence et vérifie l'équation de Laplace. En ajustant convenablement les deux constantes  $K$  et  $K'$ , on obtiendra donc l'unique solution à ce problème. Il vient ainsi

$$V(z) = -(V_A - V_B) \frac{z}{e} + V_A \quad (5.79)$$

(armature  $A$  en  $z = 0$ , armature  $B$  en  $z = e$ ). Le champ est uniforme et a pour expression

$$E_z = \frac{V_A - V_B}{e} \quad (5.80)$$

D'où la densité de charge sur  $A$

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{V_A - V_B}{e} \quad (5.81)$$

La densité sur  $B$  lui est opposée. La charge du condensateur est

$$Q = S\sigma = \epsilon_0 S \frac{V_A - V_B}{e} \quad (5.82)$$

$S$  étant la surface des armatures, supposée néanmoins finie, et la capacité du condensateur est à nouveau

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

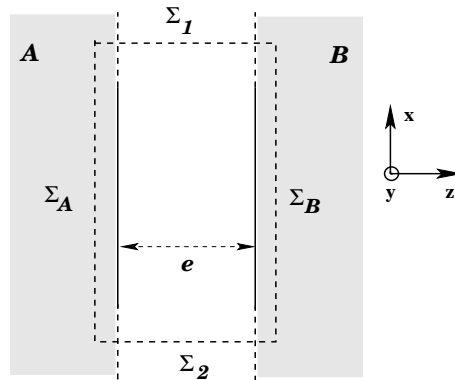


Figure 5.11

On remarquera que la solution (5.78) est aussi la seule qui réponde aux critères de symétrie du problème posé. En effet, pour la configuration proposée, les variables “latérales”  $x$  et  $y$  ne peuvent être des variables sensibles (invariance par translation parallèlement aux armatures) : le potentiel ne peut en dépendre. Dès lors, la forme (5.78) est la seule possible pour un potentiel ne dépendant que de  $z$ .

Accessoirement, on remarquera également que les conditions d’unicité sont réalisées pour un volume *fini* tel que celui représenté à la figure 5.11, délimité par des surfaces planes : l’une,  $\Sigma_A$ , à l’intérieur du conducteur  $A$ , une autre,  $\Sigma_B$ , à l’intérieur du conducteur  $B$  et deux autres surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  orthogonales aux armatures. De par la symétrie, le champ est orienté perpendiculairement aux armatures dans l’espace inter-conducteurs. Comme il est nul dans les conducteurs, le flux du vecteur  $V \vec{E}$  à travers la surface entourant ledit volume est donc strictement nul, et l’on peut identifier l’énergie des portions finies des conducteurs définies par les surfaces  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$ , à l’intégrale de la densité  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$  étendue à ce volume, identification à la base du théorème d’unicité et que l’on vérifie aisément a posteriori. En effet, on a d’une part

$$E_p^{(1)} = \frac{1}{2} (Q'_A V_A + Q'_B V_B) = \frac{1}{2} (V_A - V_B) \sigma \Sigma_A = \frac{\epsilon_0}{2} \Sigma_A \frac{(V_A - V_B)^2}{e}$$

et d'autre part ( $\Sigma_A e$  est l'extension du volume considéré)

$$E_p^{(2)} = \frac{\epsilon_0}{2} \overrightarrow{E}^2 \quad \Sigma_A e = \frac{\epsilon_0}{2} \Sigma_A \frac{V_A - V_B)^2}{e}$$

c'est-à-dire, les mêmes expressions.

### 5.9.3 Condensateur cylindrique

Ce condensateur sera ici modélisé comme suit. L'armature centrale a la forme d'un cylindre plein, d'axe  $z'z$ , de longueur infinie et de rayon  $a$ . L'armature externe, de même axe  $z'z$  et elle aussi de longueur infinie selon cet axe, est le volume compris entre deux surfaces cylindriques d'axe  $z'z$ , la première de rayon  $b$ , la seconde de rayon  $c > b$  (figure 5.12).

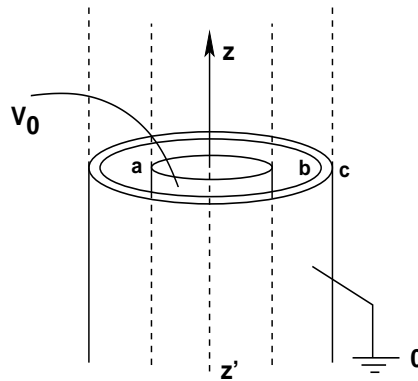


Figure 5.12

L'armature centrale est au potentiel  $V_0$ , l'armature externe est reliée à la masse, de potentiel nul. Le dispositif ayant la symétrie cylindrique autour de  $z'z$  et l'invariance par translation parallèlement à cet axe, le potentiel en un point  $M$  en dehors des armatures ne peut dépendre que de la distance  $\rho$  de ce point à  $z'z$  :  $V(M) = V(\rho)$ . L'équation de Laplace pour ce potentiel, exprimée en coordonnées cylindriques devient

