

# Chapitre 6

## Electrostatique des diélectriques

Un diélectrique parfait est un milieu isolant ne comportant aucune charge mobile. Bien que neutre à l'échelle macroscopique, ce milieu possède néanmoins des propriétés électriques qui se révèlent lorsqu'on le soumet à un champ électrique. Celles-ci sont bien sûr imputables aux porteurs de charges microscopiques qui, liés entre eux, forment la substance du milieu et sur lesquels un champ électrique peut agir.

Prenons l'exemple d'un atome. Sa charge positive, due aux protons, est concentrée dans son noyau que l'on peut considérer ici comme ponctuel. La charge négative, qui compense globalement celle des protons, est due aux électrons répartis spatialement autour du noyau et ce, de façon uniforme lorsque l'atome est dans son état fondamental. Dans cet état, le moment dipolaire électrique de l'atome est nul. L'action d'un champ électrique sur ces charges se traduit par des déplacements des électrons d'une part, et du noyau d'autre part, en sens opposés. Il en résulte une nouvelle répartition des charges négatives, qui restent liées au noyau, et pour laquelle l'atome acquiert un moment dipolaire non nul. Les moments dipolaires ainsi induits dans la matière sont susceptibles de produire à leur tour un champ électromagnétique qui va profondément modifier la structure du champ en tout point.

### 6.1 Champ microscopique, champ macroscopique

#### 6.1.1 Introduction

La matière est constituée de groupements stables, atomes, molécules ou ions. Dans les solides, ils occupent en moyenne des positions relatives fixes<sup>1</sup>. Dans les liquides et dans les gaz, ils se meuvent continuellement les uns par rapport aux autres. L'ensemble des charges contenues dans tous ces agrégats produit un champ électrique  $\vec{E}_{\text{micro}}$  qui est le véritable champ électrique à l'échelle microscopique. Sur des distances atomiques ou inter-atomiques, ce champ varie dans des proportions considérables, aussi bien en amplitude qu'en orientation. Pour donner une idée des ordres de grandeur élevés, on peut noter qu'à une distance de 1 Å, un proton produit un champ électrique de l'ordre de  $10^{11}$  V/m. Ce champ est vite compensé par celui du cortège électronique de l'atome dès que l'on franchit les limites de celui-ci.

Ce champ microscopique, impossible à mesurer, nous est inaccessible. En revanche, nous pouvons en percevoir les effets sur des distances *mésoscopiques*, de domaine intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique. Ceci nous amène à définir, comme l'a fait H.A. Lorentz (1902), une *moyenne spatiale* du champ microscopique sur un domaine de dimensions mésoscopiques. Cette procédure permet de *niveler* le champ microscopique en le débarassant de ses énormes fluctuations spatiales. Nous admettrons ici que, pour toute grandeur  $G$ , sa valeur  $g_{\text{macro}}(M)$  observée

<sup>1</sup>Elles seraient bien définies en l'absence d'agitation thermique.

à l'échelle *macroscopique* en un point  $M$  s'obtient en moyennant sa valeur microscopique vraie  $g_{\text{micro}}(P)$  sur tous les points  $P$  à l'intérieur d'une boule de centre  $M$  et de rayon  $R$

$$g_{\text{macro}}(M) = \langle g_{\text{micro}} \rangle (M) = \frac{1}{\tau} \int_{B(M,R)} g_{\text{micro}}(P) d\tau(P), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (6.1)$$

Cette moyenne dépend généralement de la position du point  $M$ . Le champ électrique *macroscopique* sera donc défini comme

$$\vec{E}_{\text{macro}}(M) = \langle \vec{E}_{\text{micro}} \rangle (M) = \frac{1}{\tau} \int_{B(M,R)} \vec{E}_{\text{micro}}(P) d\tau(P) \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Champ macroscopique en un point à l'extérieur du diélectrique

En un point  $P$  extérieur au milieu diélectrique, le potentiel électrique vrai créé par toutes les charges du milieu est donné par la formule usuelle

$$V_{\text{micro}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{P_i P}$$

Sa valeur moyenne en un point  $M$  extérieur au diélectrique est

$$V_{\text{macro}}(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} \frac{q_i}{\tau} \frac{1}{P_i P} d\tau(P) \quad (6.3)$$

Formellement, l'expression

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} \frac{q_i}{\tau} \frac{1}{P_i P} d\tau(P)$$

peut être considérée comme le potentiel électrique créé au point  $P_i$  par une distribution volumique de charges distribuées uniformément dans la boule  $B(M, R)$  avec la densité  $q_i/\tau$ . Le point  $P_i$  étant par hypothèse à l'extérieur de cette boule, ce potentiel est celui d'une charge ponctuelle de valeur  $q_i$  située au point  $M$ ! On obtient donc

$$V_{\text{macro}}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{P_i M} \equiv V_{\text{micro}}(M) \quad (6.4)$$

En tout point extérieur, les valeurs "microscopique" et "macroscopique" du champ coïncident. Ce résultat était prévisible car, en dehors du milieu, le champ vrai n'a plus les fluctuations intenses qu'il subit à l'intérieur.

Découpons ensuite le diélectrique en domaines  $\Delta_k$  de dimensions mésoscopiques et tels que la charge totale contenue dans chacun soit nulle :

$$Q_k = \sum_{i_k} q_{i_k} = 0 \quad (6.5)$$

Nous les supposons tous de même extension  $\Delta$  et noterons  $A_k$  le point central du domaine  $\Delta_k$ . On peut écrire

$$V_{\text{macro}}(M) = \sum_k V_k(M), \quad \text{avec} \quad 4\pi\epsilon_0 V_k(M) = \sum_{i_k} \frac{q_{i_k}}{M P_{i_k}}$$

$V_k(M)$  étant le potentiel créé en  $M$  par les charges du domaine  $\Delta_k$ . Puisque  $M$  est à l'extérieur du diélectrique, on a  $A_k M \gg A_k P_{i_k}$ , ce qui incite à effectuer un développement du potentiel  $V_k$  suivant les puissances de  $A_k P_{i_k} / A_k M$ , limité au premier ordre non nul. On a

$$V_k(M) \approx \frac{Q_k}{A_k M} + \frac{\overrightarrow{A_k M}}{A_k M^3} \sum_{i_k} q_{i_k} \overrightarrow{A_k P_{i_k}}$$

Or,  $Q_k = 0$  et

$$\overrightarrow{p_k} = \sum_{i_k} q_{i_k} \overrightarrow{A_k P_{i_k}} \quad (6.6)$$

est le moment dipolaire électrique du domaine  $\Delta_k$ . On obtient ainsi

$$V_{\text{macro}}(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{\overrightarrow{A_k M}}{A_k M^3} \cdot \overrightarrow{p_k} \quad (6.7)$$

On supposera alors que l'extension  $\Delta$  est suffisamment petite pour que la somme ci-dessus puisse être assimilée à une intégrale sur tout le volume  $\mathcal{V}$  du diélectrique. Dans ce passage du discontinu au continu, nous définirons le moment dipolaire *par unité de volume* comme

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(A_k) = \frac{1}{\Delta} \overrightarrow{p_k} \quad (6.8)$$

et assimilerons  $\Delta$  à l'élément de volume  $d\mathcal{V}$ . D'où l'expression finale du potentiel :

$$V_{\text{macro}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{\mathcal{P}}(A) \cdot \overrightarrow{AM}}{AM^3} d\mathcal{V}(A) \quad (6.9)$$

Le moment dipolaire par unité de volume est aussi appelé *polarisation*. On voit ainsi qu'en tout point à l'extérieur du diélectrique, là où le champ ne présente pas de singularité, la description macroscopique des propriétés électriques du milieu diélectrique en terme de polarisation est suffisante<sup>2</sup>.

