

Notes sur le  
mouvement d'une particule  
dans un champ de forces centrales

Christian Carimalo

# 1 Mise en forme des équations

Nous sommes en Mécanique Classique non-relativiste. Dans un référentiel galiléen  $R(O, x, y, z, t)$ , un point matériel  $P$  de masse  $m$  est soumis à un *champ de forces centrales* de source  $O$ <sup>1</sup>. Cela signifie qu'à toute date  $t$ , la force qui s'exerce sur  $P$  est orientée selon le vecteur  $\mathbf{OP}$  et que son intensité ne dépend que de la distance  $r = OP$ . Elle s'écrit

$$\mathbf{F}(P) = F(r) \mathbf{e}_r \quad \text{où} \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{OP}/r$$

Ladite force *dérive d'un potentiel*  $V$ , c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$\mathbf{F}(P) = -\mathbf{grad} V(P)$$

Il en est ainsi car  $\mathbf{F}(P) \cdot d\mathbf{OP} = F(r)dr$  est manifestement une différentielle exacte. Le potentiel  $V$  s'obtient par intégration de l'équation  $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ . Il ne dépend donc que de  $r$  (symétrie sphérique) et on le note  $V(r)$ .

Sous l'effet de cette force,  $P$  acquiert dans  $R$  un mouvement de vitesse  $\mathbf{v}$  et d'accélération  $\mathbf{a}$ , cette dernière étant obtenue par la relation fondamentale

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{1}$$

qui régit l'évolution de  $P$  dans ce champ de forces. L'intégration de (1) passe par la recherche de constantes du mouvement, dites *intégrales premières*. Certaines de ces constantes sont liées aux symétries du système étudié.

## 1.1 Le moment cinétique

L'une de ces constantes, de nature vectorielle, est le moment cinétique, ou moment angulaire

$$\mathbf{L} = m \mathbf{OP} \wedge \mathbf{v} \tag{2}$$

de  $P$  par rapport à  $O$ . C'est en effet une constante du mouvement, car

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F} = \frac{F(r)}{r} \mathbf{OP} \wedge \mathbf{OP} = \mathbf{0} \tag{3}$$

---

1. Le système réel est celui où deux particules  $P_1$  et  $P_2$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  interagissent par une force centrale, et  $P$  est une particule fictive, de *masse réduite*  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , introduite pour décrire plus simplement cette interaction.

Il est clair que la constance du moment cinétique est due à la symétrie sphérique du problème. Par construction du vecteur  $\mathbf{L}$ , les vecteurs  $\mathbf{OP}$  et  $\mathbf{v}$  qui lui sont orthogonaux sont ainsi constamment orthogonaux à un vecteur constant. On en déduit que la trajectoire de  $P$  est toute entière contenue dans un plan orthogonal à  $\mathbf{L}$  et contenant aussi l'origine  $O$  puisque  $\mathbf{OP}$  est dans ce plan. Cette constatation permet de réduire le nombre de variables de 3 à 2. En effet, nous pouvons redéfinir le repère d'espace cartésien de telle sorte que l'axe  $Oz$  soit orienté selon  $\mathbf{L}$ . Le plan de la trajectoire sera donc le plan  $xOy$ . Il est ensuite avantageux de paramétriser la position de  $P$  dans ce plan au moyen de ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \text{ avec } \mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y$$

Avec ces coordonnées, le vecteur vitesse prend la forme  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$  et l'on a

$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z = \text{constante} \quad (4)$$

La grandeur  $L = mr^2\dot{\theta}$  est donc une constante que l'on peut supposer positive, puisque nous avons choisi d'orienter  $\mathbf{e}_z$  selon  $\mathbf{L}$ .

☞ On en déduit  $\dot{\theta} > 0$ , c'est-à-dire que  $\theta(t)$  est une fonction du temps strictement croissante<sup>2</sup>, avec une conséquence qui mérite d'être mentionnée en dépit de son apparente trivialité : *s'il en existe, toute trajectoire fermée entoure obligatoirement le centre de forces.*

☞ Rappelons que le moment cinétique est lié à la *vitesse aréolaire*  $\dot{A}$  par la relation<sup>3</sup>

$$L = 2m\dot{A} \quad (5)$$

## 1.2 L'énergie

Les équations du mouvement de  $P$  peuvent être déduites du Lagrangien

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = E_c - V(r) = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] - V(r) \quad (6)$$

via les équations d'Euler-Lagrange

---

2. Nous écartons ici le cas particulier  $C = 0$  correspondant à un mouvement rectiligne de  $P$  sur une droite passant par  $O$ .

3.  $\dot{A}dt$  est l'aire, infinitésimale, du triangle formé par les deux rayons vecteurs infiniment voisins  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t+dt)$  et le vecteur  $\mathbf{v}(t)dt$  qui joint leurs extrémités.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (7)$$

L'angle  $\theta$  n'apparaît pas explicitement dans l'expression (6); c'est une *variable cyclique*. On en déduit à nouveau que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = mr^2\dot{\theta} = L$  est une constante du mouvement. On a  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$  et le Hamiltonien associé

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = E_c + V = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] + V(r) \quad (8)$$

est aussi une constante du mouvement car le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. La constance du Hamiltonien résulte d'une autre symétrie : l'invariance de l'évolution du système par translation temporelle, qui signifie que l'origine des dates est ici inessentielle. Ledit Hamiltonien représente l'énergie mécanique  $E$  de  $P$  et l'on en déduit l'équation

$$E = \frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] + V(r) = \text{constante} \quad (9)$$

laquelle, compte tenu de la relation  $\dot{\theta} = L/(mr^2)$ , est en fait une équation reliant  $r$  à sa dérivée  $\dot{r}$  :

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} + V(r) = \text{constante} \quad (10)$$

Dans l'équation (10), le terme dit de "barrière centrifuge"  $\frac{L^2}{2mr^2}$  joue le rôle d'un potentiel répulsif. La grandeur

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (11)$$

représente le *potentiel effectif* pour ce qui concerne l'évolution de la variable  $r$ . L'utilisation de l'intégrale première  $E$  permet ainsi de réduire encore d'une unité le nombre de variables : il ne reste plus que l'équation d'évolution de la variable  $r$ . Celle-ci est obtenue en écrivant  $dE/dt = 0$ , ce qui donne, pour un mouvement où  $\dot{r}$  n'est généralement pas nul,

$$m\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} \quad (12)$$

## 1.3 Formules de Binet

Donnons ici des formes simplifiées des relations (10) et (12), dites formules de Binet<sup>4</sup>, qui peuvent s'avérer utiles. Posons  $u = \frac{1}{r}$ . On a :  $\dot{r} = -r^2\dot{u} = -r^2\theta\frac{du}{d\theta} = -u'L/m$  où  $u' = \frac{du}{d\theta}$ . Il vient alors

$$\mathcal{E} = \frac{mE}{L^2} = \frac{1}{2} [u'^2 + u^2] + W(u), \quad \text{où } W(u) = \frac{m}{L^2} V\left(\frac{1}{u}\right) \quad (13)$$

Avec la nouvelle variable  $u(\theta)$ , l'énergie potentielle effective prend la forme

$$Z(u) = \frac{u^2}{2} + W(u) \quad (14)$$

et l'équation différentielle du mouvement s'obtient en écrivant  $\frac{d\mathcal{E}}{d\theta} = 0$ , soit

$$u'' = -\frac{dZ}{du} \quad (15)$$

## 2 Propriétés générales des trajectoires

### 2.1 La Courbure

Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement est défini par le vecteur vitesse :

$$\mathbf{T} = \mathbf{v}/v \quad \text{où } v = \|\mathbf{v}\| \quad (16)$$

Notons ici que d'après (10)

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r))} \quad (17)$$

La composante radiale  $T_r = \dot{r}/v$  peut donc être positive ou négative, tandis que la composante orthoradiale  $T_\theta = r\dot{\theta}/v = L/(mrv)$  est toujours positive. En tout cas, pour une même distance, la tangente à une trajectoire ne peut avoir que deux orientations. Ce résultat est une conséquence de la symétrie sphérique du potentiel qui fait que, dans le plan de la trajectoire, toutes les grandeurs cinématiques ne dépendent plus que de  $r$ , une fois fixées les constantes  $E$  et  $L$ , On a

---

4. Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{T} + v \dot{\mathbf{T}}$$

Comme  $\mathbf{T}$  est unitaire, sa dérivée  $\dot{\mathbf{T}}$  lui est orthogonale car  $d\|\mathbf{T}\|^2/dt = 0 = 2\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}$ . Observant que le vecteur  $\dot{\mathbf{T}}/v$  est homogène à l'inverse d'une longueur, on écrit

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{v}{\mathcal{R}} \mathbf{N} \quad (18)$$

où  $\mathbf{N}$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{T}$ , appelé *normale principale*, et  $\mathcal{R}$ , homogène à une longueur, est le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. On peut ici faire le choix

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{T} \quad (19)$$

La *courbure* locale de la trajectoire est l'inverse du rayon de courbure :

$$\kappa = 1/\mathcal{R} \quad (20)$$

Rappelons que le rayon de courbure local est le rayon du cercle osculateur. Avec ces définitions, on obtient

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N} \quad (21)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{T} &= F(r) \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} / (mrv) = F(r) \mathbf{L} / (m^2rv) \\ &= v^2 \kappa \mathbf{N} \wedge \mathbf{T} = -v^2 \kappa \mathbf{e}_z, \quad \text{d'où} \\ \kappa &= -\frac{F(r)L}{m^2rv^3} \end{aligned} \quad (22)$$

On déduit de cette formule que si le potentiel est partout attractif, c'est-à-dire, si  $F(r) = -dV/dr < 0$  partout, alors la courbure de la trajectoire est toujours positive. A contrario, la courbure est partout négative lorsque le potentiel est partout répulsif.

## 2.2 Régions permises et points de retournement

De (10), on tire la condition de positivité évidente

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - U(r)] \geq 0, \quad \text{soit } U(r) \leq E, \quad (23)$$

qui limite éventuellement les possibilités de variation de  $r$ , selon celles de  $U(r)$  et de la valeur de l'énergie.

Si par exemple  $E > 0$ , la limitation n'est effective que pour les valeurs de  $r$  correspondant à des valeurs positives de  $U(r)$ . Si  $U(r)$  devient négatif pour des valeurs de  $r$  suffisamment grandes, ce qui correspondrait à une région où le potentiel  $V(r)$  est négatif et l'emporte sur le terme centrifuge, le point  $P$  peut s'éloigner jusqu'à des distances infinies, le mouvement n'est pas borné. Cette même conclusion vaut pour un potentiel effectif  $U(r)$  dont la valeur absolue décroît à grandes distances  $r$ . Le terme centrifuge de  $U(r)$ , positif et donc répulsif, empêche a priori le point  $P$  d'approcher de trop près la source  $O$ . Cependant, un potentiel attractif, donc négatif, peut contrebalancer l'effet de cette barrière centrifuge à partir de certaines valeurs de  $r$  pour lesquelles  $U(r)$  devient négatif. Dans une telle région, correspondant généralement à des distances "petites" ou "moyennes" (qualificatifs à définir selon le contexte), un mouvement peut être réalisé avec une énergie négative, la condition devenant  $|E| \leq |U(r)|$ . En effet, comme c'est souvent le cas,  $|U(r)|$  est une fonction décroissante de  $r$ , et la condition contraindra  $r$  à ne prendre que des valeurs finies. Le cas  $E < 0$  correspond ainsi à des trajectoires bornées s'inscrivant dans une couronne circulaire  $0 \leq r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  centrée sur  $O$ .

Les points pour lesquels  $U(r) = E$  sont des *points de retournement* :  $\dot{r}$  s'y annule et change de signe. La relation (23) permet non pas de trouver directement la fonction  $r(t)$ , mais plutôt d'exprimer la fonction réciproque  $t(r)$  comme l'intégrale

$$t(r) - t(r_1) = \int_{r_1}^r \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(s)]}} \quad (24)$$

laquelle intégrale peut éventuellement s'exprimer elle-même au moyen de fonctions connues.

De même, combinant les deux lois de conservation (4) et (10), on peut exprimer l'angle  $\theta$  en fonction de  $r$  sous la forme

$$\theta(r) - \theta(r_1) = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{r_1}^r \frac{\pm ds}{s^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(s)]}} \quad (25)$$

où le signe de l'intégrande doit être choisi de telle sorte à respecter la stricte positivité de  $\dot{\theta}$ .

## 2.3 Axes de symétrie

Considérons une trajectoire confinée dans une couronne circulaire définie par  $r_m \leq r \leq r_M$ . Les limites  $r_m$  et  $r_M$  sont les valeurs de  $r$  pour lesquelles  $\dot{r}$  s'annule. Comme  $\dot{\theta} > 0$ , la particule tourne indéfiniment autour du point source  $O$ . La trajectoire est donc alternativement tangente aux cercles de centre  $O$  et de rayon  $r_m$  et  $r_M$  en divers points de retournement. En allant d'un point de retournement  $P_1$  à  $r = r_m$  au point de retournement suivant  $P_2$  à  $r = r_M$ , le rayon vecteur  $\mathbf{r}$  tourne d'un angle égal à

$$\Delta\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U(r)}} \quad (26)$$

et tourne du *même* angle en allant de  $P_2$  au prochain point de retournement  $P_3$  à  $r = r_m$ . L'angle entre  $\mathbf{OP}_1$  et  $\mathbf{OP}_3$  est donc  $2\Delta\theta$ .

La trajectoire ne peut être fermée que si après un nombre entier  $M$  de telles rotations, le point de retournement final est le même que le premier. Or, lors de ces rotations, la particule aura effectué un nombre entier  $Q$  de tours autour de  $O$ , ce qui signifie qu'on a alors  $2M\Delta\theta = 2\pi Q$ , soit

$$\Delta\theta = \pi \frac{Q}{M} \quad (27)$$

Une trajectoire bornée ne peut donc être fermée que si et seulement si  $\Delta\theta$  est commensurable à  $\pi$ , c'est-à-dire, que le rapport  $\Delta\theta/\pi$  doit être un nombre rationnel. Dans le cas contraire, au fil du temps, la trajectoire remplit complètement la couronne circulaire sans jamais revenir au point de départ.

Considérons donc une trajectoire fermée, c'est-à-dire une orbite. La particule tournant indéfiniment autour de  $O$ , on est amené à considérer que l'angle  $\theta$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et que l'équation polaire  $r(\theta)$  qui représente cette orbite est une fonction périodique de  $\theta$ . Si la période est plus grande que  $2\pi$ , l'orbite fait plusieurs tours autour de  $O$  pendant cette période et, inévitablement, se croise en au moins un point  $P_0$  (point double) à une distance intermédiaire. Soit  $B_a$  et  $B_s$  les deux branches de l'orbite se croisant en  $P_0$ , en considérant la première comme "arrivant" en  $P_0$  et la seconde comme "partant" de  $P_0$ . L'angle polaire du vecteur  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ , par rapport à  $\mathbf{OP}_0 = r_0\mathbf{e}_{r_0}$  est

$$\psi = \psi(r) = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{r_0}^r \frac{\pm dR}{R^2 \sqrt{E - U(R)}} \quad (28)$$

Comme on l'a vu, en un point quelconque, la tangente a deux orientations possibles, selon le signe dans (28). On peut supposer que le signe plus et le signe moins



correspondent à  $B_a$  et à  $B_s$ , respectivement, avec pour conséquence que la distance est croissante sur  $B_a$  avant  $P_0$  et décroissante sur  $B_s$  après  $P_0$ . Dans ces conditions, le cercle centré en  $O$  et de rayon  $r \leq r_0$  coupe la branche  $B_a$  en un point  $M_a$  avant qu'elle ne passe en  $P_0$ , et  $B_s$  en un point  $M_s$  après qu'elle soit passée en  $P_0$ . Ces deux points sont équidistants de  $O$  et par conséquent leurs angles polaires, tels que définis par (28), sont opposés. Par suite,  $r(\psi) = r(-\psi)$ , ce qui signifie que  $\mathbf{OP}_0$  définit un axe de symétrie de l'orbite. Le même raisonnement s'applique aussi bien au cas limite où  $P_0$  est un point de retournement, les deux branches  $B_a$  et  $B_s$  étant alors identiques. On en conclut que tout point de retournement d'une orbite définit un axe de symétrie de celle-ci<sup>5</sup>. Ajoutons que si la trajectoire traverse en un autre point  $P_1(\theta_0)$  un axe de symétrie  $\Delta$  défini par un point double  $P_0$ , si ce point  $P_1$  est un point simple, c'est un point de retournement. En effet, la trajectoire étant symétrique par rapport à  $\Delta$ , on a  $r(\theta_0 + \phi) = r(\theta_0 - \phi)$  où  $\phi$  est un angle polaire défini par rapport à  $\Delta$ , et puisque  $P_1$  est un point simple, on en déduit  $dr/d\theta(\theta_0) = 0$ . Les axes de symétrie définis par les points de croisement sont aussi ceux définis par les points de retournement.

Insistons sur le fait que tous ces résultats sont la conséquence directe de la symétrie sphérique du potentiel.

Une orbite possède au moins un couple de points de retournement et l'angle de séparation  $\Delta\theta$  entre les deux axes de symétrie est certainement commensurable à  $\pi$ . Ceci est bien conforme au fait géométrique qu'une courbe possédant deux axes de symétrie concourants n'est fermée que si leur angle de séparation est commensurable à  $\pi$ .

Notons que si l'on requiert que la tangente soit unique en chaque point de la courbe, la période doit être exactement  $2\pi$ . L'orbite est alors constituée d'un seul tour et est une courbe simple. Si  $c \geq 1$  est le nombre de couples de points de retournement tels  $(P_1, P_2)$ , on a alors  $c(2\Delta\theta) = 2\pi$ , et  $\Delta\theta = \pi/c$ .

Le résultat peut aussi être étendu au cas des trajectoires non bornées qui possèdent un point de retournement. La particule, venant de l'infini, opère un mouvement tournant autour de la source  $O$ , de laquelle elle se rapproche jusqu'à une distance minimale  $r_m$  correspondant au point de retournement  $P_0$ , puis repart vers l'infini. L'axe défini par  $\mathbf{OP}_0$  est un axe de symétrie de la trajectoire.

Il peut également s'appliquer à des trajectoires bornées en limite supérieure uniquement, mais non fermées, lorsque la particule vient chuter sur la source. Des exemples sont donnés dans la suite.

---

5. Voir L. Landau, E. Lifchitz, "Mécanique", 2<sup>de</sup> éd., Editions Mir, 1966, §14.

## 3 Exemples

### 3.1 Le problème de Kepler

Dans ce problème, le potentiel est le potentiel Newtonien  $V(r) = -K/r$  avec  $K > 0$ . Pour trouver les équations polaires des trajectoires, nous utiliserons une méthode astucieuse utilisée par M. Moriconi<sup>6</sup>. L'énergie mécanique s'écrit ici

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}, \text{ et l'on a}$$
$$E + \frac{mK^2}{2L^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} - \frac{mK}{L^2} \right]^2 \quad (29)$$

Dans l'égalité (29), le membre de droite se présente comme la somme de deux carrés, ce qui fait que le membre de gauche est certainement positif pour un mouvement réalisable. Posons donc

$$\mu^2 = E + \frac{mK^2}{2L^2}$$

et récrivons (29) sous la forme

$$1 = \frac{m\dot{r}^2}{2\mu^2} + \frac{L^2}{2m\mu^2} \left[ \frac{1}{r} - \frac{mK}{L^2} \right]^2$$

qui incite à poser

$$\sqrt{\frac{L^2}{2m\mu^2} \left[ \frac{1}{r} - \frac{mK}{L^2} \right]} = \cos \eta, \quad \frac{m\dot{r}^2}{2\mu^2} = \sin^2 \eta, \text{ soit}$$
$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \eta} \text{ avec } r_0 = \frac{L^2}{mK}, \quad e = \frac{L^2}{mK} \sqrt{\frac{2m\mu^2}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \quad (30)$$

Ensuite, la relation entre  $\eta$  et l'angle polaire  $\theta$  s'obtient comme suit. Dérivons  $1/r$  :

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{e}{r_0} \dot{\eta} \sin \eta, \text{ d'où } \dot{r}^2 = r^4 e^2 \dot{\eta}^2 \sin^2 \eta / r_0^2 = \frac{2\mu^2}{m} \sin^2 \eta, \text{ soit}$$
$$r^4 \dot{\eta}^2 = \frac{2\mu^2 r_0^2}{me^2} = \frac{L^2}{m^2} = r^4 \dot{\theta}^2, \text{ et donc } \dot{\eta} = \pm \dot{\theta}$$

---

6. M. Moriconi, *Elementary Solution of Kepler Problem (and a few other problems)*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 44 (2022).

Sans perte de généralité, on peut choisir  $\dot{\eta} = +\dot{\theta}$ , et même, finalement,  $\eta = \theta$ . D'où l'équation polaire bien connue

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta} \quad (31)$$

représentant

- un cercle de centre  $O$  si  $e = 0$  ;
- une ellipse de foyer  $O$  si  $e < 1$  ;
- une hyperbole de foyer  $O$  si  $e > 1$  ;
- une parabole de foyer  $O$  si  $e = 1$ .

Dans les trois derniers cas, la trajectoire est symétrique par rapport à l'axe de référence des angles polaires,  $Ox$ , les points de concours avec cet axe étant des points de retournement. Considérons un mouvement elliptique. Des relations (B.5), liant l'angle polaire  $\theta$  (appelé  $\psi$  dans ces formules) à l'anomalie excentrique  $\chi$  de l'ellipse, on tire

$$\begin{aligned} d \cos \chi &= -\sin \chi d\chi = d \left[ \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \right] = -\sin \theta d\theta \frac{1 - e^2}{(1 + e \cos \theta)^2}, \quad \text{soit} \\ d\chi &= d\theta \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \theta} = d\theta \frac{r}{r_0} \sqrt{1 - e^2} \end{aligned} \quad (32)$$

D'où

$$\dot{\chi} = \frac{L}{mrr_0} \sqrt{1 - e^2} = \frac{L\sqrt{1 - e^2}}{mr_0a} \frac{1}{1 - e \cos \chi}$$

où  $a = r_0/(1 - e^2)$  est le demi-grand-axe de l'ellipse. Comme  $L = \sqrt{mKr_0} = \sqrt{mKa(1 - e^2)}$ , on a finalement (voir aussi (B.10) et (B.11))

$$\dot{\chi} = \sqrt{\frac{K}{ma^3}} \frac{1}{1 - e \cos \chi}, \quad \text{soit} \quad \frac{dt}{d\chi} = \sqrt{\frac{ma^3}{K}} (1 - e \cos \chi)$$

La dernière équation s'intègre aisément pour donner une relation explicite entre  $t$  et  $\chi$  (voir aussi (B.9)) :

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{K}} (\chi + e \sin \chi) + t_1 \quad (33)$$

où  $t_1$  est une constante d'intégration, fixée par les conditions initiales. De (33) on déduit la période  $T$  du mouvement, correspondant à  $\Delta\chi = 2\pi$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{K}} \quad (34)$$

d'où résulte la troisième loi de Kepler : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand-axe de l'orbite.

### 3.2 Le problème de Hooke

Le potentiel de Hooke  $V(r) = Kr^2/2$  avec  $K > 0$  donne le potentiel effectif

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{Kr^2}{2}$$

qui est toujours positif et présente un seul extremum, qui est un minimum de valeur  $U_m = \sqrt{\frac{L^2K}{m}}$  pour  $r = r_m = \left(\frac{L^2}{mK}\right)^{1/4}$ . Un mouvement dans ce potentiel n'est donc réalisable et effectif que si l'énergie mécanique  $E$  qui lui est attribuée satisfait  $E > U_m > 0$ .

Une méthode simple pour trouver l'équation polaire des trajectoires est la suivante.

Ecrivons  $\dot{r} = r'\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}r'$  où  $r' = dr/d\theta$ , et posons  $w = \frac{1}{r^2}$ . L'équation de l'énergie (10) se récrit comme

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{L^2}w &= \frac{1}{4}w'^2 + w^2 + \frac{mK}{L^2}, \quad \text{ou} \\ \frac{1}{4}w'^2 + \left[w - \frac{mE}{L^2}\right]^2 &= \frac{m^2E^2}{L^4} - \frac{mK}{L^2} = \frac{m^2}{L^4} [E^2 - U_m^2] > 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Dérivant cette relation par rapport à  $\theta$ , on obtient l'équation

$$w'' = -4 \left[ w - \frac{mE}{L^2} \right]$$

En choisissant convenablement l'origine des angles polaires, la solution générale de cette équation peut être écrite sous la forme  $w = \frac{1}{r_0^2} [1 - \sigma \cos 2\theta]$ , où

$$r_0 = \sqrt{\frac{L^2}{mE}}$$

et où la constante  $\sigma$  est prise positive. Utilisant (35), on déduit

$$\frac{\sigma^2}{r_0^4} = \frac{m^2 E^2}{L^4} - \frac{mK}{L^2}, \quad \text{d'où} \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{KL^2}{mE^2}} \quad (36)$$

Introduisons ensuite les coordonnées cartésiennes  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  relativement au point source  $O$  et à l'axe correspondant à  $\theta = 0$ . De

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1 - \sigma \cos 2\theta}$$

on déduit

$$r^2 - \sigma r^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] = r_0^2 = x^2(1 - \sigma) + y^2(1 + \sigma), \quad \text{soit}$$

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1, \quad \text{avec} \quad \rho_x = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \sigma}}, \quad \rho_y = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \sigma}}$$

On obtient ainsi l'équation d'une ellipse centrée sur  $O$ , d'excentricité

$$e = \sqrt{1 - \frac{\rho_y^2}{\rho_x^2}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{1 + \sigma}} \quad (37)$$

De façon évidente, les deux axes  $Ox$  ( $\theta = 0$ ) et  $Oy$  ( $\theta = \pi/2$ ) sont les deux axes de symétrie de l'ellipse, que celle-ci intersecte en des points de retournement.

Dans l'Appendice B, on montre qu'en choisissant convenablement l'origine des dates, on peut exprimer l'évolution des coordonnées en fonction du temps comme  $x = \rho_x \cos \omega t$ ,  $y = \rho_y \sin \omega t$ , où  $\omega = \sqrt{K/m}$ . On a donc

$$\frac{y}{x} = \tan \theta = \frac{\rho_y}{\rho_x} \tan \omega t$$

d'où l'équation horaire

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[ \sqrt{1 - e^2} \tan \omega t \right] \quad (38)$$

Celle-ci peut aussi se déduire comme suit. On a, avec  $T = \tan \theta$ ,

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta = \frac{EL}{E} \frac{d\theta}{1 - \sigma \cos 2\theta} = \frac{L}{E} \frac{dT}{1 - \sigma + (1 + \sigma)T^2}$$

$$= \frac{L}{E\sqrt{1 - \sigma^2}} d\alpha = \frac{d\alpha}{\omega}, \quad \text{où} \quad \tan \alpha = \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}} \tan \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 - e^2}} = \tan \omega t$$

### 3.3 Exemple du potentiel $V(r) = -\frac{K}{r^2}$ avec $K > 0$

Ce potentiel attractif donne l'énergie potentielle effective  $U(r) = \frac{K'}{r^2}$  avec  $K' = K - \frac{L^2}{2m}$  et l'énergie mécanique

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{K'}{r^2} \quad (39)$$

Selon les signes de  $E$  et  $K'$ , on a les cas suivants.

#### 3.3.1 $E < 0, K' \leq 0$

Le potentiel effectif est alors toujours positif ou nul et l'équation (23) dont le second membre est positif ne peut donc être satisfaite avec  $E < 0$  : aucun mouvement n'est possible dans ce cas.

Pour étudier les autres cas, il est plus avantageux d'utiliser la formule de Binet, Eq. (13), qui donne ici

$$\frac{2mE}{L^2} = u'^2 + u^2 \left[ 1 - \frac{2mK}{L^2} \right] \quad (40)$$

et l'équation différentielle

$$u'' - \frac{2mK'}{L^2}u = 0 \quad (41)$$

#### 3.3.2 $E > 0, K' < 0$

Posons alors  $\nu = \sqrt{\frac{2m|K'|}{L^2}} = \sqrt{1 - \frac{2mK}{L^2}} < 1$ . En choisissant convenablement l'origine des angles polaires, l'équation (41) a alors pour solution  $u = A \cos \nu\theta$ , où la constante  $A$  est obtenue au moyen de (40) :

$$\frac{2mE}{L^2} = \nu^2 A^2, \quad \text{soit} \quad A = \frac{1}{r_0} \quad \text{avec} \quad r_0 = \sqrt{\frac{|K'|}{E}}, \quad \text{d'où}$$

$$r = \frac{r_0}{\cos \nu\theta} \quad (42)$$

De cette équation polaire on déduit les propriétés suivantes de la trajectoire.

- La condition  $\cos \nu\theta > 0$  contraint  $\theta$  à varier dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2\nu}, +\frac{\pi}{2\nu}[$ . Aux extrémités de cet intervalle  $r \rightarrow +\infty$ , la trajectoire n'est pas bornée.
- La trajectoire est symétrique dans le changement de signe de  $\theta$ ; le point où  $\theta = 0$  est un point de retournement définissant un axe de symétrie.

Cherchons ensuite les équations horaires. On a  $\dot{\theta} = \frac{\nu L}{mr_0^2} \cos^2 \nu\theta$ , soit

$$dt = \tau \frac{d\theta}{\cos^2 \nu\theta}, \quad \text{avec } \tau = \frac{mr_0^2}{\nu L} = \frac{\nu L}{2E}, \quad \text{d'où}$$

$$\theta = \frac{1}{\nu} \tan^{-1} \left( \frac{t}{\tau} \right) \quad (43)$$

en choisissant convenablement l'origine des dates. Comme  $r = r_0 \sqrt{1 + \tan^2 \nu\theta}$ , on obtient immédiatement

$$r = r_0 \sqrt{1 + t^2/\tau^2} \quad (44)$$

La courbe géométrique complète, non bornée, est obtenue en faisant varier  $t$  dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ .