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

et la seule forme possible pour le potentiel est

$$V(\rho) = K \ln \rho + K' \quad (5.83)$$

où  $K$  et  $K'$  sont des constantes à ajuster au moyen de conditions aux limites. Il convient alors de distinguer les deux régions : (1) correspondant à  $a \leq \rho \leq b$  et (2) correspondant à  $\rho \geq c$ , pour lesquelles les valeurs des constantes peuvent être différentes. Pour la région (2), on doit avoir

$$V^{(2)}(\rho) = K_2 \ln \rho + K_2' \quad \text{avec} \quad V^{(2)}(c) = 0, \quad V^{(2)}(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \rho \rightarrow +\infty$$

Les conditions aux limites donnent immédiatement  $K_2 = K_2' = 0$  et conduisent au résultat attendu que le potentiel est nul dans toute la région (2). Dans la région (1), on doit avoir

$$V^{(1)}(\rho) = K_1 \ln \rho + K_1' \quad \text{avec} \quad V^{(1)}(a) = V_0 \quad \text{et} \quad V^{(1)}(b) = 0$$

d'où, tous calculs faits,

$$K_1 = -\frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad K'_1 = -K_1 \ln b$$

et

$$V^{(1)}(\rho) = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5.84)$$

Dans cette région, le champ électrostatique n'a qu'une composante radiale dont l'expression se déduit de (5.84)

$$E_\rho^{(1)} = -\frac{dV^{(1)}}{d\rho} = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho} \quad (5.85)$$

Le théorème de Coulomb permet d'obtenir la densité superficielle de charges sur l'armature centrale :

$$\sigma_a = \epsilon_0 E_\rho^{(1)}(a) = \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{a} \quad (5.86)$$

et sur la surface interne de l'armature externe (attention au sens de la normale) :

$$\sigma_b = -\epsilon_0 E_\rho^{(1)}(b) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{b} \quad (5.87)$$

Bien que dans la présente modélisation les armatures sont supposées de longueur infinie, donnons-leur une longueur finie  $h$ . La charge totale portée par l'armature centrale est

$$Q_a = 2\pi ah\sigma_a = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0 h}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5.88)$$

et celle portée par la surface interne de l'armature externe lui est opposée :

$$Q_b = 2\pi bh\sigma_b = -\frac{2\pi\epsilon_0 V_0 h}{\ln \frac{b}{a}} = -Q_a \quad (5.89)$$

D'après (5.88), la capacité de ce condensateur est

$$C = \frac{Q_a}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5.90)$$

Supposons que  $b$  et  $a$  soient peu différents et posons  $b = a + e$  avec a priori  $e \ll a$ . On a alors  $\ln \frac{b}{a} = \ln(1 + e/a) \simeq e/a$  et l'expression (5.90) devient  $C \simeq 2\pi ah\epsilon_0/e$ , soit, en notant  $S = 2\pi ah$  l'aire de l'une ou l'autre armature,  $C = \epsilon_0 S/e$ , c'est-à-dire, à nouveau la formule (5.32).

La force qui s'exerce sur l'armature centrale  $A$  est donnée par la formule générale

$$\vec{F}_A = \int_{S_A} \frac{\sigma_A^2}{2\epsilon_0} \vec{dS}_A \quad (5.91)$$

où  $S_A$  est la surface délimitant ce conducteur,  $\sigma_A$  la densité superficielle des charges qui y sont réparties, au point courant.

Comme dans la réalité les conducteurs ont une longueur finie, envisageons  $A$  comme un cylindre *plein* de longueur  $L$  ayant pour bases deux disques  $D_1$  et  $D_2$ , perpendiculaires à son axe (voir figure 5.13). L'intégrale (5.91) se décompose alors en trois intégrales : l'une portant sur la surface latérale de ce cylindre, les deux autres portant sur ses disques de base. Dans le cas où les deux armatures sont parfaitement co-axiales, le système est invariant par rotation autour de leur axe commun  $z'z$ , et les densités ne dépendent pas de l'angle azimutal. En conséquence, la contribution de la surface latérale de  $A$  à (5.91) est *nulle*. Explicitant les intégrations à l'aide des coordonnées cylindriques, il vient alors

$$\vec{F}_A = \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \int_0^a \rho d\rho (\sigma_1^2(\rho) - \sigma_2^2(\rho)) \quad (5.92)$$

où  $\sigma_1(\rho)$  et  $\sigma_2(\rho)$  sont les densités superficielles des charges pouvant éventuellement se trouver sur  $D_1$  et sur  $D_2$ , respectivement. L'expression (5.92) montre bien que les efforts s'exerçant sur  $A$  dans cette situation sont dûs à des effets de bord.

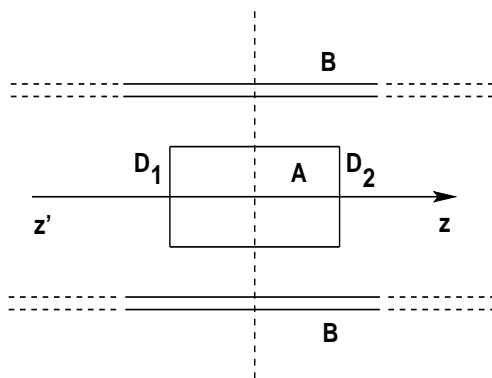


Figure 5.13

Envisageons tout d'abord le cas où la longueur de l'armature externe  $B$  est si grande devant celle de  $A$  qu'on peut la considérer comme infinie,  $A$  se trouvant nettement à l'intérieur de  $B$  (figure 5.13). Le système est alors symétrique par rapport au plan médiateur de  $A$  et l'on a  $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ . Il s'ensuit que la force totale s'exerçant sur  $A$  est nulle, quelle que soit la position de l'armature  $A$  (nettement) à l'intérieur de  $B$  : si  $A$  pouvait se déplacer dans la direction  $z'z$ , elle se trouverait en équilibre indifférent.

