

## Chapitre 9

# Phénomènes d'induction électromagnétique

### 9.1 Description dans un cas simple

Pour illustrer le plus simplement le phénomène d'induction électromagnétique<sup>1</sup>, considérons le dispositif suivant. Il s'agit d'un pont roulant constitué de deux rails métalliques parallèles horizontaux sur lesquels une barre métallique mobile  $AB$  peut se déplacer, en leur restant toujours perpendiculaire. Les rails sont espacés d'une distance  $\ell$  et reliés à l'une de leurs extrémités par une barre conductrice  $CD$  fixe. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique vertical, statique et uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ . Supposons que par un procédé quelconque la barre  $AB$  se déplace à vitesse constante  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  à partir de la date  $t = 0$  (figure 9.1).

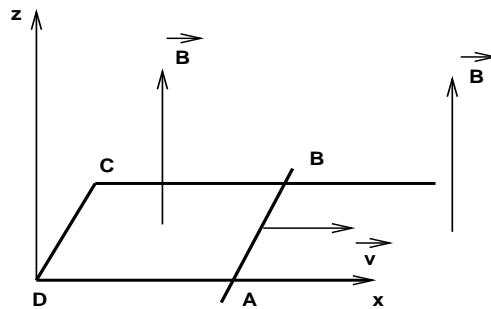


Figure 9.1

A cette date, les électrons de conduction de la barre, restant liés à celle-ci par des forces de cohésion internes, acquièrent (en moyenne) cette vitesse d'entraînement et, du fait de la présence du champ magnétique extérieur, vont être soumis à la force de Lorentz

$$\vec{f} = -e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (9.1)$$

qui va les entraîner de  $A$  vers  $B$ . L'accumulation de charge négative en  $B$  et son défaut qui en résulte en  $A$  vont immédiatement provoquer un déplacement global d'électrons dans le circuit  $ABCD$ , dans ce sens même. Ceci équivaut à l'apparition d'un courant, dit *courant induit*, dans le sens inverse  $ADCB$ .

Ce faisant, pour  $t > 0$ , les électrons de conduction dans la barre acquièrent deux composantes de vitesse. La première est la vitesse d'entraînement  $\vec{v}$ . La seconde vient de ce qu'ils ont maintenant

<sup>1</sup>Découvert par J. Henry en 1830 et indépendamment par M. Faraday en 1831.

un mouvement de dérive à l'intérieur de la barre. Ils y ont la vitesse moyenne relative  $\vec{u}$ , qui est celle donnant lieu à un vecteur densité volumique de courant égal à

$$\vec{J} = -e n \vec{u} \quad (9.2)$$

$n$  étant le nombre par unité de volume d'électrons de conduction du matériau constituant la barre  $AB$ . La vitesse (moyenne) de déplacement des électrons par rapport au champ extérieur est maintenant

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{u} \quad (9.3)$$

et la force à laquelle ils sont dorénavant soumis est

$$\vec{F} = \vec{f} + \vec{f}' \quad (9.4)$$

avec

$$\vec{f}' = -e \vec{u} \wedge \vec{B} \quad (9.5)$$

Cette dernière composante de force  $\vec{f}'$  est la même pour tous les électrons de conduction présents à un moment donné dans la barre. Faisant le bilan pour l'ensemble de ces électrons, elle conduit à une résultante égale à

$$\vec{F}_{La} = n AB s \vec{f}' = AB s \vec{J} \wedge \vec{B} = i \vec{AB} \wedge \vec{B} \quad (9.6)$$

où  $s$  est la section droite de la barre  $AB$  et  $i$  l'intensité du courant induit, celle-ci étant comptée algébriquement en prenant le sens  $ABCD$  pour sens de référence, qui est celui déduit par la règle du tire-bouchon à partir du sens du champ inducteur  $\vec{B}$ . Comme on pouvait s'y attendre, cette force est ni plus ni moins la force de Laplace agissant sur le conducteur  $AB$  traversé par le courant d'intensité  $i$ .

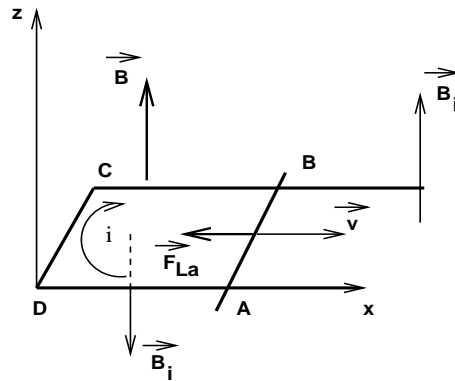


Figure 9.2

Cette force de Laplace est orientée en sens inverse du mouvement de la barre (figure 9.2). Elle tend à le *freiner*. Ceci révèle un aspect *modérateur* de la réponse du dispositif au déplacement de la barre conductrice  $AB$  dans le champ extérieur.

Mais ce n'est pas le seul. En effet, traversé par le courant induit, le circuit  $ABCD$  va générer à son tour un champ magnétique, dit *champ magnétique induit*. Comme il a été vu en Magnétostatique, les lignes de champ tournent autour du courant dans le sens donné par la règle du tire-bouchon, à partir de celui du courant. Ce dernier allant dans le sens  $ADCB$ , on constate que sur la surface

$ABCD$ , le champ induit *s'oppose* au champ inducteur. Ceci est également conforme à une *règle de modération*.

Une telle règle générale concernant les phénomènes d'induction fut énoncée pour la première fois par Lenz en 1834 :

*le courant induit a un sens tel que ses effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.*

Dans le phénomène étudié ici, il y a deux causes à l'apparition du courant induit. La première est le mouvement de la barre. Une force de Laplace apparaît alors, dont le rôle est de freiner ce mouvement. La deuxième cause est la présence du champ extérieur. Un champ induit est créé, qui s'oppose au champ inducteur, au moins sur la surface  $ABCD$ .

Cependant, à l'extérieur de cette surface, au vu de ses lignes de champ, le champ induit ne s'oppose pas au champ inducteur mais au contraire le *renforce*. Est-ce bien conforme à une règle de modération ? C'est ce que nous allons voir maintenant.

La force motrice qui entretient le courant induit a son siège dans la barre  $AB$ . On peut l'écrire sous la forme d'une force *électrique*

$$\vec{f} = -e \vec{E}_m \tag{9.7}$$

où

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{9.8}$$

est appelé *champ électromoteur*.

Du point de vue électrique, la barre  $AB$  se comporte exactement comme un générateur. Prenant encore  $ABCD$  pour sens de référence dans le circuit, la force électromotrice correspondante est

$$\mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = -v \ell B \tag{9.9}$$

où  $\ell = AB$ . En supposant que la résistance du circuit reste pratiquement constante et égale à  $R$ , bien que la quantité de matériau conducteur impliquée dans le circuit augmente lors du mouvement<sup>2</sup>, l'application de la loi d'Ohm donne pour l'intensité du courant induit

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{v \ell B}{R} \tag{9.10}$$

On retrouve ici toute la physique du phénomène. En effet, il n'est pas étonnant de trouver dans l'expression de cette intensité le produit des grandeurs caractérisant les deux causes de son apparition : la vitesse  $v$  et le champ inducteur  $B$ . Que l'une des deux disparaisse et le courant induit disparaît aussi.

On peut, comme l'a fait Faraday, relier la force électromotrice à la variation du flux du champ inducteur au cours du mouvement. En effet, pour le circuit  $ABCD$  considéré ici, ce flux vaut

$$\Phi = \ell x B \tag{9.11}$$

où  $x = AD$ . On obtient alors

---

<sup>2</sup>Il suffit pour ce faire de connecter au circuit une grande résistance  $R_0$ .