### 3.3.3 $E < 0, K' > 0$

Dans ce cas,

$$1 = \frac{K'}{r^2|E|} - \frac{m\dot{r}^2}{2|E|} > 0 \quad (45)$$

et nous poserons

$$r_0 = \sqrt{\frac{K'}{|E|}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{2mK}{L^2} - 1}$$

L'équation différentielle (41) s'écrit alors  $u'' - \rho^2 u = 0$ . Pour satisfaire (45), sa solution doit être prise comme  $u = (\cosh \rho\theta)/r_0$ , d'où l'équation polaire

$$r = \frac{r_0}{\cosh \rho\theta}$$

La trajectoire correspondante est bornée, puisque  $r \leq r_0$ , et présente un point de retournement pour  $\theta = 0$ . Les équations horaires sont obtenues comme suit. On a

$$\rho\dot{\theta} = \frac{1}{\tau} \cosh^2 \rho\theta, \quad \text{avec } \tau = \frac{mr_0^2}{\rho L} = \frac{\rho L}{2|E|}, \quad \text{d'où}$$

$$t - t_0 = \tau \tanh \rho\theta, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{1}{2\rho} \ln \left[ \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right] \quad \text{avec} \quad \xi = (t - t_0)/\tau \quad (46)$$

$t_0$  étant une constante, positive ou négative. De là on déduit

$$r = r_0 \sqrt{1 - \tanh^2 \rho\theta} = r_0 \sqrt{1 - (t - t_0)^2/\tau^2} \quad (47)$$

Comme  $|\xi| = |\tanh \rho\theta| \leq 1$ , le mouvement s'effectue dans un laps de temps fini. Voyons l'évolution pour  $t \geq 0$ . A  $t = 0$ ,  $\theta = \theta(0)$  et  $t_0 = -\tau \tanh \rho\theta(0)$ . Si  $\theta(0) > 0$ , alors  $t_0 < 0$  et la particule ne passe pas par le point de retournement. Si  $\theta(0) < 0$ , alors  $t_0 > 0$  et la particule passe par ledit point. En tout cas, à mesure que  $t$  augmente, la distance  $r$  diminue et la particule chute sur la source en effectuant un mouvement en spirale. D'après (46), la durée de cette chute (à partir de  $t = 0$ ) est finie et égale à

$$\Delta t = t_0 + \tau = \tau [1 - \tanh \rho\theta(0)], \quad \text{avec} \quad \tanh \rho\theta(0) = \pm \sqrt{1 - r^2(0)/r_0^2} \quad (48)$$

### 3.3.4 $E > 0$ , $K' > 0$

On a maintenant

$$1 = \frac{m\dot{r}^2}{2E} - \frac{K'}{r^2 E}$$

et l'on est conduit à la solution

$$r = \frac{r_0}{|\sinh \rho\theta|} \quad \text{avec} \quad r_0 = \sqrt{\frac{K'}{E}}, \quad (49)$$

Cette fois, la direction de l'axe de référence correspondant à  $\theta = 0$  est celle de l'asymptote de la trajectoire qui est non bornée ( $r \rightarrow \infty$  lorsque  $\theta \rightarrow 0$ ). Comme

$$\rho\dot{\theta} = \frac{\rho L}{mr_0^2} \sinh^2 \eta = -\frac{1}{\tau} \left[ \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{\tanh \eta} \right] \right]^{-1}, \quad \text{où} \quad \eta = \rho\theta,$$

il vient

$$t = t_0 - \frac{\tau}{\tanh \eta} \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right], \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{t - t_0}{\tau}$$

Pour un mouvement se déroulant dans l'intervalle de temps  $0 \leq t < +\infty$ , on a  $t_0 = -\tau/\tanh \eta(0)$ . Bien que la trajectoire ne possède pas de point de retournement,



et donc pas d'axe de symétrie, l'équation polaire (49) reste formellement symétrique dans l'échange  $\eta \rightarrow -\eta$  : on peut considérer ce fait comme une réminiscence de la symétrie observée dans les cas précédents.

### 3.4 Exemple du potentiel répulsif $V(r) = +\frac{K}{r}$ avec $K > 0$

Utilisons encore les formules de Binet du paragraphe 1.3. Cela donne

$$u'' = -u - \frac{1}{r_0} \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{L^2}{mK}$$

D'où la solution générale  $u = (-1 + e \cos \theta)/r_0$ , en choisissant de façon appropriée l'origine des angles polaires. Le paramètre  $e$  est déterminé par l'équation de l'énergie (13) :

$$\frac{2mE}{L^2} = u'^2 + u^2 + \frac{2mKu}{L^2} = \frac{e^2 - 1}{r_0^2}, \quad \text{soit}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} > 1$$

en prenant  $e > 0$  pour assurer la positivité de  $u$ . L'équation polaire d'une trajectoire est donc

$$r(\theta) = \frac{r_0}{e \cos \theta - 1}$$

C'est celle d'une hyperbole d'excentricité  $e$ , dont les directions des asymptotes sont données par

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} \right)$$

et dont le sommet  $S$ , seul point de retournement, est à la distance  $r_{\min} = r_0/(e-1)$  du point source  $O$ . L'axe  $OS$  est l'axe de symétrie de l'hyperbole.

L'équation horaire peut être déduite comme suit. Posons

$$\cosh \chi = \frac{e - \cos \theta}{e \cos \theta - 1}$$

On obtient

$$\sinh \chi = \sin \theta \frac{e^2 - 1}{e \cos \theta - 1}, \quad \text{et} \quad \frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \cos \theta - 1}$$

D'où

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta = \sqrt{\frac{mr_0^3}{K}} \frac{d\theta}{(e \cos \theta - 1)^2} = \sqrt{\frac{ma^3}{K}} (1 + e \cosh \chi) \quad \text{avec} \quad a = \frac{r_0}{e^2 - 1}$$

On en déduit

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{ma^3}{K}} (\chi + e \sinh \chi)$$

### 3.5 Exemple du potentiel répulsif $V(r) = -\frac{Kr^2}{2}$ avec $K > 0$

Le potentiel effectif  $U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Kr^2}{2}$  est ici toujours répulsif, mais peut prendre les deux signes :  $U(r) < 0$  pour  $r > r_m$ ,  $U(r) > 0$  pour  $r < r_m$ ,  $U(r_m) = 0$ , où  $r_m = \left(\frac{L^2}{mK}\right)^{1/4}$ . On obtient un mouvement circulaire uniforme pour  $r = r_m$  et  $E = 0$ . Pour les cas  $E \neq 0$ , nous procéderons comme au paragraphe 3.2. On a maintenant

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{L^2} w &= \frac{1}{4} w'^2 + w^2 - \frac{mK}{L^2}, \quad \text{ou} \\ \frac{1}{4} w'^2 + \left[ w - \frac{mE}{L^2} \right]^2 &= \frac{m^2 E^2}{L^4} + \frac{mK}{L^2} > 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Ici encore, on écrit la solution générale sous la forme

$$w = \frac{1}{r^2} = \frac{mE}{L^2} + A \cos 2\theta,$$

mais a priori plusieurs cas seront à considérer. Tout d'abord, l'équation (50) nous permet d'obtenir

$$A = \pm \frac{\sigma}{r_0^2}, \quad \text{avec} \quad r_0 = \sqrt{\frac{L^2}{m|E|}}, \quad \sigma = \sqrt{1 + \frac{KL^2}{mE^2}} > 1$$

Puis, introduisons les coordonnées cartésiennes  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et écrivons

$$1 = r^2 \left( \frac{mE}{L^2} + A \cos 2\theta \right) = x^2 Q_x - y^2 Q_y \quad \text{avec}$$

$$Q_x = A + \frac{mE}{L^2}, \quad Q_y = A - \frac{mE}{L^2}$$

Comme  $Q_x Q_y = A^2 - \frac{m^2 E^2}{L^4} = \frac{mK}{L^2} > 0$ , on constate que suivant les signes de  $E$  et de  $A$ , les rôles de  $x$  et  $y$  s'échangent, mais dans chaque cas l'équation polaire décrit une hyperbole. Supposons par exemple  $A > 0$  et  $E < 0$ . Alors

$$Q_x = \frac{\sigma - 1}{r_0^2}, \quad Q_y = \frac{\sigma + 1}{r_0^2} > Q_x$$

et l'excentricité de l'hyperbole est

$$e = \sqrt{1 + \frac{Q_x}{Q_y}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{1 + \sigma}}$$

La positivité de  $r^2$  impose  $\frac{mE}{L^2} + A \cos 2\theta > 0$ . Dans le cas  $A > 0$  et  $E < 0$ , cette contrainte implique que  $\cos 2\theta$  soit supérieur à  $1/\sigma$ . Comme attendu, il n'y a qu'un seul point de retournement au sommet de l'hyperbole correspondant ici à  $\theta = 0$ . Dans le cas  $A < 0$  et  $E > 0$ , le sommet de l'hyperbole correspond à  $\theta = \pi/2$ .

Finalement, nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'équation horaire correspondant au cas  $A > 0$ ,  $E < 0$  :

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \sqrt{e^2 - 1} \tanh \omega t \right]$$

## 4 Trajectoires circulaires et quasi-circulaires<sup>7</sup>

### 4.1 Orbites circulaires

Examinons maintenant la possibilité d'avoir des orbites circulaires de centre  $O$ . Elles sont telles que  $r = r_e = \text{constante}$ , donc  $\dot{r} = 0$ , et  $\ddot{r} = 0$ . D'après (12), elles ne peuvent être réalisées que si  $\frac{dU}{dr}(r_e) = 0$ , c'est-à-dire, si  $r = r_e$  correspond à un extremum du potentiel effectif  $U(r)$ . On obtient donc une première condition

$$\frac{dV}{dr}(r_e) - \frac{L^2}{mr_e^3} = 0, \quad \text{ou} \quad L^2 = mr_e^3 \frac{dV}{dr}(r_e) \quad (51)$$

qui appelle deux remarques. La première est que,  $L^2$  étant positif, la condition impose que  $\frac{dV}{dr}(r_e) = -F(r_e)$  doit être *positif*, donc que la force  $F(r_e)$  doit être *attractive* vers la source  $O$  : un potentiel  $V(r)$  ne peut produire de trajectoires circulaires que dans une région où il est attractif.

Une seconde condition concerne l'énergie  $E$ . En effet, on doit avoir  $E = U(r_e) = \frac{L^2}{2mr_e^2} + V(r_e)$ , ce qui peut être récrit comme

$$E = \frac{1}{2}r_e \frac{dV}{dr}(r_e) + V(r_e) = \left[ \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 V) \right] (r_e) \quad (52)$$

Les relations (51) et (52) peuvent être interprétées comme les deux conditions sur les constantes du mouvement  $L$  et  $E$  pour qu'un mouvement circulaire puisse être réalisé pour une valeur donnée de  $r (= r_e)$ .

Ainsi, pourvu que les valeurs  $E$  et  $L$  soient adaptées, il semble toujours possible de trouver au moins une trajectoire circulaire pour un potentiel  $V(r)$  à symétrie sphérique, mais par ailleurs quelconque, à condition qu'il soit *croissant* avec  $r$  dans la région étudiée ( $F(r) < 0$ ).

### 4.2 Stabilité des orbites circulaires

De façon naturelle se pose ensuite la question de la stabilité d'une orbite circulaire. Comme on sait, cette stabilité est conditionnée par le signe de la dérivée seconde du potentiel, ici effectif :

---

<sup>7</sup>. Voir H. Goldstein, J.L. Safko, C.P. Poole Jr., *Classical Mechanics*, 3rd ed. (Pearson, 2014) §3.6.

$$\frac{d^2U}{dr^2} = 3\frac{L^2}{mr^4} + \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{3}{r} \left[ \frac{L^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \right] \quad (53)$$

Compte tenu de la condition d'équilibre (51), on en conclut qu'une trajectoire circulaire à la distance  $r$  ne peut être stable que si le potentiel  $V(r)$  vérifie aussi la condition

$$\frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) (r_e) > 0 \quad (54)$$

qui restreint déjà beaucoup la classe de potentiels pouvant y répondre. Considérons par exemple un potentiel de la forme  $V = \frac{K}{r^\alpha}$ ,  $K$  pouvant être ici positif ou négatif.

En premier lieu, on doit avoir  $F(r) = \frac{K\alpha}{r^{\alpha+1}} < 0$ , donc  $K\alpha < 0$ . Ensuite,

$$\frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{K\alpha(\alpha-2)}{r^{\alpha-1}} > 0 \text{ et comme } K\alpha < 0, \text{ il vient}$$

$$\boxed{\alpha < 2} \quad (55)$$

Le potentiel newtonien  $V = \frac{K}{r}$  avec  $K < 0$  ( $\alpha = +1$ ) entre dans cette catégorie, ainsi que le potentiel harmonique  $V = Kr^2/2$  avec  $K > 0$  ( $\alpha = -2$ ), mais aussi le potentiel  $V = \frac{K}{\sqrt{r}}$  avec  $K < 0$  ( $\alpha = +1/2$ ). Le cas  $\alpha = 2$  étudié précédemment est à exclure car le potentiel effectif correspondant ne présente aucun extremum. Le potentiel d'interaction moléculaire de Van der Waals  $V = -\frac{k}{r^6}$  ( $k > 0$ ) ne donne pas de trajectoire circulaire stable.

### 4.3 Trajectoires quasi-circulaires

La particule  $P$  étant initialement sur une orbite circulaire stable de rayon  $r_e$ , envisageons une petite perturbation de ce mouvement. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que cette perturbation ne provoque pas un changement du plan de la trajectoire<sup>8</sup>. La nouvelle trajectoire n'est plus strictement circulaire car la distance  $r$  devient variable dans le temps, mais d'une quantité  $\xi$  suffisamment petite pour qu'elle puisse être qualifiée de "quasi-circulaire". Posons donc  $r = r_e + \xi$ . La variation d'énergie est, au second ordre en  $\xi$  ( $|\xi| \ll r_e$ )

---

8. A noter que quelle que soit ladite perturbation, la nouvelle trajectoire se situe dans un nouveau plan fixe contenant le centre de forces.

$$\Delta E = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + U(r_e + \xi) - U(r_e) = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{\xi^2}{2}\chi^2$$

où il a été tenu compte de  $\frac{dU}{dr}(r_e) = 0$  et où l'on a posé

$$\chi^2 = \frac{d^2U}{dr^2}(r_e) = \left[ \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) \right] (r_e) > 0$$

L'équation d'évolution de  $R$  s'obtient en écrivant  $\frac{d\Delta E}{dt} = 0$ , ce qui conduit à

$$m\ddot{\xi} = -\chi^2 \xi$$

c'est-à-dire à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à une dimension, ce qui était prévisible, s'agissant d'une perturbation au voisinage d'un équilibre stable. La solution générale s'écrit

$$\xi(t) = A \cos \frac{\chi}{\sqrt{m}} t + B \sin \frac{\chi}{\sqrt{m}} t \quad (56)$$

Surgit alors la question de savoir à quelle condition la nouvelle trajectoire est fermée ou non. Elle sera fermée si et seulement si, au bout d'un nombre entier  $p$  de tours autour de  $O$  le point  $P$  reviendra à sa position de départ. Mais cette éventualité ne se réalisera que si et seulement si ces  $p$  tours correspondent aussi à un nombre entier  $q$  de période du petit mouvement oscillatoire de  $\xi$ . Autrement dit la période  $T_r$  du mouvement de rotation autour de  $O$  et la période  $T_o$  du mouvement oscillatoire radial doivent être commensurables, c'est-à-dire, que leur rapport

$$\frac{T_r}{T_o} = \frac{q}{p} = \beta \quad (57)$$

doit être un nombre rationnel. Or, en première approximation,  $T_r = \frac{2\pi}{\dot{\psi}_e} = \frac{2\pi m r_e^2}{L}$  et  $T_o = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\chi}$ . On a donc

$$\beta^2 = m r_e^4 \frac{\chi^2}{L^2}, \quad \text{soit} \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) \right] (r_e) = \beta^2 \left[ r \frac{dV}{dr} \right] (r_e)$$

Après dérivations et réarrangement des termes, on aboutit à la relation

$$(3 - \beta^2) \frac{dV}{dr}(r_e) = -r_e \frac{d^2V}{dr^2}(r_e) \quad (58)$$

Cherchons alors pour quel type de potentiel (58) est vérifiée *quel que soit le rayon moyen*  $r_e$ , c'est-à-dire, en considérant que cette équation n'est pas propre à une valeur particulière de  $r_e$  qui, elle, est fixée par les valeurs attribuées aux constantes  $E$  et  $L$ , mais qu'elle représente une propriété globale du potentiel  $V(r)$  assurant qu'une trajectoire quasi-circulaire soit *fermée*, quel qu'en soit le rayon moyen. Autrement dit, on admet que  $\beta$  est une constante caractéristique du potentiel considéré, indépendante de  $r_e$ . En prenant ce parti, on est ainsi amené à résoudre l'équation (58) en laissant libre le paramètre  $r_e = r$  et en prenant  $\beta$  constant. On obtient alors l'expression<sup>9</sup>

$$V(r) = \frac{K}{r^{2-\beta^2}} \quad (59)$$

Cette hypothèse conduit au résultat remarquable que les seuls potentiels pour lesquels les trajectoires quasi-circulaires sont fermées quel que soit le rayon moyen  $r$  sont ceux en puissance de  $r$ , à savoir, de la forme  $V = \frac{K}{r^\alpha}$ , avec  $\alpha = 2 - \beta^2 < 2$ ,  $\beta$  étant un nombre rationnel, et  $K\alpha < 0$ <sup>10</sup>.

Calculons l'angle  $\Delta\theta$ , Eq. (26), entre deux axes joignant des points de retournement consécutifs de l'orbite quasi-circulaire. D'après (56), on a  $r_{\max} = r_e + \eta$ ,  $r_{\min} = r_e - \eta$ , où  $\eta = \sqrt{A^2 + B^2}$  ( $\eta \ll r_e$ ). Avec  $\Delta E = \frac{\chi^2}{2}\eta^2$ , on écrit

$$\Delta\theta \simeq \frac{1}{r_e^2} \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{d\xi}{\sqrt{\Delta E - \frac{\chi^2}{2}\xi^2}} = \sqrt{\frac{L^2}{mr_e^4\chi^2}} 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\beta} \quad (60)$$

et comme attendu, cet angle est commensurable à  $\pi$ .

## 5 Théorème de Bertrand

Sur une trajectoire bornée, la particule  $P$  évolue dans une couronne circulaire définie par  $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , en tournant indéfiniment autour de  $O$ , puisque  $\dot{\theta} > 0$ . Si la trajectoire n'est pas fermée, elle est alors partout dense dans cette couronne. Une trajectoire bornée est fermée si et seulement si le champ de forces remplit des conditions particulières. En 1873, J. Bertrand<sup>11</sup> a démontré que de tous les potentiels à symétrie sphérique, seuls le potentiel newtonien  $V(r) = -\frac{K}{r}$

9. On exclut ici l'ultime constante d'intégration, inutile car conduisant à un potentiel constant.

10. Les inégalités  $K\alpha < 0$  et  $\alpha < 2$  sont imposées pour obtenir des mouvements circulaires qui soient stables.

11. J. Bertrand, *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, C.R. Ac. Sc., 20 Oct. 1873, T. LXXVII, No 16, pp 849-853.

et le potentiel harmonique (ou potentiel de Hooke)  $V(r) = Kr^2/2$  avec  $K > 0$  peuvent produire de telles trajectoires à toute distance finie du point source, et ce, indépendamment des valeurs permises correspondantes de l'énergie et du moment angulaire. Il en résulte que pour ces deux potentiels uniquement, toute trajectoire bornée est fermée. Selon J. Bertrand, "toutes les lois d'attraction *permettent* des trajectoires fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*".

Ce résultat est obtenu en prouvant que seuls les potentiels en question conduisent à des valeurs de  $\Delta\theta$ , Eq. (26), non seulement commensurables à  $\pi$  mais aussi indépendantes des paramètres des trajectoires. Comme il a été vu précédemment, seuls des potentiels *partout attractifs* en loi de puissance de  $r$  permettent d'obtenir un tel résultat dans le cas d'orbites quasi-circulaires voisines d'orbites circulaires stables, Eq. (60)<sup>12</sup>. Aussi, il suffit de ne considérer que des potentiels de la forme (59) et de démontrer que seules les valeurs  $\beta = 1$  (potentiel Newtonien) et  $\beta = 2$  (potentiel de Hooke) réalisent les conditions du théorème en toute circonstance. Une démonstration simple repose sur l'indépendance supposée de  $\Delta\theta$  vis-à-vis des paramètres de la trajectoire, d'où l'on déduit que sa valeur est tout aussi bien égale à sa limite lorsque l'énergie  $E$  tend vers zéro dans le cas  $\alpha > 0$  ou lorsque  $E$  vers  $+\infty$  dans le cas  $\alpha < 0$ . Vérifions tout d'abord que dans les cas Newtonien et Hookeen, les valeurs correspondantes de  $\Delta\theta$  satisfont bien les conditions définies plus haut<sup>13</sup>.

## 5.1 $\Delta\theta$ pour le potentiel Newtonien ( $\beta = 1$ )

Dans l'intégrale (26), effectuons le changement de variable  $r \rightarrow x = r_m/r$  et posons  $x_0 = r_m/r_M$ . Il vient

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{L^2}{2mr_m^2}} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{E - x^2L^2/(2mr_m^2) + xK/r_m}}$$

Or, les limites  $r_m$  et  $r_M$  étant solutions de  $\dot{r} = 0$ , on a notamment

$$E = \frac{L^2}{2mr_m^2} - \frac{K}{r_m} \quad (61)$$

Insérant cette expression dans l'intégrale ci-dessus, on trouve

12. Il est utile de préciser ici que le théorème de Bertrand exige des potentiels pouvant fournir que les potentiels envisagés fournissent des orbites circulaires stables à toute distance du point source. Ces derniers doivent donc être partout attractifs.

13. J. Bertrand, loc. cit. ; V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la Mécanique classique*, Editions Mir, 1976.



$$\Delta\theta = \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-\chi(1-x)}}$$

où  $\chi$  peut être obtenu en écrivant que l'expression sous la racine carrée s'annule pour  $x = x_0$ , soit  $1 - x_0^2 - \chi(1 - x_0) = 0$ , d'où  $\chi = 1 + x_0 > 1$ . On a ainsi

$$\Delta\theta = \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x_0-x)}}$$

et le nouveau changement de variable  $x = \frac{1+x_0}{2} + u\frac{1-x_0}{2}$  donne

$$\Delta\theta = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi, \quad (62)$$

résultat indépendant de  $x_0$  et conforme à (60) avec  $\beta = 1$ .

## 5.2 $\Delta\theta$ pour le potentiel de Hooke ( $\beta = 2$ )

Utilisant la même technique, on trouve

$$\Delta\theta = \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2+\chi(1-x^{-2})}}$$

avec  $\chi = (1-x_0^2)/(x_0^{-2}-1) = x_0^2 < 1$ , d'où

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2+1-x_0^2/x^2}} = \int_{x_0}^1 \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-x_0^2)}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0^2}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(y-x_0^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (63)$$

résultat lui aussi indépendant de  $x_0$  et conforme à (60) avec cette fois  $\beta = 2$ .

## 5.3 $\Delta\theta$ pour les potentiels $-K_a/r^a$ , $K_a > 0$ , $a > 0$ , et $K_b r^b/2$ , $K_b > 0$ , $b > 0$ <sup>14</sup>

Afin de mettre en évidence la spécificité des potentiels de Newton et de Hooke vis-à-vis du théorème de Bertrand, nous allons maintenant étudier en détail les deux cas (potentiels partout attractifs)

---

14. C. Carimalo, *Transmutation of central forces and Bertrand's theorem*, Theor. Appl. Mech. **50** (2023), 1-11.

- (a)  $V_a(r) = -K_a/r^a$ ,  $K_a > 0$ ,  $a > 0$ , et  
 (b)  $V_b(r) = K_b r^b/2$ ,  $K_b > 0$ ,  $b > 0$ .

### 5.3.1 Formules de dualité

Pour le potentiel (a) ( $a > 0$ ), on trouve

$$\Delta\theta = \Delta\theta_a = \int_{x_a}^1 \frac{dx}{\sqrt{A_a(x)}}, \quad \text{avec}$$

$$A_a(x) = 1 - x^2 - \chi_a(1 - x^a), \quad \text{et} \quad \chi_a = (1 - x_a^2)/(1 - x_a^a) \quad (64)$$

On note que  $A_a(x)$  ne peut être positif que si  $a < 2$ , ce qui traduit le fait que pour ce potentiel, ce n'est qu'à cette condition que l'on peut trouver des trajectoires à l'intérieur d'une couronne circulaire. On a alors  $\chi_a > 1$ .

Pour le potentiel (b), on trouve

$$\Delta\theta = \Delta\psi_b = \int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{B_b(y)}} \quad \text{avec}$$

$$B_b(y) = 1 - y^2 - \eta_b(y^{-b} - 1) \quad \text{et} \quad \eta_b = y_b^b(1 - y_b^2)/(1 - y_b^b) \quad (65)$$

On notera que dans le cas (a), faire tendre  $x_a$  vers zéro correspond à faire tendre l'énergie  $E$  vers zéro, tandis que dans le cas (b), faire tendre  $y_b$  vers zéro revient à faire tendre  $E$  vers  $+\infty$ .

On remarque immédiatement que pour une valeur donnée de  $x_a$ ,

$$A_{-a}(x) = 1 - x^2 - \chi_{-a}(1 - x^{-a}), \quad \text{avec} \quad \chi_{-a} = -\frac{1 - x_a^2}{x_a^{-a} - 1}, \quad \text{soit}$$

$$A_{-a}(x) = 1 - x^2 - \eta_a(x^{-a} - 1) = B_a(x)$$

Par conséquent, pour des valeurs quelconques de  $a$ , les écarts  $\Delta\theta_a$  et  $\Delta\psi_b$  peuvent être définis par une seule et même fonction  $\Theta(a, x_0)$ , telle que

$$\Delta\theta_a = \Theta(a, x_a) \quad \text{et} \quad \Delta\psi_a = \Theta(-a, x_a) \quad (66)$$

Examinons l'intégrale dans (65). On a

$$\int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{B_b(y)}} = \int_{y_b}^1 dy \frac{y^{b/2}}{\sqrt{1 - y^{2+b} - (1 + \eta_b)(1 - y^b)}}$$

Posons  $x = y^{1+b/2}$ . Il vient

$$dx = (1 + b/2)y^{b/2} dy, \quad y^{2+b} = x^2, \quad y^b = x^c \quad \text{avec} \quad c = \frac{2b}{2+b} < 2$$

D'où

$$\Delta\psi_b = \frac{2}{2+b} \int_{x_c}^1 \frac{dx}{\sqrt{A_c(x)}} \quad \text{avec} \quad A_c(x) = 1 - x^2 - \chi_c(1 - x^c) \quad \text{et}$$

$$\chi_c = (1 - x_c^2)/(1 - x_c^c), \quad x_c = y_b^{1+b/2}, \quad \text{soit} \quad \chi_c = 1 + \eta_b > 1 \quad (67)$$

On voit donc qu'il est possible d'établir une correspondance entre les cas (a) et (b) en posant  $c = a$ , ce qui donne

$$\Delta\psi_b = \frac{2}{2+b} \Delta\theta_a = \frac{2-a}{2} \Delta\theta_a \quad (68)$$

Il est utile de rappeler ici le lien entre les puissances  $a$  et  $b$  et les paramètres correspondants  $\beta_a$  et  $\beta_b$  de (59) :  $a = 2 - \beta_a^2$ ,  $b = \beta_b^2 - 2$ . Introduisant ces dernières expressions dans  $c = a = 2b/(2+b)$ , on déduit la relation

$$\beta_a\beta_b = 2 \quad (69)$$

### 5.3.2 Transmutation des forces

La dualité entre les potentiels à exposants négatifs et ceux à exposants positifs, exprimée par les formules (68), peut s'expliquer par une transformation particulière que T. Needham a appelée la *transmutation des forces centrales attractives*<sup>15</sup>. Un exemple fameux de dualité est fourni par les potentiels de Newton ( $a = 1$ ) et de Hooke ( $b = 2$ ). On sait que ces deux potentiels donnent des trajectoires fermées identiques, à savoir des ellipses ayant la source de potentiel comme foyer pour le premier et comme centre pour le second. Cette curieuse circonstance a déjà été notée et étudiée par I. Newton dans ses Principia<sup>16</sup> (Voir l'Appendice A). La transmutation entre ces deux potentiels a été établie par K. Bohlin en 1911<sup>17</sup>. La généralisation de cette transformation à d'autres lois de puissance et l'extension

15. T. Needham, *Newton and the Transmutation of Force*, The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 2. (Feb. 1993), pp. 119-137.

16. I. Newton, *The Principia*, U. of California Press, 1999; *Principia*, Dunod, 2011, Prop. VII, Cor. 3; Prop. X, Problem V; Prop. XI, Problem VI.

17. K. Bohlin, Bull. Astron. **28** (1911), 144.

mathématique de l'idée ont été menées par de nombreux auteurs, dans le passé<sup>18</sup> et même récemment<sup>19</sup>.

Nous en donnons ci-après le formalisme tel que donné par V. Arnol'd<sup>20</sup>.

Les trajectoires produites par les forces centrales étant planes, elles peuvent être décrites aussi bien dans le plan complexe. Posons  $z = x + iy = |z|e^{i\psi}$ ,  $x$  et  $y$  représentant ici les coordonnées cartésiennes du mobile ponctuel  $P$  évoluant dans un plan  $xOy$  et  $\psi$  son angle polaire par rapport à l'axe  $Ox$ . En termes de nombres complexes et avec des unités appropriées, l'équation fondamentale (1) est transcrite comme

$$\ddot{z} = F(z), \quad \text{avec} \quad F(z) = -\frac{z}{|z|} \frac{dV}{d|z|}(|z|)$$

$V(|z|)$  étant le potentiel central, supposé être de la forme

$$V(|z|) = \frac{|z|^\mu}{\mu}, \quad \text{d'où} \quad F(z) = -z |z|^{\mu-2} \quad (70)$$

Pour simplifier, on a posé  $m = 1$ . L'énergie  $E$  prend la forme

$$E = \frac{|\dot{z}|^2}{2} + V(|z|) = \text{constante}$$

Envisageons ensuite la transformation

$$z \rightarrow Z = |Z| e^{i\theta} = z^\sigma, \quad t \rightarrow \tau \quad \text{avec} \quad \frac{d\tau}{dt} = |z|^\gamma$$

en choisissant  $\sigma$  et  $\gamma$  de telle sorte que la loi des aires reste inchangée, c'est-à-dire, avec  $\theta = \sigma\psi$ ,

$$|Z|^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \sigma |z|^{2\sigma-\gamma-2} |z|^2 \frac{d\psi}{dt} = \text{constante}$$

---

18. C. Mac-Laurin, *A Treatise of Fluxions in Two Books*, T.W. and T. Ruddimana, Edinburgh, 1742; E. Goursat, *Les transformations isogonales en Mécanique*, C.R. Ac. Sc., Paris **108** (1889), 446-448; E. Kasner, *Differential-geometric aspects of dynamics*, The Princeton Colloquium, Lectures on Mathematics delivered september 15 to 17, 1909, before members of the American Mathematical Society in connection with the summer meeting held at Princeton University, American Mathematical Society Ed., New-York, 1913; R. McGehee, *Double collision for a classical particle system with non-gravitational interactions*, Comment. Math. Helvetici, **56** (1981), 524-557.