Supposons maintenant que les deux armatures ne soient pas totalement imbriquées l'une dans l'autre, mais que le bord  $D_1$  de  $A$  se trouve à l'intérieur de  $B$  à une distance  $h$  d'un bord de  $B$ , l'autre bord  $D_2$  de  $A$  se trouvant à l'extérieur de  $B$  (figure 5.14). Dans cette situation, la symétrie de révolution autour de  $z'z$  subsiste et la force agissant sur  $A$  est encore donnée par (5.92).

Cette fois, on peut s'attendre à ce que  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ , car l'influence entre les deux conducteurs est plus importante dans la zone vers  $D_1$  que dans celle vers  $D_2$ <sup>14</sup>. La force agissant sur  $A$  a donc tendance à faire pénétrer  $A$  plus en avant à l'intérieur de  $B$ .

<sup>14</sup>Ceci est bien conforme au principe de modération : les charges de  $A$  et celles, opposées, de  $B$  viennent se rassembler préférentiellement vers les régions où elles sont les plus proches, dans l'objectif de s'annihiler pour tenter de réduire l'écart de potentiel entre les deux armatures, l'objectif ultime étant de passer d'une armature à



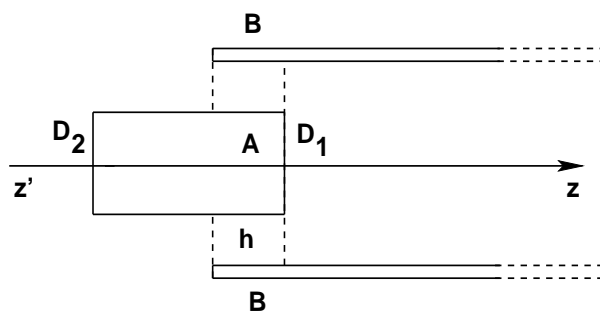


Figure 5.14

Admettons que la partie de  $A$  à l'intérieur de  $B$  puisse constituer avec  $B$  un condensateur dont la capacité est donnée par (5.90) (ce qui revient à supposer que la concentration de charges sur  $A$  est de loin plus importante à l'intérieur qu'à l'extérieur de  $B$ ). L'amplitude de la force pourra ainsi être approximativement évaluée à partir de (5.38) et (5.90)

$$F_A \simeq \frac{V_0^2}{2} \frac{\partial C}{\partial h} = \frac{\pi \epsilon_0 V_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5.93)$$

Considérons enfin la situation où les deux armatures sont bien imbriquées l'une dans l'autre, leurs longueurs étant cette fois *finies*. Le seul cas physiquement envisageable pour lequel la force (5.92) s'annule correspond à l'égalité  $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$  qui n'intervient que lorsque les plans médiateurs respectifs des deux armatures coïncident (figure 5.15). Il est facile de se rendre compte que la force (5.92) joue alors le rôle de force de rappel par rapport à cette configuration qui représente donc un équilibre stable pour les possibles déplacements de  $A$  le long de  $z'z$ .

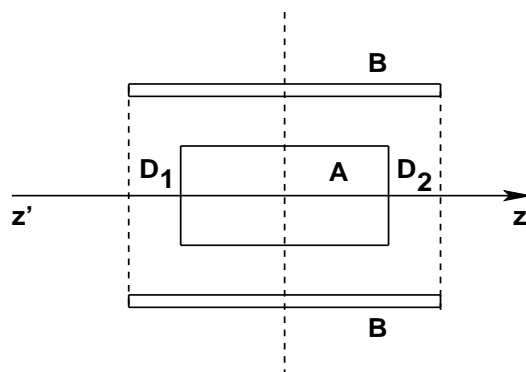


Figure 5.15

Le lecteur perspicace aura déjà noté l'incompatibilité du résultat *fini* (5.93) avec un modèle où le conducteur central serait assimilé à une surface strictement cylindrique, c'est-à-dire, non fermée par deux disques. En effet, de par la symétrie cylindrique, ce modèle conduirait à une force nulle. En réalité, même si le conducteur central est un cylindre creux, il n'en a pas moins une certaine épaisseur et les surfaces limites sont alors des couronnes circulaires où les charges viennent s'accumuler du fait du pouvoir des pointes (la courbure des surfaces y étant plus importante). Ces accumulations de charges peuvent être amoindries par l'utilisation *d'anneaux de garde*.

l'autre pour établir un courant, celui-ci étant toutefois impossible à réaliser tant que le milieu inter-conducteur en interdit strictement le passage.

♠ Le cas où les deux armatures n'ont pas le même axe, plus difficile à résoudre, fait appel à la méthode des images électrostatiques qui se révèle bien adaptée à son étude.