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \tag{9.12}$$

Cette dernière relation est d'ordre tout à fait général et constitue la *loi de Faraday-Lenz*<sup>3</sup> :

*un circuit fermé traversé par un flux magnétique variable est le siège d'une force électromotrice d'induction qui s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance, et donnée par la formule ci-dessus.*

A la lumière de cette relation fondamentale, expliquons la réaction du circuit induit considéré ici. On comprend que sur la surface intérieure *ABCD*, le flux du champ inducteur croît, puisque la surface présentée croît. Une réaction de modération est mise en œuvre pour essayer de stopper cette augmentation : force de Laplace opposée au déplacement de la barre, champ induit s'opposant au champ inducteur. Mais, si nous nous plaçons du point de vue de l'extérieur du circuit, nous voyons une surface *décroître*, et donc un flux inducteur *décroissant*. Il est donc tout à fait conforme à la règle de modération de voir dans cette région un champ induit *renforcer* le champ inducteur !

Nous admettons que la loi de Faraday-Lenz, démontrée plus haut dans le cas particulier d'un circuit mobile par rapport à un champ inducteur fixe, est en fait valable *quelle que soit la cause* de la variation de flux qui traverse le circuit. On peut comprendre cette généralisation en invoquant le principe de relativité : le phénomène d'induction ne dépend que du mouvement *relatif* du circuit et des sources de champ magnétiques considérés. Cette loi doit donc être vraie si le circuit est fixe et les sources de champ mobiles.

Il convient de faire encore les remarques importantes suivantes.

♣ La variation du flux magnétique traversant un circuit fermé peut avoir deux causes non exclusives.

Soit le circuit est soumis à un champ fixe et on le déforme ou on l'oblige à se déplacer (en rotation, comme dans le cas des machines à courant continu). On parle alors *d'induction de Lorentz*. Ou bien le circuit est immobile et c'est le champ magnétique inducteur qui varie ou tourne (cas des alternateurs ou des transformateurs électriques). On parle alors *d'induction de Neumann*. Plus généralement, ces deux effets peuvent intervenir simultanément.

♣ Pour qu'apparaisse un phénomène d'induction dans un conducteur, il n'est même pas nécessaire qu'il constitue un circuit fermé.

Par exemple, si une barre métallique se déplace dans un champ magnétique extérieur<sup>4</sup> stationnaire, la présence de la force de Lorentz suffit à expliquer le mouvement des charges qui s'opère alors jusqu'à l'établissement d'un champ électrostatique qui va compenser le champ électromoteur, comme dans l'effet Hall. Dans ce cas, on ne peut plus parler de flux à travers un circuit fermé et de sa variation, mais l'équivalent de cette variation dans la formule de Faraday est un *flux coupé*, par unité de temps, par les lignes de courant.

♣ Il peut arriver qu'il n'y ait aucune variation *apparente* de flux à travers un circuit fermé.

<sup>3</sup>Faraday en avait donné l'énoncé suivant : *la force électromotrice induite dans un circuit fermé est proportionnelle au taux de variation par rapport au temps du flux du champ magnétique traversant la surface délimitée par le circuit*. Mais c'est le physicien russe Heinrich Lenz (1804-1865) qui fit la découverte du sens des courants induits. Plus tard, Maxwell a proposé la formulation suivante de la loi de Lenz : *l'effet de la force électromotrice induite est tel qu'il s'oppose à la variation de flux qui le produit*.

<sup>4</sup>Comme les ailes d'un avion dans le champ magnétique terrestre.

Un exemple est donné par le dispositif de la roue de Barlow (figure 9.3). Il s'agit d'un disque en cuivre pouvant tourner librement autour d'un axe horizontal passant par son centre  $O$ . Par un montage qu'il est inutile d'expliquer ici, on peut détecter la présence d'un courant entre le point  $O$  et un point  $A$  de la périphérie du disque grâce à des fils conducteurs reliés à un appareil de mesure. Le tout forme un circuit fermé, placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  parallèle à l'axe de la roue. Supposons que la roue soit mise en rotation uniforme, de vitesse angulaire  $\omega$ . La surface offerte au champ extérieur par le circuit ainsi constitué ne change pas dans cette rotation, ce qui ferait dire qu'aucune force électromotrice d'induction ne doit apparaître. Pourtant, on observe bien un courant induit dans le circuit.

Ici encore, il faut revenir au mécanisme fondamental généré par la force de Lorentz. Prenons l'axe  $Oz$  suivant la direction et le sens de  $\vec{B}$ , et utilisons les coordonnées cylindriques. Dans le mouvement de rotation, un électron situé à la distance  $\rho$  de l'axe acquiert la vitesse d'entraînement orthoradiale égale à

$$\vec{v}_e = \rho\omega \vec{e}_\phi$$

et se voit alors soumis à la force

$$\vec{f} = -e \rho\omega \vec{e}_\phi \wedge \vec{B} = -e\rho\omega B \vec{e}_\rho$$

qui l'entraîne vers la périphérie du disque si  $\omega < 0$ , ou vers le centre  $O$  si  $\omega > 0$ .

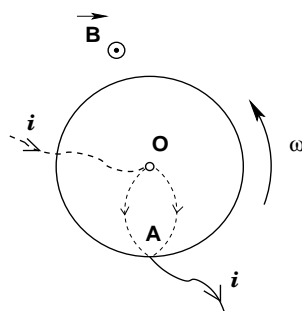


Figure 9.3

Un courant induit va ainsi prendre naissance dans le disque, de  $O$  vers  $A$  si  $\omega > 0$ , de  $A$  vers  $O$  si  $\omega < 0$ . Le champ électromoteur est ici

$$\vec{E}_m = \rho\omega B \vec{e}_\rho$$

et la force électromotrice correspondante apparaissant entre  $O$  et  $A$  est

$$\mathcal{E} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{L} = \omega B \int_0^a \rho d\rho = \frac{\omega B a^2}{2}$$

$a$  étant le rayon du disque. On note que le résultat de l'intégrale est complètement indépendant du chemin suivi pour aller de  $O$  vers  $A$ .

Dans le mouvement de rotation du disque, les lignes de courant<sup>5</sup> coupent les lignes de champ de  $\vec{B}$ , avec pour conséquence un flux coupé qui est à l'origine de la force électromotrice évaluée ci-dessus. En effet, le déplacement  $\delta\lambda = \rho\omega\delta t \vec{e}_\phi$  d'un élément de courant  $i d\vec{\ell}$  situé à la distance  $\rho$  donne lieu au flux coupé (voir chapitre précédent)

<sup>5</sup>Qui ne sont pas des segments de droites, mais des courbes joignant  $O$  à  $A$ .

$$\delta d\Phi = \left[ \vec{\delta\lambda} \wedge \vec{d\ell} \right] \cdot \vec{B} = -\delta t \omega B \rho \vec{e}_\rho \cdot \vec{d\ell} = -\delta t \omega B \rho d\rho$$

ce qui, pour l'ensemble du disque, donne le flux coupé total

$$\delta\Phi = -\delta t \omega B \int_0^a \rho d\rho = -\delta t \frac{\omega B a^2}{2}$$

et, *comme il se doit*, on retrouve la formule de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{\delta\Phi}{\delta t}$$

## 9.2 Freinage par induction ; aspect énergétique

### 9.2.1 Barre $AB$ lancée

Dans l'exemple du paragraphe précédent, supposons que la barre  $AB$  soit lancée avec la vitesse initiale  $v_0$ , puis livrée à l'action du champ magnétique extérieur.

Pour décrire son mouvement ultérieur, nous disposons des équations suivantes.

- Une équation électrique :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv = Ri \quad (9.13)$$

- Une équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = F_{La} = i\ell B \quad (9.14)$$

$m$  étant la masse de la barre,  $v$  sa vitesse instantanée.