19. A. Albouy, L. Zhao, *Transformations of Lagrangian and closed orbits*, ANS Conference Series : Regular and Chaotic Dynamics : In memoriam of Alexey V. Borisov : Book of Abstracts - Moscow-Izhevsk : Institute of Computer Science, 2021; *Darboux Inversion of the Kepler Problem*, Regul. Chaotic Dyn., **27** (2022), 253-280.

20. V. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.

ce qui impose

$$\sigma = 1 + \gamma/2$$

La nouvelle relation fondamentale est

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dz^\sigma}{d\tau} \right) = \frac{1}{|z|^\gamma} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z|^\gamma} \frac{dz^\sigma}{dt} \right) = \frac{\sigma}{|z|^\gamma} \frac{d}{dt} \left( \frac{z^{\gamma/2} \dot{z}}{|z|^\gamma} \right) \\ &= \frac{\sigma}{|z|^\gamma} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{z}}{z^{\gamma/2}} \right) = \frac{\sigma}{|z|^\gamma} \left[ \frac{-z|z|^{\mu-2}}{z^{\gamma/2}} - \frac{\gamma}{2} \frac{|\dot{z}|^2}{z^{1+\gamma/2}} \right] = -\frac{\sigma\gamma}{|z|^\gamma z^{1+\gamma/2}} \left[ \frac{|z|^\mu}{\gamma} + \frac{|\dot{z}|^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Dans la formule ci-dessus, l'expression entre crochets peut être identifiée à l'énergie  $E$  à condition d'identifier  $\gamma$  à  $\mu$ . Alors

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} = -\frac{\sigma\gamma E z^\sigma}{|z|^{2\sigma+\gamma}} = -\sigma\gamma E Z|Z|^{-2-\gamma/\sigma}$$

On obtient donc pour  $Z$  une équation similaire à (70) avec une loi de force dérivant du potentiel  $V'(|Z|) = K|Z|^\nu/\nu$  où

$$\nu = -\gamma/\sigma = -\frac{2\mu}{2+\mu}, \quad K = \sigma\gamma E$$

La transformation permet ainsi de passer du potentiel  $r^b$  avec  $b = \gamma = \mu > 0$  au potentiel  $-K_a/r^a$  avec  $a = -\nu = \frac{2b}{b+2} \leq 2$ ,  $K_a = K/a > 0$ . Dans cette opération, toute variation de l'angle  $\theta = \theta_a$  est liée à celle de l'angle  $\psi = \psi_b$  par la simple relation

$$\Delta\theta_a = \sigma \Delta\psi_b = \frac{b+2}{2} \Delta\psi_b = \frac{2}{2-a} \Delta\psi_b \quad (71)$$

conformément à (68).

### 5.3.3 Etude de $B_b(x)$ Eq. (65)

Les limites  $E \rightarrow 0$  dans le cas (a) et  $E \rightarrow +\infty$  dans le cas (b) équivalent respectivement à  $x_a \rightarrow 0$  et  $y_b \rightarrow 0$ . Du fait de la dualité des deux cas (a) et (b), il suffit de n'en considérer qu'un seul. Pour une raison explicitée plus loin, il apparaît plus aisé de choisir le cas (b).

On a

$$\frac{\partial B_b}{\partial b} = \eta_b \frac{y^{-b} - 1}{b} [g(u_b) - g(u)],$$

où  $u = y^b$ ,  $u_b = y_b^b$ , et  $g(u) = -\frac{\ln u}{1-u}$ .

La fonction  $g(u)$  est telle que  $g(0) = +\infty$ ,  $g(1) = 1$  et

$$g'(u) = \frac{h(v)}{(1-u)^2}, \quad \text{où } h(v) = 1 - v + \ln v \quad \text{avec } v = 1/u \geq 1$$

La fonction  $h(v)$  est telle que  $h(1) = 0$ ,  $h(+\infty) = -\infty$  et

$$h'(v) = -1 + 1/v \leq 0$$

Ainsi,  $h(v)$  étant une fonction strictement décroissante, ses valeurs restent négatives pour  $v > 1$  et en conséquence  $g'(u) < 0$ . Donc,  $g(u)$  est aussi une fonction strictement décroissante dont les valeurs restent plus petites que  $g(u_b)$  pour  $u_b < u \leq 1$ . Ainsi, à  $y$  et  $y_b$  fixés,  $B_b(x)$  est une fonction strictement décroissante de  $b \in [0, +\infty[$ . Elle est donc encadrée par ses deux limites  $B_0(y)$  et  $B_\infty(y)$  pour  $b \rightarrow 0$  et  $b \rightarrow +\infty$  respectivement :

$$B_0(y) < B_b(y) < B_\infty(y)$$

La limite supérieure correspond à un potentiel infini et la limite inférieure à un potentiel comportant une constante et une composante logarithmique qui ne peut produire des trajectoires fermées, à part des cercles ( $(r/r_0)^b \simeq 1 + b \ln(r/r_0)$  pour  $b \ll 1$ ). Ces limites correspondent certes à des potentiels non physiques que l'on devrait exclure, mais il est tout à fait justifié de les considérer d'un strict point de vue mathématique. Ils donnent pour  $\Delta\psi_b$  l'encadrement :

$$\begin{aligned} \Delta\psi_\infty < \Delta\psi_b < \Delta\psi_0, \quad \text{avec} \\ \Delta\psi_0 = \int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{B_0(y)}}, \quad \Delta\psi_\infty = \int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{B_\infty(y)}} \end{aligned} \quad (72)$$

Un tel encadrement est plus difficile à obtenir dans le cas (a), ce qui justifie le choix d'étudier uniquement le cas (b).

On montre facilement que

$$B_\infty(y) = 1 - y^2 \quad \text{for } y_b < y \leq 1, \quad B_\infty(y_b) = 0$$

et

$$B_0(y) = 1 - y^2 - (1 - y_b^2) \frac{\ln y}{\ln y_b}$$

Ainsi,

$$\Delta\psi_\infty = \int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} y_b \right] \quad (73)$$

Suivant la même méthode que celle utilisée au début de ce paragraphe, on trouve

$$-\frac{\ln y}{1-y} \leq -\frac{\ln y_b}{1-y_b} \quad \text{ou} \quad \frac{\ln y}{\ln y_b} \leq \frac{1-y}{1-y_b},$$

et

$$B_0(y) \geq (1-y)(y-y_b),$$

d'où

$$\Delta\psi_0 \leq \int_{y_b}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(y-y_b)}} = \pi$$

Cette limite, plutôt naturelle, garantit la convergence de toutes les intégrales considérées, quelque soit la valeur de  $y_b \in [0, 1]$ . Voyons maintenant ce que devient l'intégrand de  $\Delta\psi_0$  au voisinage de la borne inférieure  $y_b$  lorsque celle-ci tend vers zéro. Posant  $y = y_b(1 + \epsilon)$  avec  $\epsilon \ll 1$ , on obtient

$$B_0 \simeq \epsilon \left[ -2y_b^2 - \frac{1-y_b^2}{\ln y_b} \right] \simeq \frac{y-y_b}{y_b |\ln y_b|}$$

D'où, pour  $y_b < \nu \ll 1$ ,

$$\int_{y_b}^{\nu} \frac{dy}{\sqrt{B_0}} \simeq \sqrt{y_b |\ln y_b|} \int_{y_b}^{\nu} \frac{dy}{\sqrt{y-y_b}} = 2\sqrt{y_b |\ln y_b|} \sqrt{\nu-y_b} \rightarrow 0$$

Ce résultat permet de conclure qu'on peut librement poser  $y_b = 0$  dans  $\Delta\psi_0$ , obtenant ainsi  $\lim_{y_b \rightarrow 0} \Delta\psi_0 = \pi/2$ . D'un autre côté, à partir de (73) on a  $\lim_{y_b \rightarrow 0} \Delta\psi_\infty = \pi/2$ . Finalement, comme les bornes supérieure et inférieure de  $\Delta\psi_b$  prennent la même valeur  $\pi/2$  dans la limite  $y_b \rightarrow 0$ , on en déduit que l'équation

$$\lim_{y_b \rightarrow 0} \Delta\psi_b = \frac{\pi}{2} \quad (74)$$

est vérifiée pour tout  $b \geq 0$ .

Faisons les commentaires suivants. Il est clair que  $\Delta\psi_\infty$  et  $\Delta\psi_0$  dépendent effectivement de  $y_b$  : à mesure que  $y_b$  tend to zero, tous les deux tendent vers  $\pi/2$ , valeur qui

représente un maximum pour le premier et un minimum pour le second. L'encadrement (72) montre que presque tous les  $\Delta\psi_b$  dépendent aussi de  $y_b$ , puisque leurs valeurs se déplacent vers cette même limite  $\pi/2$  lorsque  $y_b \rightarrow 0$ . La seule exception est celle correspondant à  $b = 2$ , pour laquelle  $\Delta\psi_2 = \pi/2$ , quelle que soit la valeur de  $y_b$ . Pour un potentiel à exposant positif, ce cas est donc le seul satisfaisant la condition du théorème de Bertrand, c'est-à-dire, qui donne  $\Delta\psi_b = \pi/\beta_b$  où  $\beta_b$  est un nombre rationnel indépendant de  $y_b$  (ici  $\beta_b = 2$ ). Le cas des potentiels avec des exposants négatifs se résout en appliquant (68) et (69), ce qui conduit à  $\beta_a = 1$  ( $a = 1$ ) et  $\Delta\theta_1 = \pi$ .

Pour d'autres potentiels, incluant ceux dits "non-homogènes", il n'est pas exclu de trouver des valeurs rationnelles de  $\Delta\psi/\pi$ . Mais le théorème de Bertrand implique que ceci ne peut se produire que pour des trajectoires fermées particulières. Pour les potentiels homogènes, l'équation (60) peut même ne pas être vérifiée pour ces orbites. En outre, si pour un  $b$  donné, une orbite existe, avec une valeur rationnelle de  $\Delta\psi_b/\pi$ , alors, d'après (68), il existe une trajectoire correspondante pour le potentiel dual, qui n'est aussi fermée que si  $b$ , et donc  $a$ , sont rationnels. Enfin, notons que pour un  $b$  donné,  $\Delta\psi_b(y_b)$  ne dépend que de  $y_b$ . Aussi, le fait que  $\Delta\psi_b/\pi$  est ou n'est pas rationnel concerne généralement une suite continue de trajectoires (bornées) ayant le même  $y_b$ , suite générée en faisant varier de façon appropriée  $E$  and  $L$  dans leurs intervalles autorisés.

## 5.4 Un exemple de potentiel non-homogène

Un exemple instructif de potentiel non-homogène est

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + \frac{K_2}{r^2}, \quad K_1 > 0, \quad K_2 > 0, \quad (75)$$

étudié par B. Cameron Reed dans un contexte différent<sup>21</sup>, et qui ne devient attractif que pour  $r > 2K_2/K_1$ . Le potentiel effectif correspondant

$$U(r) = \frac{L'^2}{2mr^2} - \frac{K_1}{r}, \quad \text{où } L'^2 = L^2 + 2mK_2 \quad (76)$$

diffère de celui du problème de Kepler seulement par le remplacement de  $L$  par  $L'$ . Cependant, on a toujours  $\dot{\psi} = L/(mr^2)$ . L'équation polaire des trajectoires est maintenant

$$r(\psi) = \frac{r_0}{1 + e \cos(\beta\psi)}, \quad \text{avec} \quad (77)$$

$$\beta = L'/L > 1, \quad r_0 = L'^2/(mK_1), \quad e = \sqrt{1 + 2EL'^2/(mK_1^2)}$$

---

21. B. Cameron Reed, Eur. J. Phys. 42 (2021) 045007; DOI : 10.1088/1361-6404/abf8c4



Des trajectoires bornées existent pour  $E < 0$ . Elles ne sont fermées que pour des valeurs discrètes de  $L$  pour lesquelles  $\beta$  est un nombre rationnel plus grand que 1. Autrement, elles ne sont pas fermées et, à mesure que le temps s'écoule, chacune passe par tous les points de la couronne circulaire définie par  $r_0/(1 + e) \leq r \leq r_0/(1 - e)$ . Pour  $E > 0$ , on obtient des trajectoires non bornées.

## 6 Retour sur les trajectoires quasi-circulaires

A la lumière du théorème de Bertrand, explicitons la nature des trajectoires quasi-circulaires dont il a été question dans le paragraphe 4.3. Nous supposons ici encore que la perturbation du mouvement circulaire ne change pas le plan de la trajectoire. Les seules trajectoires fermées produites par les potentiels de Hooke et de Newton sont des cercles et des ellipses, voir l'Appendice B. Une trajectoire quasi-circulaire est donc nécessairement une ellipse d'excentricité voisine de 0. Nous nous limiterons à l'approximation au premier ordre suivant l'écart  $\eta$  et supposerons avoir défini l'origine des temps de telle sorte que

$$r = r_e + \eta \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

### 6.1 Cas de la loi de Hooke : $O$ est le centre de l'ellipse

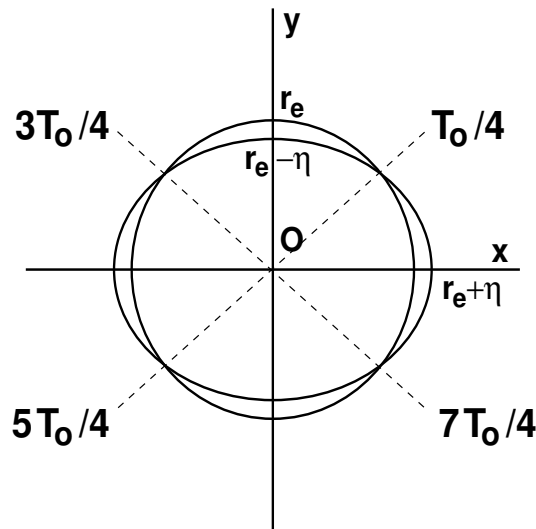


FIGURE 1 – Trajectoire quasi-circulaire : loi de Hooke

D'après (57) avec  $\beta = 2$ , on a  $T_0 = T_r/2$ . Ainsi, dans une rotation complète sur le cercle de rayon  $r_e$ , l'ellipse coupe ledit cercle en quatre points correspondant aux

dates  $T_o/4$ ,  $3T_o/4$ ,  $5T_o/4$  et  $7T_o/4$ , respectivement, comme indiqué à la figure (1), où les axes  $Ox$  et  $Oy$  ont été choisis de façon appropriée.

Les demi-axes de l'ellipse sont  $a = r_e + \eta$  et  $b = r_e - \eta$ , ce qui donne pour excentricité de l'ellipse  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \simeq 2\sqrt{\eta/r_e}$ . Comme il se doit, on voit déjà apparaître deux axes de symétries,  $Ox$  et  $Oy$ , séparés de  $\pi/2$ .

## 6.2 Cas de la loi de Newton : $O$ est un foyer de l'ellipse

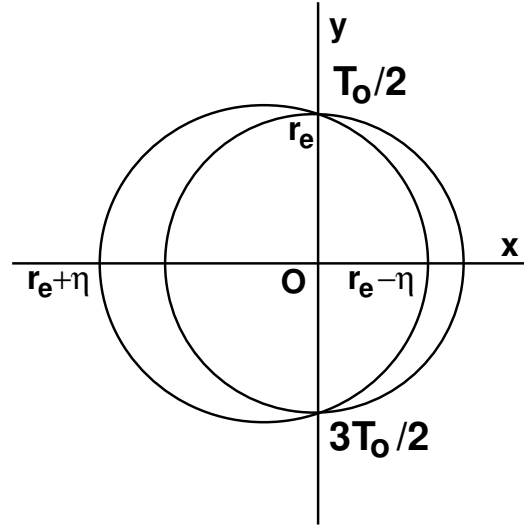


FIGURE 2 – Trajectoire quasi-circulaire : loi de Newton

D'après (57) avec  $\beta = 1$ , on a cette fois  $T_o = T_r$ . Dans une rotation complète sur le cercle, l'ellipse coupe celui-ci en deux points correspondant aux dates  $T_o/2$  et  $3T_o/2$ , respectivement, comme indiqué à la figure (2). L'excentricité de l'ellipse est  $e = \eta/r_e$  et ses demi-axes sont  $a = r_e + \eta^2/r_e$  et  $b = r_e + \eta^2/(2r_e)$ . On peut en conclure que, pour des valeurs identiques de  $r_e$  et  $\eta$ , l'ellipse dans le cas du potentiel de Newton est plus quasi-circulaire que celle obtenue dans le cas du potentiel de Hooke. Ici aussi apparaissent deux axes de symétrie,  $Ox$  et  $-Ox$ , séparés de  $\pi$ .

## 7 Digression sur l'action

### 7.1 Variables d'action

Rappelons que les équations différentielles du mouvement d'un système mécanique sont déduites d'un principe variationnel portant sur *l'intégrale d'action*

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (78)$$

où  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  est le Lagrangien caractérisant le système mécanique étudié,  $q$  désignant l'ensemble des coordonnées  $q_k$  servant à décrire son état,  $\dot{q}$  l'ensemble des dérivées temporelles de celles-ci et  $t$  le temps ( $1 \leq k \leq s$ ,  $s$  étant le nombre de degrés de liberté du système). Fixant les positions du système aux dates  $t_1$  et  $t_2$ , soit  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$ , le *principe d'action extrémale* stipule alors que *de toutes les lois d'évolution imaginables  $q(t)$  permettant au système de passer de la position  $q_1$  à la date  $t_1$  à la position  $q_2$  à la date  $t_2$ , celle effectivement réalisée rend l'intégrale d'action extrémale.*

De ce principe sont déduites les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (79)$$

permettant d'établir les équations différentielles du mouvement du système, lesquelles sont du second ordre.

La loi d'évolution étant supposée réalisée, il n'en reste pas moins que l'action (78) dépend des valeurs  $q_1, t_1, q_2, t_2$  imposées. On montre que, en tant que fonction de ces données, l'action a pour différentielle

$$d\mathcal{S} = p_2 dq_2 - H_2 dt_2 - p_1 dq_1 + H_1 dt_1 \quad (80)$$

où  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  désigne l'ensemble des impulsions et  $H = p\dot{q} - \mathcal{L}$  le Hamiltonien, les indices 1 et 2 se référant aux positions extrêmes du système. Supposons les données 1 définitivement invariables et laissons variables les données 2 tout en supprimant l'indice 2. La différentielle de l'action se réduit à

$$d\mathcal{S} = pdq - Hdt, \quad \text{et l'on a } \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -H \quad (81)$$

On en déduit *l'équation de Hamilton-Jacobi*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}, t) = 0 \quad (82)$$

qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour l'action  $\mathcal{S}(q, t)$ . Cette équation comporte  $s + 1$  variables indépendantes, à savoir, les  $s$  coordonnées  $q$  et le temps. Aussi, la solution complète (intégrale complète) de (82) doit contenir  $s + 1$  constantes arbitraires. Comme  $\mathcal{S}$  n'intervient dans ladite équation que par ses dérivées premières, l'une des constantes doit apparaître dans la solution complète comme une simple constante additive  $A$ . L'action est ainsi de la forme

$$\mathcal{S}(q, t) = G(q, \alpha, t) + A \quad (83)$$

où  $G$  est solution de (82) et où  $\alpha$  est un ensemble de  $s$  constantes  $\alpha_k$  arbitraires. A partir de (83), on peut obtenir la loi horaire effective  $q(t)$  du mouvement du système en procédant de la manière suivante. Utilisons la fonction  $G(q, \alpha, t)$  comme fonction génératrice d'une transformations canonique  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  où les nouvelles impulsions sont les constantes  $\alpha$ . On sait que la fonction génératrice  $G(q, P, t)$  d'une telle transformation a pour différentielle<sup>22</sup>.

$$dG = pdq + QdP + (H' - H) dt \quad (84)$$

Comme  $G$  vérifie (82), on a  $H'(Q, P, t) = \frac{\partial G}{\partial t} + H = 0$ , et les équations de Hamilton relatives aux nouvelles variables canoniques donnent donc

$$\frac{\partial H'}{\partial P} = \dot{Q} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial Q} = -\dot{P} = 0$$

soit  $P = \text{constante} = \alpha$ ,  $Q = \text{constante} = \beta$ . Les  $s$  équations

$$\frac{\partial G}{\partial P_k} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_k} = Q_k = \beta_k$$

permettent alors d'exprimer les coordonnées  $q$  en fonction du temps et de  $2s$  constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , c'est-à-dire d'obtenir la solution générale des équations du mouvement. Lorsque le système est conservatif, son Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps et son Hamiltonien est une constante  $E$  du mouvement. L'action prend alors la forme (à une constante additive près)

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = \mathcal{S}_0(q, \alpha) - Et \quad (85)$$

---

22. Voir par exemple notre cours *Introduction à la Théorie Lagrangienne*, chap. 1, §1.5.

où  $\mathcal{S}_0(q, \alpha)$  qui ne dépend plus de  $t$  est souvent appelée “action raccourcie” ou “action réduite”. Plus généralement, si l’une des coordonnées,  $q_1$  par exemple, est *cyclique*, l’impulsion  $p_1$  qui lui correspond est constante et l’on a

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = \mathcal{S}'(q', \alpha', t) + \alpha_1 q_1$$

où  $\alpha_1 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1} = p_1$  et où  $q'$  et  $\alpha'$  sont, respectivement, l’ensemble des coordonnées restantes et l’ensemble des constantes restantes qui leur correspondent. On obtient notamment la forme (85) lorsque le temps est une variable cyclique.

Envisageons donc un système conservatif et, comme précédemment, effectuons une transformation canonique  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  pour laquelle les nouvelles impulsions sont les constantes  $\alpha$ , mais cette fois en prenant l’action réduite  $\mathcal{S}_0$  pour fonction génératrice. Celle-ci étant indépendante du temps, on a maintenant  $H' = H'(Q, P) = H(q, p) = E$ , et, compte tenu de  $P_k = \alpha_k = \text{constante}$ , les nouvelles équations de Hamilton donnent

$$\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial P_k} = \dot{Q}_k = \text{constante}$$

la première signifiant que  $E$  s’exprime uniquement en fonction des  $\alpha_k$ , la seconde conduisant pour les nouvelles coordonnées  $Q = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \alpha}$  à la loi horaire

$$Q_k(t) = \frac{\partial E}{\partial \alpha_k} t + \gamma_k \tag{86}$$

où les  $\gamma_k$  sont des constantes. Notons que ce résultat pouvait être déduit de celui de la transformation canonique représentée par (84), puisque

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \beta = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial E}{\partial \alpha} t \tag{87}$$

d’où l’on tire finalement que  $\gamma = \beta$ .

Pour de nombreux systèmes et en faisant un choix approprié des variables les décrivant, on a une *séparation complète des variables* dans l’équation de Hamilton-Jacobi. N’envisageant ici que des systèmes conservatifs, cela qui signifie que l’action réduite peut s’écrire comme la somme de  $s$  fonctions  $S_k(q_k)$ , chacune ne dépendant que d’une seule coordonnée :

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{k=1}^s S_k(q_k) \tag{88}$$

Comme (à constantes fixées)  $p_k = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_k} = \frac{dS_k}{dq_k}$ , la fonction  $S_k$  peut être écrite sous la forme

$$S_k = \int p_k dq_k \quad (89)$$

Considérant  $q_k$  et  $p_k$  comme des variables indépendantes, la différentielle  $p_k dq_k$  n'est pas une différentielle totale. Il s'ensuit que si dans le plan  $(q_k, p_k)$  le point  $M(q_k, p_k)$  décrit une courbe fermée, la variation correspondante de  $S_k$  est non nulle et égale à

$$\Delta S_k = 2\pi I_k, \quad \text{où} \quad I_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k \quad (90)$$

Les fonctions  $S_k$  ne sont donc pas des fonctions uniformes des coordonnées. Les  $s$  grandeurs  $I_k$  sont des constantes du mouvement appelées *variables d'action*. Elles sont homogènes au produit  $pq$ , lequel, pour les cas usuels, est homogène à un moment cinétique. Si l'on choisit  $\alpha = I$ , on voit que les variables  $w_k = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial I_k}$  associées aux constantes  $I$  prises comme impulsions généralisées sont sans dimension, donc homogènes à des angles. Pour cette raison les  $w_k$  sont appelées *variables angulaires*. D'après (86), ce sont des fonctions linéaires du temps :

$$w_k(t) = \frac{\partial E}{\partial I_k} t + \beta_k \quad (91)$$

Supposons de plus que le système étudié effectue un mouvement borné relativement à toutes les coordonnées. Cela signifie que chaque coordonnée  $q_k$  évolue indéfiniment dans le temps entre une valeur minimum  $q_{k\min}$  et une valeur maximum  $q_{k\max}$ <sup>23</sup>. Sur un aller et retour entre ces deux valeurs de la variable  $q_k$ , l'action aura varié de

$$\Delta S_k = 2\pi I_k, \quad \text{où} \quad I_k = \frac{2}{2\pi} \int_{q_{k\min}}^{q_{k\max}} p_k dq_k \quad (92)$$

tandis que la variable angulaire  $w_k$  associée à  $I_k$  aura varié de

$$\Delta w_k = \Delta \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial I_k} = \frac{\partial}{\partial I_k} \Delta \mathcal{S}_0 = 2\pi \quad (93)$$

---

23. Certaines variables peuvent être des angles qui peuvent être des fonctions croissant indéfiniment avec le temps. Cependant, ces angles n'interviennent dans les fonctions uniformes des coordonnées que par l'intermédiaire de fonctions trigonométriques, donc périodiques. Il est donc possible de ne considérer l'évolution de ces angles que dans des intervalles finis  $[0, 2\pi[$ .

Les variables angulaires  $w$  sont donc des fonctions multiformes des coordonnées qui peuvent varier d'un nombre entier de fois  $2\pi$  lorsque les coordonnées reviennent à leurs valeurs initiales.

Les  $I_k$  étant des fonctions uniformes des coordonnées  $(q, p)$ , il s'ensuit que toute fonction uniforme  $F(q, p)$ , exprimée au moyen des variables canoniques  $(w, I)$ , est une fonction périodique de période  $2\pi$ , relativement à chacune des variables  $w$ . Ce résultat justifie le développement en séries de Fourier

$$F = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{+\infty} F_{m_1, \dots, m_s} \exp i [m_1 w_1 + \cdots m_s w_s]$$

soit, en utilisant (91),

$$F = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{+\infty} F'_{m_1, \dots, m_s} \exp it [m_1 \omega_1 + \cdots m_s \omega_s], \quad \text{avec} \quad \omega_k = \frac{\partial E}{\partial I_k} \quad (94)$$

Chaque terme de cette somme est une fonction périodique du temps de pulsation  $m_1 \omega_1 + \cdots m_s \omega_s$ . Comme celles-ci ne sont généralement pas des multiples entiers ou des fractions rationnelles de l'une d'elles, la somme totale  $F$  n'est pas une fonction périodique. Cela signifie que le système ne repassera pas par un même état au bout d'un temps fini.

Le seul cas où le mouvement est rigoureusement périodique est celui pour lequel toutes les pulsations sont commensurables. La trajectoire correspondante est alors *fermée*. Cela peut arriver pour des valeurs particulières des  $I_k$ . Mais si cette circonstance est réalisée pour un système quelles que soient les valeurs des  $I_k$  dans leurs domaines de variation spécifiques, on dit de celui-ci qu'il est *complètement dégénéré*. Toutes ses trajectoires bornées sont *fermées*.

Une dégénérescence a pour conséquence une réduction du nombre de grandeurs indépendantes  $I_k$  apparaissant dans l'énergie. En effet, supposons par exemple que l'on ait

$$n_2 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_1 \frac{\partial E}{\partial I_2} \quad (95)$$

pour toutes valeurs de  $I_1$  et  $I_2$ . Il est facile de montrer que  $E$  ne dépend alors de  $I_1$  et  $I_2$  que par l'intermédiaire de la somme  $n_1 I_1 + n_2 I_2$ .

Une autre conséquence d'une dégénérescence est l'accroissement du nombre d'intégrales premières uniformes vis-à-vis des variables. Dans le cas général, le nombre d'intégrales premières indépendantes est  $2s - 1$ . Les grandeurs  $I_k$  constituent un ensemble de

$s$  intégrales premières uniformes. Les  $s - 1$  intégrales premières restantes peuvent être choisies parmi les grandeurs

$$w_k \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_\ell \frac{\partial E}{\partial I_\ell} \quad (96)$$

lesquelles sont bien constantes, d'après (91). Cependant, ces grandeurs ne sont généralement pas uniformes. En revanche, si  $\frac{\partial E}{\partial I_k}$  et  $\frac{\partial E}{\partial I_\ell}$  sont commensurables, soit  $n_k \frac{\partial E}{\partial I_k} = n_\ell \frac{\partial E}{\partial I_\ell}$  ( $n_k$  et  $n_\ell$  entiers), l'intégrale première

$$n_\ell w_k - n_k w_\ell$$

n'est certes pas uniforme, mais sa non-uniformité se réduit à l'addition d'un multiple entier quelconque de  $2\pi$ . Pour constituer une intégrale première uniforme, il suffit alors de prendre une fonction trigonométrique de cette grandeur.

## 7.2 Application aux mouvements à forces centrales

Revenons au cas du mouvement borné d'un point matériel dans un champ de forces centrales. Une fois appliquée la conservation du moment cinétique, il ne subsiste que deux degrés de liberté, décrits par les variables  $r$  et  $\psi$  pour lesquelles on a bien séparation complète des variables. Les deux constantes  $I_r$  et  $I_\psi$  associées à ces variables sont données par

$$I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} |p_r| dr, \quad I_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\psi d\psi$$

Comme  $p_\psi = mr^2\dot{\psi} = L$ ,  $L$  étant la norme du moment cinétique, on a simplement  $I_\psi = L$ . Puis, appliquant la constance de l'énergie  $E$ , on a

$$|p_r| = m|\dot{r}| = \sqrt{2m} \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}, \quad \text{et}$$

$$I_r = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}} dr \quad (97)$$

où  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  sont solutions de  $\dot{r} = 0$ . Supposons que  $I_r$  et  $I_\psi$  vérifient (95), c'est-à-dire que  $E$  ne dépend de  $I_r$  et  $I_\psi$  que via la somme  $n_r I_r + n_\psi I_\psi$ ,  $n_r$  et  $n_\psi$  étant



deux entiers indépendants de  $I_r$  et  $I_\psi$ . On a alors  $\left(\frac{\partial I_r}{\partial I_\psi}\right)_E = -\frac{n_\psi}{n_r}$ . Or, d'après (26)<sup>24</sup>,

$$\left(\frac{\partial I_r}{\partial I_\psi}\right)_E = -\frac{L}{\pi\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} = -\frac{\Delta\psi}{\pi} \quad (98)$$

On retrouve ainsi que, quelles que soient les valeurs admissibles des constantes, les mouvements bornés du point matériel sont strictement périodiques et les trajectoires correspondantes fermées si et seulement si  $\Delta\psi = \pi \frac{n_\psi}{n_r}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\Delta\psi$  est commensurable avec  $\pi$ .