Envisageons tout d'abord la distribution de charges constituée des deux distributions linéiques suivantes : l'une est une répartition uniforme de charges de densité linéique constante  $\lambda$  le long d'un fil rectiligne infini  $\Delta$  parallèle à  $z'z$ ; l'autre est aussi une répartition uniforme de charges le long d'un autre fil rectiligne infini  $\Delta'$  parallèle à  $z'z$ , avec la densité linéique constante  $-\lambda$  (figure 5.16). La distance entre ces deux fils est  $2a$ . Nous noterons  $A$  et  $B$  les points intersections respectifs de  $\Delta$  et de  $\Delta'$  avec un plan particulier (mais choisi arbitrairement), perpendiculaire aux deux fils, que nous prendrons pour plan  $xOy$ , tout en plaçant  $O$  au milieu de  $AB$ , et en orientant l'axe  $Ox$  parallèlement au vecteur  $\vec{BA}$ . Dans le repère  $(O, x, y, z)$  ainsi défini, les coordonnées cartésiennes de  $A$  et de  $B$  sont  $(a, 0, 0)$  et  $(-a, 0, 0)$  respectivement.

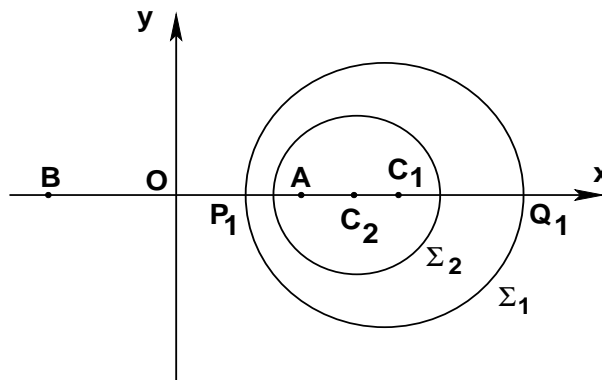


Figure 5.16

Cette distribution possédant l'invariance par translation parallèlement à  $z'z$ , il suffit d'étudier le potentiel et le champ électrostatiques dans le plan  $xOy$ . On sait qu'en un point  $M$  de ce plan, le potentiel de  $\Delta$  et le potentiel de  $\Delta'$  ont pour expressions

$$V_{\Delta} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln D + \text{constante} \quad \text{et} \quad V_{\Delta'} = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln D' + \text{constante}$$

respectivement, avec  $D = AM$  et  $D' = BM$ . Le potentiel total de la distribution considérée est donc

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D'}{D} + V_0 \tag{5.94}$$

$V_0$  étant une constante. Les surfaces équipotentielles sont définies par  $D'/D = \text{constante} = k$ . Cette équation est semblable à (5.66) dont la résolution passe par l'introduction des barycentres  $P$  et  $Q$  des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs  $k$  et  $1$  pour le premier,  $-k$  et  $1$  pour le second :

$$\vec{PB} + k \vec{PA} = \vec{0} \quad , \quad \vec{QB} - k \vec{QA} = \vec{0}$$

L'équipotentielle cherchée, de potentiel

$$V = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln k$$

est un cylindre d'axe parallèle à  $z'z$ , dont la trace dans le plan  $xOy$  est le cercle de diamètre  $PQ$ . Le centre  $C$  et le rayon  $R$  de ce cercle sont définis par

$$\vec{OC} = a \frac{\vec{e}_x}{k^2 - 1} \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, \quad R = \frac{2ka}{|k^2 - 1|} \quad (5.95)$$

Envisageons les équipotentiels pour lesquelles on a  $k > 1$ . Leurs centres  $C$  sont situés sur l'axe  $Ox$ , au-delà du point  $A$ . D'après

$$\vec{OP} = a \frac{\vec{e}_x}{k + 1} \frac{k - 1}{k + 1}, \quad \vec{OQ} = a \frac{\vec{e}_x}{k - 1} \frac{k + 1}{k - 1}$$

le point  $P$  se trouve entre  $O$  et  $A$ , le point  $Q$  est bien entendu au-delà de  $C$ . On note que pour  $k \rightarrow 1$ ,  $C$  est rejeté à l'infini, le point  $P$  se rapproche de  $O$  : on retrouve le fait que le plan médiateur  $zOy$ , correspondant à  $D = D'$  est aussi une équipotentielle. Lorsque  $k \gg 1$ ,  $C$  vient se confondre avec  $A$ , le rayon de l'équipotentielle devient très petit. On retrouve aussi le fait qu'à proximité immédiate du fil  $\Delta$ , l'action de celui-ci est prépondérante et les équipotentiels sont approximativement des cylindres d'axe  $\Delta$ .

Considérons deux équipotentiels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  correspondant, respectivement, aux valeurs  $k_1$  et  $k_2$  du paramètre  $k$ , avec  $k_2 > k_1$ . Dans le plan  $xOy$ ,  $C_2$  est plus proche de  $A$  que ne l'est  $C_1$ . On a

$$\vec{C_2C_1} = \ell \frac{\vec{e}_x}{k_1} \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{2a(k_2^2 - k_1^2)}{(k_2^2 - 1)(k_1^2)} = \frac{R_1}{k_1} - \frac{R_2}{k_2} \quad (5.96)$$

Dans la région entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , le potentiel (5.94) satisfait l'équation de Laplace et prend les valeurs

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln k_1 + V_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln k_2 + V_0$$

sur les surfaces cylindriques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , respectivement.