Ces deux équations où  $i$ , grandeur électrique, et  $v$ , grandeur mécanique, interviennent simultanément, montrent l'existence d'un *couplage électro-mécanique* dans le phénomène. Ce couplage se traduit par une transformation d'énergie mécanique en énergie électrique. Ce dispositif est un exemple simple de *transducteur électromécanique*, où ici l'énergie mécanique nécessaire au lancement de la barre se transforme progressivement en énergie électrique<sup>6</sup>.

Tirant de (9.13) l'expression de  $i$  en fonction de  $v$  et reportant celle-ci dans (9.14), on obtient l'équation d'évolution de la vitesse

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{\ell^2 B^2} \quad (9.15)$$

qui a pour solution

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.16)$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale  $v(0) = v_0$ . L'expression de l'intensité du courant induit s'en déduit immédiatement

<sup>6</sup>Le terme *transducteur*, apparu vers 1960, désigne tout dispositif permettant de convertir une grandeur physique en une autre, et partant, de transformer une forme d'énergie en une autre. Ainsi, un haut-parleur convertit l'énergie électrique en énergie acoustique; un microphone fait l'inverse; un diaphragme convertit les ondes sonores en vibrations mécaniques. La technologie actuelle des capteurs conçoit des transducteurs pour de multiples utilisations (optique, transfert de chaleur, transducteurs de pression, etc, voir pages web).

$$i = -\frac{B\ell v_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.17)$$

Cette solution indique qu'à la limite d'un temps théoriquement infini, la barre s'arrête et, comme il se doit, le courant induit disparaît. L'échelle de temps caractéristique est donnée par  $\tau$ . Ainsi, pour  $t = 3\tau$ , la vitesse ne vaut plus que 5% de sa valeur initiale<sup>7</sup>. On note que le freinage est d'autant plus efficace, c'est-à-dire s'effectue dans un laps de temps caractéristique  $\tau$  d'autant plus court, que  $B$  et  $\ell$  sont grands, ce qui peut se concevoir en terme de flux : plus le produit  $B\ell$  est grand, plus grand est le flux initial, plus grande sera sa variation et plus importante sera la réaction de la f.e.m. induite.

La variation par unité de temps de l'énergie cinétique de la barre est

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} = F_{La} v = i \ell B v = -i \mathcal{E} = -R i^2 \quad (9.18)$$

cette relation montre clairement la conversion d'énergie qui s'opère. L'énergie cinétique de la barre se transforme progressivement en énergie électrique, qui elle-même se dégrade en chaleur par effet Joule. Le mouvement s'arrête lorsque toute l'énergie cinétique initiale de la barre aura été ainsi dépensée.

La quantité de charge qui aura circulée dans le circuit pendant le mouvement de la barre est donnée par

$$\Delta Q = \int_0^{+\infty} i dt = \int_0^{+\infty} \frac{m}{\ell B} \frac{dv}{dt} dt = -\frac{m v_0}{\ell B} \quad (9.19)$$

### 9.2.2 Freinage dans un circuit comportant un générateur de tension

Considérons maintenant le cas où le circuit des deux rails et de la barre est relié à un générateur délivrant une tension constante  $E$ , comme indiqué sur la figure 9.4.

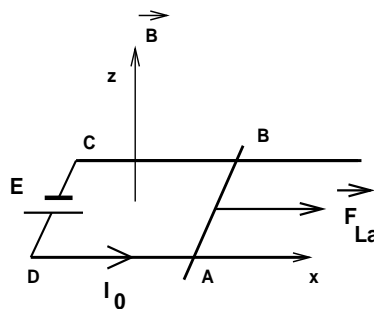


Figure 9.4

Cette liaison est établie à la date  $t = 0$  par la fermeture d'un interrupteur  $K$ . A la date immédiatement ultérieure  $t = 0^+$ , l'intensité du courant dans le circuit est  $I_0 = E/R$ ,  $R$  étant la résistance totale du circuit, supposée constante. A ce moment, il s'exerce sur la barre la force de Laplace

$$\vec{F}_{La} = I_0 \ell B \vec{e}_x \quad (9.20)$$

<sup>7</sup> $e^{-3} = 5 \cdot 10^{-2}$

et la barre mobile  $AB$  se met donc en mouvement<sup>8</sup>. Cependant, celle-ci ne sera pas indéfiniment accélérée car, du fait de l'augmentation consécutive de flux, un phénomène d'induction de caractère modérateur entre alors en action.

Notons  $I$  et  $v$  les valeurs, à la date  $t > 0$ , de l'intensité du courant dans le circuit et de la vitesse de la barre, respectivement. Les équations régissant l'évolution du système sont maintenant les suivantes.

- Equation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = F_{La} = I\ell B \quad (9.21)$$

- Equations électriques

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v, \quad E + \mathcal{E} = RI \quad (9.22)$$

D'où l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = \frac{EB\ell}{mR} - \frac{v}{\tau}, \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2} \quad (9.23)$$

Compte-tenu de la condition initiale  $v(0) = 0$ , on en déduit l'expression suivante de  $v$

$$v = \frac{E}{B\ell} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (9.24)$$

La vitesse augmente donc, certes, mais au bout d'un laps de temps de l'ordre de quelques  $\tau$  elle atteint une valeur limite égale à

$$v_{\text{lim}} = \frac{E}{B\ell} \quad (9.25)$$

Quant à la f.e.m. d'induction, elle est donnée en fonction du temps par

$$\mathcal{E} = B\ell v = -E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (9.26)$$

Comme on pouvait s'y attendre, le résultat donne une f.e.m. s'opposant progressivement à la tension du générateur qui est l'une des causes du mouvement de la barre, jusqu'à l'annuler théoriquement. L'intensité du courant

$$I = \frac{E + \mathcal{E}}{R} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.27)$$

décroît dans le temps : l'intensité initiale  $I_0$  est progressivement compensée par celle du courant induit, qui lui est opposée.

Faisons le bilan énergétique du processus. De la relation

$$E = -\mathcal{E} + RI$$

---

<sup>8</sup>A noter que, conformément à la règle du flux maximum, la barre se déplace dans le sens visant à augmenter le flux du champ magnétique inducteur.



on déduit la suivante

$$EI = -\mathcal{E}I + RI^2 \quad (9.28)$$

montrant clairement que la puissance délivrée par le générateur fournit, d'une part, celle relevant du phénomène d'induction et, d'autre part, celle dissipée par effet Joule. D'un autre côté, on a

$$-\mathcal{E}I = \ell BvI = F_{La}v \quad (9.29)$$

Ainsi, le générateur aura finalement produit l'énergie

$$W_G = \int_0^{+\infty} EI dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2 \tau}{R} = \frac{mE^2}{B^2 \ell^2} \quad (9.30)$$

qui est *indépendante* de  $R$ . L'énergie absorbée dans l'induction vaut

$$W_{\text{ind}} = -\int_0^{+\infty} \mathcal{E}I dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) dt = \frac{E^2 \tau}{2R} = \frac{mE^2}{2B^2 \ell^2} \quad (9.31)$$

c'est-à-dire la *moitié* de la précédente. C'est aussi, d'après le théorème de Maxwell, l'énergie développée par la force de Laplace. On vérifie sans peine que l'effet Joule aura dissipé l'autre moitié de  $W_G$ .

### 9.3 Application importante : les alternateurs

Une application industrielle importante du phénomène d'induction est la production de courants alternatifs au moyen d'appareils portant le nom d'*alternateurs*.

Le principe peut être illustré par le dispositif simple suivant. Une bobine plate, constituée de  $N$  spires jointives circulaires de rayon  $a$ <sup>9</sup>, est placée dans un champ magnétique uniforme orienté verticalement  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ . La bobine fait partie d'un circuit ne comportant aucune source de tension ou de courant. On fait tourner la bobine autour de l'un de ses diamètres horizontal  $x'x$ , dans le sens direct, à la vitesse angulaire constante  $\omega$  (figure 9.5).