Envisageant que *toutes* les trajectoires bornées soient fermées, le nombre rationnel  $\beta = n_\psi/n_r$  doit être indépendant de ces trajectoires (c'est-à-dire, des valeurs de  $I_r$  et de  $I_\psi$ ), et donc représenter une constante spécifique du potentiel. Si l'on impose à celui-ci de donner des trajectoires circulaires *stables*, alors, comme on l'a vu, il est contraint à être de la forme  $V(r) = K/r^\alpha$ , avec  $K\alpha < 0$  et  $\alpha = 2 - \beta^2$ . Avec la démonstration décrite au §5.3.3, on retrouve les conclusions du théorème de Bertrand : il n'y a que deux solutions,  $\alpha = -2$ ,  $K > 0$  (potentiel de Hooke);  $\alpha = 1$ ,  $K < 0$  (potentiel de Newton).

### 7.3 Calcul dans le cas newtonien

On a ici  $V(r) = -\frac{K}{r}$  avec  $K > 0$ , et

$$I_r = \frac{L}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\max}}\right) \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r}\right)} dr, \quad \text{avec}$$

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{mK}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{mK^2}} \right], \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{mK}{L^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{mK^2}} \right]$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable  $\frac{1}{r} = a + b \cos \eta =$

$X$ , où  $a = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} \right]$ ,  $b = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} \right]$ , qui donne

$$I_r = \frac{Lb^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \eta d\eta}{X^2} = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \left[ -1 + \frac{2a}{X} - \frac{a^2 - b^2}{X^2} \right] d\eta$$

<sup>24</sup>. La dépendance de  $r_{\max}$  et  $r_{\min}$  vis-à-vis des constantes ne donne aucun résultat dans la dérivation du fait de l'annulation de l'intégrande de (97) aux bornes d'intégration.

En utilisant  $\int_0^\pi \frac{d\eta}{X} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ,  $\int_0^\pi \frac{d\eta}{X^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$ , on trouve

$$I_r = -L + \frac{aL}{\sqrt{a^2 - b^2}} = -L + \frac{mK}{\sqrt{2m|E|}}, \text{ soit}$$

$$E = -\frac{mK^2}{2(I_r + L)^2} \quad (99)$$

Ici, on obtient donc  $n_r = n_\psi = 1$  et  $\Delta\psi = \pi$ .

## 7.4 Calcul dans le cas harmonique

Un calcul analogue au précédent montre que pour le potentiel harmonique  $V(r) = \frac{Kr^2}{2}$  (avec  $K > 0$ ), on obtient

$$E = \sqrt{\frac{K}{m}} [L + 2I_r], \text{ soit } \frac{n_r}{n_\psi} = \frac{1}{2} \text{ et } \Delta\psi = \frac{\pi}{2} \quad (100)$$

## 7.5 Retour sur la mise en forme des équations

Supposons que l'on veuille décrire le mouvement du point matériel  $M$ , soumis au champ de forces centrales de source  $O$ , relativement à un repère cartésien quelconque dont l'origine reste cependant fixée en  $O$ . Dans ce repère,  $M$  a pour coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  et pour coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ . En coordonnées cartésiennes, la différentielle de l'action raccourcie s'écrit

$$dS_0 = p_x dx + p_y dy + p_z dz, \text{ où } p_x = m\dot{x}, \text{ etc} \quad (101)$$

Considérant d'une part que les trois grandeurs  $p_x, p_y, p_z$  définissent le *vecteur quantité de mouvement*  $\mathbf{P}$ , à ne pas confondre avec les impulsions au sens hamiltonien du terme, et que d'autre part les trois différentielles  $dx, dy, dz$  sont les composantes cartésiennes du *vecteur déplacement élémentaire*  $d\mathbf{M}$ , l'expression (101) est le produit scalaire  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{M}$  qui est invariant par rotation. Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques étant une rotation, on a donc aussi bien

$$dS_0 = P_r dr + P_\theta r d\theta + P_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (102)$$

où  $P_r, P_\theta, P_\varphi$  sont les composantes sphériques de la quantité de mouvement. Les impulsions relatives aux coordonnées sphériques sont donc liées à ces composantes par les formules

$$p_r = \frac{\partial S_0}{\partial r} = P_r, \quad p_\theta = \frac{\partial S_0}{\partial \theta} = rP_\theta, \quad p_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = r \sin \theta P_\varphi, \quad \text{de sorte que}$$

$$dS_0 = p_x dx + p_y dy + p_z dz = p_r dr + p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi \quad (103)$$

Il est ainsi clair que la différentielle  $dS_0$  reste la même quelque soit le système de coordonnées obtenu par rotation autour de  $O$ . Considérons alors le repère dont l'axe des  $z'$  est selon le moment cinétique  $\mathbf{L}$ . Dans le cas des forces centrales dont il est question ici, ce vecteur est constant et le point matériel se déplace dans le plan  $z' = 0$ . Or, utilisant dans ce nouveau repère les coordonnées cylindriques  $r, \psi, z'$ , on a

$$dS_0 = p_r dr + p_\psi d\psi + p_{z'} dz' \equiv p_r dr + p_\psi d\psi \quad \text{puisque } z' = 0$$

On en déduit la relation

$$p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi = p_\psi d\psi \quad (104)$$

et par conséquent cette égalité entre variables d'action

$$I_\psi = I_\theta + I_\varphi \quad (105)$$

spécifique aux mouvements à forces centrales. Notons que dans l'un ou l'autre choix de variables, les angles azimutaux  $\psi$  et  $\varphi$  sont des variables cycliques, ce qui conduit à  $I_\varphi = p_\varphi$  et  $I_\psi = p_\psi$ , d'où

$$I_\theta = p_\psi - p_\varphi \quad (106)$$

Cette relation peut être obtenue par un calcul direct simple mais quelque peu obscurcissant, car ne révélant pas d'emblée l'origine profonde de celle-ci, à savoir la symétrie sphérique de l'interaction<sup>25</sup>. Mettant à part les constantes du problème telles que masse et constantes inhérentes au potentiel, nous avons vu que l'énergie  $E$  ne dépend que des variables d'action (qui sont elles-mêmes des constantes temporelles). Dans le schéma utilisant les coordonnées  $r, \theta, \varphi$ , l'énergie ne dépend donc que de  $I_r, I_\theta, I_\varphi$ , tandis qu'en passant aux variables  $r, \psi$ , en utilisant la conservation du moment cinétique, on voit que l'énergie ne dépend plus que de  $I_r$  et  $I_\psi = I_\theta + I_\varphi$ . On constate donc que ladite symétrie sphérique provoque une dégénérescence partielle, dans le sens défini précédemment, puisque l'énergie ne dépend alors des variables d'action  $I_\theta$  et  $I_\varphi$  que par l'intermédiaire de leur somme.

---

25. H. Goldstein, J.L. Safko, C.P. Poole Jr., loc. cit. §10.8

## 8 Les symétries dynamiques

### 8.1 Introduction

Prenons comme principe de base qu'en mécanique classique, l'évolution temporelle de tout système est régie par des équations de Hamilton. Envisageons alors une transformation quelconque des variables canoniques et du temps. Si les nouvelles équations de Hamilton obtenues après transformation gardent la même forme que celles avant transformation, le système est dit invariant sous ladite transformation ; ou encore, que cette dernière représente une symétrie du système.

Il existe deux symétries importantes pour le système étudié ici. La première est son invariance temporelle : le temps n'apparaît pas explicitement dans les équations d'évolution, ce qui fait que celles-ci sont insensibles à une translation temporelle et que l'on peut choisir arbitrairement l'origine des dates. La seconde est son invariance par rotation autour de la source de potentiel. Il en résulte que le choix des axes du référentiel d'espace ayant pour origine cette source est arbitraire. Comme on sait, ces deux symétries impliquent la conservation de l'énergie et du moment cinétique par rapport au point source.

On sait aussi que les équations de Hamilton gardent la même forme lorsqu'on leur fait subir des transformations dites canoniques. Comme il existe une infinité de telles transformations, on serait tenté de dire que tout système Hamiltonien possède une infinité de symétries. Cependant toutes n'ont pas la même utilité et seules quelques-unes ont une réelle signification physique. Les deux symétries dont il a été question plus haut sont de ce dernier type. Leur importance vient du fait qu'elles font apparaître des constantes du mouvement. Ces constantes sont en effet essentielles dans la résolution des équations du mouvement. Pour un système à  $s$  degrés de liberté, le nombre d'équations de Hamilton est  $2s$ . Comme ce sont des équations différentielles du premier ordre, leur intégration *complète* devrait faire apparaître  $2s$  constantes indépendantes dont les valeurs dépendent de conditions initiales. Pour un système *fermé*, donc invariant par translation temporelle, l'une des constantes peut être éliminée en faisant un choix approprié de l'origine des dates. Le résultat est que la solution générale des équations d'évolution d'un tel système doit dépendre de  $2s - 1$  constantes indépendantes, dites intégrales premières<sup>26</sup>.

---

26. On peut aussi envisager le problème de la manière suivante. L'ensemble des équations de Hamilton peut être réécrit sous la forme

$$dt = \frac{dq_1}{A_1} = \dots = \frac{dq_i}{A_i} = \dots = \frac{dq_s}{A_s} = \frac{dp_1}{B_1} = \dots = \frac{dp_j}{B_j} = \dots = \frac{dp_s}{B_s}, \text{ avec}$$
$$A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

On prévoit ainsi que la loi d'évolution d'un point matériel soumis à un champ de forces centrales (qui est un système fermé) dépend de  $2 \times 3 - 1 = 5$  constantes indépendantes. L'énergie  $E$  peut être choisie comme l'une d'elles. Les trois composantes  $L_k$  du moment cinétiques sont aussi des constantes.

## 8.2 Les crochets de Poisson

Il est bien connu en Mécanique que par le biais des crochets de Poisson, certaines fonction des coordonnées et des impulsions sont susceptibles d'engendrer un groupe de transformations<sup>27</sup>. Il en va ainsi des composantes du moment cinétique qui engendrent le groupe des rotations spatiales autour de l'origine. Définissons les crochets de Poisson entre deux fonctions  $f$  et  $g$  comme suit<sup>28</sup>

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right] \quad (107)$$

où  $s$  est le nombre de degrés de liberté du système étudié. Dans le cas d'un point matériel, il est facile de montrer que les trois composantes de son moment cinétique par rapport à l'origine, à savoir

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x$$

ont pour crochets de Poisson entre elles :

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= L_z, \quad \{L_y, L_z\} = L_x, \quad \{L_z, L_x\} = L_y, \quad \text{soit} \\ \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k \end{aligned} \quad (108)$$

---

les  $A_i$  et  $B_j$  ne dépendant pas explicitement du temps pour un système fermé. En oubliant alors  $t$  et  $dt$ , on dispose d'un système d'équations différentielles couplées, uniquement entre les variables canoniques  $q_i$  et  $p_j$ , comportant  $2s - 1$  signes d'égalité, et dont l'intégration fait apparaître autant de constantes. Ces dernières se présenteront comme des fonctions des variables canoniques, qui restent constantes lors d'une évolution quelconque du système. En fait, cette façon de procéder permet en principe d'obtenir directement les équations de la trajectoire du système dans l'espace des phases  $(q, p)$  à  $2s$  dimensions (portrait de phase). La donnée des  $2s - 1$  intégrales premières ainsi trouvées détermine cette trajectoire. A noter cependant que la relation entre ces intégrales premières et les conditions initiales n'est généralement pas biunivoque. Un exemple simple est celui du moment cinétique Eq. (4) :  $L = r(t)p_\theta(t) = r(t_0)p_\theta(t_0)$  est le même pour tous les mouvements dont les conditions initiales  $r(t_0)$  et  $p_\theta(t_0)$  vérifient cette égalité.

27. Voir par exemple notre cours *Introduction à la Théorie Lagrangienne*, chap. 1, §1.10 et suivants.

28. Cette définition diffère par le signe de celle donnée, par exemple, dans l'ouvrage de L. Landau et E. Lifchitz.

où  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de rang 3 complètement antisymétrique, tel que  $\epsilon_{123} = 1$  (tenseur de Levi-Civita)<sup>29</sup>. L'action de la composante  $L_z$  par exemple sur une fonction des coordonnées  $f(x, y, z)$  se caractérise par le crochet

$$\mathcal{L}_z [f(x, y, z)] = \{ L_z, f \} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \quad (109)$$

et l'on vérifie que les trois opérateurs  $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z$  ont entre eux des relations de *commutation* similaires aux relations (108) :

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \mathcal{L}_i \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_j \mathcal{L}_i = \epsilon_{ijk} \mathcal{L}_k \quad (110)$$

qui sont celles de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , algèbre qui engendre le groupe des rotations  $SO(3)$ .

Ecrivant  $L_i = \epsilon_{imn} x_m p_n$ , on montre aisément que le moment cinétique agit sur les composantes  $x, y, z$ , du rayon vecteur  $\mathbf{r}$  et sur les composantes  $p_x, p_y, p_z$  de l'impulsion  $\mathbf{p}$  comme suit :

$$\{ L_i, x_j \} = \epsilon_{ijk} x_k, \quad \{ L_i, p_j \} = \epsilon_{ijk} p_k \quad (111)$$

tandis que son action sur une fonction ne dépendant que de grandeurs *scalaires* telles que la distance  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , la norme de l'impulsion  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$  ou le produit scalaire  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ , donne un résultat nul car cette fonction est invariante par rotation. Pour convaincre le lecteur que le moment cinétique est bien étroitement lié aux rotations, il suffit d'exprimer le résultat de (109) dans le système de coordonnées cylindriques  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $z$ . On trouve

$$\{ L_z, f \} = \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

L'expression  $\mathcal{L}_i \delta \phi_i$  représente ainsi une rotation infinitésimale autour de l'axe  $i$ , d'angle infinitésimal  $\delta \phi_i$ .

Une rotation  $\mathcal{R}_i$  d'angle fini  $\phi_1$  autour de ce même axe est obtenue par exponentiation, comme indiqué ci-après. On a

$$\begin{aligned} f' &= \mathcal{R}_i(f) = f(0) + \phi_i \frac{\partial f}{\partial \phi}(0) + \frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}(0) + \dots \\ &= f + \phi_i \{ L_i, f \} + \frac{1}{2} \phi_i^2 \{ L_i, \{ L_i, f \} \} + \dots = \exp[\phi_i \mathcal{L}_i](f) \end{aligned} \quad (112)$$

---

29. On utilise la convention de sommation d'Einstein : l'indice  $k$  répété implique une sommation sur cet indice. A noter que  $x_i p_j - x_j p_i = [\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}] x_a p_b = \epsilon_{ijc} \epsilon_{abc} x_a p_b = \epsilon_{abc} L_c$

Complétons en notant que trois grandeurs  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , fonction des coordonnées  $x, y, z$  et des composantes  $p_x, p_y, p_z$  de l'impulsion définissent un vecteur au sens des rotations de  $SO(3)$  si elles se transforment sous les rotations infinitésimales comme les  $x_i$  ou les  $p_i$ , c'est-à-dire, finalement, si elles vérifient des relations similaires à (111), soit :

$$\{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} A_k \quad (113)$$

Le Hamiltonien lui-même engendre une transformation canonique s'identifiant à la translation temporelle. Son action sur une fonction  $f$  des variables canoniques et du temps s'exprime comme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dt} = \{H, f\} \quad (114)$$

si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps. De la seconde équation de (114) on déduit l'important résultat qu'une fonction  $f$  des variables canoniques et indépendante du temps est une intégrale première si et seulement si ses crochets de Poisson avec le Hamiltonien sont nuls. Dans ce cas, les transformations canoniques engendrées par  $f$  laissent invariant le Hamiltonien. Si  $f$  est de plus indépendante de l'énergie et du moment cinétique, les transformations qui lui sont associées représentent une symétrie qui vient en surplus de celles, classiques, de l'invariance temporelle et de l'invariance par rotation. Pour cette raison, on la qualifie de *symétrie dynamique*.

Il est facile de montrer que les crochets de Poisson entre deux intégrales premières fournissent une nouvelle intégrale première. Un exemple est donné par les équations (108) montrant que les crochets des deux intégrales premières  $L_x$  et  $L_y$  donnent l'intégrale première  $L_z$ . Cet exemple montre que la construction de nouvelles intégrales premières avec les crochets de Poisson peut être illusoire dans la mesure où le résultat peut n'être qu'une constante numérique (par exemple 0 ou 1) ou une intégrale première non indépendante de celles utilisées pour la construire<sup>30</sup>.

Selon le théorème de Arnold-Liouville<sup>31</sup>, un système mécanique à  $s$  degrés de liberté est *complètement intégrable* s'il possède les trois propriétés suivantes :

- il existe  $s$  intégrales premières  $I_k$  ( $k = 1, \dots, s$ );
- ces intégrales premières sont indépendantes<sup>32</sup>;

30. J. Bertrand, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. 17 (1852) p. 393-436.

31. M. J. Liouville, *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, JMPA 20 (1855), p 137-138; V.I. Arnold, loc. cit.

32. Indépendamment des équations du mouvement, leur produit extérieur  $dI_1 \wedge \dots \wedge dI_s$  doit être non nul.

- et ces intégrales premières sont en involution, c'est-à-dire, vérifient

$$\{I_k, I_\ell\} = 0, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq \ell \leq s \quad (115)$$

On montre que  $s$  est le nombre maximum d'intégrales premières indépendantes en involution. Les intégrales premières indépendantes additionnelles, en nombre maximum  $s - 1$ , ne peuvent donc avoir des crochets de Poisson tous nuls avec les premières ou entre elles.

Le système étudié dans ces notes est complètement intégrable au sens du précédent théorème car il possède les propriétés requises. En effet, les  $s = 3$  intégrales premières permettant de satisfaire le théorème sont l'énergie  $E$ , la composante  $L_z$  du moment cinétique et le module de celui-ci,  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$ , car<sup>33</sup>

$$\{E, L_z\} = 0, \quad \{E, L\} = 0, \quad \{L, L_z\} = 0$$

la dernière équation résultant du fait que  $L$  est invariant par rotation. Cette complète intégrabilité est exprimée par les formules (24) et (25).

En considérant comme fondamentales les trois intégrales premières précédentes, il resterait à trouver au maximum deux nouvelles intégrales premières indépendantes pour engendrer un groupe de symétrie dynamique.

## 8.3 Un exemple célèbre : le vecteur de Laplace-Runge-Lenz

### 8.3.1 Introduction

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale dont la source est un point  $O$  s'effectue dans un plan contenant  $O$  et dont la normale est définie par le moment cinétique  $\mathbf{L}$  du mobile, qui est alors une constante vectorielle de ce mouvement. Si de plus la trajectoire est bornée et fermée, on imagine bien qu'elle doit être caractérisée dans ce plan par au moins une direction privilégiée, constante dans le temps. En d'autres termes, il doit exister pour ce mouvement une autre constante vectorielle ayant la particularité d'être perpendiculaire au moment cinétique. Supposons une loi de force de la forme  $\mathbf{F} = -K \frac{\mathbf{r}}{r^{\alpha+2}}$  et introduisons le vecteur

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} + G(r)\mathbf{r} \quad (116)$$

Cherchons quelle doit être la forme de  $G(r)$  pour que ce vecteur soit, si possible, constant dans le temps. On a, avec  $\mathbf{L} = mC\mathbf{e}_z$ ,

---

<sup>33</sup>. Montrer que, indépendamment des équations du mouvement, on a  $dL_x \wedge dL_y \wedge dL_z = 0$ , soit lorsque les impulsions sont fixées, soit lorsque les coordonnées sont fixées.



$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{L} + \dot{G}(r)\mathbf{r} + G(r)\mathbf{v} = \\ \frac{KC}{r^{\alpha+1}}\mathbf{e}_\psi + r\dot{r}G'(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r G(r)\dot{r} + G(r)\frac{C}{r}\mathbf{e}_\psi &= 0, \text{ soit} \\ G(r) = -K\frac{1}{r^\alpha} \text{ et } rG'(r) = -G(r), \text{ donc } G(r) &= \frac{K'}{r}\end{aligned}$$

On en déduit que parmi les forces centrales de ce type, seul le champ newtonien, avec  $\alpha = 1$ , permet d'obtenir une telle constante vectorielle du mouvement ayant cette forme<sup>34</sup>. Le *vecteur de Laplace-Runge-Lenz*<sup>35</sup>, constante vectorielle du mouvement à force centrale newtonienne, est défini par

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - \frac{K}{r}\mathbf{r} \quad (117)$$

Comme  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ , on a aussi  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ . Explicitement, on trouve

$$\mathbf{A} = Ke\mathbf{e}_x \quad (118)$$

et donc que  $\mathbf{A}$  est orienté selon le grand axe de l'ellipse, axe de symétrie de cette dernière. On observe que l'excentricité  $e$  de l'ellipse est directement liée à la norme  $A$  du vecteur LRL :

$$e = \frac{A}{K}, \text{ et que } |E| = \frac{m}{2L^2}(K^2 - A^2) \quad (119)$$

A noter que l'existence de ce vecteur LRL permet d'obtenir très facilement l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires, en le projetant sur le rayon vecteur. En effet, par cette simple opération, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{m}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - Kr = \frac{L^2}{m} - Kr = rA \cos \psi, \text{ soit} \\ r &= \frac{r_0}{(1 + e \cos \psi)}, \text{ avec } r_0 = \frac{L^2}{mK} = \frac{mC^2}{K}, \quad e = \frac{A}{K}\end{aligned} \quad (120)$$

Comme remarqué précédemment, l'énergie  $E$ , les trois composantes du moment cinétique  $\mathbf{L}$  et les trois composantes du vecteur  $\mathbf{A}$  ne sont certainement pas toutes indépendantes et sont certainement liées par au moins 2 relations. Ceci est vérifié

34. Il est important de noter ici que le résultat est valable quel que soit le signe de la constante  $K$ .

35. Ci-après nommé vecteur LRL; P.S. Laplace, *Traité de Mécanique Celeste*, 1799, Tome I, Première partie, Livre II, p. 165 et suivantes; C. Runge, *Vektoranalysis*, 1919, Leipzig; W. Lenz, *Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung*, Zeitschrift für Physik 24, (1924), pp. 197-207.

par (119) d'une part et par  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$  d'autre part. Cependant, comme nous allons le voir, les composantes de  $\mathbf{L}$  et de  $\mathbf{A}$  sont aussi liées par d'autres relations autrement plus importantes.

Notons enfin que selon (118) le vecteur  $\mathbf{A}$  est strictement nul dans le cas d'une trajectoire circulaire dont l'excentricité est nulle. Ceci est imputable au fait qu'aucune direction n'est privilégiée dans le plan d'une telle trajectoire.

### 8.3.2 Relations entre les $L_i$ et les $A_j$

Il est évident que les composantes du vecteur LRL (117) vérifient (113). En effet, chacune d'elles s'écrit

$$A_i = \frac{1}{m} [p^2 x_i - p_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})] - K \frac{x_i}{r} \quad (121)$$

et est de la forme  $x_i \eta + p_i \zeta$  où  $\eta$  et  $\zeta$  sont deux fonctions d'invariants qui sont donc elles-mêmes invariantes.

Exprimons maintenant les crochets de Poisson que font entre elles les composantes du vecteur LRL. Utilisant (121), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial p_k} &= \frac{1}{m} [2p_k x_i - p_i x_k - \delta_{ik} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})] \\ \frac{\partial A_i}{\partial x_k} &= \frac{1}{m} [\delta_{ik} p^2 - p_i p_k] - \frac{K}{r} \left[ \delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2} \right], \quad \text{d'où} \\ \{ A_i, A_j \} &= \frac{1}{m} \sum_k \left[ \left[ \frac{1}{m} (\delta_{ik} p^2 - p_i p_k) - \frac{K}{r} \left( \delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. [2p_k x_j - p_j x_k - \delta_{jk} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})] - [2p_k x_i - p_i x_k - \delta_{ik} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})] \times \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{1}{m} (\delta_{jk} p^2 - p_j p_k) - \frac{K}{r} \left( \delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{r^2} \right) \right] \right] = \dots \\ &= -\frac{2H}{m} [x_i p_j - x_j p_i], \quad \text{soit} \\ \{ A_i, A_j \} &= -\frac{2H}{m} \epsilon_{ijk} L_k \quad (122) \end{aligned}$$

$H$  étant le Hamiltonien dont la valeur  $E$  est ici négative. Comme les  $A_i$  sont des constantes du mouvement, leurs crochets de Poisson avec  $H$  sont nuls. Définissant

$$R_i = \sqrt{\frac{m}{-2H}} A_i, \quad \text{on a alors}$$

$$\{R_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \quad (123)$$

Regroupant (108), (113) et (123), on constate que les six fonctions  $L_i$  et  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), forment, vis-à-vis des crochets de Poisson, une algèbre de Lie. Montrons qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie  $\text{su}(2) \oplus \text{su}(2)$ . Définissons

$$F_k = \frac{i}{2} (L_k + R_k), \quad G_k = \frac{i}{2} (L_k - R_k) \quad (124)$$

Ces nouvelles fonctions vérifient les relations

$$\begin{aligned} \{F_k, F_\ell\} &= i\epsilon_{k\ell m} F_m, & \{G_k, G_\ell\} &= i\epsilon_{k\ell m} G_m, & \{F_k, G_\ell\} &= 0, & \text{soit} \\ [\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_\ell] &= i\epsilon_{k\ell m} \mathcal{F}_m, & [\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_\ell] &= i\epsilon_{k\ell m} \mathcal{G}_m, & [\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_\ell] &= 0 \end{aligned} \quad (125)$$

qui montrent que les  $F_i$  et les  $G_i$  satisfont séparément aux mêmes relations que celles définissant l'algèbre de Lie  $\text{su}(2)$ , ainsi que leurs opérateurs associés  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{G}_i$ , avec les commutateurs usuels<sup>36</sup>.

Les fonctions (124) étant elles-mêmes des constantes du mouvement, ont des crochets de Poisson nuls avec le Hamiltonien. Cela signifie que le Hamiltonien est *invariant* sous les transformations d'un groupe de Lie engendré par lesdites fonctions, via leurs opérateurs associés, tel (109). Cette invariance entre dans la catégorie de ce qu'il est convenu d'appeler les *symétries dynamiques*.

## 8.4 Comment caractériser une symétrie dynamique ?<sup>37</sup>

L'exemple du vecteur LRL nous montre la voie à suivre pour caractériser une éventuelle symétrie dynamique pour notre problème, en se fondant de plus sur l'argumentation suivante.

Un point important à souligner ici est que la symétrie sphérique du potentiel n'a jamais été suffisamment exploitée. Elle sert habituellement à montrer que les trajectoires sont planes, à réduire les équations du mouvement à une seule, l'équation (12), à obtenir l'action réduite sous la forme (88) (séparation des variables), la relation (106) et l'équation (22) de la courbure ; mais rien de plus précis sur l'aspect géométrique général des trajectoires n'est vraiment abordé dans les manuels classiques. Pourtant, ainsi qu'il a été montré au paragraphe 2.3, la symétrie sphérique est à l'origine d'une autre propriété importante des trajectoires, à savoir, que la plupart d'entre elles, voire toutes, possèdent des axes de symétrie associés à des

36.  $\mathcal{F}_i(f) = \{F_i, f\}$ .

37. C. Carimalo, *Dynamical symmetries behind Bertrand's theorem*, Am. J. Phys. **89** (2021), 1012-1017.

points de retournement. Cette propriété est généralement prise en compte de façon anodine dans l'expression des équations polaires des trajectoires. Expliquons-nous.

Grâce à l'invariance par rotation autour du point source, les axes de référence dans le plan du mouvement peuvent être choisis arbitrairement. Mais, chacun sait que dans tout problème, il est toujours avantageux de présenter ses solutions sous une forme la plus intelligible et transparente qui soit. Ceci est généralement fait de façon naturelle en tenant compte, dès le début, des éventuelles propriétés qui leur sont communes. Par exemple, dans le problème de Kepler, l'équation polaire des trajectoires est écrite, comme dans (120), en prenant l'axe de symétrie de la trajectoire comme axe de référence pour l'angle polaire.

Par ailleurs, le fait est que l'existence d'une symétrie dynamique reflète celle de propriétés communes à toute une série de trajectoires. En effet, une telle symétrie doit s'envisager mathématiquement comme un groupe continu de transformations (canoniques) qui permet de relier entre elles les trajectoires d'une même espèce, transportant de l'une à l'autre leurs propriétés communes, sous une forme covariante, tout en définissant, d'une façon ou d'une autre, une propriété géométrique commune à toutes ces trajectoires. Comme mentionné plus haut, une propriété commune minimale des trajectoires est l'existence d'axes de symétrie.

Dans le cas du potentiel Newtonien, nous avons vu que le vecteur LRL représente, pour chaque trajectoire, son axe de symétrie, et est aussi associé à un groupe de transformations canoniques. Enfin, nous savons que dans notre problème, il manque deux grandeurs pour constituer un ensemble complet d'intégrales premières indépendantes. Compte tenu de ce qui précède, ces grandeurs peuvent être envisagées, de façon minimaliste, comme les deux composantes indépendantes d'un vecteur unitaire  $\mathbf{U}$ , que nous appellerons *vecteur de symétrie*, censé représenter la supposée symétrie des trajectoires<sup>38</sup>.