Notons que le moment (6.6) peut encore être exprimé de la manière suivante. Le domaine  $\Delta_k$  contient un certain nombre  $N_r^k$  de porteurs de même espèce, de charge  $q_r$ . Leur contribution au moment dipolaire est

$$(\overrightarrow{p}_k)_r = q_r \sum_{i_r} \overrightarrow{A_k P_{i_r}} = q_r N_r^k \frac{1}{N_r^k} \sum_{i_r} \overrightarrow{A_k P_{i_r}} = q_r N_r^k \overrightarrow{d}_r$$

où

$$\overrightarrow{d}_r = \frac{1}{N_r^k} \sum_{i_r} \overrightarrow{A_k P_{i_r}}$$

est, dans le domaine  $\Delta_k$ , la valeur moyenne du déplacement des porteurs de charge d'espèce  $r$ . Soit  $n_r$  le nombre de ces porteurs, par unité de volume<sup>3</sup>. On a donc  $N_r^k = n_r(A_k)\Delta$ . D'après (6.8), on voit que la polarisation du milieu peut aussi s'exprimer comme

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(A) = \sum_r q_r n_r(A) \overrightarrow{d}_r(A) \quad (6.10)$$

<sup>2</sup>On admet ici que les termes d'ordres supérieurs dans le développement du potentiel, qui font appel à des moments multipolaires, sont négligeables.

<sup>3</sup>Elle peut varier de point en point.

### 6.1.3 Distributions de charges équivalentes à la polarisation

L'expression du potentiel trouvée plus haut peut être transformée pour obtenir une autre expression montrant que la polarisation du diélectrique est équivalente à une distribution macroscopique de charges, appelées *charges de polarisation*. La transformation repose sur l'identité

$$\frac{\vec{\mathcal{P}}(A) \cdot \vec{AM}}{AM^3} = \operatorname{div}_A \frac{\vec{\mathcal{P}}(A)}{AM} - \frac{1}{AM} \operatorname{div}_A \vec{\mathcal{P}}(A) \quad (6.11)$$

où les dérivées sont effectuées par rapport aux coordonnées du point courant  $A$ . Utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, il vient ainsi

$$V_{\text{macro}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_p(A)}{AM} d\mathcal{V}(A) + \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_p(A)}{AM} d\mathcal{S}(A) \right) \quad (6.12)$$

$\mathcal{S}$  étant la surface (fermée) délimitant l'échantillon de diélectrique, et où l'on a posé

$$\rho_p(A) = -\operatorname{div}_A \vec{\mathcal{P}}(A), \quad \sigma_p(A) = \vec{n}(A) \cdot \vec{\mathcal{P}}(A) \quad (6.13)$$

$\vec{n}(A)$  étant, au point courant  $A$  de la surface du diélectrique, le vecteur unitaire de la normale *sortante*.

Le calcul précédent pourrait sembler n'être qu'un artifice mathématique, et les densités équivalentes introduites n'être que "fictives". On peut cependant apporter à celles-ci une interprétation physique. En effet, les charges de polarisation, de densités  $\rho_p$  et  $\sigma_p$ , ne sont pas seulement des équivalents mathématiques de la polarisation, mais correspondent à des *excédents locaux*, bien réels, de charges liées, dus à la polarisation du milieu. Pour le montrer, considérons dans le milieu un certain volume  $\mathcal{V}_0$ , délimité par une surface  $\mathcal{S}_0$ . La polarisation du milieu est le plus souvent due à un déplacement des charges consécutif à l'action d'un champ électrique extérieur. A ce déplacement correspond un flux de charges sortant à travers  $\mathcal{S}_0$ . En particulier, ceux des porteurs d'espèce  $r$ , de charge  $q_r$ , en densité numérique  $n_r$  et de déplacement moyen  $\vec{d}_r$ , qui auront traversé un élément de surface  $d\vec{\mathcal{S}}_0$  étaient initialement contenus à l'intérieur de  $\mathcal{V}_0$ , dans un volume d'extension  $\delta\mathcal{V}_0 = \vec{d}_r \cdot d\vec{\mathcal{S}}_0$ . Leur nombre est donc  $\delta N_r = n_r \delta\mathcal{V}_0$  et ils auront contribué au transfert de charge  $\delta Q_r = q_r \delta N_r$ . La charge totale qui aura traversé l'élément de surface considéré est donc

$$\delta Q = \sum_r n_r \vec{d}_r \cdot d\vec{\mathcal{S}}_0 = \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\mathcal{S}}_0 = \sigma_p d\mathcal{S}_0 \quad (6.14)$$

soit, pour toute la surface  $\mathcal{S}_0$ ,

$$\Delta Q_0 = \int_{\mathcal{S}_0} \sigma_p d\mathcal{S}_0 \quad (6.15)$$

Initialement, le volume  $\mathcal{V}_0$  était globalement neutre. Après déplacement des charges, il contient une charge opposée, soit

$$-\Delta Q_0 = - \int_{\mathcal{S}_0} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\mathcal{S}}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} d\mathcal{V}_0 \quad (6.16)$$

A la surface  $\mathcal{S}$  du diélectrique, les charges qui ont tendance à sortir du milieu et celles qui ont tendance à y rentrer provoquent globalement sur la surface un excédent de charges de densité superficielle  $\sigma_p$ . Le milieu étant globalement neutre, il apparaît corrélativement dans son volume  $\mathcal{V}$  un excédent de charges distribué avec la densité volumique  $\rho_p$ .

### 6.1.4 Champ macroscopique en un point à l'intérieur du diélectrique

Pour cette configuration, plus compliquée que la précédente, nous rechercherons directement l'expression du champ électrostatique macroscopique, plutôt que celle de son potentiel. Le champ microscopique en un point  $M$  à l'intérieur du milieu se décompose en deux parties. L'une,  $\vec{E}_{\text{mic}}^{\text{int}}$ , est due aux charges situées à l'intérieur de la boule  $B(M, R)$ ; l'autre,  $\vec{E}_{\text{mic}}^{\text{ext}}$  provient des charges situées à l'extérieur de cette boule, dans le volume  $\mathcal{V}'$  complémentaire de celle-ci. Le point  $M$  étant en dehors du volume  $\mathcal{V}'$ , il peut être admis que cette seconde contribution du champ représente aussi bien le champ macroscopique créé en  $M$  par toutes les charges de ce volume (voir plus haut), et qu'on peut l'exprimer au moyen des densités macroscopiques de polarisation  $\sigma_p$  et  $\rho_p$ , via la formule

$$\vec{E}_{\text{mac}}^{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\mathcal{V}'} d\mathcal{V}'(A) \frac{\rho_p(A) \vec{AM}}{AM^3} + \int_S d\mathcal{S}(A) \frac{\sigma_p(A) \vec{AM}}{AM^3} + \int_{\Sigma} d\Sigma(A) \frac{\sigma_p(A) \vec{AM}}{AM^3} \right) \quad (6.17)$$

où  $\Sigma$  est la surface de la boule  $B(M, R)$  (sphère de centre  $M$  et de rayon  $R$ ). Le champ macroscopique dû aux charges à l'intérieur de  $B(M, R)$  est la moyenne

$$\vec{E}_{\text{mac}}^{\text{int}} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} d\tau(P) \frac{q_i}{\tau} \frac{\vec{P}_i P}{P_i P^3} \quad (6.18)$$

où les points  $P_i$  sont ici à l'intérieur de la boule. Or, l'expression

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} d\tau(P) \frac{q_i}{\tau} \frac{\vec{P} P_i}{P_i P^3}$$

peut être considérée comme celle du champ créé au point  $P_i$  par une distribution volumique de charges distribuées uniformément avec la densité  $q_i/\tau$  à l'intérieur de  $B(M, R)$ . Le point  $P_i$  étant à l'intérieur de la boule, ce champ vaut

$$\frac{q_i}{\tau} \frac{\vec{M} P_i}{3\epsilon_0}$$

On en déduit

$$\vec{E}_{\text{mac}}^{\text{int}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{1}{\tau} \sum_i q_i \vec{M} P_i$$

soit, finalement,

$$\vec{E}_{\text{mac}}^{\text{int}} = -\frac{\vec{\mathcal{P}}(M)}{3\epsilon_0} \quad (6.19)$$

Le champ macroscopique dû aux charges situées à l'intérieur de la boule est donc uniforme et "anti-parallèle" à la polarisation en  $M$ .