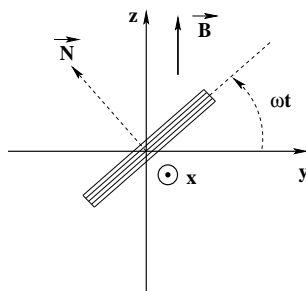


Figure 9.5

Du fait de ce mouvement *relatif* de la bobine par rapport au champ extérieur, le flux de ce dernier à travers la bobine est variable au cours du temps. Il a pour expression

$$\Phi = NSB \cos \omega t \quad (9.32)$$

où  $S = \pi a^2$ . Une f.e.m. d'induction apparaît donc dans la bobine. Elle est donnée par

<sup>9</sup>En fait, la bobine plate peut être de forme quelconque.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_0 \sin \omega t \quad (9.33)$$

où l'on a posé  $\Phi_0 = NSB$ . Une remarque s'impose ici. On note en effet que cette f.e.m. est d'autant plus importante que la vitesse de rotation est grande. Ce fait est bien sûr réminiscent de la loi de Faraday puisque selon celle-ci, la réaction à une variation de flux donnée  $\delta\Phi$  devient de plus en plus violente à mesure que cette variation s'effectue sur un laps de temps  $\delta t$  de plus en plus court.

Admettons que le circuit de la bobine soit purement résistif, de résistance totale  $R$ . L'application de la loi des mailles permet d'obtenir l'intensité  $i$  du courant induit apparu dans ce circuit

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega\Phi_0}{R} \sin \omega t \quad (9.34)$$

Ainsi, du fait de la rotation de la bobine dans le champ inducteur, un courant sinusoïdal est apparu dans celle-ci. C'est un autre exemple simple de transducteur électromagnétique, où l'énergie mécanique nécessaire à la rotation de la bobine est changée en énergie électrique. Précisons ce point. Ici, la bobine est assimilable à un dipôle de moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = i S \vec{\mathcal{N}} \quad (9.35)$$

$\vec{\mathcal{N}}$  étant le vecteur normal à la bobine<sup>10</sup>. Le moment résultant du couple de forces de Laplace agissant sur la bobine, consécutif à l'apparition du courant induit, vaut

$$\vec{\Gamma}_{\text{Lapl}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\vec{e}_x S N i B \sin \omega t = -\vec{e}_x \omega \frac{\Phi_0^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (9.36)$$

Comme il se doit, il est orienté suivant  $xx'$ , s'opposant ainsi à la rotation de la bobine<sup>11</sup>. Pour maintenir la vitesse de rotation constante, le dispositif mécanique extérieur doit exercer sur l'axe de rotation un moment opposé :

$$\vec{\Gamma}_{\text{ext}} = -\vec{\Gamma}_{\text{Lapl}} \quad (9.37)$$

qui développe la puissance instantanée

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{\Gamma}_{\text{ext}} \cdot \vec{e}_x \omega = \frac{\omega^2 \Phi_0^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (9.38)$$

Cependant, la puissance électrique développée par la f.e.m. d'induction est

$$\mathcal{E}i = Ri^2 = \frac{\omega^2 \Phi_0^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (9.39)$$

et se dissipe par effet Joule. On a finalement la chaîne de transformation d'énergie suivante

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{\Gamma}_{\text{ext}} \cdot \vec{e}_x \omega = \mathcal{E}i = Ri^2 \quad (9.40)$$

<sup>10</sup>Son sens est choisi à partir de celui du champ inducteur, selon la règle du tire-bouchon : à angle de rotation nul,  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $\vec{B}$  ont ainsi même orientation.

<sup>11</sup>L'axe de rotation est  $x'x$ .

## 9.4 L'auto-induction

Nous avons vu qu'un circuit parcouru par un courant possède un flux propre, flux de son propre champ magnétique à travers une surface qu'il délimite. On peut donc s'attendre à ce qu'une perturbation quelconque de ce flux provoque un phénomène d'induction à l'intérieur même du circuit.

On observe effectivement qu'une variation de son courant et/ou même sa déformation, ont pour conséquence de faire apparaître dans un circuit une f.e.m. induite dont les effets vont s'opposer à cette variation, conformément à la loi de Lenz. C'est le phénomène d'*auto-induction*, régi lui aussi par la loi de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_p}{dt} \quad (9.41)$$

où  $\Phi_p$  est ici le *flux propre* du circuit, dont l'expression est, rappelons-le

$$\Phi_p = Li \quad (9.42)$$

$L$  étant le coefficient d'auto-induction du circuit et  $i$  l'intensité instantanée du courant qui le traverse. On a donc

$$\boxed{\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt}} \quad (9.43)$$

où le premier terme de l'expression est dû à la variation du courant, et le second à une déformation du circuit.

La propriété essentielle de l'auto-induction est son caractère *inertiel*. La présence de l'auto-induction prévient en effet les variations violentes de toute intensité de courant et en *garantit* en tout cas la *continuité*, au sens mathématique du terme. Il en est ainsi parce que l'expression de la f.e.m. d'auto-induction correspondante

$$\boxed{\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}} \quad (9.44)$$

qui fait intervenir la dérivée temporelle du courant, donne à cette dernière un contenu physique et, par là même, lui impose d'exister, mathématiquement parlant. La conséquence est que l'intensité du courant se doit d'être au moins une fonction continue du temps. Le même type de remarque vaut également pour le coefficient d'auto-induction qui se doit aussi bien d'être une fonction continue du temps.

Une autre façon de présenter les choses et de dire qu'il existe une énergie associée à l'auto-induction, égale à

$$W_p = \frac{1}{2}L i^2 \quad (9.45)$$

et que celle-ci, comme toute autre énergie, *ne peut être une fonction discontinue du temps*. Ceci impose donc la continuité du courant correspondant et aussi du coefficient  $L$ .

Il existe une analogie évidente entre cette énergie et l'énergie cinétique en Mécanique. L'existence de cette dernière, due notamment à l'existence d'une masse, prévient toute variation brusque de la vitesse, ce qui révèle le caractère inertiel de la masse, caractère que l'on retrouve dans le coefficient d'auto-induction. On se rappellera que, étant liée à une dérivée temporelle, l'auto-induction est

une réaction d'autant plus violente que l'intensité varie brusquement. Elle peut éventuellement provoquer des étincelles lors de l'ouverture brusque d'un circuit<sup>12</sup>.

On réalise maintenant la complexité d'un phénomène d'induction et le caractère simpliste des modélisations utilisées dans les exemples précédents pour décrire des évolutions qui n'étaient simples qu'en apparence. Il devient clair notamment que le modèle utilisé pour décrire le mouvement dans un champ magnétique extérieur d'une barre métallique reliée à un circuit, exemple utilisé comme prototype des phénomènes d'induction, présente une incohérence. Imaginons en effet que le champ magnétique extérieur ne soit établi qu'à la date  $t = 0$ , la barre étant alors en mouvement rectiligne uniforme sur les rails. Pour  $t < 0$ , aucun courant ne circulait dans le circuit de la barre. Ce courant n'apparaît que pour  $t > 0$ , et nous lui avons trouvé une valeur initiale différente de zéro :

$$i(0) = -\frac{B\ell v_0}{R} \tag{9.46}$$

Ce modèle prévoit donc une discontinuité, ce qui est impossible physiquement, comme expliqué plus haut. Ceci montre bien que c'est lorsque les courants sont susceptibles de subir de brusques variations que l'auto-induction joue pleinement son rôle modérateur. Dans un traitement plus complet qui tiendrait compte de ce phénomène, nous devrions trouver une valeur initiale de l'intensité du courant égale à zéro et observer un régime transitoire au cours duquel s'établit la valeur trouvée plus haut. La durée de ce régime peut être évaluée de la manière suivante.