♣ Supposons maintenant que  $\Sigma_2$  soit la surface d'un conducteur cylindrique  $C_2$ , de rayon  $R_2$ , d'axe parallèle à  $z'z$  et passant par  $C_2$ , et que  $\Sigma_1$  soit la surface interne d'un autre conducteur cylindrique  $C_1$  entourant le précédent, dont le rayon est  $R_1 > R_2$  et dont l'axe parallèle à  $z'z$  passe par  $C_1$ . Le premier conducteur est au potentiel  $V_2$ , le second est au potentiel  $V_1$ .

D'après le théorème d'unicité, le potentiel (5.94) est le potentiel dans la région entre les deux conducteurs. Pour un point  $M$  de cette région, l'ensemble des deux conducteurs est équivalent aux deux fils  $\Delta$  et  $\Delta'$ , ce qui en simplifie l'étude.

Bien qu'ils soient supposés de longueur infinie, donnons aux deux conducteurs une longueur finie  $h$ . La charge totale portée par l'armature centrale  $C_2$  de ce condensateur est, bien entendu,  $Q = \lambda h$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'envisager le flux du champ électrique à travers  $\Sigma_2$  et d'appliquer le théorème de Gauss, en modélisant les deux conducteurs par les deux fils. La charge portée par  $\Sigma_1$  est bien entendu égale à  $-Q$ . Or

$$V_2 - V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{k_2}{k_1} \quad (5.97)$$

On en déduit la capacité de ce nouveau condensateur cylindrique :

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{k_2}{k_1}} \quad (5.98)$$

En fait, dans le problème initial des deux conducteurs qui ne sont plus coaxiaux, ce sont plutôt leurs paramètres géométriques qui sont fixés, à savoir, leurs rayons  $R_1$  et  $R_2$  et leur séparation  $\ell = C_1 C_2$ . Il faut donc réexprimer  $a$ ,  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de ces données. En intermédiaire, posons

$$k_1 = e^{\theta_1} \quad , \quad k_2 = e^{\theta_2} \quad \text{avec} \quad \theta_1 > 0 \quad , \quad \theta_2 > 0$$

Il vient

$$a = R_1 \frac{k_1^2 - 1}{2k_1} = R_2 \frac{k_2^2 - 1}{2k_2} = R_1 \sinh \theta_1 = R_2 \sinh \theta_2$$

puis

$$\ell = R_1 e^{-\theta_1} - R_2 e^{-\theta_2} = R_1 \cosh \theta_1 - R_2 \cosh \theta_2$$

De ces relations on tire finalement<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \cosh \theta_1 &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + \ell^2}{2R_2 \ell} \quad , \quad \cosh \theta_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2 - \ell^2}{2R_2 \ell} \\ a &= \frac{\Lambda^{1/2}(R_1^2, R_2^2, \ell^2)}{2\ell} \quad , \quad \text{avec} \quad \Lambda(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2 - 2rs - 2st - 2rt \end{aligned} \quad (5.99)$$

La densité  $\lambda$  est ensuite déduite de (5.97), connaissant  $k_1$  et  $k_2$  :

$$\begin{aligned} k_1 &= \cosh \theta_1 + \sinh \theta_1 = \frac{1}{2R_1 \ell} \left( \Lambda^{1/2} + R_1^2 - R_2^2 + \ell^2 \right) \\ k_2 &= \cosh \theta_2 + \sinh \theta_2 = \frac{1}{2R_2 \ell} \left( \Lambda^{1/2} + R_1^2 - R_2^2 - \ell^2 \right) \end{aligned} \quad (5.100)$$

d'où

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{R_1}{R_2} \frac{\Lambda^{1/2} + R_1^2 - R_2^2 - \ell^2}{\Lambda^{1/2} + R_1^2 - R_2^2 + \ell^2} \quad (5.101)$$

Pour des conducteurs coaxiaux,  $\ell = 0$ , et l'on obtient  $k_2/k_1 = R_1/R_2$ . La capacité (5.98) reprend alors l'expression (5.90), avec  $b = R_1$ ,  $a = R_2$ .

Supposons  $\ell$  petit devant la différence  $R_1 - R_2$ . Le développement limité de (5.101) donne

$$\frac{k_2}{k_1} \simeq \frac{R_1}{R_2} \left( 1 - \frac{\ell^2}{R_1^2 - R_2^2} \right)$$

D'où l'expression approchée de la capacité

$$C \simeq \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left( 1 + \frac{\ell^2}{(R_1^2 - R_2^2) \ln \frac{R_1}{R_2}} \right) \quad (5.102)$$

montrant que le fait que les deux conducteurs soient légèrement désaxés provoque une variation de la capacité qui n'est qu'un effet du second ordre suivant l'écart  $\ell$ .

Il faut noter que la distribution des charges sur les deux conducteurs désaxés n'est plus uniforme. La densité superficielle de charges sur  $\sigma_2$  s'obtient en appliquant le théorème de Coulomb :

<sup>15</sup>A noter que l'on a  $P_1 P_2 = \delta = R_1 - R_2 - \ell > 0$ .