Ce vecteur sera considéré comme une intégrale première ne dépendant pas explicitement du temps, et choisi de façon à caractériser une symétrie des trajectoires. Celles-ci étant planes, ce vecteur sera supposé se trouver dans leurs plans respectifs, c'est-à-dire, orthogonal à  $\mathbf{L}$ . Ainsi, le vecteur  $\mathbf{U}$  doit-il déjà satisfaire les trois contraintes

$$\mathbf{U}^2 = 1, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \{L_i, U_j\} = \epsilon_{ijk} U_k \quad (126)$$

---

38. La corrélation entre symétrie dynamique et géométrie des trajectoires, ainsi que sa description au moyen d'un vecteur de symétrie, ont été étudiées pour la première fois à la fin des années 1960 : H. Bacry, H. Ruegg, J-M Souriau, *Dynamical Groups and Spherical Potentials in Classical Mechanics*, Comm. math. Phys. **3** (1966), 323-333 ; D. M. Fradkin, *Existence of the Dynamical Symmetries  $O_4$  and  $SU_3$  for All Classical Central Potentials Problems*, Progr. Theor. Phys. **37** (1967), 798-812 ; N. Mukunda, *Dynamical Symmetries and Classical Mechanics*, Phys. Rev. **155** (1967), 1383-1386.

la dernière exprimant simplement qu'il est bien un vecteur au sens du groupe des rotations. Considérons ensuite les crochets  $T_{ij} = \{U_i, U_j\}$ . Ce sont les composantes d'un tenseur de rang 2 *antisymétrique*, lequel, comme les composantes  $U_i$ , ne dépend que des variables canoniques. Sur la base des formules établies dans l'Appendice C, on trouve

$$\{U_i, U_j\} = 0 \quad (127)$$

soit, que les composantes du vecteur de symétrie forment une algèbre *abélienne*.

Insistons sur le fait que le formalisme développé ici ne dépend pas de la forme précise du potentiel, et qu'introduire un vecteur de symétrie unitaire a l'avantage de prendre en compte toute sorte de symétrie dynamique. L'existence dudit vecteur peut finalement être considérée comme le véritable indicateur d'une symétrie des trajectoires, le plus probablement, celle résultant d'un axe de symétrie.

Pour être complet, nous montrons dans l'Appendice D comment adapter le formalisme lorsque l'espace de configuration est de dimension supérieure à 3.

## 9 Action du groupe dynamique

Définissons  $\mathbf{W} = \frac{1}{L}\mathbf{L} \wedge \mathbf{U}$ . Ce vecteur forme avec  $\mathbf{U}$  et  $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}/L$  une base orthonormée. Les composantes de ces vecteurs sont liées par les formules bien connues

$$\begin{aligned} W_i &= \epsilon_{ijk}\ell_j U_k, \quad U_i = \epsilon_{ijk}W_j \ell_k, \quad \ell_i = \epsilon_{ijk}U_j W_k, \\ \epsilon_{ijk}U_k &= W_i \ell_j - W_j \ell_i, \quad \epsilon_{ijk}W_k = \ell_i U_j - \ell_j U_i, \quad \epsilon_{ijk}\ell_k = U_i W_j - U_j W_i, \\ U_i U_j + W_i W_j + \ell_i \ell_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (128)$$

Le vecteur  $\mathbf{W}$  a le même statut que  $\mathbf{U}$ . Etant orthogonal à  $\mathbf{L}$ , ses composantes vérifient

$$\{L_i, W_j\} = \epsilon_{ijk}W_k = \ell_i U_j - \ell_j U_i, \quad \{W_i, W_j\} = 0 \quad (129)$$

Pour exprimer la transformation que  $L$  subit sous l'action de  $\mathbf{U}$ , on doit calculer certains crochets de Poisson. De (126) et (127) on tire

$$\{L, U_j\} = \frac{1}{2L}\{L^2, U_j\} = \frac{1}{2L}\{L_i L_i, U_j\} = \frac{L_i}{L}\{L_i, U_j\} = \epsilon_{ijk}\ell_i U_k = -W_j \quad (130)$$

De la même manière, on obtient

$$\{L, W_j\} = \frac{L_i}{L} \{L_i, W_j\} = \epsilon_{ijk} \ell_i W_k = \epsilon_{jki} W_k \ell_i = U_j \quad (131)$$

Utilisant (130) et (128), on a

$$\{\ell_i, U_j\} = \{L_i, U_j\}/L - L_i \{L, U_j\}/L^2 = \epsilon_{ijk} U_k/L + L_i W_j/L^2 = W_i L_j/L^2 \quad (132)$$

d'où

$$\begin{aligned} \{U_i, W_j\} &= \epsilon_{jmn} \{U_i, \ell_m U_n\} = \epsilon_{jmn} U_n \{U_i, \ell_m\} \\ &= -\epsilon_{jmn} U_n W_m L_i/L^2 = L_i L_j/L^3 \end{aligned} \quad (133)$$

Dans une transformation infinitésimale générée par un vecteur de symétrie  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , la variation infinitésimale de  $L$  est donnée par

$$\delta L = \{\alpha_i A_i, L\} \quad (134)$$

où les  $\alpha_i$  sont les composantes d'un vecteur infinitésimal constant  $\boldsymbol{\alpha}$  (c'est-à-dire, indépendant des variables canoniques). Par une analyse dimensionnelle de (134),  $\alpha_i A_i$  doit être homogène à un moment angulaire. Si  $\mathbf{A} = \mathbf{U}$ , alors les  $\alpha_i$  sont homogènes à  $L$ . Si ces  $\alpha_i$  sont pris sans dimension,  $\mathbf{A}$  doit être homogène à  $L$  et pour cette raison ne peut pas être un vecteur unitaire. A ce point, le paramètre  $L$  est la seule intégrale première qui soit homogène à un moment angulaire. Nous sommes donc naturellement conduit à définir un nouveau vecteur de symétrie comme  $\mathbf{A} = L\mathbf{U}$ . Avec ce choix, on obtient la nouvelle série de relations

$$\{L_i, A_j\} = \epsilon_{ilk} A_k, \quad \{A_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \quad (135)$$

lesquelles sont homomorphes à celles définissant l'algèbre de Lie du groupe  $SO(3, 1)$ , ou du groupe de Lorentz  $L(3, 1)$  ou du groupe  $SL(2, C)$ <sup>39</sup>. Il apparaît que ce dernier choix fournit une loi de transformation plus simple pour  $L$ , comme indiqué ci-après. Définissant  $\mathbf{B} = L\mathbf{W}$ , on a

$$\{L_i, B_j\} = \epsilon_{ijk} B_k, \quad \{B_i, B_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{A_i, B_j\} = L \delta_{ij} \quad (136)$$

Pour des paramètres finis  $\alpha_i$ , la transformation finie  $\mathcal{T}_A$  générée par  $T_A = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}$  change  $L$  en

---

39. Voir, par exemple, H. Bacry, *Lectures on group theory and particle theory*, Gordon and Breach, 1977.

$$L' = \mathcal{T}_A(L) = L + \{T_A, L\} + \frac{1}{2}\{T_A, \{T_A, L\}\} + \frac{1}{3!}\{T_A, \{T_A, \{T_A, L\}\}\} + \dots \quad (137)$$

Soit  $\xi = \|\boldsymbol{\alpha}\|$ ,  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\alpha}/\xi$ . Alors,

$$\begin{aligned} T_A(L) &= \{T_A, L\} = \alpha_i \{A_i, L\} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B} = \xi L \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}, \\ T_A^2(L) &= \{T_A, \{T_A, L\}\} = \alpha_i \alpha_j \{A_i, B_j\} = \xi^2 L, \\ T_A^3(L) &= \{T_A, \{T_A, \{T_A, L\}\}\} = \xi^2 \{T_A, L\} = L \xi^3 \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \end{aligned} \quad (138)$$

et ainsi de suite. On obtient finalement la loi de transformation pour  $L$

$$L' = L [\cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi] \quad (139)$$

qui est un simple changement d'échelle. Remarquons que, d'une façon générale, les seuls invariants sous les transformations générées par l'algèbre de Lie (135) sont les deux opérateurs de Casimir  $C_1 = L^2 - A^2$  ( $A^2 = A_i A_i$ ) et  $C_2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ , égaux ici à zéro. Il s'ensuit que ni  $L^2$  ni  $A^2$  sont invariants, seule l'est leur différence. Ceci explique le résultat  $L' \neq L$  dans (139).

Notons aussi qu'un opérateur tel que  $T_A$  agit comme une différentiation (il vérifie la règle de Leibniz). En conséquence,  $F_1, F_2, F_3 \circ F_1$  étant des quelconques fonctions régulières des variables canoniques, l'exponentielle  $\mathcal{T}_A$  possède les deux importantes propriétés :

$$\mathcal{T}_A(F_1 F_2) = \mathcal{T}_A(F_1) \mathcal{T}_A(F_2), \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_A(F_3(F_1)) = F_3(\mathcal{T}_A(F_1)) \quad (140)$$

qui assurent en particulier la covariance de l'équation polaire commune des trajectoires sous l'action de  $\mathcal{T}_A$ . Par exemple, dans le problème de Kepler, elles permettent d'écrire que l'excentricité d'une ellipse correspondant aux paramètres  $E$  et  $L$  a pour transformée l'excentricité d'une autre ellipse de paramètres  $E$  et  $L' = \mathcal{T}_A(L)$ .

Donnons aussi la transformation des composantes de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{A}$ . On a

$$\begin{aligned} T_A(L_i) &= \alpha_j \{A_j, L_i\} = \xi n_j \epsilon_{jik} A_k = \xi [L_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} - W_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}], \quad \text{d'où} \\ &\{T_A, \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}\} = 0 \end{aligned} \quad (141)$$

$$T_A^2(L_i) = \xi^2 n_\ell n_j \epsilon_{jik} \{A_\ell, A_k\} = \xi^2 n_j n_\ell \epsilon_{jik} \epsilon_{\ell mk} L_m = \xi^2 [L_i - n_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}]$$

où l'on a utilisé la formule  $\epsilon_{jik} \epsilon_{\ell mk} = \delta_{j\ell} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{i\ell}$  dans la dernière équation. Puis,

$$T_A^3(L_i) = \xi^2 T_A(L_i), \quad T_A^{2n+1}(L_i) = \xi^{2n} T_A(L_i) \quad \text{avec} \quad n \geq 1,$$

$$T_A^4(L_i) = \xi^2 T_A^2(L_i), \quad T^{2n}(L_i) = \xi^{2n-2} T_A^2(L_i) \quad \text{avec } n \geq 2,$$

et finalement,

$$\begin{aligned} L'_i &= \mathcal{T}_A(L_i) = L_i + (\cosh \xi - 1) [L_i - n_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}] + \sinh \xi [L_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} - W_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}] \\ &= L_i [\cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi] - \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} [n_i (\cosh \xi - 1) + W_i \sinh \xi] \end{aligned} \quad (142)$$

La transformation des composantes  $A_i$  est obtenue à partir de (142), en remplaçant  $L_i$  et  $\mathbf{L}$  par  $A_i$  et  $\mathbf{A}$ . Ainsi, utilisant  $\mathcal{T}_A(A_i) = \mathcal{T}_A(LU_i) = \mathcal{T}_A(L)\mathcal{T}_A(U_i)$ , on trouve

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i [\cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi] - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} [n_i (\cosh \xi - 1) + W_i \sinh \xi] \quad \text{et} \\ U'_i &= U_i - \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \frac{n_i (\cosh \xi - 1) + W_i \sinh \xi}{\cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi} \end{aligned} \quad (143)$$

De même, il est facile d'obtenir

$$\begin{aligned} B'_i &= B_i + n_i (\cosh \xi - 1) \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} + n_i L \sinh \xi \quad \text{et} \\ W'_i &= \frac{W_i + n_i (\cosh \xi - 1) \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} + n_i \sinh \xi}{\cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi} \end{aligned} \quad (144)$$

en tenant compte des relations  $\{A_i, B_j\} = L\delta_{ij}$  (Eq. (136)) et  $\mathcal{T}_A(B_j) = L'\mathcal{T}_A(W_j)$ .

Dans l'Appendice E, on montre que l'équation (144) s'interprète comme un "boost" de Lorentz. Toutefois, l'orthonormalité de la base de référence  $\mathbf{U}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\ell}$  est préservée par  $\mathcal{T}_A$ , les équations (142), (143) and (144) définissant la nouvelle base de référence  $\mathbf{U}', \mathbf{W}', \boldsymbol{\ell}'$ . Ainsi,  $\mathcal{T}_A$  change généralement l'orientation du plan du mouvement, changement décrit par une rotation dont l'axe et l'angle s'expriment à l'aide de  $\mathbf{n}$  et  $\xi$ . Ceci est également fait dans l'Appendice E. En outre, d'après (139), (142) et (143) on voit que  $\mathcal{T}_A$  provoque aussi un changement d'échelle le long des axes de référence définis par  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{L}$ . Comme ces vecteurs ont pour norme  $L$ , eux aussi se voient multipliés par le même facteur  $\rho = L'/L = \cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi$ . On en déduit que l'action de  $\mathcal{T}_A$  sur ces trois vecteurs est équivalente au produit d'une rotation  $\mathcal{R}_A$  par  $\rho$ . Si  $\mathbf{n}$  est le long du vecteur initial  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire, si  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{W}$ , la base de référence est inchangée tandis que le facteur d'échelle est  $\exp(\pm \xi)$ .

On ne peut malheureusement pas déduire une forme générale de la transformation des coordonnées  $X$  et  $Y$  car elle dépend de la dynamique du mouvement considéré. Les développements ci-dessus sont tout ce que l'on peut établir indépendamment du potentiel (à symétrie sphérique) étudié.



## 10 Comment exprimer le vecteur de symétrie ?

### 10.1 Introduction

En tant qu'opérateur agissant dans l'espace des phases,  $U$  doit être considéré comme un champ de vecteurs défini sur cet espace, exactement comme le moment angulaire  $L$ . D'un autre côté, d'après tout ce qui a été dit précédemment, en un point donné de l'espace des phases, son rôle géométrique est de définir un axe de symétrie de la trajectoire correspondant audit point, servant généralement d'axe de référence.

Faisons tout d'abord la remarque suivante. Il semble évident mais essentiel dans la présente étude, que quels que soient la forme du potentiel  $V(r)$  et le domaine de variations de  $r$ , il est toujours possible de trouver une valeur  $E$  de l'énergie satisfaisant l'inégalité  $E \geq U(r)$ <sup>40</sup> qui définit les mouvements admissibles, avec pour conséquence que l'équation  $E = U(r)$  des points de retournement a au moins une solution pour  $r$ . Comme il est fait dans l'Appendice F, on peut le montrer à l'aide de méthodes élémentaires pour les potentiels homogènes qui sont partout attractifs ou partout répulsifs.

Notons cependant que l'équation précédente pourrait ne pas être réalisée au cours de mouvements réels qui dépendent fortement des conditions initiales : suivant ces dernières, le ou les points de retournement pourraient ne pas être atteints au cours du temps. En conséquence, nous considérerons comme objet principal d'étude l'équation polaire  $r(\theta)$  qui, pour toutes les valeurs permises de  $\theta$ , représente la courbe géométrique complète selon laquelle ont lieu tous les mouvements ayant des conditions initiales différentes mais respectant les valeurs des paramètres de cette équation polaire. On passe d'un mouvement à l'autre en variant continuellement les conditions initiales, ce qui signifie que l'équation polaire représente déjà elle-même une infinité de mouvements possibles. On peut la considérer comme représentant la "classe d'équivalence" des mouvements donnant les mêmes valeurs des paramètres de l'équation polaire, c'est-à-dire, les mêmes valeurs pour  $E$  et  $L$ . Pour simplifier, nous continuerons à appeler "trajectoire" cette courbe géométrique complète décrite par  $r(\theta)$ .

En outre, suivant les valeurs permises de  $E$  et  $L$ , l'équation  $E = U(r)$  pourrait également ne pas être réalisée pour certaines trajectoires.

On peut contre-balancer cette note négative par les arguments positifs suivants. Comme on sait, l'existence d'un axe de symétrie pour une classe de trajectoires implique celle de nouvelles intégrales premières. Finalement, ces dernières, exprimées à l'aide des variables canoniques, doivent leur statut au seul fait que leurs crochets

---

40. Rappelons que  $U(r)$  est le potentiel effectif.

de Poisson avec le Hamiltonien sont nuls : elles ne sont pas attachées à la classe de trajectoires par laquelle elles ont pu être mises en évidence, elles s'appliquent à tout autre trajectoire possible. En outre, pour un potentiel donné, toutes les trajectoires possibles, déduites d'une même équation fondamentale, doivent posséder des équations polaires pouvant être reliées analytiquement, et par conséquent, ces équations polaires portent nécessairement la trace de l'existence d'un point de retournement.

## 10.2 Choix des axes de référence

Envisageons donc une trajectoire, ou sa courbe géométrique complète qui lui est associée, possédant un point de retournement  $P_0$ , où la particule a pour vecteur position  $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_{r_0}$  et pour quantité de mouvement  $\mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{e}_{\theta_0}$ , tels que  $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_0 = 0$ . Son axe de symétrie est parallèle à  $\mathbf{r}_0$  et passe par  $O$ . Dans le plan du mouvement, redéfinissons les vecteurs unitaires des axes rectangulaires comme  $\mathbf{E}_x = \mathbf{e}_{r_0}$  et  $\mathbf{E}_y = \mathbf{e}_{\theta_0}$ . Le moment angulaire est complètement fixé par  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{p}_0$ , puisque  $L = r_0 p_0$ . Bien entendu, les deux vecteurs  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_y$  sont constants dans le temps et sont donc aptes à représenter un vecteur de symétrie. Choisissons  $\mathbf{U} = \mathbf{E}_x$ . Pour faire de ce vecteur un champ de vecteurs dans l'espace des phases, il faut l'exprimer en fonction des variables canoniques  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  d'un point de la trajectoire, de la même manière que le moment angulaire est aussi exprimé comme  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ . Cela peut se faire simplement en inversant les expressions

$$\mathbf{r} = X\mathbf{E}_x + Y\mathbf{E}_y, \quad \mathbf{p} = P_x\mathbf{E}_x + P_y\mathbf{E}_y \quad (145)$$

Utilisant

$$L = XP_y - YP_x, \quad P_y = p_r \sin \psi + p_\psi \cos \psi = \frac{u}{r} \sin \psi + \frac{L}{r} \cos \psi \quad (146)$$

où  $\psi$  est l'angle polaire de  $\mathbf{r}$  par rapport à  $\mathbf{r}_0$ , défini dans (28), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \frac{1}{L} [P_y \mathbf{r} - Y \mathbf{p}], \quad \text{or} \\ \mathbf{E}_x &= \frac{1}{Lr} [(u \sin \psi + L \cos \psi) \mathbf{r} - r^2 \sin \psi \mathbf{p}] \end{aligned} \quad (147)$$

Le second membre de (147) est une fonction des variables canoniques,  $\psi$  étant exprimé comme dans (28) avec  $L = \sqrt{p^2 r^2 - u^2}$  et  $E = p^2/(2m) + V(r)$ . De façon évidente, c'est une intégrale première puisque  $\mathbf{E}_x$  est une constante du mouvement. Notons que  $X, Y, P_x$  et  $P_y$  doivent être considérés maintenant comme des invariants par rotations, exprimés en termes des scalaires  $r^2, p^2$  et  $u = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ . Utilisant

$$\mathbf{p} = \frac{1}{r^2} [u\mathbf{r} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{L}] \quad (148)$$

et l'équation polaire  $r = R(\psi)$ , (147) peut être mise sous la forme utile

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{LR(\psi)} [\sin \psi \mathbf{r} \wedge \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] \quad (149)$$

Au lieu d'obtenir une relation triviale en projetant  $\mathbf{r}$  sur  $\mathbf{E}_x$ , l'introduction de  $R(\psi)$  nous permet de "retrouver" l'équation polaire :

$$r \cos \psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_x = \frac{r^2 \cos \psi}{R(\psi)}, \quad \text{d'où } r = R(\psi) \quad (150)$$

Il est utile de remarquer ici que les expressions dans (147) et (149) sont covariantes sous le groupe de symétrie, une propriété qui n'aurait pas pu être obtenue en utilisant pour axe de référence un vecteur constant quelconque, indépendant de la dynamique.

En définissant un axe de symétrie,  $\mathbf{E}_x$  doit jouer un rôle similaire à celui du vecteur LRL dans le problème de Kepler ( $V(r) = -K/r$ ). Vérifions (147) en considérant deux exemples fameux. Le premier est justement du problème de Kepler. Dans le cas des ellipses, on a

$$\begin{aligned} R(\psi) &= \frac{r_0}{1 + e \cos \psi}, \quad \text{avec } r_0 = \frac{L^2}{mK}, \\ e &= \sqrt{1 - 2r_0|E|/K}, \quad u = eLr \sin \psi / r_0 \end{aligned} \quad (151)$$

et l'on trouve

$$Ke \mathbf{E}_x = -\frac{u}{m} \mathbf{p} + \left( \frac{p^2}{m} - \frac{K}{r} \right) \mathbf{r} \quad (152)$$

qui est exactement le vecteur LRL. Le même résultat est obtenu en considérant plutôt des hyperboles.

Le second exemple est celui du potentiel de Hooke (ou potentiel harmonique)  $V(r) = Kr^2/2$  avec  $K > 0$ . La trajectoire la plus générale est une ellipse de centre  $O$ , dont l'équation cartésienne est  $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ . Il apparaît plus simple d'utiliser la paramétrisation avec l'anomalie excentrique  $\chi$  :  $X = a \cos \chi$ ,  $Y = b \sin \chi$ , ce qui conduit à

$$\dot{\chi} = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad L = ab\sqrt{Km}, \quad P_y = b\sqrt{Km} \cos \chi, \quad \text{et}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{a\sqrt{Km}} \left[ \sqrt{Km} \cos \chi \mathbf{r} - \sin \chi \mathbf{p} \right] \quad (153)$$

Avec les notations de l'Appendice G, on trouve

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{p^2 - Kmr^2}{\sqrt{(p^2 - Kmr^2)^2 + 4Kmu^2}} = \cos 2\chi, \\ \sin \theta &= \frac{2u\sqrt{Km}}{\sqrt{(p^2 - Kmr^2)^2 + 4Kmu^2}} = \sin 2\chi \end{aligned} \quad (154)$$

En posant  $\lambda = Kma^2$ ,  $\chi = \theta/2$ , on retrouve l'opposé du vecteur  $\mathbf{t}_-$  de (G.9).

Ces deux exemples montrent l'efficacité de la simple méthode proposée ici pour trouver un vecteur de symétrie exprimé en fonction des variables canoniques, une fois connue l'équation polaire de la trajectoire.

Considérons ensuite l'exemple instructif des trajectoires produites par le potentiel  $V(r) = -K/r^2$ . En supposant  $L^2 \neq 2mK$ , leurs équations polaires peuvent être déduites de l'expression générale

$$R(\theta) = \frac{R}{\cos \chi(\theta - \phi)} \quad \text{avec} \quad \chi^2 = 1 - \frac{2mK}{L^2}, \quad R^2 = L\chi^2/(2mE) \quad (155)$$

où  $\theta$  est l'angle polaire de  $\mathbf{r}$  relativement à sa valeur initiale  $\mathbf{r}(0)$  et  $\phi$  étant une constante. Les paramètres  $\chi$ ,  $R$  et  $\phi$  sont réels ou complexes selon les signes de  $\chi^2$  et  $E$ , sous la condition  $R(\theta) > 0$ . Il y a trois cas principaux :

1)  $\chi^2 > 0$ ,  $E > 0$ ; alors

$$R(\theta) = \frac{r_0}{\cos \omega(\theta - \phi)} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{1 - \frac{2mK}{L^2}}, \quad r_0 = \frac{L\omega}{\sqrt{2mE}}, \quad \phi \text{ réel} \quad (156)$$

2)  $\chi^2 < 0$ ,  $E < 0$ ; alors

$$R(\theta) = \frac{r_0}{\cosh \Omega(\theta - \phi)} \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{2mK}{L^2} - 1}, \quad r_0 = \frac{L\Omega}{\sqrt{2m|E|}}, \quad \phi \text{ réel} \quad (157)$$

3)  $\chi^2 < 0$ ,  $E > 0$ . Alors  $\chi = \pm i\Omega$ ,  $R = \pm ir_0$  with  $r_0 = \frac{L\Omega}{\sqrt{2mE}}$ , et l'on est conduit à poser  $\Omega\phi = \pm\Omega\phi' - i\pi/2$  avec  $\phi'$  réel et positif, pour tenir compte de toutes les conditions initiales possibles. Ceci donne

$$R(\theta) = \frac{\pm r_0}{\sinh \Omega(\theta \pm \phi')} \quad (158)$$

Le cas 1) est principalement celui des trajectoires non bornées. La courbe géométrique complète est obtenue en faisant varier  $\psi = \theta - \phi$  entre  $-\pi/(2\omega)$  et  $+\pi/(2\omega)$ . Celle-ci présente un unique point de retournement à  $\psi = 0$ , atteint ou non lors d'un mouvement réel selon que l'angle initial  $\theta(0)$  est plus petit ou plus grand que  $\phi$  (rappelons que  $\dot{\theta} > 0$ ). Indépendamment de cette possibilité, l'équation polaire est symétrique par rapport à la valeur  $\theta = \phi$ , correspondant à un axe de symétrie choisi opportunément comme axe  $Ox$ . Dans ce cas, on trouve le vecteur de symétrie

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \frac{\cos \omega \psi}{Lr_0} [\sin \psi \mathbf{r} \wedge \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] \\ \text{avec } \psi &= \pm \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left( \frac{r_0}{r} \right) \end{aligned} \quad (159)$$

Le cas 2) correspond principalement aux trajectoires bornées. Lors d'un mouvement réel, la particule chute toujours vers la source en effectuant un mouvement en forme de spirale. La trajectoire géométrique complète est obtenue en faisant varier  $\psi = \theta - \phi$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Elle a aussi un unique point de retournement à  $\psi = 0$ . Même avec cette géométrie particulière, on peut définir le vecteur de symétrie :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \frac{\cosh \Omega \psi}{Lr_0} [\sin \psi \mathbf{r} \wedge \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] \\ \text{avec } \psi &= \pm \frac{1}{\Omega} \cosh^{-1} \left( \frac{r_0}{r} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

Le cas 3) se décompose en deux sous-cas. Le premier avec le signe plus dans (158) correspond à des trajectoires bornées tombant en spirale vers la source quand  $\theta$  varie de 0 à  $+\infty$ , selon l'équation  $r = r_0/\sinh \Omega(\theta + \phi')$ . Le second avec le signe moins dans (158) est celui des trajectoires non bornées,  $r$  allant de  $r(0)$  à  $+\infty$  lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $\phi'$ , selon l'équation polaire  $r = r_0/\sinh \Omega(\phi' - \theta)$ . Aucune de ces trajectoires n'a de point de retournement, ni leurs courbes géométriques complètes pour lesquelles  $\psi = \phi' + \theta$  pour le premier cas varie entre 0 et  $+\infty$  et  $\psi = \theta - \phi'$  pour le second cas varie entre  $-\infty$  et 0. Pour chacun de ces cas, la valeur  $\psi = 0$  correspond à une asymptote que l'on peut considérer comme une réminiscence de l'axe de symétrie observé dans le cas 2), alors que  $\cosh$  se transforme en  $\sinh$  dans l'équation polaire, comme il a été vu ci-dessus. Ces asymptotes sont maintenant prises comme axes de référence, et l'on a

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{Lr} [\sin \psi \mathbf{r} \wedge \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] \quad \text{avec } \psi = \pm \frac{1}{\Omega} \sinh^{-1} \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad (161)$$

Un autre exemple instructif est fourni par le potentiel

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + \frac{K_2}{r^2}, \quad K_1 > 0, \quad K_2 > 0, \quad (162)$$

déjà considéré au paragraphe 5.4. L'unique propriété partagée entre toutes les trajectoires possibles est la symétrie de leurs équations polaire vis-à-vis du remplacement de  $\psi$  par  $-\psi$ , ce qui signifie que l'axe  $Ox$  est leur axe de symétrie commun. Utilisant (149), on trouve pour ce problème le vecteur de symétrie

$$\mathbf{E}_x = \frac{1 + e \cos \beta\psi}{Lr_0} [\sin \psi \mathbf{r} \wedge \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] \quad (163)$$

Donnons enfin des exemples concernant des potentiels qui sont partout répulsifs. Les trajectoires obtenues pour ces potentiels sont toutes non bornées, mais qui possèdent elles aussi un axe de symétrie conduisant à un vecteur de symétrie.

Le potentiel répulsif newtonien  $V(r) = K/r$  avec  $K > 0$  fournit des hyperboles d'équations polaires

$$r(\psi) = \frac{r_0}{e \cos \psi - 1}$$

avec  $r_0 = L^2/(mK)$ ,  $e = \sqrt{1 + 2EL^2/(mK)}$ . Ainsi qu'il a été vu au paragraphe 8.3.1, ce cas dispose d'un vecteur de symétrie de type LRL :

$$Ke\mathbf{E}_x = \frac{1}{m}\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} + \frac{K}{r}\mathbf{r} \quad (164)$$

obtenu à partir de (117) ou (152) en remplaçant  $K$  with  $-K$ .

Le potentiel harmonique répulsif  $V(r) = -Kr^2/2$  avec  $K > 0$  conduit aussi à des hyperboles d'équations polaires

$$r(\psi) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + e \cos 2\psi}}$$

avec  $r_0 = L/\sqrt{mE}$ ,  $e = \sqrt{1 + L^2K/(mE^2)}$ . Comme il est montré dans l'Appendice G, dans le cas Hookéen attractif, le vecteur de symétrie est un vecteur propre du tenseur symétrique de rang deux de composantes  $T_{ij} = mKx_ix_j + p_ip_j$ , qui est une intégrale première. Ici, on trouve aisément que le tenseur symétrique de composantes  $T_{ij} = -mKx_ix_j + p_ip_j$ , est aussi une intégrale première. L'un de ses vecteurs propres définit l'axe de symétrie de l'hyperbole étuflée et constitue un vecteur de symétrie analogue à (G.9). L'autre vecteur propre, orthogonal au précédent, définit un autre axe de symétrie tenant compte de la symétrie de l'équation polaire dans l'opération  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ . En fait, cette équation polaire décrit l'association de deux hyperboles se déduisant l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'axe défini par ce second vecteur propre. C'est une réminiscence des deux axes de symétrie de l'ellipse du problème de Hooke attractif.