On pressent que le modèle précédent ne sera éventuellement valable que pour des dates suffisamment éloignées de la date initiale. Dans les équations, il consiste finalement à négliger les f.e.m. d'auto-induction devant  $Ri$ , supposant en particulier que

$$R|i| \gg L\left|\frac{di}{dt}\right| \tag{9.47}$$

Au voisinage de  $t = 0$ , là où l'auto-induction est à priori importante, ces deux termes sont compétitifs. Dans ce domaine, l'intensité passe rapidement de la valeur zéro à sa valeur maximale  $i_M$  pendant un laps de temps  $\Delta t$  tel que, en gros,

$$R|i_M| \simeq L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| \simeq L\left|\frac{i_M}{\Delta t}\right| \tag{9.48}$$

ce qui donne l'évaluation

$$\boxed{\Delta t \simeq \frac{L}{R}} \tag{9.49}$$

Ce paramètre  $\Delta t$  donne l'échelle de temps où l'influence de l'auto-induction est primordiale<sup>13</sup>. On peut donc prévoir qu'à priori elle ne pourra être négligée que pour

$$t \gg \frac{L}{R} \tag{9.50}$$

ce qui implique en particulier que l'on ait<sup>14</sup>

$$\boxed{\tau \gg \frac{L}{R}} \tag{9.51}$$

<sup>12</sup>C'est la seule façon de s'opposer à l'interruption d'un circuit.

<sup>13</sup>Comme on le sait du cours d'Electrocinétique, c'est la constante de temps d'un circuit  $L, R$ .

<sup>14</sup>Voir le complément 2.

## 9.5 Les transformateurs

Dans les exemples étudiés dans les paragraphes précédents, l'induction est provoquée par le mouvement de conducteurs dans un champ magnétique. Ils sont typiques du cas de Lorentz. Voici maintenant une application importante de l'induction, qui relève du cas de Neumann.

Considérons le dispositif, déjà étudié au chapitre 8, de deux solénoïdes imbriqués  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , que nous supposons de même longueur  $h$ , et  $\mathcal{S}_1$  entourant complètement  $\mathcal{S}_2$ . Dans ces conditions, les coefficients d'auto-induction et d'induction mutuelle sont donnés par

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 \pi a_1^2 h, \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 \pi a_2^2 h, \quad M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi a_2^2 h$$

On notera ici la relation

$$\frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{a_2}{a_1} < 1$$

d'où il ressort que si  $a_1$  et  $a_2$  sont très peu différents, on a approximativement

$$M_{12} \approx \sqrt{L_1 L_2}$$

C'est ce que nous supposons désormais<sup>15</sup>. On a alors

$$L_1 = N_1^2 K, \quad L_2 = N_2^2 K, \quad M_{12} = N_1 N_2 K$$

avec

$$K = \mu_0 \pi \frac{a_1^2}{h}$$

et où  $N_1$  et  $N_2$  sont les tours de fil de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  respectivement.

Nous supposons aussi que  $\mathcal{S}_1$  fait partie d'un circuit, dit *primaire*, de résistance totale  $R_1$  et alimenté par un générateur de tension variable  $E$ , tandis que  $\mathcal{S}_2$ , de résistance  $R_2$ , fait partie d'un circuit, dit *secondaire*, ne comportant, outre  $\mathcal{S}_2$ , qu'une résistance  $r_2$ .

Lorsque  $E$  varie, des phénomènes d'induction apparaissent à la fois dans le circuit primaire et dans le circuit secondaire. Soit  $i_1$  et  $i_2$  les intensités des courants circulant alors dans le primaire et dans le secondaire respectivement. Les flux magnétiques totaux à travers  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  respectivement valent

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 = K N_1 (N_1 i_1 + N_2 i_2) \\ \Phi_2 &= L_2 i_2 + M_{12} i_1 = K N_2 (N_2 i_2 + N_1 i_1) \end{aligned} \quad (9.52)$$

dont le rapport est donc<sup>16</sup>

$$\boxed{\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{N_1}{N_2}} \quad (9.53)$$

Leurs variations temporelles donnent lieu aux forces électromotrices d'induction

<sup>15</sup>Nous avons montré au chapitre 8 que, d'une façon générale,  $|M_{12}|$  reste toujours inférieur ou égal à  $\sqrt{L_1 L_2}$ , de sorte que l'on peut dire que l'induction mutuelle est maximum lorsque cette limite est atteinte.

<sup>16</sup>Les transformateurs usuels comportent en fait un *circuit magnétique* permettant de canaliser les lignes du champ magnétique. Dans ces conditions, les flux magnétiques à travers le primaire et le secondaire sont directement reliés par (9.53), au moins dans le cas idéal où les pertes de flux magnétiques sont négligeables.

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} \quad (9.54)$$

dont le rapport est aussi  $N_1/N_2$ , *indépendamment* du type de variation temporelle.

La loi des mailles appliquée au circuit primaire et au circuit secondaire donne

$$E + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = (R_2 + r_2) i_2 \quad (9.55)$$

La tension  $v$  aux bornes de la résistance  $r_2$ , qui représente une *tension de sortie*, est donnée par

$$v = r_2 i_2 = e_2 \frac{r_2}{R_2 + r_2} \quad (9.56)$$

et la *fonction de transfert* du dispositif, rapport entre la *tension d'entrée*  $E$  et la tension de sortie  $v$ , peut être exprimée comme

$$T = \frac{v}{E} = \frac{r_2}{R_2 + r_2} \frac{e_2}{e_1} \left( \frac{R_1 i_1}{E} - 1 \right) \quad (9.57)$$

Supposons que les résistances  $R_1$  et  $R_2$  puissent être purement et simplement négligées. Il vient alors

$$T \approx -\frac{e_2}{e_1} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (9.58)$$

Dans ces conditions, quelle que soit la variation temporelle de  $E$ , le rapport  $T$  du dispositif est alors défini uniquement par le nombre de tours de fil dans  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . En jouant sur ces nombres, on peut ainsi obtenir aux bornes du circuit secondaire une tension plus grande ou plus petite que la tension d'entrée. C'est le principe du *transformateur* fournissant un rapport  $T$  appelé aussi rapport de transformation.

## 9.6 Champ électromoteur dans le cas général

Nous avons vu que dans le cas de Lorentz le phénomène d'induction peut être interprété au moyen d'un champ électrique électromoteur donné par

$$\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (9.59)$$

Le cas de Neumann peut lui aussi s'interpréter par l'apparition d'un champ électrique électromoteur.

Dans le référentiel où les phénomènes sont étudiés, envisageons en effet un circuit fixe  $\mathcal{C}$  délimitant une surface  $S$ , plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  variable dans le temps. D'après la loi de Faraday, cette variation fait apparaître dans  $\mathcal{C}$  la force électromotrice

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où  $\Phi$  est le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$

$$\Phi = \int \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

flux que l'on peut tout aussi bien exprimer au moyen du potentiel vecteur  $\vec{A}$  attaché à  $\vec{B}$  :

$$\Phi = \int_c \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Il vient alors

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_c \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = -\int_c \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (9.60)$$

Ecrivant la force électromotrice sous la forme bien connue

$$\mathcal{E} = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (9.61)$$

où  $\vec{E}$  est un champ électrique électromoteur, on est conduit à faire l'indentification

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (9.62)$$

valable au gradient d'une fonction près.