Considérons maintenant la contribution du dernier terme dans (6.17), plus précisément, l'intégrale

$$\vec{\mathcal{J}} = \int_{\Sigma} d\Sigma(A) \frac{\sigma_p(A) \vec{AM}}{AM^3}$$

Dans cette expression,  $\sigma_p(A) = - \vec{n}_\Sigma(A) \cdot \vec{\mathcal{P}}(A)$  où  $\vec{n}_\Sigma(A)$  est le vecteur unitaire de la normale à  $\Sigma$  au point  $A$ , orientée vers l'extérieur de  $\Sigma$ , dans le sens du vecteur  $\vec{MA}$ . Explicitement, on a

$$\vec{n}_\Sigma(A) = \vec{MA} / MA$$

Le rayon  $R$  de la boule étant d'ordre mésoscopique peut être considéré comme infinitésimal à l'échelle macroscopique. Effectuons alors un développement de la grandeur macroscopique  $\vec{\mathcal{P}}(A)$  au voisinage de  $M$ . Par exemple, pour sa composante indexée "z" on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z(A) \simeq \mathcal{P}_z(M) + \vec{MA} \cdot [\vec{\text{grad}}_A \mathcal{P}_z](M) + \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial z^2} + \right. \\ \left. 2xy \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 \mathcal{P}_z}{\partial y \partial z} \right) + \dots \end{aligned}$$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées cartésiennes de  $A$  relativement à un repère cartésien d'origine  $M$ .

Considérons la contribution donnée par le premier terme :

$$\vec{\mathcal{J}}_1 = \int_\Sigma d\Sigma(A) \vec{\mathcal{P}}(M) \cdot \vec{AM} \frac{\vec{AM}}{AM^4}$$

Pour effectuer l'intégration, on peut choisir l'axe  $z'z$  du repère attaché à  $M$  selon  $\vec{\mathcal{P}}(M)$ , c'est-à-dire de telle sorte que  $\mathcal{P}_x(M) = \mathcal{P}_y(M) = 0$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} [\vec{\mathcal{J}}_1]_x = \mathcal{P}_z(M) \frac{1}{R^2} \int \int xz \sin \theta d\theta d\varphi, \quad [\vec{\mathcal{J}}_1]_y = \mathcal{P}_z(M) \frac{1}{R^2} \int \int yz \sin \theta d\theta d\varphi, \\ [\vec{\mathcal{J}}_1]_z = \mathcal{P}_z(M) \frac{1}{R^2} \int \int z^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

$\theta$  et  $\varphi$  étant les angles habituels définissant l'orientation de  $\vec{MA}$  dans le repère de  $M$ . On montre aisément que les deux premières des composantes ci-dessus sont nulles (symétries). La dernière se calcule facilement en remarquant que

$$\begin{aligned} \int \int z^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int \int y^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int \int x^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ = \frac{1}{3} \int \int (x^2 + y^2 + z^2) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^2}{3} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\vec{\mathcal{J}}_1 = 4\pi \frac{\vec{\mathcal{P}}(M)}{3} \quad (6.20)$$

et que, finalement, la contribution de plus bas ordre du troisième terme de (6.17) compense *exactement* (6.19)! Nous laissons au lecteur le soin de montrer que

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_2 = \int_\Sigma d\Sigma(A) \left( x \vec{MA} \cdot \vec{\text{grad}}_A \mathcal{P}_x(M) + y \vec{MA} \cdot \vec{\text{grad}}_A \mathcal{P}_y(M) \right. \\ \left. + z \vec{MA} \cdot \vec{\text{grad}}_A \mathcal{P}_z(M) \right) \frac{\vec{MA}}{AM^4} = \vec{0} \end{aligned}$$

et que les contributions d'ordre plus élevés, contenant des puissances de  $R$  supérieures ou égales à 2 (ce qui peut être prévu par une analyse dimensionnelle), sont finis et peuvent être négligés<sup>4</sup>.

Par ailleurs, dans le premier terme de (6.17), l'intégration peut être étendue sans dommage à tout le volume  $\mathcal{V}$ . En effet, la différence entre les deux intégrations est donnée par

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} d\tau(A) \frac{\rho_p(A) \overrightarrow{AM}}{AM^3}$$

dont le premier terme du développement selon les puissances de  $R$  donne

$$\rho_p(M) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B(M,R)} d\tau(A) \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} = \overrightarrow{0}$$

tandis que les termes d'ordre plus élevés sont également finis, contiennent des puissances de  $R$  supérieures ou égales à 2 et peuvent aussi être négligés. En conclusion, le champ électrostatique macroscopique un point  $M$  situé à l'intérieur du diélectrique peut tout aussi bien s'exprimer de la même façon que le champ en un point à l'extérieur du milieu en fonction des charges de polarisation, selon la formule

$$\overrightarrow{E}_{\text{mac}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}(A) \frac{\rho_p(A) \overrightarrow{AM}}{AM^3} + \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}(A) \frac{\sigma_p(A) \overrightarrow{AM}}{AM^3} \right) \quad (6.21)$$

## 6.2 Relations constitutives

### 6.2.1 Causes possibles de polarisation des milieux, polarisabilité

Pour un même milieu diélectrique, il peut exister diverses causes d'apparition de moments dipolaires sous une excitation électrique.

♣ La *polarisation électronique* résulte de la déformation des nuages électroniques sous l'action d'un champ électrique. Pour de très nombreux cas, et pour des champs appliqués pas trop intenses, le moment dipolaire induit dans chaque constituant élémentaire (atome ou molécule) est colinéaire au champ *local* qui s'exerce sur lui.

H	0,67													He	0,21
Li	12	Be	5,6	B	3,1	C	1,7	N	1,1	O	0,72	F	0,51	Ne	0,38
Na	27			Al	8,8	Si	5,5	P	3,5	S	2,7	Cl	1,95	Ar	1,62
K	34													Xr	2,46
														Xe	3,99

$$\alpha_e/4\pi \text{ en } \text{Å}^3 = 10^{-30} \text{ m}^3 \text{ pour certains corps purs}$$

On peut alors définir une grandeur scalaire positive  $\alpha$ , appelée *polarisabilité électronique*, telle que la relation entre ce moment induit  $\overrightarrow{p}$  et le champ local  $\overrightarrow{E}_{\text{loc}}$  prenne la forme

$$\overrightarrow{p} = \epsilon_0 \alpha \overrightarrow{E}_{\text{loc}} \quad (6.22)$$

Selon cette définition, le paramètre  $\alpha_e$  a la dimension d'un volume. Dans le cas d'un milieu non polaire, si  $n$  est le nombre par unité de volume des constituants de polarisabilité  $\alpha_e$ , leur contribution à la polarisation sera

<sup>4</sup>A titre d'exercice, montrer que la contribution en  $R^2$  est donnée par  $\frac{R^2}{30\epsilon_0} \left( \Delta \overrightarrow{\mathcal{P}} + 2 \text{grad div } \overrightarrow{\mathcal{P}} \right)$ .

$$\vec{\mathcal{P}}_e = n \vec{p} = n\epsilon_0\alpha_e \vec{E}_{loc} \quad (6.23)$$

♣ La *polarisation ionique*, due à la déformation d'un réseau cristallin sous l'action d'un champ électrique. Elle est d'autant plus importante que le cristal est plus facilement déformable. Pour un cristal cubique tel NaCl, la polarisation est parallèle au champ local. Par analogie avec (6.23), on définit une polarisabilité ionique  $\alpha_i$  via la relation

$$\vec{\mathcal{P}}_i = n\epsilon_0\alpha_i \vec{E}_{loc} \quad (6.24)$$

$n$  étant le nombre d'ions par unité de volume. Dans le cas d'un cristal *anisotrope*, la relation entre polarisation et champ local n'est plus de proportionnalité, tout en restant linéaire, car la polarisabilité prend alors la forme d'une matrice 3x3.