# 11 Vers un groupe de symétrie complet <sup>41</sup>

## 11.1 Introduction

Comme nous l'avons montré, le problème du mouvement d'une particule plongée dans un potentiel à symétrie sphérique est non seulement intégrable, mais aussi maximalelement super-intégrable, ayant, grâce à la symétrie sphérique, un groupe de symétrie dynamique, que nous noterons ci-après  $S_1$  <sup>42</sup>. Les transformations de ce groupe agissent dans l'espace des phases comme des transformations canoniques, transformant une solution en une autre au moyen des crochets de Poisson. Géométriquement, cela signifie qu'elles transforment une trajectoire de la particule en une autre du même type. Considérons par exemple une trajectoire elliptique du problème de Kepler (potentiel Newtonien) et revoyons les paramètres qui la définissent. Il y a tout d'abord le plan dans lequel elle se trouve : celui-ci contient la source du potentiel et son orientation est fixée par la direction du moment cinétique  $\mathbf{L}$  qui est une constante du mouvement. Puis, l'orientation de la trajectoire dans ce plan, qui est fixée par le vecteur de symétrie  $\mathbf{A}$ , autre constante du mouvement. Enfin, l'excentricité, fixées par le module  $L = \|\mathbf{L}\|$  du moment cinétique et l'énergie  $E$ , ce dernier paramètre étant une autre constante du mouvement. Avec les transformations de  $S_1$ , il est possible de changer continuellement l'orientation du plan ainsi que l'orientation et la dimension de l'ellipse dans ce plan <sup>43</sup>. Toutefois, comme les générateurs de ces transformations sont des intégrales premières, elles ne changent pas la valeur de l'énergie. En conséquence, elles ne peuvent relier que des ellipses correspondant à une même énergie. Pour être précis, rappelons que l'excentricité  $e_N$  de l'ellipse pour le potentiel Newtonien est (30)

$$e_N = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}, \text{ avec } E < 0, |E| < \frac{mK^2}{2L^2} \quad (165)$$

Il est donc clair que, l'énergie étant donnée, les ellipses ayant la même excentricité ne peuvent être reliées par lesdites transformations. Le groupe  $S_1$  seul est donc incapable de connecter toutes les orbites possibles. On fait le même constat pour le groupe dynamique associé au mouvement dans le potentiel de Hooke, pour lequel toutes les trajectoires sont des ellipses d'excentricité (37)

$$e_H = \sqrt{\frac{2\sigma}{1+\sigma}}, \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{L^2K}{mE^2}}, \quad E > \sqrt{\frac{L^2K}{m}} \quad (166)$$

---

41. C. Carimalo, *Symmetries and stability of motions in the Newtonian and the Hookean potentials*, Theor. Appl. Mech. **49** (2022), 61-69.

42. Groupe qui peut s'identifier à  $SO(3, 1)$ .

43. Voir : M. Cariglia, E. S. Araùjo, *Dynamical symmetries of the Kepler problem*, Eur. J. Phys. **34** (2013), 1307

La possibilité de relier entre elles *toutes* les trajectoires de même type associées à différentes valeurs de l'énergie est donc conditionnée à l'existence d'une nouvelle opération, étrangère à  $S_1$ , venant compléter ce groupe pour constituer un groupe de symétrie plus vaste.

Comme nous allons voir maintenant, une telle opération peut être trouvée dans le cas des potentiels homogènes.

## 11.2 Une autre symétrie : la similarité mécanique

Il est utile de rappeler ici que, fondamentalement, l'éventuelle symétrie d'un système physique repose sur l'invariance de son équation d'évolution, qui est généralement une équation différentielle<sup>44</sup>.

D'après les travaux pionniers de Sophus Lie sur le sujet à la fin du 19ème siècle<sup>45</sup>, on sait comment la recherche des symétries d'une équation différentielle peut s'avérer efficace pour résoudre celle-ci. Pour ce faire, l'équation est soumise à des *transformations de Lie* de toutes les variables impliquées (dépendantes et indépendantes). Une présentation très pédagogique de la méthode se trouve dans l'ouvrage de H. Stephani<sup>46</sup>.

Dans cet esprit, il est naturel de se demander si la symétrie décrite par  $S_1$  peut être dévoilée par la méthode de Lie. Bien sûr, c'est possible dans le principe, mais malaisé en pratique, voir l'Appendice H. Décrivons brièvement la méthode en considérant les équations différentielles du second ordre

$$\ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \quad (167)$$

où les  $x_i$  sont les coordonnées cartésiennes à la date  $t$  d'un point  $P$ , le point sur les lettres signifiant une dérivation temporelle. Les coordonnées, leurs dérivées (vitesses)  $v_i = \dot{x}_i$  et le temps étant considérées comme 7 variables indépendantes, appliquons à ces équations la transformation infinitésimale

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon\xi, \quad x_i \rightarrow x'_i = x_i + \epsilon\eta_i, \quad v_i \rightarrow v'_i = v_i + \epsilon\beta_i \quad (168)$$

où  $\xi$ ,  $\eta_i$  et  $\beta_i$  sont des fonctions des coordonnées, des vitesses et du temps, et où  $\epsilon$  est une quantité infinitésimale sans dimension. Les équations (167) deviennent

$$\ddot{x}'_i = F'_i(x'_1, x'_2, x'_3, v'_1, v'_2, v'_3, t') \quad (169)$$

44. J-M Lévy-Leblond, *Conservation laws for gauge-invariant Lagrangian in classical mechanics*, Am. J. Phys. **39** (1971), 502.

45. S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen II*, Teubner, Leipzig, 1890.

46. H. Stephani, *Differential equations : Their solution using symmetries*, Malcom MacCallum ed., Cambridge University Press, 1989.



et la transformation est une symétrie du système si et seulement si  $F'_i = F_i$ . Remarquons que la transformation (168) transforme aussi le temps et diffère donc notablement des transformations canoniques usuelles pour lesquelles  $\xi = 0$ . Il apparaît qu'en prenant  $\xi = 0$ , la méthode ne conduit en fait à rien et que l'on est forcé de considérer  $\xi \neq 0$ . Malheureusement, même dans ce cas, le résultat est décevant, car, ainsi que le relève H. Stephani dans son ouvrage<sup>47</sup>, l'application d'une transformation générale de Lie telle que (168) (dite transformation de contact) à l'équation différentielle du second ordre (167) conduit à des équations compliquées dont les solutions, bien qu'elles doivent certainement exister, sont généralement introuvables. Finalement, seul le cas des transformations de Lie pour lesquelles  $\xi$  et  $\eta_i$  ne dépendent que des coordonnées et du temps, dites transformations ponctuelles, s'avèrent efficaces en révélant une symétrie propre aux potentiels homogènes : si le potentiel est une fonction homogène de degré  $\nu$  des coordonnées, les équations du mouvement sont invariantes sous toute transformation finie définie par<sup>48</sup>

$$x_i \rightarrow x'_i = a x_i, \quad t \rightarrow t' = b t, \quad \text{avec } b = a^{1-\nu/2} \quad (170)$$

Il s'agit en fait d'une propriété bien connue associée à ces potentiels et appelée *similarité mécanique*<sup>49</sup>. Lorsque  $V(r) \propto r^\nu$ , il est en effet possible de relier le mouvement d'une trajectoire admissible, où les coordonnées du mobile  $P$  sont  $x_i(t)$  à la date  $t$ , à celui d'une autre trajectoire admissible où les coordonnées du mobile correspondant  $P'$  sont  $x'_i(t')$  à une date  $t'$  a priori différent, faisant de ces deux trajectoires des entités similaires, géométriquement parlant. Si  $\ell$  et  $\ell'$  sont des longueurs de parcours le long de deux trajectoires reliées par ladite transformation, la relation

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{\ell'}{\ell} \right)^{1-\nu/2} \quad (171)$$

donne le rapport des temps de parcours des longueurs correspondantes. Dans le cas du potentiel de Newton,  $\nu = -1$  et (171) traduit la troisième loi de Kepler. Pour le potentiel de Hooke,  $\nu = 2$  et  $t = t'$ . Dans ce cas spécial, l'équation du mouvement est linéaire et la relation ci-dessus signifie qu'à toute date, cette équation reste invariante en multipliant la solution par une constante quelconque. Dans la transformation (170), le Hamiltonien et le Lagrangien ne sont pas invariants, tous

---

47. H. Stephani, loc. cit. § 11.4.

48. Voir : G.E.Prince, C.J. Eliezer, *Symmetries of the time-dependent N-dimensional oscillator*, J. Phys. A, Math. Gen. **13** (3) (1980), 815-823, et l'Appendice H.

49. Voir : J. Bertrand, *Note sur la similitude en Mécanique*, Journal de l'Ecole Polytechnique **19** (1848) p. 189-197; L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 2<sup>nd</sup> ed., §10, Pergamon Press, 1969.

deux étant multipliés par  $a^\nu$ . Mais cette opération, que l'on peut qualifier de *changement d'échelle du Lagrangien*<sup>50</sup>, laisse invariantes les équations canoniques. Le module  $L$  du moment cinétique est aussi changé en  $L' = La^{1+\nu/2}$ , et l'on a

$$EL^2 \rightarrow a^{2(1+\nu)}EL^2, \quad E/L \rightarrow a^{\nu/2-1}E/L \quad (172)$$

De (165), (166) et (172), on déduit que la transformation (170) connecte des ellipses de même excentricités, dans les deux cas Newtonien ( $\nu = -1$ ) et Hookeen ( $\nu = 2$ ), fournissant ainsi un moyen de compléter la symétrie  $S_1$ .

### 11.3 Un mappage complet des trajectoires

A notre connaissance, la première tentative pour définir un groupe de symétrie complet pour le problème de Kepler classique a été entreprise par J. Krause<sup>51</sup>, qui l'a appelé le *groupe de Kepler*. Dans ce but, Krause a aussi utilisé la similarité mécanique, comme il va être fait dans ce qui suit, mais d'une façon différente.

La première étape consiste à définir l'espace sur lequel agira le groupe de symétrie globale. Cela peut s'avérer problématique étant donné que le temps est impliqué dans ces transformations. Krause l'a choisi comme étant l'espace-temps quadri-dimensionnel. Il y a toutefois de bonnes raisons de procéder autrement et de choisir cet espace comme étant l'espace des phases à six dimensions. La première est que le groupe  $S_1$  agit déjà dans cet espace sur les fonctions qui y sont définies. La seconde est que la similarité mécanique est aussi une symétrie des équations canoniques. La troisième est qu'une symétrie globale est supposée fournir un mappage des trajectoires, ce qui revient à une transformation de leurs paramètres géométriques ; mais ceux-ci sont des intégrales premières, généralement exprimées en termes de variables canoniques seulement, étant indépendantes du temps. Ainsi, tout ce qu'il reste à faire est de réexprimer la transformation (170) comme une transformation des variables canoniques  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ . De façon évidente, cela s'accomplit comme suit :

$$x_i \rightarrow a x_i, \quad p_i \rightarrow \frac{a}{b} p_i = a^{\nu/2} p_i \quad (173)$$

Le générateur infinitésimal de cette opération est

$$\mathcal{M} = x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\nu}{2} p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (174)$$

50. Ou "Lagrangian rescaling", voir : P.M. Zhang, M. Cariglia, M. Elbistan, G.W. Gibbons, P.A. Hovarth, "Kepler Harmonies" and conformal symmetries, Phys. Lett. B 792 (2019), 324- 328.

51. J. Krause, On the complete symmetry group of the classical Kepler system, J. Math. Phys. **35** (1994), 5734-5748.

en supposant une sommation sur les indices répétés, ici et ci-après. L'action de ce générateur sur le Hamiltonien  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$ , avec  $V(r) \propto r^\nu$ , sur les composantes du moment cinétique  $L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$  et sur le module  $L$  de ce dernier est

$$\mathcal{M}(H) = \nu H, \quad \mathcal{M}(L_i) = \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)L_i, \quad \mathcal{M}(L) = \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)L \quad (175)$$

Selon (172), on a aussi

$$\mathcal{M}(HL^2) = 2(1 + \nu)HL^2, \quad \mathcal{M}(H/L) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)H/L \quad (176)$$

De ces formules on déduit à nouveau l'invariance de l'excentricité  $e$  des ellipses sous l'action de  $\mathcal{M}$ , dans le cas Newtonien, en prenant  $\nu = -1$  dans la première formule, et dans le cas Hookeen, en prenant  $\nu = 2$  dans la seconde formule.

L'action des générateurs du groupe  $S_1$  sur les fonctions des variables canoniques s'effectue au moyen des crochets de Poisson. Notamment, celle des composantes du moment angulaire sur une fonction quelconque  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(f) = \{L_i, f\} &= \frac{\partial L_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial L_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \mathcal{L}_{xi}(f) + \mathcal{L}_{pi}(f), \quad \text{où} \\ \mathcal{L}_{xi} &= -\epsilon_{ilk}x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \mathcal{L}_{pi} = -\epsilon_{ilk}p_\ell \frac{\partial}{\partial p_k}, \end{aligned} \quad (177)$$

sont les générateurs infinitésimaux des rotations<sup>52</sup>, agissant séparément sur l'espace des  $\mathbf{r}$  et sur l'espace des  $\mathbf{p}$ , respectivement. Soit  $A$  et  $B$  deux fonctions des variables canoniques. Un petit calcul donne

$$\mathcal{M}(\{A, B\}) = \{\mathcal{M}(A), B\} + \{A, \mathcal{M}(B)\} - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\{A, B\} \quad (178)$$

Alors, en définissant l'opérateur  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{A}(B) = \{A, B\}$ , (178) s'écrit comme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{A}(B)) &= \{\mathcal{M}(A), B\} + \mathcal{A}(\mathcal{M}(B)) - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\{A, B\}, \quad \text{ou} \\ [\mathcal{M}, \mathcal{A}](B) &= \{\mathcal{M}(A), B\} - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\{A, B\} \end{aligned} \quad (179)$$

Prenant  $A = L_i$  et utilisant (175), on trouve  $[\mathcal{M}, \mathcal{L}_i](B) = 0$ . Ce résultat étant vrai pour  $B$  quelconque, on en déduit que

$$[\mathcal{M}, \mathcal{L}_i] = 0 \quad (180)$$

---

52. Leur notation ne doit pas être confondue avec celle du Lagrangien au début de ces notes...

c'est-à-dire, l'opérateur de "similarité"  $\mathcal{M}$  et l'opérateur moment angulaire  $\mathcal{L}_i$  commutent. Allons plus loin et prenons  $A$  comme la composante  $U_i$  d'un vecteur de symétrie unitaire  $\mathbf{U}$ . Ce dernier étant sans dimension, il est clair que  $\mathcal{M}(U_i) = 0$ , et (179) donne alors

$$[\mathcal{M}, \mathcal{U}_i](B) = -(1 + \frac{\nu}{2})\mathcal{U}_i(B), \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_i(B) = \{U_i, B\} \quad (181)$$

On voit alors qu'on a tout intérêt à choisir pour vecteur de symétrie  $\mathbf{A} = L\mathbf{U}$ , car

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(LU_i) &= U_i(1 + \frac{\nu}{2})L, \quad \text{et} \quad [\mathcal{M}, \mathcal{A}_i](B) = 0 \quad \text{pour tout } B, \quad \text{soit} \\ &[\mathcal{M}, \mathcal{A}_i] = 0 \end{aligned} \quad (182)$$

et l'opérateur de similarité commute aussi avec le vecteur de symétrie ainsi défini.

On arrive ainsi à la remarquable conclusion que, selon les définitions que nous en avons données, le groupe à un paramètre généré par (174) (avec la valeur appropriée de  $\nu$ ) et le groupe  $S_1$  commutent. Les relations de commutation de leurs générateurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}, \mathcal{L}_i] &= [\mathcal{M}, \mathcal{A}_i] = 0, \quad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \epsilon_{ijk} \mathcal{L}_k, \\ [\mathcal{L}_i, \mathcal{A}_j] &= \epsilon_{ijk} \mathcal{A}_k, \quad [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = -\epsilon_{ijk} \mathcal{L}_k \end{aligned} \quad (183)$$

Faisons les remarques suivantes.

- Les formules et conclusions ci-dessus ne concernent que le cas d'un potentiel homogène. La définition des transformations permettant de relier des trajectoires de même type mais de différentes énergies données par un potentiel à symétrie sphérique mais quelconque, est une question ouverte, pour le moment (voir plus loin, section 12).
- Dans la représentation statique précédente des transformations dans l'espace des phase, le temps est superflu. Il peut toutefois être réintroduit comme un simple paramètre homogène au rapport  $mr/p$  : dans la transformation (173), un point  $P$  de coordonnées  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  et de paramètre  $t$  est transformé en un point  $P'$  de coordonnées  $(a\mathbf{r}, a^{\nu/2}\mathbf{p})$  et de paramètre  $t a^{1-\nu/2}$ . Ce paramètre "temps" peut bien sûr calculé en utilisant des formules bien connues. Dans l'espace de configuration, un point  $P_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$  est sur une trajectoire situé dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1$ , a pour vecteur de symétrie  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$  et correspond à l'énergie  $E = \frac{p_1^2}{2m} + V(r_1)$ . Le temps d'évolution du point  $P_1$  vers un autre point  $P(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  de la même trajectoire est alors donné par la formule (24).

## 11.4 Stabilité des trajectoires

Posons maintenant la question suivante : tout compte fait, quel est le rôle exact des symétries ? Qu'en est-il notamment de celles, étudiées précédemment, décrites par un groupe continu ? Ce groupe permet d'établir une connection continue et bijective entre trajectoires du problème étudié. Il en a la possibilité car celles-ci sont en nombre infini. Il agit de façon unique sur les paramètres qui définissent l'une d'elles. Supposons que certains paramètres soient changés par un agent extérieur quelconque, et qu'après cette intervention, le système évolue librement. On suppose bien sûr que cette perturbation ne détruit pas la structure fondamentale du système, mais qu'elle change simplement les paramètres de sa trajectoire. Dans ces conditions, le système va évidemment évoluer conformément à la solution admissible définie par les nouveaux paramètres, laquelle solution peut être connectée à la précédente par une transformation continue. De cette manière, l'existence du groupe assure l'intégrité de toute la suite de solutions. On peut ainsi dire que, grâce à l'existence de la symétrie et de son groupe associé, l'ensemble des solutions est stable : le mouvement faisant suite à une perturbation infinitésimale d'un mouvement donné reste au voisinage de celui-ci, en restant de plus dans la même catégorie, par exemple, celle des trajectoires fermée<sup>53</sup>. Il s'agit donc d'une *stabilité structurelle*, en étroite ligne avec la définition qui en est donnée dans la théorie mathématique de la stabilité<sup>54</sup>.

Ajoutons une autre remarque. Pour les potentiels de Newton et de Hooke, les orbites circulaires ont la particularité d'être stables dans le sens ordinaire : pour une valeur donnée du moment angulaire, chacune correspond à un minimum du potentiel effectif  $U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ , où  $V(r)$  est l'un ou l'autre de ces deux potentiels. Pour un autre potentiel homogène  $V(r) = -K/r^\alpha$  les conditions d'obtention d'une telle orbite à la distance  $r$  ont été établie dans la section 4 :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= \frac{K\alpha}{r^{\alpha+1}} - \frac{L^2}{mr^3} = 0, \quad \text{et} \\ \frac{d^2U}{dr^2} &= -\frac{3}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{K\alpha(2-\alpha)}{r^{\alpha+2}} > 0 \end{aligned} \quad (184)$$

qui ne sont satisfaites que si et seulement si  $K\alpha > 0$  et  $\alpha < 2$ . Celles-ci s'appliquent aussi bien à un espace euclidien à  $n$  dimensions, pour lequel l'équivalent du po-

---

53. Par exemple, dans le cas des potentiels de Newton et de Hooke, nous avons vu dans la section 6 qu'une perturbation infinitésimale d'une orbite circulaire dans son plan donne une ellipse d'excentricité voisine de zéro.

54. V.I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir (1980) ; V.I. Arnold, V.V. Kozlov, A.I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd ed., Springer (2006).

tentiel Newtonien est  $V(r) = -K/r^{n-2}$ , soit  $\alpha = n - 2$ . Les conditions ci-dessus donnent alors  $K(n-2) > 0$  et  $n < 4$ . Ainsi, pour ce qui concerne le potentiel Newtonien produit par une source ponctuelle, une orbite circulaire ne peut pas être stable dans un espace de dimension  $n$  supérieure à 3! Cette conclusion pourrait se généraliser à des sources Newtoniennes étendues ainsi qu'il ressort de l'étude de Takahisa Igata<sup>55</sup>. Cette discussion révèle le rôle crucial de la dimension de l'espace de configuration dans la stabilité des orbites circulaires correspondant au potentiel de Newton généralisé. Remarquons aussi que dans un espace de dimension  $n > 3$ , le potentiel  $-K/r$  avec  $K > 0$  produit encore des orbites circulaires stables, mais ce potentiel n'a alors plus de signification physique claire!

Le résultat précédent nous apparaît très satisfaisant, car il relie le nombre de dimensions à un problème de stabilité. Certes, nos connaissances actuelles ne nous permettent pas d'appréhender la véritable nature physique des dimensions spatiales, mais on peut en revanche essayer d'expliquer pourquoi leur nombre 3 devrait être le meilleur choix pour notre Univers. Il existe probablement un principe de stabilité, encore inconnu, qui est notamment à l'œuvre pour produire le résultat ci-dessus. Ce principe devra sans doute présenter un aspect économique : en effet, il est connu que certaines grandeurs physiques représentées par un tenseur antisymétrique de rang deux peuvent être plus simplement décrites par un (pseudo)vecteur dans l'espace de configuration si et seulement la dimension de cet espace est 3. C'est le cas du moment angulaire et du champ magnétique.

---

55. Takahisa Igata, *Particle dynamics in the Newtonian potential sourced by a homogeneous circular ring*, Phys. Rev. D 101(2020) 124064. A noter qu'en Gravitation, lorsqu'on se place très loin de la source, celle-ci peut toujours être considérée comme un monopole, donnant le potentiel  $1/r^{n-2}$ . Comme il a été dit, ce potentiel ne donne pas d'orbites circulaires stables pour  $n > 3$ . Par contre, le potentiel de Hooke  $Kr^2/2$  donne des orbites circulaires stables, quelle que soit la dimension.

## 12 Keplerisation, homogénéisation

### 12.1 Introduction

En 2012, V. Martinusi et P. Gurfil<sup>56</sup> ont introduit une méthode élégante et astucieuse permettant de relier n'importe quel mouvement borné dans un champ de forces central quelconque à un mouvement similaire du problème de Kepler, justifiant de qualifier la méthode de *keplerisation* d'un tel mouvement. Nous décrivons quelque peu différemment cette méthode et l'étendrons, en nous concentrant plutôt sur les trajectoires géométriques, selon le point de vue développé tout au long de ces notes. Auparavant, il nous paraît utile de répéter ici ce qui a déjà été dit dans la section 10.1 à propos de la notion de trajectoire.

La relation  $r(\theta)$  liant  $r$  à l'angle polaire  $\theta$ , couramment appelée équation polaire, ne fait plus apparaître le temps. Elle décrit analytiquement la courbe, couramment appelée *trajectoire*, obtenue en collectant toutes les positions prises par la particule  $P$  pendant son mouvement, avec des conditions initiales données. Pour des valeurs données de  $E$  et  $L$ , At given  $E$  and  $L$ , ces conditions restreignent généralement l'étendue de cette courbe. Par exemple, il peut advenir que cette trajectoire ne rencontre aucun point de retournement, tandis que ce point est présent sur une autre trajectoire correspondant aux mêmes valeurs de  $E$  et  $L$ , mais avec des conditions initiales différentes. Pour clarifier ce point, nous considérerons l'exemple du problème de Kepler. Avant cela, introduisons une formule du type Binet. De l'équation (13), on tire

$$u^2 = F(u) = -u^2 + \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u)] \quad (185)$$

Pour des valeurs données de  $E$  et  $L$ , le dernier membre de (185) ne dépend pas explicitement d'une quelconque condition initiale, et s'applique donc aussi bien à la plus longue trajectoire possible qui puisse se trouver, par simple prolongement des plus courtes, en donnant à l'angle  $\theta$  toutes les valeurs permises possibles. Evidemment, l'équation polaire de cette plus longue trajectoire, dont les paramètres ne peuvent dépendre que de  $E$  et  $L$ , décrit toutes les caractéristiques des trajectoires que l'on peut rencontrer. En particulier, elle doit rendre compte de la présence inévitable de points de retournement. Vue comme un objet géométrique en dehors de tout mouvement, cette "trajectoire complète" est associée à une infinité de solutions, correspondant chacune à des conditions initiales particulières. En élargissant le point de vue, on peut considérer que deux mouvements sont équivalents s'ils correspondent aux mêmes valeurs de  $E$  et  $L$  qui déterminent les paramètres de ladite

---

<sup>56</sup>. V. Martinusi, P. Gurfil, *Keplerization of Motion in Any Central Force Field*, 1st IAA/AAS Conference on Dynamics and Control of Space Systems, Porto, Portugal, March 2012, IAA-AAS-DyCoSS1-08-01, AAS 12-353.

trajectoire complète (incluant ici le plan du mouvement), celle-ci étant vue comme le représentant de cette classe de mouvements qui ont lieu sur cette même courbe. Dans ce qui suit, nous concentrerons notre attention sur ces courbes géométriques complètes que, pour simplifier, nous continuerons d'appeler *trajectoires*.

## 12.2 Existence de points de retournement et conséquences

Considérant l'ensemble des variations de la fonction  $\mathcal{E}(u) = \frac{L^2}{2m}u^2 + V(1/u)$  pour une valeur donnée de  $L$ , il est évident qu'on peut toujours trouver une valeur de  $E$  satisfaisant l'équation  $E = \mathcal{E}(u)$ , équivalente à  $F(u) = 0$ , dans un certain domaine de variations de  $u$ . Ainsi, quelle que soit la forme du potentiel, il existe toujours un ou plusieurs points de retournement. Des exemples ont été donnés dans la section 3 et nous renvoyons le lecteur à l'étude présentée dans l'Appendice F pour les potentiels homogènes.

Selon le type de variations de  $F(u)$  au voisinage d'une valeur  $u_t$  de  $u$  à un point de retournement, nous avons les situations de base suivantes.

(i) Selon que  $F(u)$  est croissant ou décroissant à partir de  $u = u_t$ , les mouvements sont possibles ou non pour  $u \geq u_t$  ou  $u \leq u_t$  respectivement. Dans le premier cas,  $u_t$  est une valeur minimum  $u_m$ , c'est une valeur maximum  $u_M$  dans le second cas.

(ii) Pour une valeur donnée  $E$ ,  $F(u)$  a deux zéros  $u_1$  and  $u_2$  avec  $u_1 \leq u_2$  et aucun autre zéro dans l'intervalle  $[u_1, u_2]$ . Si  $F(u) \leq 0$  pour  $u_1 \leq u \leq u_2$ , des mouvements sont possible seulement dans les domaines définis par  $u \leq u_1$  ou  $u \geq u_2$ . Respectivement,  $u_1$  est une valeur maximum et  $u_2$  une valeur minimum, ainsi qu'il est décrit dans (i). Si  $F(u) \geq 0$  dans  $[u_1, u_2]$ ,  $u_1$  et  $u_2$  représentent un minimum  $u_m$  et un maximum  $u_M$ .

En conséquence et selon ces cas, nous pouvons écrire la fonction  $F(u)$  correspondante sous la forme

$$F(u) = g_1(u) (u - u_m), \quad F(u) = g_2(u) (u_M - u),$$

$$F(u) = g_3(u) (u_M - u) (u - u_m) \tag{186}$$

où les fonctions  $g_i(u)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont strictement positives dans le domaine permis et non nulles au(x) point(s) de retournement correspondant(s). Dans la suite,  $\psi$  est l'angle polaire de  $\mathbf{r}$  relativement à sa position au point de retournement choisi pour définir l'axe  $Ox$ .



### 12.3 Keplerisation de mouvements doublement bornés

Considérons d'abord à la troisième forme écrite dans (186) pour des mouvements doublement bornés, c'est-à-dire, ayant une limite inférieure  $r_m = 1/u_m$  et une limite supérieure  $r_M = 1/u_M$ . D'après (185) nous avons

$$u'^2 = g_3(u) (u_M - u) (u - u_m) \quad (187)$$

Or, dans le cas des mouvements elliptiques du problème de Kepler, on obtient simplement

$$F(u) = (u_M - u) (u - u_m)$$

Alors, en notant que  $g_3(u)$  est sans dimension, il est très tentant, dans le problème étudié, d'introduire une nouvelle variable angulaire  $\chi$  telle que

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{g_3(u(\psi))} \quad (188)$$

de façon à transformer l'équation (187) en

$$\left(\frac{du}{d\chi}\right)^2 = (u_M - u) (u - u_m) \quad (189)$$

identique à celle du problème de Kepler dans le cas  $u_m \leq u \leq u_M$ . Remarquablement, le simple changement de  $\psi$  en  $\chi$  nous permet de faire le lien entre les trajectoires doublement bornées possiblement fournies par le potentiel  $V(r)$  et les ellipses du problème de Kepler. C'est la *keplerisation* proposée par V. Martinusi et P. Gurfil. Notons  $E^*$ ,  $L^*$  et  $K^*$  l'énergie, le moment angulaire et la constante du potentiel de Kepler correspondant ( $V^*(1/u) = -K^*u$ ), respectivement. En utilisant les formules de la section 3.1 et de l'Appendice B.3, From (29) on doit avoir

$$u_M + u_m = \frac{2mK^*}{L^{*2}}, \quad u_m u_M = -\frac{2mE^*}{L^{*2}} \quad (190)$$

$u_m$  et  $u_M$  vérifiant

$$u_m^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u_m)], \quad u_M^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V(1/u_M)] \quad (191)$$

Cette keplerisation doit aussi inclure un changement du temps :  $t \rightarrow t^*$ , tel que

$$L^* = mr^2 \frac{d\chi}{dt^*} = mr^2 \frac{d\chi}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dt^*} = L \sqrt{g_3(u)} \frac{dt}{dt^*},$$

et comme  $L$  et  $L^*$  doivent rester constants,  $t$  et  $t^*$  sont corrélés par

$$\frac{dt^*}{dt} = \text{const.} \sqrt{g_3(u)} \quad (\text{const.} = L/L^*)$$

Notons que  $u_m$  et  $u_M$  sont ici fixés par les valeurs de  $E$  et  $L$ , et que la condition  $|E^*| < \frac{mK^{*2}}{2L^{*2}}$  (voir Eq. (B.8)), est déjà satisfaite, puisque  $(u_m + u_M)^2 > 4u_mu_M$ . On obtient ainsi l'équation polaire

$$r = \frac{r_0^*}{1 + e^* \cos \chi} \quad \text{avec} \quad e^* = \frac{u_M - u_m}{u_M + u_m}, \quad r_0^* = \frac{2}{u_M + u_m} \quad (192)$$

C'est seulement dans le cas où  $g_3(u)$  est une constante (positive) que l'on peut prendre simplement  $t^* = t$ , comme le montre l'exemple suivant. Considérons le cas du potentiel inhomogène

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + \frac{K_2}{r^2}, \quad K_1, K_2 > 0 \quad (193)$$

On a

$$F(u) = -u^2 \left[ 1 + \frac{2mK_2}{L^2} \right] + \frac{2mE}{L^2} + \frac{2mK_1}{L^2} u = \beta^2 (u_M - u)(u - u_m) \quad \text{avec}$$

$$\beta^2 = 1 + \frac{2mK_2}{L^2}, \quad u_{M,m} = \frac{mK_1}{L^2 \beta^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2 \beta^2}{mK_1^2}} \right] \quad (194)$$

en supposant ici que  $-\frac{mK_1^2}{2\beta^2 L^2} < E < 0$ . On a donc  $g_3(u) = \beta^2 = \text{const.}$  Ainsi, on peut simplement poser  $\chi = \beta\psi$  (et  $t^* = t$ ,  $E^* = E$ ,  $L^* = \beta L$ ), d'où il résulte que

$$r = \frac{r_0^*}{1 + e^* \cos \beta\psi} \quad \text{avec} \quad e^* = \sqrt{1 + \frac{2EL^2 \beta^2}{mK_1^2}} < 1, \quad r_0^* = \frac{L^2 \beta^2}{mK_1} \quad (195)$$

Cet exemple est instructif pour deux raisons. Tout d'abord, il montre que la keplerisation peut relier un potentiel inhomogène à un potentiel homogène. Ensuite, si  $\beta$  n'est pas un nombre rationnel, les trajectoires doublement bornées fournies par le potentiel (193) ne sont pas fermées et les différentes positions prises par la particule pendant son mouvement emplissent l'entière couronne circulaire  $r_m \leq r \leq r_M$ . La keplerisation fournit un moyen de suivre ce mouvement compliqué sur une seule ellipse.