Nous admettrons alors que dans le cas général où les situations de Lorentz et de Neumann interviennent simultanément, le champ électrique électromoteur permettant de décrire localement les phénomènes s'écrit

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)} \quad (9.63)$$

où, d'une part,  $\vec{v}(M, t)$  est la vitesse locale de déplacement du conducteur étudié, et, d'autre part,  $\vec{B}(M, t)$  et  $\vec{A}(M, t)$  sont, respectivement, le champ magnétique local total et son potentiel vecteur, prenant en compte tous les champs magnétiques présents. Le premier terme dans l'expression ci-dessus rend compte du déplacement des conducteurs dans les lignes du champ magnétique total présent, et le second de la variation temporelle de ce champ magnétique. Insistons sur le fait que puisque c'est le champ magnétique total qui apparaît dans cette formule, l'auto-induction est directement prise en compte dans l'analyse des phénomènes.

Considérons le cas d'une induction de type Neumann, donc résultant uniquement d'une variation temporelle du champ magnétique. La conséquence en est l'apparition d'un champ électrique électromoteur donné par (9.62) au gradient d'une fonction près. Cette dernière imprécision est liée au fait qu'il existe une multitude de choix de jauge possibles pour le potentiel vecteur. Nous reviendrons sur ce point plus tard. On peut cependant caractériser le phénomène par une équation qui ne dépend pas de la jauge choisie. En effet, prenant le rotationnel de chaque membre de l'équation ci-dessus, on obtient l'équation

$$\boxed{\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t)} \quad (9.64)$$

appelée *équation de Maxwell-Faraday*.

## 9.7 Courants de Foucault

L'existence d'un champ électrique électromoteur résultant des variations temporelles d'un champ magnétique est à l'origine de l'apparition de courants induits dans un conducteur placé dans ce champ. Ces courants sont appelés *courants de Foucault*. Par effet joule, ils occasionnent des déperditions d'énergie, qui cependant sont mises à profit dans les fours à induction.

En guise d'illustration, considérons une boule de rayon  $R$ , faite d'un matériau conducteur de conductivité électrique  $\sigma$ , et plongée dans un champ magnétique variable dans le temps. La boule repose sur un plan horizontal et le champ magnétique, orienté suivant la verticale, est uniforme spatialement et varie sinusoidalement au cours du temps (figure 9.6) :

$$\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z$$

Le dispositif ayant la symétrie de révolution autour de la verticale  $z'Oz$  passant par le centre  $O$  de la boule, il est tout à fait pertinent de rechercher pour ce champ magnétique un potentiel vecteur respectant cette symétrie<sup>17</sup>. Or, pour tout point  $M$ , le plan contenant ce point et l'axe  $z'Oz$  est un plan de symétrie positive pour le champ  $\vec{B}$ . C'est donc un plan de symétrie négative pour son potentiel vecteur. En conséquence, le potentiel vecteur en  $M$  doit être perpendiculaire à ce plan. Dans un système de coordonnées cylindriques construit autour de l'axe  $z'Oz$ , ce champ sera ainsi de la forme

$$\vec{A}(M) = A_\varphi(\rho, \varphi, z, t) \vec{e}_\varphi$$

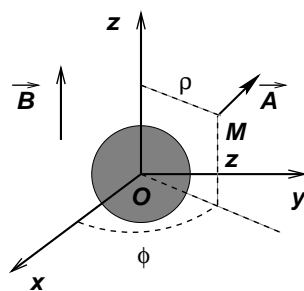


Figure 9.6

$\rho$  étant la distance de  $M$  à l'axe  $z'Oz$ ,  $z$  sa cote par rapport au plan horizontal  $xOy$ , et  $\varphi$  l'angle polaire du demi-plan contenant  $M$  et  $z'z$ , par rapport au plan  $xOz$ . Les lignes de champ du potentiel vecteur recherché sont donc des cercles ayant pour centres les points de l'axe  $z'Oz$  et situés dans des plans parallèles à  $xOy$ . Du fait de la symétrie de révolution, on peut de plus choisir  $A_\varphi$  indépendant de  $\varphi$ , ce qui d'ailleurs correspond à un potentiel vecteur satisfaisant la jauge de Coulomb. Sur la ligne de champ passant par  $M(\rho, \varphi, z)$ , définie par  $\rho = \text{constante}$  et  $z = \text{constante}$ , le potentiel vecteur garde une intensité constante. L'application du théorème de Stokes à cette ligne de champ conduit alors au résultat

$$2\pi\rho A_\varphi(\rho, z, t) = \pi\rho^2 B_0 \cos \omega t$$

soit

$$A_\varphi(\rho, z, t) \equiv A_\varphi(\rho, t) = \frac{\rho}{2} B_0 \cos \omega t$$

d'où le champ électromoteur

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \omega \frac{\rho}{2} B_0 \sin \omega t \vec{e}_\varphi$$

<sup>17</sup>Cette façon de procéder est permise, grâce à l'invariance de jauge. Ce fait sera explicité dans la suite du cours.



Ce champ électromoteur induit dans la boule conductrice des déplacements de charges donnant lieu à un vecteur densité volumique de courant donné par la loi d'Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \omega \frac{\rho}{2} B_0 \sin \omega t \vec{e}_\varphi$$

et dont les lignes de champ sont elles aussi circulaires autour de l'axe  $z'Oz$ . Calculons la puissance totale  $P$  développée par le champ électromoteur dans le déplacement des charges à l'intérieur de la boule. On a

$$P = \int_{\text{boule}} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = \sigma \int_{\text{boule}} \vec{E}^2 d\tau$$

Utilisons un système de coordonnées sphériques centrées sur  $O$ . On a alors  $d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  et  $\rho = r \sin \theta$ . Il vient

$$\begin{aligned} P &= \frac{B_0^2 \sigma \omega^2}{4} \sin^2 \omega t \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi B_0^2 \sigma \omega^2 R^5}{2 \cdot 5} \sin^2 \omega t \int_{-1}^{+1} dx (1 - x^2) \\ &= 2 \sin^2 \omega t \frac{\pi B_0^2 \sigma \omega^2 R^5}{15} \end{aligned}$$

dont la valeur moyenne temporelle est ( $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ )

$$\langle P \rangle = \frac{\pi B_0^2 \sigma \omega^2 R^5}{15}$$

Cette puissance, qui se dissipe par effet Joule, est proportionnelle à la puissance cinquième du rayon de la boule et au carré de la fréquence de variation du champ magnétique inducteur. Pour une bille de rayon 5 mm et de conductivité  $\approx 5 \cdot 10^7$  S/m plongée dans un champ d'amplitude  $\approx 4 \cdot 10^{-7}$  T, elle atteint 1 mW pour des fréquences de l'ordre de 2 MHz.

Il est aussi utile d'avoir une idée de l'amplitude du champ magnétique induit créé par les courants de Foucault. Nous en ferons une évaluation au centre de la boule en utilisant la loi de Biot et Savart :

$$\begin{aligned} \vec{B}_i(O) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{boule}} \frac{\vec{J} \wedge \vec{PO}}{PO^3} d\tau = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{8\pi} B_0 \sin \omega t \int_{\text{boule}} r dr \sin^2 \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{8\pi} B_0 \sin \omega t \vec{e}_z \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^2}{6} \vec{e}_z B_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

L'amplitude maximum du champ induit en  $O$  est donc dans le rapport  $\frac{\mu_0 \sigma \omega R^2}{6}$  avec celle du champ inducteur. Pour la bille considérée, ce modèle prévoit que le champ induit devient du même ordre de grandeur que le champ inducteur déjà pour des fréquences de l'ordre de 500 Hz.