♣ Dans une molécule dépourvue de centre de symétrie (HCl, H<sub>2</sub>O, NH<sub>3</sub>) les barycentres des charges positives et des charges négatives sont différents. La molécule possède alors un moment dipolaire permanent qui lui est propre. Elle est alors qualifiée de *polaire*. Une molécule ayant un centre de symétrie (H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>) ne possède pas de moment dipolaire électrique permanent. Elle est dite *non polaire*. Elle peut cependant acquérir un moment dipolaire induit. La *polarisation d'orientation* résulte de la tendance qu'ont des molécules polaires à orienter leur moment dans le sens du champ appliqué. En l'absence de champ, l'agitation thermique du milieu fait que les moments sont orientés de façon égale dans toutes les directions et le milieu est, globalement, dépourvu de polarisation. La polarisation d'orientation n'est généralement pas proportionnelle au champ<sup>5</sup>. Contrairement aux autres types de polarisation, elle varie fortement avec la température. Cependant, à la température ordinaire, elle est proportionnelle au champ local

$$\vec{\mathcal{P}}_o = n\epsilon_0\alpha_o \vec{E}_{loc} \quad (6.25)$$

où  $\alpha_o$  est la polarisabilité d'orientation et  $n$  le nombre de constituants polaires par unité de volume.

H <sub>2</sub> O	HCl	NH <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> S	NO <sub>2</sub>	SO <sub>2</sub>	CO	NaCl	KCl	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> Cl
1,85	1,08	1,47	0,97	0,316	1,63	0,112	9,00	10,27	1,69

Moments dipolaires de quelques molécules, exprimés en debye (1 D  $\simeq \frac{1}{3}10^{-29}$  C m)

A chacun de ces phénomènes est attachée une polarisabilité. La polarisabilité totale du milieu doit bien entendu prendre en compte les contributions de toutes les causes possibles de polarisation.

## 6.2.2 Le champ local

Dans un milieu dense, il est nécessaire de prendre en compte les interactions des moments dipolaires entre eux. Or, le constituant élémentaire polarisable se polarise sous l'effet du champ il est réellement soumis. Ce champ est la somme du champ extérieur qui induit la polarisation et le champ créé par tous les autres constituants polarisés : on l'appelle le *champ local*. Il ne doit pas être confondu avec le champ macroscopique.

Comme précédemment, plaçons le constituant considéré au centre  $M$  d'une boule de rayon mésoscopique  $R$ . Le champ qui s'exerce sur le constituant comporte les contributions suivantes.

♠ Le champ extérieur en  $M$  :  $\vec{E}_0(M)$ .

<sup>5</sup>Voir complément.



♠ Le champ créé en  $M$  par les dipôles extérieurs à la boule  $\vec{E}_{\text{ext}}(M)$ . Or, nous avons vu que le champ macroscopique de polarisation en  $M$  est

$$\vec{E}_{\text{macro}}(M) = \vec{E}_{\text{ext}}(M) + \vec{E}_{\text{int}}(M)$$

où

$$\vec{E}_{\text{int}}(M) = -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0}$$

est la contribution “macroscopique” des dipôles à l’intérieur de la boule. On a donc

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \vec{E}_{\text{macro}}(M) + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \quad (6.26)$$

♠ Enfin, le champ créé en  $M$  par les dipôles situés à l’intérieur de la boule, hormis celui se trouvant en  $M$ , que nous notons ici  $\vec{E}'$ . Il n’y a généralement pas de relation simple entre ce champ et le champ macroscopique. Ce n’est généralement que pour les milieux peu denses qu’il peut être négligé.

Le champ local en  $M$  s’écrit donc sous la forme

$$\vec{E}_{\text{loc}}(M) = \vec{E}_0(M) + \vec{E}_{\text{macro}}(M) + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} + \vec{E}' = \vec{E}(M) + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} + \vec{E}' = \vec{E}_{\text{Lo}}(M) + \vec{E}' \quad (6.27)$$

où

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0(M) + \vec{E}_{\text{macro}}(M) \quad (6.28)$$

est le champ macroscopique *total* et

$$\vec{E}_{\text{Lo}}(M) = \vec{E}(M) + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \quad (6.29)$$

Ce dernier champ est aussi appelé *champ de Lorentz*.

C’est sous l’effet du champ local s’exerçant directement sur lui qu’un constituant polarisable acquiert sa polarisation, comme cela était déjà indiqué dans la relation (6.22) et les suivantes.

### 6.2.3 Susceptibilité électrique

Pour de nombreux matériaux et pour les champs usuels pas trop intenses, on observe une relation de *linéarité* entre le vecteur polarisation et le champ macroscopique que l’on écrit sous la forme

$$\vec{\mathcal{P}}(M) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(M) \quad (6.30)$$

où  $\vec{E}(M)$  est le champ macroscopique total (6.28). Par définition,  $\chi_e$  est la *susceptibilité électrique* du milieu, dont il caractérise l’aptitude à acquérir une polarisation<sup>6</sup>. C’est une grandeur *sans dimension*. Dans le cas des milieux *anisotropes*,  $\chi_e$  revêt la forme d’une matrice 3x3 et prend le nom de *tenseur de susceptibilité électrique*. Pour les milieux *isotropes*, c’est un simple

<sup>6</sup>D’où l’appellation de *susceptibilité*.

coefficient, et l'expérience montre qu'il est toujours *positif*, car la polarisation est toujours orientée dans le sens du champ.

Lorsque le matériau isotrope est *homogène*,  $\chi_e$  ne dépend pas des coordonnées du point  $M$  d'observation. Le milieu est alors qualifié de *linéaire, homogène et isotrope*, l.h.i. en abrégé.

Considérons un milieu isotrope et supposons que le champ  $\vec{E}'$  soit négligeable. Le champ local se réduit alors au champ de Lorentz et l'on a

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = n\epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{loc}} = n\epsilon_0 \alpha \left( \vec{E} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \right)$$

soit

$$\vec{\mathcal{P}} = 3\epsilon_0 \left( \frac{\chi_e}{n\alpha} - 1 \right) \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

d'où l'on tire la relation entre susceptibilité et polarisabilité

$$\chi_e = \frac{3n\alpha}{3 - n\alpha} \quad (6.31)$$

où l'on voit que, par l'intermédiaire de la densité numérique  $n$ , la susceptibilité  $\chi_e$  peut dépendre de l'état thermodynamique du milieu, c'est-à-dire, dépendre de la température et de la pression du milieu, et d'autant plus concernant la pression si l'on a affaire à un milieu dilué. Par conséquent, ce n'est a priori que pour un état thermodynamique bien défini du milieu qu'il y a proportionnalité entre la polarisation et le champ qui l'induit.

### 6.2.4 Equations locales du champ macroscopique, permittivité

Dans la situation la plus générale impliquant à la fois des conducteurs et des diélectriques, on est amené à classer les porteurs de charges en deux catégories. D'une part les charges dites liées qui sont celles qui participent à la structure d'un matériau dont elles ne peuvent s'échapper du fait de leurs fortes liaisons. Ce sont celles qui, par leurs déplacements sous l'effet d'un champ appliqué, donnent lieu aux densités de charges  $\rho_p$  et  $\sigma_p$  dont il a été question plus haut. D'autre part, les charges dites *libres* qui, ou bien ne représentent qu'un surplus de charge dans un matériau sans participer à sa structure, comme les charges que l'on dépose à la surface d'un isolant, ou bien, comme dans le cas des électrons de conduction dans les conducteurs, participent à cette structure en y étant toutefois très peu liées. Dans les deux cas, ces porteurs libres peuvent effectuer des déplacements importants dans le matériau. Nous noterons  $\rho_f$  et  $\sigma_f$  les densités volumique et surfacique correspondantes<sup>7</sup>. Les densités de charges *totales* seront donc

$$\rho = \rho_f + \rho_p, \quad \sigma = \sigma_f + \sigma_p \quad (6.32)$$

Ce sont les densités sources du champ électrostatique *total*<sup>8</sup>. L'équation locale traduisant le théorème de Gauss prend la forme

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \rho_f - \text{div } \vec{\mathcal{P}} \right) \quad (6.33)$$

Définissons le champ auxiliaire

<sup>7</sup>Les deux mots "liées" et "libres" commençant par la même lettre, les notations  $\rho_\ell$  et  $\sigma_\ell$  pour désigner les densités de charges libres eussent été trop ambiguës. C'est pourquoi nous empruntons le "f" de *freedom* pour noter ces densités.