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \vec{n}_2 \cdot \vec{E}(M_2) \quad (5.103)$$

$\vec{n}_2$  étant la normale (sortante) à  $\Sigma_2$  en un point  $M_2$  de cette surface. On a

$$\vec{E}(M_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{AM}_2}{AM_2^2} - \frac{\vec{BM}_2}{BM_2^2} \right)$$

et comme  $BM_2 = k_2 AM_2$  sur  $\Sigma_2$ ,

$$\vec{E}(M_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 BM_2^2} \left( k_2^2 \vec{AM}_2 - \vec{BM}_2 \right)$$

Or, il est facile de montrer que  $k_2^2 \vec{AC}_2 - \vec{BC}_2 = \vec{0}$ . D'où  $k_2^2 \vec{AM}_2 - \vec{BM}_2 = (k_2^2 - 1) \vec{CM}_2 = (k_2^2 - 1) R_2 \vec{n}_2$ , et

$$\vec{E}(M_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 BM_2^2} (2k_2 a \vec{n}_2)$$

La densité superficielle de charges sur  $\Sigma_2$  est donc

$$\sigma_2 = \frac{\lambda k_2 a}{\pi BM_2^2} \quad (5.104)$$

avec  $BM_2^2 = (x+a)^2 + y^2$ . Elle dépend de la position de  $M_2$  : la répartition des charges n'est pas uniforme<sup>16</sup>.

Enfin, il est intéressant de calculer la force d'interaction qui s'exerce sur les deux conducteurs non co-axiaux. Celle-ci se calcule aisément à l'aide des images : c'est la force d'attraction qui s'exerce entre les deux fils  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Par unité de longueur suivant  $z'z$ , la force qui s'exerce sur  $\mathcal{C}_2$  est ainsi<sup>17</sup>

$$\vec{f} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{2a} \quad (5.105)$$

Lorsque les deux conducteurs sont co-axiaux, leur force d'interaction totale est nulle, ce qui correspond à une situation d'équilibre. Cependant, cette force devient non nulle et attractive lorsque les conducteurs n'ont plus le même axe, ce qui dénote le caractère instable dudit équilibre.

#### 5.9.4 Note sur la force électrostatique agissant sur un conducteur

Le calcul de la force agissant sur un conducteur  $A$  au moyen de la formule (5.91) requiert la connaissance de la densité superficielle de charges se trouvant sur la surface de ce conducteur, connaissance qui n'est accessible qu'une fois résolu le problème de l'équilibre de tous les conducteurs en présence. Comme nous le montrons ci-après, il est cependant possible de donner de cette force une expression générale ne faisant pas apparaître cette densité explicitement.

<sup>16</sup>Exercice : vérifier que l'intégration de  $\sigma_2$  sur la surface du conducteur représenté par  $\Sigma_2$  est bien égale à  $\lambda h$  ; on donne  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$  si  $|\alpha| < 1$ .

<sup>17</sup>Exercice : vérifier l'expression de la force (5.105) en intégrant directement sur toute la surface de  $\mathcal{C}_2$  la force  $d\vec{F}_2 = \frac{\sigma_2^2}{2\epsilon_0} \vec{n}_2 d\Sigma_2$  qui s'exerce sur un élément de charge de ce conducteur ; on donne  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos \varphi}{(1 + \alpha \cos \varphi)^2} = \frac{-2\pi\alpha}{(1 - \alpha^2)^{3/2}}$  si  $|\alpha| < 1$

Soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire constant, et  $\vec{E}(M)$  le champ électrostatique en un point  $M$ . Formons le vecteur

$$\vec{W} = (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{u} \frac{E^2}{2} \quad (5.106)$$

et calculons sa divergence, en prenant pour simplifier  $\vec{u} \equiv \vec{e}_z$ . Il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{W} &= \operatorname{div}(E_z \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial z}(E^2/2) \\ &= E_z \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})E_z - E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial z} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Or, le rotationnel du champ électrostatique étant nul, on a

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

ce qui permet de transformer le dernier terme de (5.107) :

$$E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} = (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})E_z$$

qui annule donc le second terme de (5.107). On obtient finalement

$$\operatorname{div} \vec{W} = E_z \operatorname{div} \vec{E} \equiv (\vec{u} \cdot \vec{E}) \operatorname{div} \vec{E} \quad (5.108)$$

Dans l'espace inter-conducteur,  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , et par conséquent  $\operatorname{div} \vec{W} = 0$  : à l'extérieur des conducteurs,  $\vec{W}$  est donc à flux conservatif. Envisageons alors une surface quelconque  $\Sigma$  entourant complètement le conducteur  $A$ , *sans entourer les autres conducteurs*. D'après ce qui précède, le flux sortant de  $\vec{W}$  à travers  $\Sigma$  est égal à son flux sortant à travers la surface  $S_A$  de  $A$  (approchée depuis l'extérieur de  $A$ ). Or, en un point courant de  $S_A$ , le champ vaut  $\frac{\sigma_A}{\epsilon_0} \vec{n}_A$ ,  $\sigma_A$  et  $\vec{n}_A$  étant, respectivement, la densité superficielle de charges et la normale à  $S_A$  en ce point. On a alors

$$\vec{W} \equiv \frac{\sigma_A^2}{2\epsilon_0^2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_A) \quad (5.109)$$

D'où l'équation

$$\int_{S_A} \frac{\sigma_A^2}{2\epsilon_0} (\vec{u} \cdot \vec{n}_A) dS_A \equiv \epsilon_0 \int_{\Sigma} \left\{ (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{u} \frac{E^2}{2} \right\} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (5.110)$$

dont le premier membre n'est autre que la composante suivant  $\vec{u}$  de la force (5.91). On en déduit la relation

$$\vec{F}_A = \epsilon_0 \int_{\Sigma} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{n} \frac{E^2}{2} \right\} d\Sigma \quad (5.111)$$

Or, à l'extérieur du conducteur, le champ est le même que celui créé par les éventuelles images électrostatiques des conducteurs en influence. On en conclut que la force agissant sur le conducteur est la même que la force exercée sur son image par les images des autres conducteurs. Cela justifie notamment la méthode utilisée pour calculer la force (5.105).