## 9.8 Complément I : retour sur l'énergie magnétique d'interaction mutuelle

L'expression de l'énergie d'interaction de deux circuits a été précédemment déduite en évaluant le travail qu'un opérateur extérieur doit exercer pour amener les deux circuits dans leurs positions finales respectives, ce qui permet d'interpréter cette énergie comme l'énergie de constitution de ce système, en mettant à part les énergies propres de chacun des circuits, supposées rester constantes dans cette opération. Pour que ce travail corresponde exactement à l'énergie d'interaction, l'opérateur doit continuellement équilibrer les forces magnétiques s'exerçant sur l'un et l'autre circuit, et veiller à ce qu'aucun des circuits ne soit perturbé dans ce processus, ce qui implique, d'une part, que la géométrie propre de chacun des circuits ne doit pas être modifiée (les coefficients d'auto-induction restant ainsi constants), et que, d'autre part, les intensités des courants circulant dans les circuits doivent rester constantes. Cependant, selon la loi de Faraday, le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique extérieur provoque dans celui-ci l'apparition d'une force électromotrice d'induction, phénomène qui peut donner lieu à une dépense supplémentaire d'énergie par l'opérateur, sous forme d'énergie électrique, dans le but de contre-carrer l'action de cette induction dans ledit circuit. Il est donc utile de reconsidérer le bilan énergétique dans ce processus de formation du système, en tenant compte des phénomènes d'induction, à la lumière de la loi de Faraday.

Considérons donc deux circuits,  $C_1$  et  $C_2$ , rigides et supposés filiformes pour simplifier le raisonnement. Notons  $i_1$  et  $i_2$  les intensités des courants électriques circulant dans  $C_1$  et  $C_2$  respectivement,  $M$  leur coefficient d'induction mutuelle. Nous supposons que les circuits sont reliés à des sources  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  respectivement, qui permettent de maintenir constantes les intensités des courants et qui, à ce titre, devront être considérées comme faisant partie intégrante du système "opérateur" qui mène le processus de rapprochement des deux circuits. Lorsque le circuit  $C_2$  est déplacé,  $M$  varie et le flux  $\Phi_{21} = Mi_2$  envoyé par  $C_2$  à travers la surface de  $C_1$  aussi. Ceci a pour conséquence l'apparition dans  $C_1$  de la force électromotrice d'induction

$$e_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -i_2 \frac{dM}{dt}$$

Pour maintenir  $i_1$  constant, il faut faire varier la force électromotrice de la source  $\mathcal{S}_1$  de sa valeur initiale  $E_1$  à la valeur  $E_1 - e_1$ . L'énergie électrique supplémentaire que devra fournir cette source pendant la durée du déplacement entre  $t$  et  $t + dt$  sera donc

$$-e_1 i_1 dt = + i_1 i_2 \frac{dM}{dt} dt$$

De façon similaire, apparaît dans  $C_2$  la force électromotrice d'induction

$$e_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -i_1 \frac{dM}{dt}$$

et pour maintenir  $i_2$  constant, la source  $\mathcal{S}_2$  devra fournir l'énergie électrique

$$-e_2 i_2 dt = + i_2 i_1 \frac{dM}{dt} dt$$

Ainsi, dans ce déplacement, les sources électriques fournissent au total l'énergie

$$W_{\text{sources}} = 2 i_2 i_1 \frac{dM}{dt} dt$$

Cependant, dans l'opération, les forces magnétiques ont développé le travail

$$W_m = i_2 \Delta\Phi_{12} = i_2 i_1 \frac{dM}{dt} dt$$

c'est-à-dire que l'opérateur déplaçant le circuit  $C_2$  en compensant les forces magnétiques aura fourni le travail

$$W_{\text{opérateur}} = -i_2 i_1 \frac{dM}{dt} dt$$

Au final, l'ensemble des deux circuits aura reçu l'énergie

$$W_{\text{sources}} + W_{\text{opérateur}} = +i_2 i_1 \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 dM = d(i_1 i_2 M)$$

(puisque  $i_1$  et  $i_2$  restent constants). Pour un déplacement fini, l'énergie emmagasinée par le système des deux circuits sera ainsi

$$W_{12} = \Delta(M i_1 i_2) = M i_1 i_2$$

en admettant que l'on ait  $M = 0$  lorsque les deux circuits sont infiniment éloignés. On retrouve ainsi la formule donnée au chapitre 8.

## 9.9 Complément II : l'auto-induction lors de la décharge d'un condensateur

Selon le modèle couramment utilisé, lors de la décharge d'un condensateur de capacité  $C$  au travers d'une résistance  $R$ , l'évolution de sa charge  $Q(t)$  est régie par l'équation différentielle du *premier ordre*

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

dont la solution mathématique  $Q(t) = K e^{-t/(RC)}$  dépend d'une seule constante  $K$ . Comme d'habitude, cette constante est ajustée au protocole de l'expérience, pour lequel la charge initiale du condensateur a une certaine valeur donnée  $Q_0$ . On en déduit ainsi la loi horaire

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

D'après l'équation différentielle, l'intensité du courant débité dans la résistance est alors donnée par

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/(RC)}$$

Le modèle prévoit donc une valeur non nulle du courant à  $t = 0$  :

$$i(0) = \frac{Q_0}{RC}$$

Mais nous savons que ceci ne peut être vrai car, avant que ne se déclenche la décharge, aucun courant ne circulait dans la résistance. L'intensité du courant était nulle pour  $t < 0$  et comme elle est certainement une fonction continue du temps, elle doit aussi être nulle pour  $t = 0$ . En fait, le phénomène ignoré dans le modèle est l'auto-induction du circuit de raccordement des deux bornes du condensateur. Aussi petit soit le coefficient d'auto-induction  $L$  de ce circuit, il doit jouer un rôle essentiel à  $t = 0$  pour assurer la continuité de l'intensité du courant. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici.

En tenant compte de la force électromotrice d'auto-induction du circuit, l'équation d'évolution de la charge devient

$$Ri(t) = \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt}$$

soit, avec  $i = -\frac{dQ}{dt}$ ,

$$\frac{Q}{LC} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Cette fois, nous disposons d'une équation différentielle du *second ordre*, dont la solution générale dépend de *deux constantes*. Cette circonstance permet maintenant ce qu'il était impossible de faire avec l'équation du premier ordre précédente, à savoir, non seulement ajuster la solution générale à la condition initiale  $Q(0) = Q_0$ , mais aussi *imposer* la seconde condition  $i(0) = 0$  !

En effet, la solution générale de l'équation du second ordre s'écrit

$$Q(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad , \quad \text{et} \quad i(t) = -\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les solutions, ici supposées distinctes, de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

soit

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} \right] \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \right]$$

Supposer le coefficient d'auto-induction très petit revient à considérer que l'on a  $\frac{R^2}{L^2} \gg \frac{4}{LC}$ , ce qui conduit aux approximations

$$\lambda_1 \approx -\frac{1}{RC} \quad , \quad \lambda_2 \approx -\frac{R}{L}$$

qui font apparaître deux constantes de temps : l'une,  $\tau_1 = RC$  est celle d'un circuit condensateur-résistance sans inductance ; l'autre,  $\tau_2 = \frac{L}{R}$  est celle d'un circuit inductance-résistance, sans condensateur. La condition de l'approximation ci-dessus se traduit maintenant par

$$\tau_1 \gg \tau_2$$

révélaient clairement que l'effet de l'auto-induction se produit dans un laps de temps beaucoup plus court que celui de la décharge proprement dite, immédiatement après le début de l'expérience. L'application des conditions initiales donne

$$Q(0) = Q_0 = A_1 + A_2 \quad , \quad i(0) = 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$$

d'où

$$A_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} Q_0 \quad , \quad A_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} Q_0$$