<sup>8</sup>Il s'agit ici du champ macroscopique.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \quad (6.34)$$

appelé *induction électrique* ou *excitation électrique*, plus rarement maintenant *déplacement électrique*. Il a la même dimension que la polarisation et s'exprime donc comme une densité superficielle de charges, en C/m<sup>2</sup>.

Ce nouveau champ satisfait l'équation

$$\text{div } \vec{D} = \rho_f \quad (6.35)$$

où seule intervient la densité de charges libres. Il ne faudrait pas en déduire pour autant que ce champ n'est déterminé que par les seules charges libres. En effet, comme le champ électrostatique dérive toujours d'un potentiel électrique :

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E} = - \text{grad } V \quad (6.36)$$

on en déduit

$$\text{rot } \vec{D} = \text{rot } \vec{\mathcal{P}} \quad (6.37)$$

Des deux équations

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad , \quad \text{div } \vec{D} = \rho_f$$

on déduit, pour le cas général, qu'à l'interface de deux milieux, les composantes du champ électrostatique parallèles au plan tangent séparant localement les deux milieux sont *continues*, tandis que la composante normale à ce plan de l'induction électrique peut subir une discontinuité, mesurée par une éventuelle densité surfacique de charges *libres* :

$$D_{N_2} - D_{N_1} = \sigma_f \quad (6.38)$$

Considérons un milieu linéaire pour lequel la relation (6.30) est vérifiée. La relation entre l'induction électrique et le champ électrique s'écrit alors

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad , \quad \text{avec } \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \quad (6.39)$$

Le paramètre  $\epsilon$ , qui prend la forme d'une matrice 3x3 dans le cas de milieux anisotropes, est appelé *permittivité* du milieu. On définit également la *permittivité relative*, appelée aussi *constante diélectrique*, par

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (6.40)$$

Dans le cas de milieux inhomogènes, ces grandeurs peuvent varier de point en point.

On notera qu'en fonction de ces grandeurs, la polarisation s'écrit sous la forme

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (6.41)$$

En terme de permittivité relative, la relation (6.2.4) s'écrit

$$\epsilon_r - 1 = \frac{3n\alpha}{3 - n\alpha}$$

et conduit à cette autre relation

$$\frac{n\alpha}{3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (6.42)$$

qui fait le lien entre la grandeur ‘‘moléculaire’’  $\alpha$  et la grandeur macroscopique  $\epsilon_r$ . On peut y introduire la *masse volumique*  $\rho_m$  en faisant usage de la relation  $\rho_m = nM/N_A$ , où  $M$  est la masse molaire et  $N_A$  le nombre d’Avogadro, pour obtenir la *relation de Clausius-Mossotti*<sup>9</sup>

$$\frac{\alpha N_A}{3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho_m} \quad (6.43)$$

qui est assez bien vérifiée expérimentalement pour les fluides de molécules non polaires, même denses, dans un grand domaine de variation de la masse volumique  $\rho_m$ .

Substance	$\epsilon_r$	Substance	$\epsilon_r$
Vide	1	Air sec	1,00054
Pétrole	2,1	Benzène	2,3
NaCl	6,1	Soufre	4,1
Verres	4 à 7	Mica	8
Diamant	5,5	Paraffine	2,1
Eau pure	80,4	Titanate de Baryum	$\simeq 1500$

Valeurs de  $\epsilon_r$  pour quelques diélectriques (sous 1 atm et à 20° C)

### 6.2.5 Equations de continuité aux interfaces

Considérons maintenant uniquement le cas de milieux diélectriques l.h.i., et envisageons deux interfaces possibles, à l’équilibre électrostatique.

♣ Cas d’une interface conducteur-diélectrique.

A l’intérieur du conducteur à l’équilibre, le champ électrostatique est nul, ainsi que l’induction électrique et la polarisation. Si le milieu extérieur au conducteur est le vide, il n’y a pas de charges de polarisation, et l’on a uniquement des charges libres à la surface du conducteur. On a alors, en tout point de la surface

$$\vec{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \vec{N} \quad , \quad \vec{D} = \sigma_f \vec{N} \quad (6.44)$$

$\vec{N}$  étant le vecteur unitaire de la normale sortante à la surface du conducteur. Si le milieu extérieur au conducteur est un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , les relations précédentes deviennent

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N} \quad , \quad \vec{D} = \sigma_f \vec{N} = \epsilon \vec{E} \quad (6.45)$$

Il vient alors

$$\sigma_f = \epsilon_r \sigma = \epsilon_r (\sigma_p + \sigma_f)$$

soit

$$\sigma_p = -\sigma_f \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad , \quad \sigma = \frac{\sigma_f}{\epsilon_r} \quad (6.46)$$

<sup>9</sup>R. Clausius, ‘‘Die Mechanische Wärmelehre’’, Vieweg-Verlag, Brunswick, Allemagne, 1879, vol II, p94; O. Mossotti, Mem. Math. Fis. Modena, 24, II, 49 (1850).

On constate donc qu'à une interface conducteur-diélectrique portant une densité de charges libres  $\sigma_f$  existe aussi une densité superficielle de polarisation  $\sigma_p$ , opposée à  $\sigma_f$ , puisque,  $\chi_e$  étant positif,  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  est plus grand que 1. La densité de charges totale à l'interface s'en trouve réduite par un facteur  $1/\epsilon_r$ .

♣ Cas d'une interface entre deux diélectriques.

Supposons ici que cette interface ne comporte aucune charge libre. Les équations de continuité prennent alors la forme

$$\epsilon_1 E_{N_1} = \epsilon_2 E_{N_2}, \quad \vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2} \quad (6.47)$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont les permittivité respectives des deux milieux. A l'interface, les lignes de champ du champ électrostatique dans les deux milieux sont dans un même plan. En notant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles qu'elles forment respectivement avec la normale à l'interface, comme

$$\tan \theta_i = \frac{\|\vec{E}_{T_i}\|}{|E_{N_i}|}, \quad i = 1, 2$$

on trouve

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (6.48)$$

ce qui signifie qu'il y a une "réfraction" des lignes de champ à l'interface.

### 6.3 Exemples d'applications

Dans les applications considérées ci-après, les milieux diélectriques envisagés sont linéaires, homogènes et isotropes et ne comportent aucune charge libre. Dans ces conditions, les équations locales à l'intérieur de ces milieux deviennent

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{\text{div}} \vec{D} = 0 = \vec{\text{div}}(\epsilon \vec{E}) = \epsilon \vec{\text{div}} \vec{E}, \quad \text{donc} \quad \vec{\text{div}} \vec{E} = 0 \quad (6.49)$$

et le potentiel électrostatique satisfait alors l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \quad (6.50)$$

On sait que la solution de cette équation correspondant à des conditions aux limites données est *unique*, résultat dont nous ferons systématiquement usage.