## 12.4 Keplerisation des mouvements bornés inférieurement

Dans le cas de mouvements bornés inférieurement ( $r \geq r_m$ ), on a  $F(u) = g_2(u) \times (u_M - u)$  ( $u_M = 1/r_m$ ). Il est clair qu'ici,  $g_2(u)$  a la dimension de  $u$ . En vue d'une keplerisation, nous écrivons donc  $g_2$  sous la forme

$$g_2(u) = G_2(u) (u + a) \quad (196)$$

où  $G_2(u)$  est sans dimension et où la constante  $a$  est supposée strictement positive pour éviter une singularité additionnelle. Pour être plus proche encore de l'expression de  $F(u)$  obtenue dans le problème de Kepler pour des énergies positives, nous prendrons  $a < u_M$  et définirons  $|u_m| = a$  avec  $u_m < 0$ . Puis, introduisant un nouvel angle  $\chi$  et un nouveau temps  $t^*$  tels que

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{G_2(u)}, \quad \frac{dt^*}{dt} = \frac{L}{L^*} \sqrt{G_2(u)}$$

nous obtenons l'équation

$$\left( \frac{du}{d\chi} \right)^2 = (u_M - u)(u - u_m) \quad (197)$$

conduisant à l'équation polaire  $r(\chi)$  d'une hyperbole (section 3.1),

$$r = \frac{r_0^*}{1 + e^* \cos \chi} \quad \text{avec} \quad e^* = \frac{u_M + |u_m|}{u_M - |u_m|} > 1, \quad r_0^* = \frac{2}{u_M - |u_m|} \quad (198)$$

où  $-\Psi < \chi < \Psi$  with  $\Psi = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{1}{e^*}$ . Avec cette keplerisation, une quelconque trajectoire bornée inférieurement, obtenue d'un quelconque potentiel  $V(r)$ , se projette sur une hyperbole de Kepler.

La keplerisation décrite ci-dessus n'est cependant pas la seule manière de relier ce type de trajectoire à une trajectoire similaire obtenue par un potentiel homogène. Nous aurions pu notamment obtenir une formule similaire à (198), en utilisant le potentiel Newtonien répulsif  $V(r) = +K^*/r$  ( $K^* > 0$ ). Mais nous pourrions aussi envisager comme référence le potentiel attractif  $V(r) = -K^*/r^2$  avec  $K^* > 0$ , dans le cas  $E^* > 0$  étudié dans la section 3.3.2. Prendre

$$g_2(u) = G_2(u) \nu^2 (u_M + u) \quad \text{avec} \quad \nu^2 = 1 - \frac{2mK^*}{L^{*2}} > 0,$$

$$E^* = \frac{u_M^2 L^{*2} \nu^2}{2m}, \quad \frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{G_2(u)},$$

conduit à l'équation polaire

$$r(\chi) = \frac{r_m}{\cos(\nu\chi)} \quad \text{avec} \quad r_m = 1/u_M \quad (199)$$

Dans ce second cas, il serait alors plus approprié de parler d'“homogénéisation” plutôt que de keplerisation. Un résultat similaire à (199) peut être obtenu en utilisant le potentiel répulsif  $V(r) = +K^*/r^2$ ,  $K^* > 0$ , avec  $\nu = \sqrt{1 + 2mK^*/L^{*2}}$ , avec cette fois l'avantage de ne plus avoir de restriction sur la valeur de  $K^*$ .

Finalement, il est utile de remarquer que même les trajectoires du potentiel  $-K^*/r^2$  sont keplerisables, en posant

$$G_2(u) = \nu^2 \frac{u_M + u}{|u_m| + u}, \quad \frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{G_2(u)} \quad (200)$$

ce qui conduit à cette équivalence d'équations polaires :

$$r(\psi) = \frac{r_m}{\cos(\nu\psi)} = \frac{r_0^*}{1 + e^* \cos \chi} \quad (201)$$

## 12.5 Homogénéisation des mouvements bornés supérieurement

C'est le cas pour lequel la keplerisation ne s'applique plus car dans le problème de Kepler il n'existe pas de trajectoire n'ayant qu'une borne supérieure. En revanche, ce type de trajectoire existe pour le potentiel attractif  $V(r) = -K^*/r^2$ ,  $K^* > 0$  dans le cas  $\Omega^2 = 2mK^*/L^{*2} - 1 > 0$  and  $E^* < 0$ , étudié dans la section 3.3.3. Pour établir une correspondance avec ce cas, il est suffisant de redéfinir  $g_1(u)$  comme

$$g_1(u) = \rho^2 G_1(u) (u + u_m) \quad \text{avec} \quad \rho^2 = -\nu^2 > 0, \quad (202)$$

où  $G_1(u)$  est supposé strictement positif dans le domaine correspondant, d'introduire un nouvel angle  $\chi$  tel que

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{G_1(u)}, \quad (203)$$

et finalement de poser

$$K^* = \frac{L^{*2}}{2m} (\rho^2 + 1), \quad E^* = -\rho^2 u_m^2 \frac{L^{*2}}{2m}, \quad (204)$$

On obtient alors l'équation polaire des trajectoires sous la forme

$$r(\psi) = \frac{r_M}{\cosh(\rho\chi(\psi))}, \text{ avec } r_M = 1/u_m \quad (205)$$

$\chi$  variant dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ . A noter cependant que la valeur de  $K^*$  dépend de celle de  $L$ .

## 12.6 Qu'en est-il des mouvements sans limitation ?

Il peut arriver que pour certaines valeurs de  $E$  et  $L$  les trajectoires correspondant à un problème donné ne présentent aucun point de retournement. Un exemple est celui de la section 3.3.4. Il n'y a aucune limitation sur  $r$  qui peut alors varier dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  en entier. Dans ce cas, une keplerisation est impossible. Toutefois, on doit se rappeler qu'un tel mouvement illimité est le résultat de l'intégration de l'équation d'évolution du système étudié pour des valeurs particulières de  $E$  et  $L$ , cette même équation dont l'intégration avec d'autres valeurs de  $E$  et  $L$  donne des trajectoires KH-ables, puisque les points de retournement sont inévitablement présents quelque part pour n'importe quel système. La conséquence est que les mouvements illimités portent inévitablement une trace (visible ou non) de ce fait, possiblement au travers d'un prolongement analytique. Dans l'exemple cité, l'axe  $Ox$  défini par un point de retournement pour des trajectoires bornées devient une asymptote pour les mouvements illimités ; mais dans chaque cas, c'est un axe de symétrie global pour toutes les suites de trajectoires. Finalement, nous pouvons prendre l'exemple de la section 3.3.4 comme référence pour homogénéiser les mouvements illimités de n'importe quel système, en posant

$$F(u) = G_0(u)\rho^{*2}(u^2 + u_0^{*2}), \text{ avec } G_0(u) > 0, \frac{d\chi}{d\psi} = \sqrt{G_0(u)} = \frac{L^* dt^*}{L dt},$$

$$u_0^* = 1/r_0^* = \sqrt{\frac{2mE^*}{\rho^{*2}L^{*2}}}, \rho^* = \sqrt{\frac{2mK^*}{L^{*2}} - 1}, \quad (206)$$

$$u(\chi) = u_0^* \sinh(\rho^*\epsilon\chi) \quad \text{ou} \quad r(\chi) = \frac{r_0^*}{\sinh(\rho^*\epsilon\chi)}$$

avec  $L^* < \sqrt{2mK^*}$ ,  $E^* > 0$ , et où  $\epsilon$  est défini par le signe de  $u'$  lorsque  $u \rightarrow 0$  :  $u' \rightarrow \epsilon\sqrt{\frac{2mE^*}{L^2}}$ ,  $\psi$  variant dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  ou  $]-\infty, 0]$ , selon que  $\epsilon = -1$  ou  $\epsilon = +1$ , respectivement.

## 13 Analyse des résultats

La possibilité de relier entre elles des trajectoires produites par un quelconque potentiel central et celles du problème de Kepler ou celles obtenues pour le potentiel  $\propto -1/r^2$  est, de façon évidente, due à l'existence de points de retournement, qui confèrent à ces trajectoires une sorte de similarité qui peut sembler rudimentaire, mais qui est en fait plus profonde, comme expliqué dans la suite.

Dans l'étude des mouvements d'une particule  $P$  sous l'action d'un potentiel central  $V(r)$ , la méthode de keplerisation ou d'homogénéisation permet de lui associer une particule fictive  $P^*$  de même masse, se mouvant dans le même plan  $(x, y)$  sous l'action d'un potentiel central homogène connu  $V^*(r)$ , à savoir, soit celui de Kepler,  $\propto -1/r$ , soit le potentiel  $\propto -1/r^2$ .

Soit  $\mathbf{OP}^* = \mathbf{r}^*$  le vecteur position de  $P^*$  à la date  $t^*$  avec

$$\mathbf{r}^* = r \mathbf{e}_r^*, \quad \mathbf{e}_r^* = \cos \chi \mathbf{e}_x + \sin \chi \mathbf{e}_y \quad (207)$$

L'impulsion de  $P^*$  est

$$\mathbf{p}^* = m \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = m \frac{d\chi}{dt^*} \frac{d\mathbf{r}^*}{d\chi} = m \frac{d\chi}{dt^*} \left[ \frac{dr}{d\chi} \mathbf{e}_r^* + r \mathbf{e}_\chi^* \right] \quad (208)$$

$$\text{avec } \mathbf{e}_\chi^* = -\sin \chi \mathbf{e}_x + \cos \chi \mathbf{e}_y$$

et puisque  $d\chi/dt^* = L^*/(mr^2)$ , on a aussi ( $u = 1/r$ )

$$\mathbf{p}^* = L^* \left[ -\frac{du}{d\chi} \mathbf{e}_r^* + u \mathbf{e}_\chi^* \right] \quad (209)$$

L'énergie et le moment cinétique de  $P^*$  sont respectivement

$$E^* = \frac{\mathbf{p}^{*2}}{2m} + V^*(r), \quad \mathbf{L}^* = \mathbf{r}^* \times \mathbf{p}^* = L^* \mathbf{e}_z \quad (210)$$

Ce sont des constantes vis-à-vis du temps  $t^*$  et aussi bien vis-à-vis du temps  $t$ , car, d'un côté

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{dt^*} = -\mathbf{e}_r^* \frac{dV^*}{dr}, \quad \text{d'où } \frac{d\mathbf{L}^*}{dt^*} = \mathbf{0}, \quad \frac{dE^*}{dt^*} = 0 \quad (211)$$

et, d'un autre côté,

$$\frac{d\mathbf{L}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{L}^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \mathbf{0}, \quad \frac{dE^*}{dt^*} = \frac{dE^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = 0,$$

$$\text{d'où } \frac{d\mathbf{L}^*}{dt} = \mathbf{0}, \quad \frac{dE^*}{dt} = 0, \quad \text{puisque } \frac{dt}{dt^*} \neq 0 \quad (212)$$

Au-delà du fait que la méthode de keplerisation-homogénéisation (KH) peut simplifier l'étude de mouvements compliqués, dûs à des potentiels complexes, en suivant leurs évolutions le long de courbes connues d'équations polaires  $r(\chi)$ <sup>57</sup>, elle offre davantage avec une meilleure compréhension de la symétrie dynamique inévitablement attachée à tous ces systèmes, et plus particulièrement pour ce qui concerne son existence même.

Considérons tout d'abord la keplerisation de la section 12.3. Dans ce cas, la particule  $P^*$  se meut le long d'ellipses sous l'action du potentiel de Kepler  $-K^*/r$  ( $K^* > 0$ ). Comme on sait, ce système possède une autre intégrale première, à savoir, le vecteur de Laplace-Runge-Lenz (LRL),

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{m} \mathbf{p}^* \times \mathbf{L}^* - \frac{K^*}{r} \mathbf{r}^* \quad (213)$$

Puisque  $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$ , il est clair que ce vecteur est aussi une intégrale première pour le mouvement de la particule  $P$  :

$$\frac{d\mathbf{A}^*}{dt^*} = \mathbf{0} = \frac{d\mathbf{A}^*}{dt} \frac{dt}{dt^*}, \quad \text{hence } \frac{d\mathbf{A}^*}{dt} = \mathbf{0} \quad (214)$$

D'après (118), on a

$$\mathbf{A}^* = K^* e^* \mathbf{e}_x \quad (215)$$

où  $e^*$  est l'excentricité de la trajectoire considérée (ellipse, hyperbole ou parabole). Le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_x$ , qui définit l'axe de référence pour les deux angles polaires  $\psi$  et  $\chi$ , est ici choisi le long du vecteur position  $\mathbf{r}$  lorsque celui-ci correspond à un point de retournement, pour lequel  $dr/d\psi = 0$  ou  $dr/d\chi = 0$ . Dans le problème de Kepler, pour  $E^* < 0$  (ellipses), il y a deux tels points sur une même ligne droite passant par  $O$ , de part et d'autre de ce point, l'un à  $r = r_m$  (perihelion), l'autre à  $r = r_M$  (aphelion). Nous prendrons  $\psi = 0$ ,  $\chi = 0$  pour le perihelion, de sorte que  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} = r_m \mathbf{e}_x$  en ce point. Pour les hyperboles ou les paraboles de Kepler, seul reste le perihelion et nous choisirons  $\mathbf{e}_x$  le long de l'axe défini par le perihelion. Ainsi, dans tous les cas,  $\mathbf{A}^*$  est le long de l'axe du perihelion des trajectoires de Kepler. Notons que l'émergence d'un vecteur LRL pour la particule  $P$  via son compagnon  $P^*$  a aussi été considéré par V. Martinusi et P. Gurfil, mais uniquement dans le cas des mouvements doublement bornés de  $P$  dont il est question ici en première étude.

---

57. Voir V. Martinusi et P. Gurfil, loc. cit.

Comme on l'a vu, d'après le théorème de Bertrand, les trajectoires doublement bornées ne sont toutes fermées que si et seulement le potentiel est soit le potentiel Newtonien attractif  $-K/r$  ( $K > 0$ ), soit le potentiel Hookeen attractif  $K'r^2/2$  ( $K' > 0$ ). Pour d'autres potentiels, la fermeture d'une trajectoire de ce type ne peut qu'être exceptionnelle. Dans le cas général, le mouvement emplit l'entière couronne circulaire  $r_m \leq r \leq r_M$ , et l'on a une infinité de perihelions correspondant à des angles différents. Mais puisqu'ils sont tous équivalents, il suffit de choisir l'un d'eux comme référence, qui définira aussi le perihelion de l'ellipse de Kepler associée.

La conservation du vecteur LRL est entièrement due à l'équation du mouvement du problème de Kepler, indépendamment de la nature de la trajectoire, ellipse, hyperbole ou parabole. Aussi, d'après l'étude de la section 12.4, nous pouvons affirmer que l'équation (214) s'applique aussi à un quelconque mouvement borné inférieurement, dans son domaine d'existence. En particulier, keplerisant le système ayant pour potentiel  $V(r) = -K/r^2$  ( $K > 0$ ) dans le cas  $E > 0$ ,  $2mK < L^2$ , nous trouverons pour lui un vecteur LRL associé conservé (213), avec des définitions appropriées de  $\mathbf{r}^*$  et  $\mathbf{p}^*$ .

Il s'ensuit que pour tous les systèmes mentionnés ci-dessus,  $\mathbf{e}_x$  est commun au système de la particule  $P$  et sa version keplerisée avec la particule  $P^*$ , et est pour chacun une intégrale première. Utilisant

$$\mathbf{e}_x = \cos \psi \mathbf{e}_r - \sin \psi \mathbf{e}_\psi, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{L} \times \mathbf{r}/(Lr) \quad (216)$$

ou les formules analogues pour la version keplerisée, on peut exprimer  $\mathbf{e}_x$  sous les deux formes équivalentes

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{Lr} [\sin \psi \mathbf{r} \times \mathbf{L} + L \cos \psi \mathbf{r}] = \frac{1}{L^*r^*} [\sin \chi \mathbf{r}^* \times \mathbf{L}^* + L^* \cos \chi \mathbf{r}^*] \quad (217)$$

$\psi$  et  $\chi$  étant alors considérés comme des fonctions des invariants par rotation  $r$ ,  $E$  et  $L$ , via les équations polaires correspondantes. De cette manière,  $\mathbf{e}_x$  peut être envisagé comme un champ de vecteurs dans l'espace des phases.

Comme il a déjà été remarqué dans ces notes (voir section 10.1), lorsqu'elles sont exprimées en termes de variables canoniques, les intégrales premières qui ne dépendent pas explicitement du temps ne doivent leur statut qu'au seul fait que leurs crochets de Poisson avec le Hamiltonian sont nuls. De ce point de vue, elles ne sont pas attachées à la classe de trajectoires où elles ont été mises en évidence, elles s'appliquent à tous les autres mouvements possibles. En particulier, ayant trouvé le vecteur conservé  $\mathbf{e}_x$  pour le potentiel  $-K/r^2$  dans le cas des trajectoires bornées inférieurement, ce vecteur est aussi une intégrale première pour les trajectoires bornées supérieurement données par ce même potentiel. Comme celui-ci sert



à homogénéiser les trajectoires de même type dues à d'autres potentiels (section 12.5), nous pouvons affirmer que cette intégrale première est aussi présente pour n'importe lequel de ces mouvements. Une remarque similaire peut être faite pour les trajectoires sans point de retournement (sections 3.3.4 and 12.6), pour lesquelles la keplerisation ne peut être réalisée.

De toutes ces considérations, nous pouvons conclure, grâce à cette méthode de keplerisation-homogénéisation, que, en plus des intégrales premières classiques énergie et moment cinétique, tout mouvement d'une particule dans un champ de forces central possède une autre intégrale première indépendante des précédentes, qui est un vecteur ne dépendant pas explicitement du temps.

## 14 Le groupe de symétrie complet via la méthode KH

Il est couramment admis que l'existence d'une intégrale première additionnelle est liée à une symétrie dynamique du système étudié, avec un groupe de symétrie associé. Nous avons longuement exprimé notre point de vue sur cette question dans les sections 8 et 11.4. Ici, cette symétrie a quelque chose à voir avec le vecteur  $\mathbf{e}_x$ , lui-même défini au moyen de points de retournement. Ces derniers apparaissent essentiels dans l'existence de vecteurs de type LRL. Fondamentalement, leur importance repose sur la symétrie sphérique des systèmes étudiés, qui fait (i) que la distance  $r$  reste le dernier paramètre déterminant les propriétés desdits systèmes, en premier lieu, l'existence et la localisation de points de retournement, (ii) que ces points définissent des axes de symétrie des trajectoires.

La méthode KH présentée ici fournit une nouvelle preuve de l'existence d'un groupe de symétrie dynamique pour les mouvements à force centrale, de belle façon, peut-être la meilleure, avec une percée dans sa signification physique, et la perspective d'un développement.

En effet, de façon étonnante, non seulement la méthode KH fournit une preuve de l'existence d'un groupe de symétrie dynamique, elle offre aussi la possibilité d'élargir ce groupe à un groupe de symétrie plus grand, car elle relie des trajectoires due à un quelconque potentiel central à celles obtenues avec des potentiels centraux *homogènes* auquel s'applique la similarité mécanique dont il a été question dans les sections 11.2 et 11.3!

Clairement, si le potentiel considéré est lui-même homogène, l'algèbre de Lie du groupe de symétrie complet associé est d'emblée définie par les équations (174) et (183). Plus spectaculaire est le cas d'un potentiel inhomogène. En supposant que les angles  $\psi$  et  $\chi$  varient continuellement dans le plus grand intervalle possible

(éventuellement  $] - \infty, +\infty[$  même pour des trajectoires fermées), les relations

$$r^* = r, \quad \frac{d\chi}{d\psi} > 0 \quad (218)$$

assurent une bijection entre  $P$  et son compagnon “homogénéisé”  $P^*$ . L’algèbre de Lie du groupe de symétrie complet pour  $P^*$  est ici encore définie par (174) et (183), où les lettres sont juste remplacées par leurs analogues “étoilées”. Toutefois, dans ce cas, on se heurte à la difficulté de relier les nouveaux crochets de Poisson impliquant les variables canoniques de  $P^*$ , aux anciens impliquant les variables canoniques de  $P$ . Cela compromet la possibilité d’exprimer l’action du groupe de symétrie “étoilé” directement en termes de variables associées à  $P$ . A ce stade, il est seulement possible de décrire l’action dudit groupe sur  $E^*$  et  $\mathcal{L}^*$  et ensuite déduire son effet sur  $E$  and  $\mathcal{L}$  en inversant la transformation  $P \rightarrow P^*$ . A cet égard, il semble difficile de déterminer si cette transformation est canonique ou non, même dans le cadre de la Mécanique Hamiltonienne étendue<sup>58</sup>. Dans l’Appendice I, nous montrons que, dans un cas simple, ladite transformation n’est pas canonique. En dépit de cette frustration, la méthode KH nous a permis de prouver l’existence d’un groupe de symétrie global pour les systèmes étudiés ici, ce qui était en fait le principal objectif de ces notes.

---

58. Voir : Oliver Davis Johns, *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*, Second Edition, Oxford University Press, 2011.

## 15 Conclusion

Dans ces notes ont été décrites les principales caractéristiques du mouvement d'une particule ponctuelle dans un champ de forces centrales indépendant du temps, du point de vue de la mécanique classique non-relativiste. L'invariance temporelle et la symétrie sphérique de ce système font que celui-ci est intégrable au sens de Liouville. Il est cependant apparu que sa symétrie sphérique apporte plus que l'intégrabilité simple.

Une conséquence immédiate de la symétrie sphérique est que, dans le plan du mouvement, la distance  $r$  de la particule par rapport au centre de forces est finalement la seule variable qui détermine deux propriétés importantes de la trajectoire du mouvement, à savoir, ses limites et l'existence de points de retournement. Même s'ils n'apparaissent pas dans un mouvement réel, de tels points existent, quelle que soit la forme du champ de forces (à symétrie sphérique), et sont présents sur au moins une courbe géométrique complète prévue par les équations du mouvement. Nous avons montré que, grâce encore à la symétrie sphérique, les points de retournement définissent des axes de symétrie. Cette propriété géométrique importante se révèle d'une façon ou d'une autre dans l'équation polaire  $r(\theta)$  de toute trajectoire solution des équations du mouvement. Une équation polaire décrivant un ensemble de trajectoires, ladite propriété leur est donc commune. Ce fait est indéniablement à l'origine d'une nouvelle symétrie, dite dynamique, que certains auteurs qualifient de "symétrie cachée". De quoi s'agit-il ?

La forme des équations polaires dépend des valeurs  $E$  et  $L$  de l'énergie et du module du moment angulaire, respectivement. Par exemple, dans le problème de Kepler, le cas  $E < 0$  correspond à des ellipses et des cercles, tandis que le cas  $E > 0$  correspond à des hyperboles et des paraboles. On est ainsi amené à distinguer différents domaines de variation de  $E$  et  $L$ , chacun correspondant à un type d'équation polaire caractérisant les mouvements qui y sont permis. Aux limites dudit domaine peuvent se trouver des points de retournement. En modifiant continuellement les paramètres  $E$  et  $L$  de l'équation polaire, on passe d'une trajectoire à une autre de la même espèce ; par exemple, d'une hyperbole à une autre dans le problème de Kepler. Cela est possible parce qu'il y a une infinité de trajectoires solutions dans un domaine de valeurs permises de  $E$  et  $L$ . Comment peut-on traduire mathématiquement cette possibilité ? Très certainement au moyen d'un groupe continu de transformations, agissant comme des transformations canoniques. L'existence d'un tel groupe est indépendante des valeurs de  $E$  et  $L$  puisque le rôle du groupe est précisément de modifier ces valeurs. Par contre, sa structure et sa représentation pourraient être différentes selon le type d'équation polaire considéré. De ce point de vue, le groupe en question peut être considéré lui-même comme une sorte de "constante du mouvement". Mais comment trouver cette structure ?

La principale difficulté est de décrire le changement d'énergie. Nous avons montré que cela est possible pour les potentiels *homogènes* en introduisant le concept de "similarité mécanique" et les opérateurs qu'on peut lui associer. La tâche semblait plus difficile pour les potentiels *inhomogènes*, mais ce problème a pu être résolu grâce à une méthode initialement découverte en 2012 par V. Martinusi et P. Gurfil, et que nous avons généralisée en une méthode de *keplerisation-homogénéisation* (méthode KH).

Le premier mérite de la méthode KH est de relier les mouvements dûs à un potentiel central quelconque à des mouvements semblables mais résolus, tels ceux du problème de Kepler ou ceux produits par le potentiel  $-K/r^2$ , au moyen d'une re-paramétrisation de l'angle polaire et du temps, laquelle, d'un point de vue pratique, permet de suivre des mouvements compliqués le long de trajectoires plus simples. Sur cette base, la méthode KH nous apporte une belle preuve de l'existence d'une symétrie dynamique pour tous les mouvements dans un champ de forces central quelconque. Mais, cerise sur le gâteau, elle apporte plus encore, car son second mérite est d'établir un lien entre les effets d'un potentiel central quelconque à ceux des potentiels homogènes cités ci-dessus, pour lesquels s'applique la similarité mécanique. La méthode KH est donc bien adaptée pour étendre le groupe de symétrie dynamique en un groupe de symétrie plus large incluant une transformation de l'énergie.

La description, plus restreinte, du changement de trajectoires correspondant à une même énergie se fait au moyen des crochets de Poisson, par des opérateurs qui ne changent pas l'énergie, ce qui signifie qu'ils représentent des intégrales premières, c'est-à-dire, des grandeurs ne dépendant pas explicitement du temps et ayant avec le Hamiltonien des crochets de Poisson nuls. Comme déjà mentionné, les transformations du groupe doivent permettre de relier entre elles les trajectoires d'une même espèce, transportant de l'une à l'autre leurs propriétés communes, sous une forme covariante, tout en définissant, d'une façon ou d'une autre, une propriété géométrique commune à toutes ces trajectoires. Or, on dispose ici d'une propriété commune minimale qui est l'existence d'axes de symétrie.

Un axe de symétrie se décrit de façon naturelle au moyen de son vecteur unitaire, que nous avons appelé *vecteur de symétrie*. Nous avons montré comment exprimer ce vecteur lorsqu'on connaît l'équation polaire des trajectoires auxquelles il se rapporte, en nous appuyant sur de nombreux exemples ; et montré que les composantes du vecteur de symétrie engendrent, avec les composantes du moment angulaire, une algèbre de Lie dont la structure très simple est applicable à toute situation. Avec un vecteur de symétrie légèrement modifié, qui n'est alors plus unitaire, on obtient une algèbre de Lie homomorphe à celle du groupe  $SO(3, 1)$ . Ce groupe peut être considéré comme le groupe de symétrie dynamique propre au problème du mouvement d'une particule dans un champ de forces central de structure quelconque.

Il est intéressant de noter ici que la symétrie axiale qui résulte du changement inopérant de  $\psi$  en  $-\psi$  n'aurait pas pu être déduite des équations du mouvement en utilisant le formalisme des transformations de Lie, ce dernier étant dédié uniquement à la recherche de symétries continues. Le groupe dynamique ne peut pas non plus décrire directement cette opération, mais tient compte cependant de la présence d'un axe de symétrie pour chaque trajectoire.

L'existence d'une symétrie dynamique pour le mouvement d'une particule dans un potentiel central a été découverte pour la première fois pour les cas du potentiel de Newton et du potentiel de Hooke. Nous venons de montrer que ce fait n'est pas une spécificité de ces deux potentiels, mais est bien inhérent à tous les potentiels ayant la symétrie sphérique. Cette propriété, qui était jusqu'alors admise sans preuve indéniable, peut être maintenant considérée comme bien établie. Dans le cas des potentiels de Newton et de Hooke, la véritable origine de leur symétrie dynamique semble avoir été masquée par le fait que ce sont les seuls potentiels pour lesquels toutes les trajectoires bornées sont fermées, propriété étonnante à laquelle on attribuait sans preuve l'origine de leurs symétries dynamiques<sup>59</sup>. On doit donc dissocier l'existence d'une symétrie dynamique de celle d'éventuelles trajectoires fermées. Cette assertion est renforcée par le fait que même les potentiels centraux partout répulsifs fournissent une symétrie dynamique alors qu'ils ne peuvent produire aucune trajectoire fermée.

En résumé, ce que l'on appelle "symétrie dynamique" ou "symétrie cachée" pour le système étudié est juste l'expression mathématique de la symétrie géométrique des trajectoires obtenues (ou au moins de certaines d'entre elles), ce qui va au-delà des seuls cas des potentiels de Newton et de Hooke. A ce point, rappelons le rôle de "stabilisateur" du groupe de symétrie au regard de la structure commune des trajectoires étudiées<sup>60</sup>. Par exemple, dans le problème de Kepler, une trajectoire circulaire est stable dans le sens qu'une modification infinitésimale de ses paramètres conduit à une orbite quasi-circulaire qui n'est rien d'autre qu'une ellipse : ces deux trajectoires sont apparentées.

Notons en passant qu'en plus des trois intégrales premières indépendantes et involutives  $E$ ,  $L$  et la composante  $L_z$  du moment angulaire, dont l'existence rend intégrable le système étudié, la symétrie dynamique de celui-ci, telle que décrite au moyen d'un vecteur de symétrie unitaire, apporte deux autres intégrales premières indépendantes des précédentes, ce qui permet de qualifier le système de *maximale-ment super-intégrable*<sup>61</sup>.