## 5.9.5 Condensateur sphérique à trois armatures

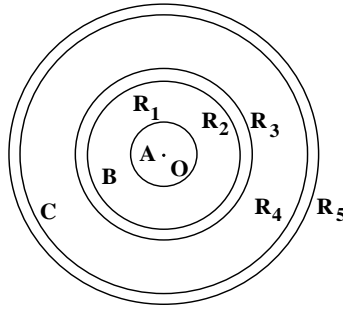


Figure 5.17

Un condensateur comporte trois armatures sphériques concentriques, de centre  $O$ . La première, l'armature centrale  $A$ , est une boule conductrice de rayon  $R_1$ ; la seconde,  $B$ , entoure  $A$  : c'est une couronne sphérique de rayon intérieur  $R_2 > R_1$  et de rayon extérieur  $R_3$ ; la troisième,  $C$ , entoure les précédentes : c'est encore une couronne sphérique de rayon intérieur  $R_4 > R_3$  et de rayon extérieur  $R_5$  (figure 5.17). Les potentiels de  $A$  et  $C$  sont fixés respectivement à  $V_A$  et  $V_C$  au moyen de sources annexes. Par contre,  $B$  est isolé : sa charge totale est nulle.

Ce système de conducteurs possède la symétrie sphérique autour du centre commun  $O$ , et la résolution du problème de son équilibre peut être simplement calquée sur celle du condensateur sphérique du paragraphe (5.9.1).

- Commençons par la région (3) définie par  $OM = r > R_5$ . Le potentiel y a pour expression

$$V_3(r) = \frac{K_3}{r} + K'_3$$

Les conditions  $V_3 \rightarrow 0$  pour  $r \rightarrow +\infty$  et  $V_3 = V_C$  pour  $r = R_5$  donnent respectivement  $K'_3 = 0$  et  $K_3 = V_C R_5$ . D'où, finalement,

$$V_3(r) = V_C \frac{R_5}{r} \quad (5.112)$$

- Dans la seconde région (2) définie par  $R_3 \leq r \leq R_4$ , le potentiel est encore de la forme

$$V_2(r) = \frac{K_2}{r} + K'_2$$

avec la contrainte  $V_2 = V_C$  pour  $r = R_4$ . Celle-ci permet d'exprimer  $K'_2$  :

$$K'_2 = V_C - \frac{K_2}{R_4}$$

d'où

$$V_2(r) = K_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_4} \right) + V_C \quad (5.113)$$

Le potentiel de  $B$  n'est pas fixé a priori. L'équation (5.113) appliquée au cas  $r = R_3$  en donne l'expression

$$V_B = K_2 \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + V_C \quad (5.114)$$

- Dans la région (1) définie par  $R_1 \leq r \leq R_2$ , le potentiel s'écrit

$$V_1(r) = \frac{K_1}{r} + K'_1$$

avec la condition  $V_1 = V_A$  pour  $r = R_1$ . En procédant comme précédemment, on en déduit

$$V_1(r) = K_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + V_A \quad (5.115)$$

En posant  $r = R_2$ , on trouve une seconde expression de  $V_B$  :

$$V_B = K_1 \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + V_A \quad (5.116)$$

Le champ électrostatique est radial (au sens des coordonnées sphériques centrées sur  $O$ ) et sa composante radiale a pour expression

$$E_1(r) = \frac{K_1}{r^2} \quad , \quad E_2(r) = \frac{K_2}{r^2} \quad , \quad E_3(r) = \frac{V_C R_5}{r^2}$$

dans les régions (1), (2) et (3), respectivement. Les flux de ce champ sortant à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  est égal à

$$4\pi R^2 E_1(R) = 4\pi K_1 \quad , \quad 4\pi R^2 E_2(R) = 4\pi K_2$$

pour  $R_1 \leq R \leq R_2$  et  $R_3 \leq R \leq R_4$ , respectivement. On peut maintenant exprimer le fait que  $B$  soit isolé en disant que ces flux doivent être égaux. En effet, d'après le théorème de Gauss, le premier vaut  $Q_A/\epsilon_0$  où  $Q_A$  est la charge portée par  $A$ . Mais comme la charge de  $B$  est nulle, cette valeur est aussi celle du second flux. On en déduit

$$K_2 = K_1 = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0}$$

Egalant les deux expressions (5.114) et (5.116), on trouve alors

$$V_A - V_C = K_1 \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Posons

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad , \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_3 R_4}{R_4 - R_3}$$

Ce sont les capacités des condensateurs formés par  $A$  et  $B$  d'une part, soit  $AB$ , et par  $B$  et  $C$  d'autre part, soit  $BC$ . L'équation précédente conduit alors à

$$V_A - V_C = Q_A \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (5.117)$$

Ce système de conducteurs, qui est en fait un assemblage de deux condensateurs *en série*  $AB$  et  $BC$ , équivaut à un condensateur unique dont la capacité  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (5.118)$$

soit

$$\mathcal{C} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (5.119)$$



Le potentiel de  $B$  s'en déduit simplement :

$$V_B = V_A - \frac{Q_A}{C_1} = V_A - (V_A - V_C) \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (5.120)$$

### 5.9.6 Associations de condensateurs

Dans les circuits de l'Electrocinétique, un condensateur est représenté par le symbole de la figure 5.18<sup>18</sup>.