Tout calcul fait, on trouve

$$Q(t) = \frac{Q_0}{1 - \tau_2/\tau_1} \left[ e^{\lambda_1 t} - \frac{\tau_2}{\tau_1} e^{\lambda_2 t} \right] \approx Q_0 e^{-t/\tau_1}$$

et

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC} \frac{1}{1 - \tau_2/\tau_1} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] \approx \frac{Q_0}{RC} [e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}]$$

Considérant l'expression de  $i(t)$  ainsi trouvée, l'effet de l'auto-induction apparaît clairement. Il intervient par le facteur exponentiel  $e^{-t/\tau_2}$  qui s'oppose au facteur exponentiel  $e^{-t/\tau_1}$  du modèle usuel de la décharge du condensateur. A  $t = 0$ , ces deux facteurs se compensent et l'intensité est bien nulle maintenant. Tant que  $t$  n'est pas trop grand devant  $\tau_2$ , le facteur d'auto-induction  $e^{-t/\tau_2}$  est toujours compétitif par rapport à  $e^{-t/\tau_1} \approx 1$ . Dans cet intervalle de temps, l'intensité croît rapidement pour atteindre une valeur maximum très voisine de  $Q_0/(RC)$  qui est la valeur initiale attribuée à l'intensité dans le modèle usuel de la décharge. Par exemple, si  $\tau_1/\tau_2 = 10^4$ , cette valeur maximum est atteinte à la date  $t_M \approx 9\tau_2$ .

A partir de cette date, le facteur  $e^{-t/\tau_2}$  devient complètement négligeable devant  $e^{-t/\tau_1}$  : dès lors, les variations de l'intensité ne sont plus suffisamment violentes pour que l'auto-induction puisse encore jouer un rôle appréciable. On retrouve alors l'expression classique de l'intensité

$$i(t) \approx \frac{Q_0}{RC} e^{-t/(RC)} \quad , \quad \text{pour } t \gg \tau_2$$

Le traitement usuel de la décharge revient donc à ignorer le phénomène d'auto-induction qui se déroule dans un laps de temps très court après que soient reliées les deux bornes du condensateur. L'exemple étudié ici illustre bien le fait que, même dans un circuit où des composants inductifs clairement identifiés (comme des bobines de coefficients d'auto-induction appréciables) sont absents, l'auto-induction n'en est pas moins toujours présente et se révèle pleinement comme phénomène modérateur, dès lors que le courant subit des variations temporelles rapides (régimes de très haute fréquence), voire violentes (ouverture ou fermeture d'un interrupteur), et doit alors être prise en compte dans une description complète des phénomènes associés.

## 9.10 Complément III : la pince ampèremétrique

Un solénoïde torique  $\mathcal{S}$  est constitué par  $N$  spires jointives de section carrée d'aire  $S = a^2$ , dont les centres sont à la distance  $r$  de l'axe  $z'z$  du tore. On suppose  $N \gg 1$ . Un fil conducteur infiniment long confondu avec  $z'z$  est parcouru par un courant d'intensité variable  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ . Le solénoïde est fermé sur une résistance  $R$ . Soit  $i$  l'intensité du courant induit dans le solénoïde.

Dans l'approximation des régimes lentement variables, le champ magnétique produit par le fil en un point  $P$  repéré par ses coordonnées cylindriques  $\rho, \varphi, z$  est

$$\vec{B}_F = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

et celui du solénoïde en  $P$  n'est différent de zéro que si ce point est à l'intérieur du tore, auquel cas il a pour expression

$$\vec{B}_S = \frac{\mu_0 N i}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

Le coefficient d'induction mutuelle entre le fil et  $\mathcal{S}$  peut être calculé simplement au moyen de la formule

$$M = \frac{1}{\mu_0 I i} \int_{\text{espace}} \vec{B}_F \cdot \vec{B}_S \, d\tau$$

qui, tous calculs faits, donne

$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \log \left[ \frac{r + a/2}{r - a/2} \right] \tag{9.65}$$

Le flux magnétique total à travers la surface de  $\mathcal{S}$  est

$$\Phi_{\text{tot}} = MI + Li$$

où  $L$  est le coefficient d'auto-induction de  $\mathcal{S}$  dont l'expression est simplement  $L = NM$ , du fait de la géométrie particulière du dispositif. Nous admettons que la réaction du solénoïde sur le fil peut être négligée, c'est-à-dire, que l'intensité  $I$  n'est pas perturbée par la présence de  $\mathcal{S}$ . Pour obtenir l'expression de  $i$ , il suffit d'appliquer la loi des mailles au circuit de  $\mathcal{S}$ , qui conduit à l'équation

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = -\frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} = -M\frac{dI}{dt} - L\frac{di}{dt} = Ri \quad (9.66)$$

En régime permanent établi,  $i$  est, comme  $I$ , une fonction sinusoïdale du temps. Il est alors commode d'utiliser la notation complexe des grandeurs. On trouve ainsi

$$i = -\frac{Mj\omega}{R + jL\omega} I \quad (9.67)$$

où ici  $I = I_0 e^{j\omega t}$ . Supposons que dans le domaine de fréquences exploré on ait  $L\omega \gg R$ . L'équation précédente devient

$$i \simeq -\frac{M}{L} I = -\frac{I}{N} \quad (9.68)$$

On obtient alors une relation très simple entre courant induit et courant inducteur : leurs intensités sont dans le rapport  $1/N$ . Le dispositif agit comme un transformateur et son application pratique est évidente : en entourant le fil conducteur par un bobinage, on peut mesurer l'intensité du courant qu'il transporte, sans interrompre le circuit dont il fait partie, contrairement à d'autres appareils qui nécessitent un contact physique avec les conducteurs. Le rapport de transformation  $1/N$  peut en outre permettre de mesurer de fortes intensités si  $N$  est grand. Ce procédé de mesure simple, rapide et sécurisant est le principe de base de la *pince ampèremétrique*.

En fait, les pinces ampèremétriques usuelles sont constituées différemment : leurs mâchoires comportent un matériau magnétique (fer doux) sur lequel est bobiné un fil conducteur. Lorsque les mâchoires entourent le conducteur, elles constituent ainsi un circuit magnétique qui permet de canaliser les lignes du champ magnétique produit par le conducteur. Un exemplaire de pince est présenté dans la figure 9.7.



Figure 9.7

La pince ampèremétrique délivre un courant ou une tension proportionnelle à l'intensité mesurée. Selon les applications visées, les rapports de transformation peuvent être divers, souvent 1000 :1.

Certaines pinces contiennent un noyau en métal de haute qualité, ce qui permet de réduire les pertes occasionnées par les courants de Foucault et d'obtenir ainsi des mesures précises, même avec un courant primaire faible.

Une pince peut comporter en plus un capteur à effet Hall, ce qui lui permet de mesurer aussi bien des courants continus que des courants variables. La pince est composée d'un circuit magnétique se refermant sur une pastille semi-conductrice (figure 9.8). Cette pastille est soumise au champ magnétique du courant à mesurer. C'est ce champ qui est mesuré car il a l'avantage d'être présent quel que soit le type de courant.

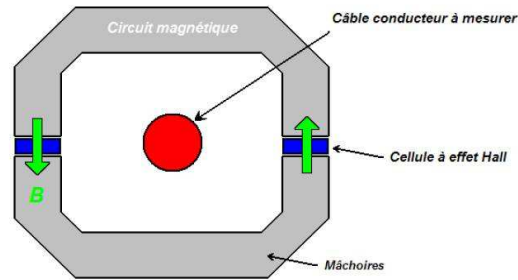


Figure 9.8

Les pinces sont généralement associées à un multimètre adapté à la qualité de mesure désirée. Très utiles dans des environnements qui peuvent être complexes (figure 9.9), elles accroissent les capacités de mesure de divers appareils tels les multimètres, les appareils de mesure de puissance, les oscilloscopes, les enregistreurs, les centrales d'acquisition.



Figure 9.9