#### 6.3.1 Condensateur plan avec diélectrique

Nous modéliserons ce condensateur comme suit : la région I définie par  $x < 0$  et la région II définie par  $x > h > 0$  sont celles des armatures conductrices du condensateur ; la région III définie par  $0 < x < h$  est occupée par un milieu l.h.i. de permittivité  $\epsilon$ . Les conducteurs I et II sont portés aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  respectivement. Dans la région III du diélectrique, la fonction  $V(x) = Ax + B$  vérifie l'équation de Laplace et, par ajustement des deux constantes  $A$  et  $B$ , peut satisfaire les conditions  $V(0) = V_1$  et  $V(h) = V_2$ . C'est la fonction potentiel recherchée pour la région III. Tout calcul fait, on trouve

$$V(x) = (V_2 - V_1) \frac{x}{h} + V_1 \quad (6.51)$$

Dans cette même région, le champ électrostatique est donné par

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{h} \vec{e}_x \quad (6.52)$$

D'où le vecteur induction électrique

$$\vec{D} = \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_r \frac{V_1 - V_2}{h} \vec{e}_x \quad (6.53)$$

La densité superficielle de charges libres sur le conducteur I est donc (les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont nuls dans les conducteurs à l'équilibre)

$$\sigma_1 = \epsilon_r \frac{V_1 - V_2}{h} \quad (6.54)$$

La densité correspondante portée par la surface du conducteur II est  $\sigma_2 = -\sigma_1$ . Si  $S$  est la surface commune des armatures en regard, on en déduit la charge  $Q = S\sigma_1$  du condensateur puis sa capacité  $C = Q/(V_1 - V_2)$

$$C = \epsilon_r C_0, \quad \text{avec} \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{h} \quad (6.55)$$

où  $C_0$  est la capacité du condensateur ayant le vide pour milieu diélectrique intermédiaire. Comme  $\epsilon_r > 1$ , on en déduit que le remplacement du vide par un diélectrique entre les armatures d'un condensateur accroît la capacité de celui-ci. On peut encore dire qu'à tension  $V_1 - V_2$  donnée, l'introduction d'un milieu diélectrique entre ses armatures accroît la charge du condensateur<sup>10</sup>.

### 6.3.2 Condensateur sphérique avec diélectrique

En notant  $r = OM$  la distance d'un point  $M$  à l'origine  $O$  d'un repère cartésien  $O, x, y, z$ , la géométrie du condensateur sera définie comme suit : la région I définie par  $r < R_1$  et la région II définie par  $r > R_2$  correspondent aux armatures du condensateur. La région III définie par  $R_1 < r < R_2$  est emplie d'un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ . L'armature centrale I est portée au potentiel  $V_1$  tandis que l'armature externe II est portée au potentiel  $V_2$ . La symétrie sphérique autour de  $O$  de ce dispositif et des conditions aux limites correspondantes pour le potentiel impose à celui-ci d'avoir la même symétrie. On sait que la seule solution générale à l'équation de Laplace qui possède cette symétrie est de la forme

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes que l'on doit ajuster pour satisfaire les conditions aux limites  $V(R_1) = V_1$  et  $V(R_2) = V_2$ . On trouve ainsi le potentiel dans la région III :

$$V(r) = \frac{1}{R_2 - R_1} \left( (V_1 - V_2) \frac{R_1 R_2}{r} + V_2 R_2 - V_1 R_1 \right) \quad (6.56)$$

puis le champ électrostatique (radial)

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r, \quad \text{avec} \quad E(r) = \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_1 R_2}{r^2} \quad (6.57)$$

puis le vecteur induction électrique

$$\vec{D} = D(r) \vec{e}_r, \quad \text{avec} \quad D(r) = \epsilon_r \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_1 R_2}{r^2} \quad (6.58)$$

<sup>10</sup>En 1837, Faraday avait montré que la capacité d'un condensateur devient 4 fois plus grande en coulant du soufre entre les armatures.

La densité superficielle de charges libres portées par l'armature I est

$$\sigma_1 = D(R_1) = \epsilon \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (6.59)$$

et celle des charges de l'armature II est

$$\sigma_2 = -D(R_2) = -\epsilon \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_1}{R_2} \quad (6.60)$$

On en déduit la charge  $Q = 4\pi R_1^2 \sigma_1$  du condensateur, puis la capacité  $C = Q/(V_1 - V_2)$

$$C = \epsilon_r C_0, \quad \text{avec} \quad C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (6.61)$$

où, ici encore,  $C_0$  représente la capacité d'un condensateur sphérique ayant le vide pour milieu inter-conducteurs.

### 6.3.3 Condensateur sphérique avec deux diélectriques non concentriques

Reprenons le dispositif précédent, mais pour lequel, cette fois, l'espace entre les deux armatures comporte deux diélectriques différents. La région III définie par  $R_1 < r < R_2$  et  $z > 0$  contient un diélectrique de permittivité  $\epsilon_1$ , et la région IV définie par  $R_1 < r < R_2$  et  $z < 0$  contient un diélectrique de permittivité  $\epsilon_2$ . Bien que le dispositif n'a plus, globalement, la symétrie sphérique, les conditions aux limites pour le potentiel gardent cette symétrie. C'est pourquoi le potentiel et le champ électrostatique ont la même forme que dans l'exemple précédent. Par contre, l'induction électrique change. Dans la région inter-conducteurs, on a maintenant

$$D(r) = \epsilon_1 E(r) \quad \text{pour} \quad z > 0, \quad D(r) = \epsilon_2 E(r) \quad \text{pour} \quad z < 0 \quad (6.62)$$

On en déduit que sur la demi-sphère  $r = R_1$ ,  $z > 0$ , la densité superficielle de charge est

$$\sigma_1 = \epsilon_1 \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (6.63)$$

et que la densité superficielle de charges sur la demi-sphère  $r = R_1$ ,  $z < 0$  est

$$\sigma'_1 = \epsilon_2 \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (6.64)$$

La charge totale du condensateur est donc  $Q = 2\pi R_1^2 (\sigma_1 + \sigma'_1)$ , d'où la capacité

$$C = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (6.65)$$

La différence de permittivité provoque l'apparition d'une force s'exerçant entre les deux armatures du condensateur. En effet, la force subie par les charges situées dans un élément de surface  $dS$  de l'armature centrale est

$$d \vec{f}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2\epsilon_1} dS \vec{e}_r \quad \text{pour} \quad z > 0$$

et

$$d \vec{f}'_1 = \frac{\sigma_1'^2}{2\epsilon_2} dS \vec{e}_r \quad \text{pour} \quad z < 0$$

On obtient alors la force totale subie par l'armature centrale comme

$$\begin{aligned} \vec{f}_c &= \frac{R_1^2}{2} \left( \frac{\sigma_1^2}{\epsilon_1} - \frac{\sigma_1'^2}{\epsilon_2} \right) \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \right) \\ &= \pi R_1^2 \left( \frac{\sigma_1^2}{\epsilon_1} - \frac{\sigma_1'^2}{\epsilon_2} \right) \int_0^1 u du \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit, tout calcul fait

$$\vec{f}_c = \frac{Q^2}{8\pi R_1^2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \vec{e}_z \quad (6.66)$$

$Q$  étant la charge du condensateur.

### 6.3.4 Plaque diélectrique perpendiculaire à un champ uniforme

Un matériau diélectrique l.h.i. de permittivité  $\epsilon$  et d'épaisseur  $h$  est supposé emplir toute la région définie par  $0 < x < h$ . Le matériau est placé dans le vide, perpendiculairement aux lignes de champ d'un champ électrostatique extérieur uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ .

La géométrie du dispositif est telle que le potentiel électrostatique ne doit pas dépendre des coordonnées "latérales"  $y$  et  $z$ . L'équation de Laplace à laquelle le potentiel doit satisfaire dans chacune des régions  $x < 0$ ,  $0 < x < h$  et  $x > h$  se réduit alors à

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

qui conduit à la solution

$$V(x) = Ax + B$$

les constantes  $A$  et  $B$  devant être ajustées dans chacune des régions, de telle sorte à assurer la continuité du potentiel et la continuité de la composante normale de l'induction électrique, puisqu'aucune charge libre n'est présente. Comme nous pouvons fixer l'origine des potentiels en  $x = 0$ , nous poserons

$$\begin{aligned} V(x) &= A_1 x \text{ pour } x \leq 0, \quad V(x) = A_2 x \text{ pour } 0 \leq x \leq h \\ V(x) &= A_3 x + B_3 \text{ pour } x \geq h \end{aligned}$$

Il vient (continuité de  $D_x$ )

$$\epsilon_0 A_1 = \epsilon A_2$$

pour  $x = 0$  et

$$A_2 h = A_3 h + B_3, \quad \epsilon A_2 = \epsilon_0 A_3$$

pour  $x = h$ . On obtient ainsi  $A_1 = A_3 = A$ ,  $A_2 = \epsilon_r A$  et  $B_3 = (\epsilon_r - 1)Ah$ . Pour fixer la constante  $A$ , nous admettons que, loin du matériau, dans les régions où  $|x| \gg h$ , le champ doit coïncider avec le champ extérieur appliqué. Ceci donne  $A \equiv E_0$ . On en déduit



$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \vec{e}_x \quad \text{pour } x < 0 \text{ ou } x > h \\ \vec{E} &= \frac{E_0}{\epsilon_r} \vec{e}_x \quad \text{pour } 0 < x < h\end{aligned}\quad (6.67)$$

Le vecteur polarisation dans le diélectrique est donc

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 - \epsilon_0 \vec{E} \quad (6.68)$$

d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\epsilon_0} \quad (6.69)$$

Comme l'on a ici  $\text{div } \vec{\mathcal{P}} = 0$ , il n'y a que des charges de polarisation superficielles : avec la densité  $\sigma_p = \mathcal{P} = \epsilon_0 E_0(1 - 1/\epsilon_r) > 0$  sur le plan  $x = h$ , et la densité  $-\sigma_p$  sur le plan  $x = 0$ . La relation ci-dessus montre que cette distribution de charges créé dans le diélectrique un champ *dépolarisant*  $-\frac{\vec{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}$  qui s'oppose au champ inducteur  $\vec{E}_0$  (elle produit un champ nul à l'extérieur du diélectrique).

### 6.3.5 Plaque diélectrique parallèle à un champ uniforme

Reprenons le dispositif précédent, mais cette fois avec un champ extérieur orienté parallèlement aux surfaces de la plaque diélectrique :  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$ . Tout plan parallèle au plan  $xOz$  est un plan d'antisymétrie pour le champ inducteur qui lui est orthogonal. Il est alors naturel de supposer que le champ électrostatique total, l'induction électrique et la polarisation dans le diélectrique sont parallèles au champ inducteur. De par la géométrie de l'échantillon, la variable  $y$  n'est pas (au moins approximativement) une variable sensible. Il en résulte que ces champs doivent aussi être uniformes. La continuité des composantes tangentielles du champ électrostatique aux surfaces latérales de la plaque impose que le champ à l'intérieur du diélectrique soit égal au champ extérieur appliqué :

$$\vec{E} \simeq \vec{E}_0 \quad (6.70)$$

Le champ dépolarisant est donc inexistant, et le champ extérieur pénètre complètement le diélectrique, conduisant à la polarisation

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \vec{E}_0 \quad (6.71)$$

Tout ceci est compatible avec le fait qu'une telle distribution de polarisation est équivalente à des charges superficielles localisées aux extrémités de la plaque ( $|y| \rightarrow \infty$ ), créant un champ négligeable aux points qui en sont éloignés.

### 6.3.6 Boule diélectrique dans un champ uniforme

Considérons une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ , faite d'un matériau diélectrique l.h.i. de permittivité  $\epsilon$ , placée dans le vide où règne un champ uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ . Par rapport à un repère cartésien  $O, x, y, z$  centré sur  $O$ , nous repèrerons la position de tout point  $M$  au moyen de ses coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ .

Le dispositif étudié possédant la symétrie cylindrique autour de l'axe  $Oz$ , le potentiel électrostatique  $V(M)$  ne peut dépendre de l'angle  $\varphi$ . On a donc  $V(M) = V(r, \theta)$ . Les charges libres à l'origine du champ inducteur étant supposées se trouver à distance infinie de la boule, le potentiel satisfait l'équation de Laplace en tout point à l'intérieur de la boule et en tout point à l'extérieur de la boule. Elle se réduit ici à

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

On sait que les solutions de cette équation peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires de solutions "élémentaires" ayant la forme d'un produit  $f(r)g(\theta)$  d'une fonction ne dépendant que de  $r$  et d'une fonction ne dépendant que de  $\theta$ . Ces fonctions doivent satisfaire l'équation

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} (r^2 f') = - \frac{1}{g \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta g') = \text{constante} \quad (6.72)$$

On peut en fait restreindre fortement l'ensemble des fonctions  $g(\theta)$  admissibles grâce au raisonnement suivant.

On sait que la polarisation de la boule peut être décrite en terme de distributions de charges de polarisation. Celles-ci sont confinées dans la boule et sur sa surface. En conséquence, le champ qu'elles créent en un point situé à l'extérieur de la boule et à grande distance de celle-ci est certainement négligeable devant le champ inducteur uniforme  $\vec{E}_0$ . Il s'ensuit qu'à grande distance  $r$ , le potentiel  $V(r, \theta)$  doit se confondre avec le potentiel  $V_e(M)$  du champ inducteur, potentiel qui s'écrit, à une constante additive près,

$$V_e(M) = -E_0 z \equiv -E_0 r \cos \theta$$

En conséquence, pour le potentiel  $V(r, \theta) = f(r)g(\theta)$  à l'extérieur de la boule, on a nécessairement  $g(\theta) = \cos \theta$  (la constante multiplicative est rejetée dans l'expression de  $f(r)$ ). D'un autre côté, la continuité du potentiel pour  $r = R$  conduit à une équation du type  $f_{\text{int}}(R)g_{\text{int}}(\theta) = f_{\text{ext}}(R) \cos \theta$ . Celle-ci ne pourra être vérifiée pour tout  $\theta$  que si l'on a aussi  $g_{\text{int}}(\theta) = \cos \theta$ . En conclusion, le potentiel en tout point est nécessairement de la forme  $V(r, \theta) = f(r) \cos \theta$  où la fonction  $f(r)$  doit satisfaire l'équation différentielle

$$r^2 f'' + 2r f' - 2f = 0 \quad (6.73)$$

obtenue à partir de l'équation de Laplace. Il paraît évident que cette équation est satisfaite par des "fonctions puissances" du type  $r^\alpha$  où  $\alpha$  peut être positif ou négatif. Posons alors  $f(r) = r^\alpha u(r)$ . En reportant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient

$$r^{\alpha+2} u'' + 2(\alpha+1)r^{\alpha+1} u' + r^\alpha u [\alpha(\alpha+1) - 2] = 0$$

On peut annuler le troisième terme du membre de gauche de l'équation en choisissant  $\alpha$  de telle sorte que  $\alpha(\alpha+1) - 2 = 0$ . On trouve alors deux solutions  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -2$ . Si l'on choisit  $\alpha = 1$ , la fonction  $u$  doit satisfaire l'équation

$$4u' + ru'' = 0 = \frac{1}{r^3} [4r^3 u' + r^4 u''] = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^4 u')$$

d'où  $u' = \frac{K_1}{r^4}$  et, intégrant une nouvelle fois, il vient  $u = \frac{A}{r^3} + B$ , et, finalement,

$$f(r) = \frac{A}{r^2} + Br \quad (6.74)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes. Le choix  $\alpha = -2$  conduit à la même expression pour  $f(r)$ . La solution générale pour le potentiel s'écrit donc

$$V(r, \theta) = \left( \frac{A}{r^2} + Br \right) \cos \theta \quad (6.75)$$

Il faut prendre garde au fait que les constantes  $A$  et  $B$  peuvent avoir des expressions différentes selon qu'on se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de la boule. Dans cette dernière région notamment, le potentiel ne peut y avoir de singularité en  $r = 0$ , alors que la boule est exempte de charge ponctuelle libre et que la distribution équivalente de charges de polarisation pour  $r < R$  est de nature volumique. Ceci impose de prendre  $A = 0$  pour  $r \leq R$ . Nous écrivons donc le potentiel sous la forme

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= B_{\text{int}} r \cos \theta, \quad \text{pour } r \leq R \\ V_{\text{ext}} &= \left( \frac{A_{\text{ext}}}{r^2} + B_{\text{ext}} r \right) \cos \theta, \quad \text{pour } r \geq R \end{aligned}$$

Nous savons que pour  $r \gg R$ , on doit avoir  $V_{\text{ext}} \simeq V_e = -E_0 r \cos \theta$ . Cette deuxième condition impose que l'on ait  $B_{\text{ext}} = -E_0$ . Les deux constantes  $A_{\text{ext}}$  et  $B_{\text{int}}$  sont ensuite déterminées en imposant la continuité, pour  $r = R$ , du potentiel et de la composante normale de l'induction électrique.