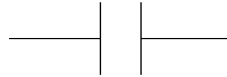


Figure 5.18

#### ♣ Association en série

Une telle association a été rencontrée au paragraphe (5.9.5) et est représentée schématiquement à la figure 5.19. Nous en donnons ici une formulation ici générale.

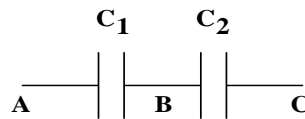


Figure 5.19

Comme le montre la figure 5.20, la partie encadrée en pointillés de cet élément de circuit constitue un conducteur isolé  $B$ , de charge totale nulle. Sa face  $B_1$  est supposée être en influence totale avec la face présentée par le conducteur  $A$ . Si cette dernière porte la charge  $Q$ ,  $B_1$  doit porter la charge  $-Q$  et l'on a

$$Q = C_1(V_A - V_B) \quad (5.121)$$

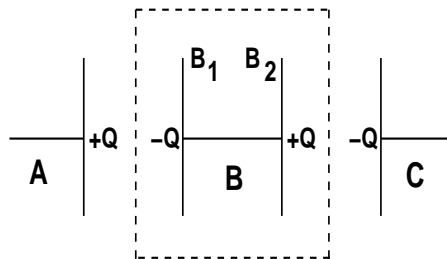


Figure 5.20

Mais puisque  $B$  est isolé, sa face  $B_2$  doit porter la charge complémentaire  $+Q$ . Comme  $B_2$  est supposée en influence totale avec la face présentée par la conducteur  $C$ , celle-ci doit porter la charge  $-Q$  et l'on a aussi

<sup>18</sup>Il représente manifestement un condensateur plan. Peut-être qu'ainsi peut-on se rappeler que l'expression de la capacité d'un condensateur est pratiquement la même que celle d'un condensateur plan.

$$Q = C_2(V_B - V_C) \quad (5.122)$$

De (5.121) et (5.122) on tire

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) = V_A - V_C = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (5.123)$$

et l'on trouve que ladite association se comporte comme un condensateur unique dont la capacité  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (5.124)$$

soit

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (5.125)$$

Si l'on a affaire à une association en série de  $N$  condensateurs de capacités  $C_1, C_2, \dots, C_N$ , on généralise aisément la formule (5.124) : la capacité équivalente  $\mathcal{C}$  de l'association se calcule au moyen de la formule

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \quad (5.126)$$

On notera que la capacité totale est alors *plus petite* que la plus petite des capacités en série.

♣ Association en parallèle

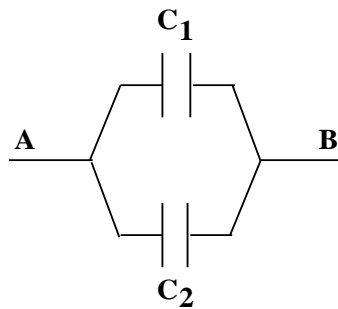


Figure 5.21

Une telle association de deux condensateurs est schématisée à la figure 5.21. Cette fois, nous avons affaire à seulement deux conducteurs  $A$  et  $B$  en influence totale, encadrés en pointillés dans la figure 5.22. Cette influence s'effectue sur plusieurs surfaces :  $A_1$  et  $B_1$  d'une part,  $A_2$  et  $B_2$  d'autre part. Si  $Q_1$  est la charge portée par  $A_1$ ,  $B_1$  doit porter la charge  $-Q_1$ , et l'on a

$$Q_1 = C_1(V_A - V_B) \quad (5.127)$$

De même, si  $A_2$  porte la charge  $Q_2$ ,  $B_2$  doit porter la charge  $-Q_2$  et l'on a

$$Q_2 = C_2(V_A - V_B) \quad (5.128)$$

La charge totale portée par  $A$  est  $Q = Q_1 + Q_2$ , d'où

$$Q = (C_1 + C_2) (V_A - V_B) \quad (5.129)$$

relation qui montre que l'ensemble se comporte comme un condensateur unique dont la capacité  $\mathcal{C}$  est

$$\mathcal{C} = C_1 + C_2 \quad (5.130)$$

Cette formule se généralise immédiatement à une association de  $N$  condensateurs de capacités  $C_1, C_2, \dots, C_N$ , montés en parallèle : la capacité équivalente de l'ensemble est alors la somme de toutes les capacités :

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^N C_k \quad (5.131)$$

et est donc *plus grande* que la plus grande de toutes les capacités en parallèle.

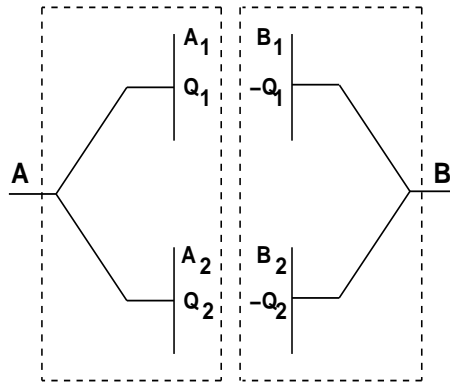


Figure 5.22