La continuité du potentiel pour  $r = R$  est assurée pour tout  $\theta$  si

$$B_{\text{int}} = \frac{A_{\text{ext}}}{R^3} + B_{\text{ext}}$$

La continuité de  $D_r$  pour  $r = R$  s'exprime par l'équation

$$-\left( \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} \right)_{r=R} = -\epsilon_r \left( \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial r} \right)_{r=R}$$

qui conduit à écrire

$$-\epsilon_r B_{\text{int}} = 2 \frac{A_{\text{ext}}}{R^3} + E_0$$

On trouve ainsi

$$B_{\text{int}} = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, \quad A_{\text{ext}} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0$$

Le potentiel à l'intérieur de la boule est donc

$$V_{\text{int}} = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 r \cos \theta \equiv -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 z \quad (6.76)$$

Le champ dans cette région est donc uniforme et parallèle au champ inducteur

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 \quad (6.77)$$

La polarisation est elle aussi uniforme

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}_{\text{int}} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 \quad (6.78)$$

et le champ de dépolarisation est

$$\vec{E}_{\text{int}} - \vec{E}_0 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \quad (6.79)$$

Les charges de polarisation ne se trouvent qu'à la surface de la boule, avec la densité superficielle

$$\sigma_p = \mathcal{P} \cos \theta = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \cos \theta \quad (6.80)$$

A l'extérieur de la boule, le potentiel s'écrit

$$V_{\text{ext}} = -E_0 r \cos \theta + A_{\text{ext}} \frac{\cos \theta}{r^2} = V_e + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (4\pi\epsilon_0 A_{\text{ext}}) \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (6.81)$$

et se présente donc comme la somme du potentiel  $V_e$  du champ inducteur et du potentiel d'un dipôle placé au centre de la boule et dont le moment dipolaire vaut

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 \vec{E}_0 = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{\mathcal{P}} \quad (6.82)$$

## 6.4 Complément : Polarisation d'orientation

La Thermodynamique Statistique nous enseigne que la probabilité pour qu'un système thermodynamique soit dans un état d'énergie  $\mathcal{E}$  alors qu'il est en équilibre thermique avec un thermostat de température  $T$  est proportionnelle au *facteur de Boltzmann*

$$e^{-\beta\mathcal{E}}, \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (6.83)$$

où  $k_B$  est la *constante de Boltzmann*. Si les constituants élémentaires du système sont *indépendants statistiquement* les uns des autres, la probabilité totale pour le système en entier est le produit des probabilités individuelles s'appliquant à chaque constituant. Imaginons qu'il s'agisse d'une assemblée de dipôles pouvant orienter librement leur moment dipolaire. Nous supposons que le milieu constitué par ces dipôles est suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger les interactions électriques des dipôles entre eux. Ainsi, les dipôles peuvent être approximativement considérés comme statistiquement indépendants.

Lorsqu'elle agit seule, la perpétuelle agitation thermique dans le milieu entraîne une répartition isotrope des moments dipolaires et aucune polarisation n'apparaît au niveau macroscopique : le milieu n'est pas polarisé. Si un champ électrique extérieur est appliqué, chaque dipôle de moment  $\vec{p}$  peut alors acquérir l'énergie potentielle

$$U = - \vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction du moment dipolaire et celle du champ  $\vec{E}$  s'exerçant sur le dipôle (dans la suite la direction du champ est choisie pour définir un axe  $z'z$  de référence). Libre de s'orienter, la tendance naturelle du dipôle est d'aligner son moment dipolaire selon le champ appliqué. Cependant, cette tendance est contrariée par l'agitation thermique qui tend au contraire à répartir les orientations au hasard. L'équilibre entre ces deux tendances opposées fait émerger, pour chaque dipôle, une probabilité de réalisation d'une orientation particulière de son moment dipolaire. Ainsi, la probabilité pour que le moment dipolaire pointe à l'intérieur d'un angle solide  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  autour d'une direction moyenne définie par les angles sphériques  $\theta$  et  $\varphi$  est donnée par

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{Z} e^{-\beta U} d\Omega$$

où  $Z$  est une constante servant à la normalisation des probabilités, c'est-à-dire telle que l'intégration de la probabilité élémentaire donnée ci-dessus sur tous les angles possibles soit égale à 1 :

$$\frac{1}{Z} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\beta U} = 1$$

On trouve

$$Z = 4\pi \frac{\sinh x}{x}, \quad \text{avec } x = p\beta E \quad (6.84)$$

Avec cette loi de probabilité, calculons la valeur moyenne du moment dipolaire de chaque dipôle :

$$\vec{p} = p \left( \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \right)$$

Comme la loi de probabilité ne dépend pas de  $\varphi$ , les valeurs moyenne de  $p_x$  et de  $p_y$  sont nulles. Celle de  $p_z$  est

$$\langle p_z \rangle = -\frac{1}{E} \langle U \rangle = \frac{1}{ZE} \int \int U e^{-\beta U} d\Omega = \frac{1}{ZE} \frac{\partial}{\partial \beta} \int \int e^{-\beta U} d\Omega = \frac{1}{ZE} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{E} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

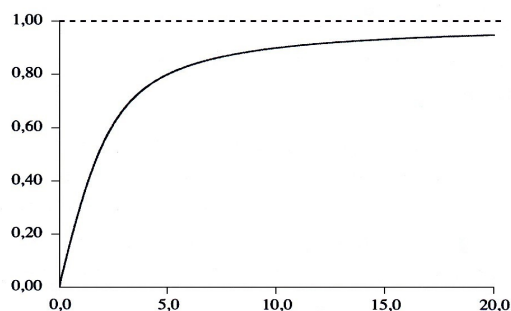
On obtient ainsi

$$\langle p_z \rangle = p \frac{d \ln Z}{dx} = p \mathcal{L}(x) \quad (6.85)$$

où

$$\mathcal{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x} \quad (6.86)$$

est la *fonction de Langevin*<sup>11</sup>. C'est une fonction positive, strictement croissante, dont la valeur est nulle pour  $x = 0$  et tend vers 1 vers les grandes valeurs de  $x$  (pour  $x$  petit on a  $\mathcal{L}(x) \simeq x/3$ , et pour  $x$  grand on a  $\mathcal{L}(x) \simeq 1 - 1/x$ ).



**Fonction de Langevin**

Dans les cas usuels, les grandes valeurs de  $x$  correspondent à de basses températures, en tout cas des températures telles que  $T \ll pE/k_B$ . L'agitation thermique est plus faible et les dipôles s'orientent plus facilement dans le sens du champ. A l'inverse, pour  $T \gg pE/k_B$ , l'agitation thermique est plus importante et l'on comprend que pour de très hautes températures ou pour des champs faibles, la polarisation est plus faible et disparaît à la limite, les orientations dipôles étant à nouveau redistribuées au hasard. Même pour les températures usuelles ( $T \simeq 300$  K), le paramètre  $x$  est généralement encore suffisamment petit pour que l'on puisse utiliser l'approximation

$$\mathcal{L}(x) \simeq \frac{x}{3}$$

ce qui donne

$$\langle p_z \rangle \simeq \frac{p^2}{3k_B T}$$

On en déduit la *polarisabilité d'orientation*

$$\alpha_{\text{orient}} = \frac{p^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (6.87)$$

<sup>11</sup>Cette fonction fut introduite par Langevin en 1905 lors de son étude théorique du paramagnétisme : P. Langevin, J. Phys., 4, 678 (1905).

On notera que, contrairement aux autres types de polarisation, cette polarisabilité d'orientation dépend fortement de la température : c'est ce qui permet de la distinguer expérimentalement.