---

59. Voir H. Bacry, *Lectures on Group Theory and Particle Theory*, Gordon and Breach, 1977 ; voir aussi l'argumentation péremptoire de W. Miller Jr, S. Post, P. Winternitz, *Classical and quantum superintegrability with applications*, J. Phys. A, Math. Theor. **46** (2013), 423001.

60. Voir C. Carimalo, *Symmetries and stability of motions in the Newtonian and the Hookean potentials*, Theor. Appl. Mech. **49**(1) (2022), 61–69.

61. On considère généralement que la présence des quatre intégrales premières  $E$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$

Finalement, de notre point de vue, il semble assez naturel de trouver un groupe dynamique continu pour le système étudié dans ces notes, comme expliqué ci-après. L'existence d'un tel groupe est conditionnée à celle d'un fait qui semble évident mais qui est essentiel, à savoir, la possibilité de passer d'une solution à une autre<sup>62</sup> d'une façon continue ou par prolongement analytique. Cette possibilité existe réellement pour notre système, et ce lien entre solutions est supposé être réalisé mathématiquement par les transformations dudit groupe, agissant comme des transformations canoniques. Le changement d'une trajectoire à une autre de même espèce revient à varier continuellement les valeurs des intégrales premières fondamentales sus-mentionnées. Or, ces dernières étant involutives, les transformations qu'elles génèrent sont incapables d'opérer ce changement. Le groupe des rotations ne peut non plus changer les valeurs de  $E$  et  $L$ . La seule conclusion qui s'impose est qu'il doit exister au moins une nouvelle intégrale première ayant des crochets de Poisson non nuls avec les intégrales premières fondamentales et qui génère ainsi des transformations pouvant changer notamment la valeur de  $L$  (le changement d'énergie est plus compliqué à formaliser). Dans le cas présent, on obtient deux intégrales premières qui permettent d'élargir l'action due au seul groupe des rotations, tout en transportant une propriété géométrique commune aux trajectoires. A partir de cette observation, il est légitime de se demander si un groupe dynamique continu peut exister pour tout système intégrable dont les solutions sont reliables continuellement. S'il en est ainsi, un système intégrable est *de facto* super-intégrable. Dans ce cas, cette simple condition d'un lien continu entre solutions apparaît indépendante de, et conceptuellement plus importante que la nature même du système étudié, cette nature ne se manifestant que dans la représentation du groupe dynamique obtenu et le degré de super-intégrabilité associé, lesquels sont spécifiques du système étudié. Cette dernière conjecture se fonde aussi sur le fait que le groupe dynamique étudié dans ces notes est décrit par un formalisme unique, indépendant de la structure du potentiel.

---

permet déjà de qualifier notre système de super-intégrable.

62. Ou d'une trajectoire à une autre.

## - APPENDICES -

### A Transmutation des forces centrales

#### A.1 Théorème de Siacci <sup>63</sup>

Le théorème de Siacci consiste en une décomposition particulière de l'accélération d'un mobile, différente de celle habituellement utilisée. Nous ne considérerons ici que des trajectoires planes, situées dans un plan  $xOy$ , et dont la normale  $\mathbf{N}$  en tout point sera orientée vers le centre de courbure correspondant. Le vecteur tangent  $\mathbf{T}$  est bien sûr orienté selon la vitesse du mobile :  $\mathbf{T} = \mathbf{v}/v$  avec  $v > 0$ . Décomposons alors le vecteur position dans la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$  <sup>64</sup> :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = q\mathbf{T} - p\mathbf{N}$$

Notons  $\kappa$  la courbure (ici positive). On a  $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$  et  $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T}$ , d'où

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T} = \mathbf{T} [\dot{q} + pv\kappa] + \mathbf{N} [pv\kappa - \dot{p}]$$

d'où, par identification,

$$\dot{p} = qv\kappa, \quad v = \dot{q} + pv\kappa$$

Tenant compte de ces relations et en dérivant  $r^2 = p^2 + q^2$ , on obtient  $\dot{r} = \frac{qv}{r}$  et

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\dot{p}}{\dot{r}} = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$$

Notant  $\mathbf{e}_z = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$ , le moment cinétique du mobile est

$$\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z, \quad \text{avec } L = mpv$$

Exprimons ensuite l'accélération :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$$

et comme  $\mathbf{N} = \frac{1}{p} [q\mathbf{T} - \mathbf{r}]$ , il vient  $\mathbf{a} = -\frac{v^2\kappa}{p}\mathbf{r} + \frac{1}{p}\mathbf{T} [p\dot{v} + qv^2\kappa]$ . Or,  $p\dot{v} + qv^2\kappa = p\dot{v} + v\dot{p}$ ; on a donc,  $s$  étant l'abscisse curviligne,

<sup>63</sup>. F. Siacci, *Moto per una linea plana*, Atti della Reale Accademia della Scienze di Torino, XIV, (1879) 750-760, 946-951.

<sup>64</sup>. Dans l'expression ci-après,  $p$  ne doit pas être confondu avec une quantité de mouvement !

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2\kappa}{p}\mathbf{r} + \mathbf{T}\frac{1}{2m^2p^2}\frac{dL^2}{ds} \quad (\text{A.1})$$

Telle est la décomposition de l'accélération proposée par Siacci.

## A.2 Transmutation des forces centrales

Appliquons (A.1) au cas où  $O$  est la source d'une force centrale  $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{e}_r$ . Le moment cinétique est alors conservé ( $L = mpv = \text{constante}$ ), et l'on a donc

$$f(r) = -\frac{v^2\kappa r}{mp} = -\frac{L^2\kappa r}{m^3p^3}$$

I. Newton s'est posé la question de savoir si un autre centre de forces centrales situé en un point  $O'$  autre que  $O$  pouvait produire la même trajectoire que celle produite par  $O$ , avec la même courbure et avec le même  $L$ . Posant  $r' = O'M$ , on devrait donc avoir

$$f'(r')\frac{p'^3}{r'} = f(r)\frac{p^3}{r} \quad (\text{A.2})$$

tout en changeant la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  en  $\mathbf{e}'_r = \mathbf{O}'M/r'$  : on effectue ainsi une *transmutation* de force. Examinons la figure (3). La droite  $GH'$  est la tangente en  $M$  à la trajectoire ;  $H$  et  $H'$  sont les projections orthogonales respectives de  $O$  et  $O'$  sur cette tangente<sup>65</sup> ; le point  $G$  est l'intersection entre la tangente et la parallèle à  $O'M$  passant par  $O$  ; on a  $p = OH$ ,  $p' = O'H$  ; les deux triangles  $H'MO'$  et  $HOG$  étant semblables, on a  $p/p' = OG/r'$ , d'où

$$f'(r') = \frac{OG^3}{r'^2}\frac{f(r)}{r} \quad (\text{A.3})$$

La formule (A.3) s'applique de façon spectaculaire au cas de la transmutation d'une force harmonique vers une force newtonienne. Supposons en effet que  $O$  soit la source d'une force centrale harmonique telle que  $f(r) = -kr$  avec  $k > 0$  (loi de Hooke). On sait que pour cette force, les trajectoires bornées fermées sont des ellipses ayant pour centre  $O$ . Envisageons l'une de ces trajectoires, ayant pour foyers  $F$  et  $F'$  et représentée à la figure (4).

Cette ellipse peut être définie comme l'ensemble des points  $M$  tels que  $MF + MF' = 2a$  avec  $a = OD$ . La formule (A.3) donne  $f'(r') = -k\frac{OG^3}{r'^2}$ , et, sous réserve que  $OG$  soit constant quel que soit  $M$ , la source  $O'$  transmuée de  $O$  pourra être

<sup>65</sup>. Ils appartiennent aux podaires respectives de  $O$  et  $O'$  par rapport à la trajectoire.



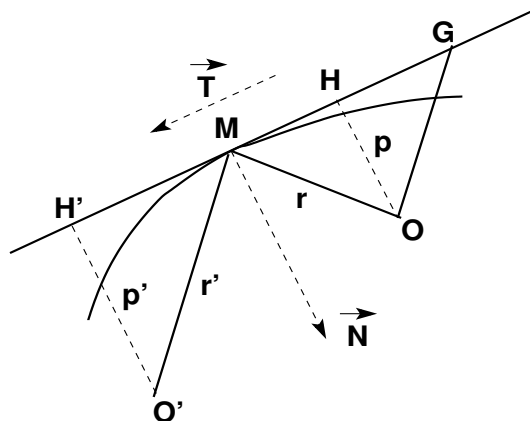


FIGURE 3 – Transmutation d'une force

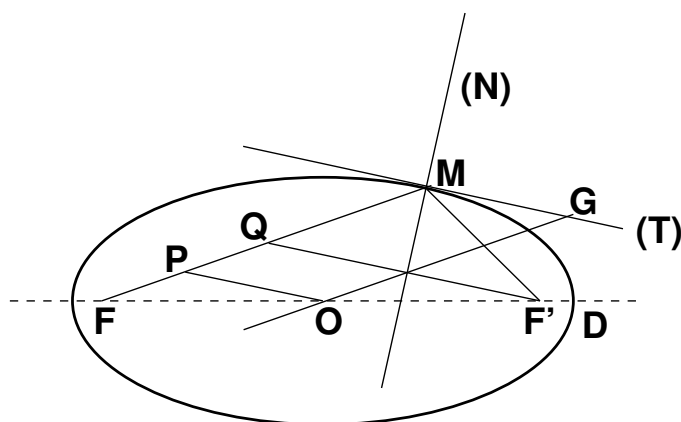


FIGURE 4 – Cas harmonique-newtonien

considérée comme source d'un champ de forces newtoniennes. Montrons que le foyer  $F$  remplit cette condition. Dans la figure (4),  $OG$  est parallèle à  $FM$ ,  $F'Q$  et  $OP$  sont parallèles à la tangente  $(T)$  à l'ellipse au point  $M$ . On a de façon évidente  $OG = PM$ . Par ailleurs, la normale  $(N)$  à l'ellipse en  $M$  possède la propriété d'être la bissectrice de l'angle  $\widehat{FMF'}$  et donc la médiatrice de  $F'Q$ . Le triangle  $QMF'$  est isocèle et  $MQ = MF'$ . En outre, puisque  $OF = OF'$ , on a  $QP = PF$ . Écrivons alors

$$OG = MP = MQ + QP = \frac{1}{2} [MF' + MQ + QP + PF] = \frac{1}{2} [MF' + MF] = a$$

La distance  $OG$  reste donc constante et le point  $F$  est bien source d'un champ newtonien qui produit les mêmes trajectoires que le champ harmonique dont  $O$  est la source. Bien entendu, le foyer  $F'$  possède la même propriété en lui associant le point  $G'$  à l'intersection de la tangente et de la parallèle à  $MF'$  menée depuis  $O$  et

qui lui aussi est tel que  $OG' = a$ . Les deux points  $G$  et  $G'$  (non fixes) appartiennent tous les deux au cercle principal de l'ellipse (centre  $O$ , rayon  $a$ ).

## B Ellipses des potentiels de Newton et de Hooke

Dans cette section, les équations polaires des trajectoires sont établies par la méthode plus traditionnelle résolvant les équations différentielles du mouvement.

### B.1 Cas du potentiel de Hooke

Dans le cas du potentiel harmonique  $V(r) = \frac{K}{2}r^2$  ( $K > 0$ ), il est plus aisé de résoudre les équations différentielles du mouvement en utilisant les coordonnées cartésiennes. En effet, on a ici

$$m\mathbf{a} = -K\mathbf{r}, \quad \text{soit} \quad m\ddot{x} = -Kx, \quad m\ddot{y} = -Ky, \quad z = 0$$

en tenant compte du fait que la trajectoire est dans le plan  $xOy$  orthogonal au moment cinétique. On en déduit les solutions

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_x), \quad y(t) = B \cos(\omega t + \theta_y), \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

où  $A, B, \theta_x, \theta_y$  sont des constantes. Leur nombre peut être réduit à trois en tenant compte de l'invariance temporelle qui permet de redéfinir l'origine des dates. Posons  $\theta_x = \theta_p + \theta_m$ ,  $\theta_y = \theta_p - \theta_m$  et faisons le changement  $\omega t + \theta_p \rightarrow \omega t$ . de sorte que maintenant

$$x = A \cos(\omega t + \theta_m), \quad y = B \cos(\omega t - \theta_m)$$

Effectuons ensuite une rotation autour de  $Oz$  d'angle  $\theta$ . Les nouvelles coordonnées  $X$  et  $Y$  sont

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad Y = x \sin \theta + y \cos \theta, \quad \text{soit}$$

$$X = \cos \omega t \cos \theta_m (A \cos \theta - B \sin \theta) - \sin \omega t \sin \theta_m (A \cos \theta + B \sin \theta)$$

$$Y = \sin \omega t \sin \theta_m (B \cos \theta - A \sin \theta) + \cos \omega t \cos \theta_m (A \sin \theta + B \cos \theta)$$

Cherchons ensuite un angle  $\theta$  tel que l'on puisse écrire

$$X = \rho_x \cos(\omega t + \chi) = \rho_x (\cos \omega t \cos \chi - \sin \omega t \sin \chi)$$

$$Y = \rho_y \sin(\omega t + \chi) = \rho_y (\sin \omega t \cos \chi + \cos \omega t \sin \chi)$$

où  $\rho_x$  et  $\rho_y$  sont strictement positifs. Cet angle doit satisfaire les relations

$$\begin{aligned}\rho_x \cos \chi &= \cos \theta_m (A \cos \theta - B \sin \theta), & \rho_x \sin \chi &= \sin \theta_m (A \cos \theta + B \sin \theta) \\ \rho_y \cos \chi &= \sin \theta_m (B \cos \theta - A \sin \theta), & \rho_y \sin \chi &= \cos \theta_m (A \sin \theta + B \cos \theta)\end{aligned}$$

soit

$$\tan \chi = \tan \theta_m \frac{A \cos \theta + B \sin \theta}{A \cos \theta - B \sin \theta} = \cot \theta_m \frac{A \sin \theta + B \cos \theta}{B \cos \theta - A \sin \theta}$$

d'où l'on tire

$$\tan 2\theta = \cos 2\theta_m \frac{2AB}{B^2 - A^2}$$

Cet angle existe bien et les nouvelles coordonnées satisfont l'équation

$$\frac{X^2}{\rho_x^2} + \frac{Y^2}{\rho_y^2} = 1$$

qui est celle d'une ellipse de centre  $O$ , ayant pour axes de symétrie  $OX$  et  $OY$ , et dont les demi-axes sont  $\rho_x$  (suivant  $OX$ ) et  $\rho_y$  (suivant  $OY$ ), ellipse qui, selon les valeurs des constantes, peut être réduite à un cercle de centre  $O$ . Les ellipses ou les cercles sont donc les seules trajectoires que peut fournir le potentiel harmonique. Il en existe à toute distance du centre de forces et ce sont des trajectoires fermées, conformément au théorème de Bertrand.

## B.2 Rappels concernant l'ellipse

Nous utiliserons ici la définition bifocale de l'ellipse : dans un plan, c'est l'ensemble des points  $M$  dont la somme des distances à deux points fixes  $F$  et  $F'$  est constante, soit

$$MF + MF' = 2a \tag{B.1}$$

Les deux points  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse. Définissons le repère cartésien  $XOY$  comme suit : l'origine  $O$  est le milieu de  $FF'$ , l'axe  $X'OX$  est selon le vecteur  $\mathbf{F}'\mathbf{F}$ , l'axe  $Y'OY$  est la médiatrice de  $F'F$ . D'après (B.1),  $F$  et  $F'$  jouent des rôles symétriques. Il est aisé de montrer que  $X'OX$  et  $Y'OY$  sont deux axes de symétrie de l'ellipse, séparés d'un angle  $\pi/2$ , donc commensurable avec  $\pi$ . Il s'ensuit que l'ellipse est une courbe fermée.

Lorsque le point  $M$  est sur  $Y'OY$ , on a  $MF = MF' = a$  ; posons alors  $b = OM$ ,  $d = OF = OF'$ . On a de façon évidente  $a^2 = b^2 + d^2$ , donc  $a > b$ . L'excentricité

$e$  de l'ellipse est définie comme le rapport  $e = \frac{d}{a} < 1$ . Notons  $X$  l'abscisse et  $Y$  l'ordonnée d'un point courant  $M$  de l'ellipse. On a

$$\begin{aligned} MF^2 &= (X - d)^2 + Y^2, \quad MF'^2 = (X + d)^2 + Y^2, \quad \text{et} \\ MF'^2 - MF^2 &= 4Xd = (MF' + MF)(MF' - MF) = 2a(MF' - MF), \quad \text{soit} \\ MF' - MF &= 2Xd/a, \quad \text{d'où } MF' = a + Xd/a, \quad MF = a - Xd/a \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

De ces formules se déduit aisément l'équation cartésienne de l'ellipse, rapportée aux axes définis plus haut. On a

$$\begin{aligned} MF^2 &= (X - d)^2 + Y^2 = \left(a - X\frac{d}{a}\right)^2, \quad \text{d'où} \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'équation (B.3) montre que  $-a \leq X \leq a$  et  $-b \leq Y \leq b$ , et que l'ellipse est tangente intérieurement au cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ , et tangente extérieurement au cercle de centre  $O$  et de rayon  $b$ .

Prenons maintenant  $F$  comme origine d'un nouveau repère cartésien  $xFy$  dont les axes sont parallèles à ceux de  $XOY$ , et notons  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $M$  dans ce repère. On a  $x = X - d$ ,  $y = Y$ . Posons encore  $r = MF$  et notons  $\psi$  l'angle entre  $\mathbf{FM}$  et l'axe  $Fx$ . D'après (B.2), on a  $r = a - e(d + x) = a(1 - e^2) - er \cos \psi$ , d'où l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires définies par rapport au foyer  $F$  :

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \psi}, \quad \text{avec } r_0 = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \quad (\text{B.4})$$

Le *cercle principal* de l'ellipse est le cercle de centre  $O$  dont le rayon est le demi-grand-axe  $a$ . Il est tangent à l'ellipse, aux deux points extrêmes  $M_m(X = a, Y = 0)$  et  $M_M(X = -a, Y = 0)$ , voir figure (5).

La parallèle à  $Y'OY$  passant par  $M$  coupe le cercle principal au point  $P$ . L'angle  $\chi$  que fait  $\mathbf{OP}$  avec  $OX$  est appelé *anomalie excentrique*. En projetant  $\mathbf{OP}$  sur  $OX$ , on obtient  $a \cos \chi = d + r \cos \psi$ , et, en utilisant (B.4), on trouve aisément les relations

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \frac{\cos \psi + e}{1 + e \cos \psi} \quad \text{ou inversement} \quad \cos \psi = \frac{\cos \chi - e}{1 - e \cos \chi}, \quad \text{puis} \\ \sin \chi &= \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \psi}{1 + e \cos \psi}, \quad \tan \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\psi}{2} \quad \text{et enfin} \\ r &= a(1 - e \cos \chi) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

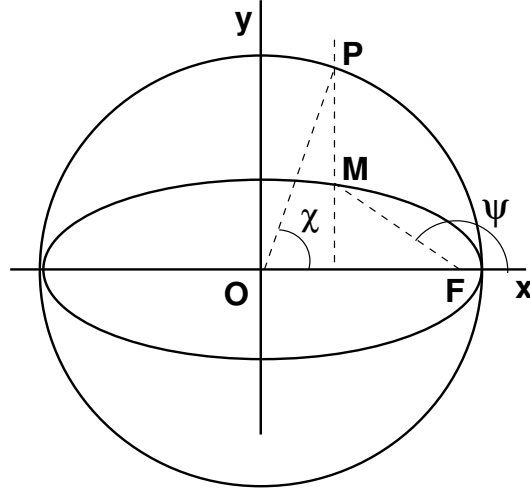


FIGURE 5 – Cercle principal de l'ellipse et l'anomalie excentrique  $\chi$

où l'on remarque avec intérêt que  $r$  est une fonction sinusoïdale de  $\chi$ .

### B.3 Cas du potentiel Newtonien

L'ellipse est une trajectoire possible d'un mobile  $M$  sous l'action du champ Newtonien  $V(r) = -\frac{K}{r}$  ( $K > 0$ ) de source  $F$ . En effet, l'équation (15) donne dans ce cas ( $u = 1/r$ )

$$u'' = -u + \frac{K}{mC^2} \quad (\text{B.6})$$

et pour  $r(\psi)$  la solution exprimée dans (B.4) où

$$r_0 = \frac{mC^2}{K} \quad (\text{B.7})$$

On relie l'excentricité  $e$  de l'ellipse<sup>66</sup> à l'énergie du mobile à partir de (13). On trouve

$$e = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{mK^2}}, \quad \text{avec } E < 0 \text{ et } |E| < \frac{mK^2}{2L^2} \quad (\text{B.8})$$

La surface de l'ellipse étant  $A = \pi ab$ , la formule (5) permet d'obtenir la période  $T$  du mouvement. En effet, on a

<sup>66</sup>. La trajectoire étant bornée, on a  $e < 1$ .

$T = 2m \frac{\pi ab}{L}$ , et comme  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ ,  $a = \frac{r_0}{1 - e^2} = \frac{K}{2|E|}$ , on trouve

$$\text{la formule } T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}} = \pi K \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (\text{B.9})$$

qui a fait l'objet de la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période correspondant à ce mouvement est proportionnelle au cube des dimensions linéaires de la trajectoire<sup>67</sup>.

Une dérivation temporelle de l'une quelconque des formules (B.5) reliant  $\psi$  et  $\chi$  conduit au résultat remarquable

$$r^2 \dot{\psi} = br \dot{\chi} = C = \text{constante} \quad (\text{B.10})$$

duquel on déduit aussi

$$\frac{dt}{d\chi} = \frac{T}{2\pi} (1 - e \cos \chi), \quad \text{soit } t = \frac{T}{2\pi} (\chi - e \sin \chi) \quad (\text{B.11})$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les formules suivantes

$$\cos \frac{\chi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - e}} \sqrt{\frac{r}{a}} \cos \frac{\psi}{2}, \quad \sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e}} \sqrt{\frac{r}{a}} \sin \frac{\psi}{2} \quad (\text{B.12})$$

☞ Notons ici le résultat suivant. De la relation entre  $t$  et  $\chi$  donnée en (B.11) et des formules (B.9) et (B.5), on déduit

$$\frac{t^2}{r^3} = \frac{m (\chi - e \sin \chi)^2}{K (1 - e \cos \chi)^3} \quad (\text{B.13})$$

Cette formule permet de mettre en correspondance deux points  $M_1$  et  $M_2$  de deux ellipses distinctes ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) ayant en commun le foyer  $F$ , l'axe  $x'x$  selon lequel sont orientés leurs grands axes respectifs et la même excentricité  $e$ . L'une est de centre  $O_1$ , l'autre de centre  $O_2$  et les deux points sont tels que les vecteurs  $\mathbf{O}_1\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{O}_2\mathbf{M}_2$  font le même angle  $\chi$  avec l'axe  $x'x$ . Les puissances de  $t$  et de  $r$  dans la formule (B.13) sont une trace de la troisième loi de Kepler.

Un schéma de construction est donné à la figure 6. Les ellipses ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) ayant même excentricité, les sommets  $S_1$  et  $S_2$  de leurs demi petits-axes respectifs sont

---

<sup>67</sup>. Ce qui est conforme au principe de *similitude mécanique* décrit dans l'ouvrage de L. Landau et E. Lifchitz, §10. On notera ici que ce principe ne s'applique aux forces centrales que si le potentiel correspondant est une fonction puissance de la distance  $r$  (potentiel homogène).

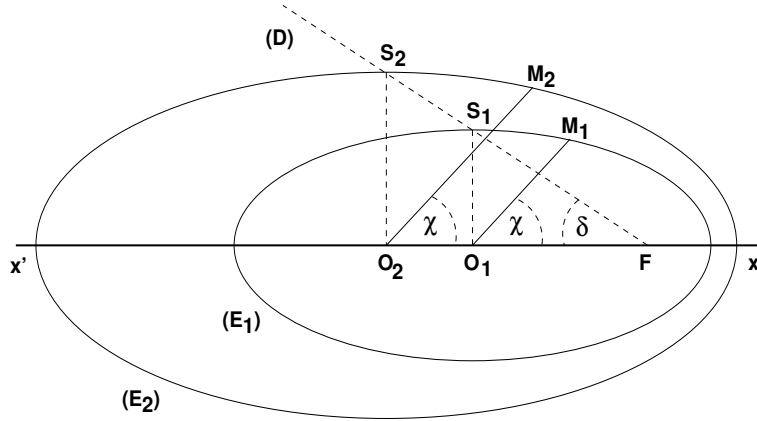


FIGURE 6 – Schéma illustrant la formule (B.13)

situés sur un axe  $(D)$  issu du foyer commun  $F$  et faisant avec l'axe  $xx'$  (dans ce sens) l'angle  $\delta$  tel que  $\cos \delta = d/a = e$ . Depuis  $S_1$  ou  $S_2$  on abaisse les perpendiculaires à  $x'x$ , coupant cet axe aux centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$  de  $(E_1)$  et de  $(E_2)$ . Ayant tracé lesdites ellipses, deux axes parallèles issus l'un de  $O_1$  et l'autre de  $O_2$  les coupent respectivement en  $M_1$  et en  $M_2$ . Ces deux points représentent les positions respectives, aux dates respectives  $t_1$  et  $t_2$ , de deux mobiles  $P_1$  et  $P_2$  en mouvement, respectivement sur  $(E_1)$  et sur  $(E_2)$ , conformément à (B.6). Ces positions vérifient la relation

$$t_1^2/FM_1^3 = t_2^2/FM_2^3 \quad (\text{B.14})$$

## B.4 Problème inverse

Cherchons d'une autre manière quel type de potentiel peut fournir des trajectoires elliptiques dans les deux cas suivants : celui où le centre de forces  $O$  est un foyer de l'ellipse et celui où  $O$  est le centre de l'ellipse. Connaissant la trajectoire, il s'agit ici d'identifier le potentiel correspondant.

### B.4.1 Cas où $O$ est un foyer de l'ellipse

L'équation polaire de l'ellipse est dans ce cas

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \psi}$$

où  $e$  est l'excentricité de l'ellipse, comprise entre 0 et 1<sup>68</sup>. On a

<sup>68</sup>. Le cas  $e = 0$  est celui du cercle!



$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} [1 + e \cos \psi], \quad u' = -\frac{e}{r_0} \sin \psi$$

Reportant ces expressions dans (13), on obtient

$$\frac{E}{mC^2} = \frac{e^2 - 1}{2r_0^2} + \frac{1}{rr_0} + \frac{V(r)}{mC^2}$$

L'énergie étant une constante du mouvement, les deux derniers termes de cette expression doivent se compenser. Autrement dit, on doit avoir<sup>69</sup>

$$V = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k = \frac{mC^2}{r_0} \quad (\text{B.15})$$

On en conclut que seul le potentiel Newtonien peut produire des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le centre de forces, et ceci à toute distance dudit centre, l'ellipse pouvant en outre être réduite à un cercle. Les paramètres  $r_0$  et  $e$  de l'ellipse sont fixés par l'énergie  $E$  et le moment cinétique  $L$  au moyen des formules

$$L^2 = mkr_0, \quad E = -\frac{k}{2r_0}(1 - e^2)$$

On note que l'énergie est ici négative. Notons aussi que la valeur minimum de  $r$  est obtenue pour  $\psi = 0$  :  $r_{\min} = \frac{r_0}{1 + e}$ , tandis que la valeur maximum de  $r$  correspond à  $\psi = \pi$  :  $r_{\max} = \frac{r_0}{1 - e}$ . Ces deux points de retournement définissent deux axes de symétrie : celui,  $\Delta_m$ , joint le centre de force au point où  $r = r_{\min}$ , l'autre,  $\Delta_M$ , joint le centre de force au point où  $r = r_{\max}$ . Ici, nous avons affaire à un cas particulier où ces deux axes sont portés par la même droite :  $\Delta_m$  s'identifie à l'axe  $Ox$  et  $\Delta_M$  s'identifie à  $-Ox$ . Ils sont séparés de  $\Delta\psi = \pi$ .

#### B.4.2 Cas où $O$ est le centre de l'ellipse

Une telle ellipse a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

laquelle, transcrite en coordonnées polaires, donne

$$u^2 = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}, \quad u' = r \cos \psi \sin \psi \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right]$$

---

69. En admettant ici que  $V(r)$  doit s'annuler à distance infinie.

Remarquant que  $\sin^2 \psi \cos^2 \psi \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right]^2 = \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right] \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right]$  et reportant dans (13), il vient

$$\begin{aligned} \frac{E}{mC^2} &= \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right] \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{2r^2} + \frac{V(r)}{mC^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] - \frac{r^2}{2a^2b^2} + \frac{V(r)}{mC^2} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que dans le cas précédent, on trouve que seul le potentiel harmonique  $V(r) = \frac{K}{2} r^2$  avec  $K > 0$  peut produire des trajectoires elliptiques centrées sur  $O$ . On vérifie aisément que les paramètres  $a$  et  $b$  de l'ellipse sont fixés par l'énergie  $E$  et le moment cinétique  $L$  au moyen des formules

$$E = \frac{K}{2}(a^2 + b^2), \quad L^2 = mK a^2 b^2$$

On note que l'énergie est ici positive. Supposons  $a > b$ . On a alors  $r = r_{\min} = b$  pour  $x = 0, y = \pm b$  et  $r = r_{\max} = a$  pour  $y = 0, x = \pm a$ . Les deux axes de symétrie  $\Delta_M \equiv Ox$  et  $\Delta_m \equiv Oy$  sont ici séparés de  $\Delta\psi = \pi/2$ .

## C Crochets de Poisson entre composantes de vecteurs unitaires orthogonaux au moment angulaire

Soit  $\mathbf{u}$  un champ de vecteurs unitaires tri-dimensionnel dépendant des variables canoniques  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ , orthogonal au moment angulaire (ou moment cinétique)  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Il est important de rappeler que  $\mathbf{u}$  doit ce statut de vecteur vis-à-vis du groupe des rotations générées par les composantes de  $\mathbf{L}$  au moyen des crochets de Poisson, car

$$\{L_i, u_j\} = \left[ \frac{\partial L_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L_i}{\partial p_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = \epsilon_{ijk} u_k$$

avec sommation implicite sur les indices répétés. Les crochets de Poisson  $T_{ij} = \{u_i, u_j\}$  définissent un tenseur antisymétrique de rang deux qui est orthogonal à  $\mathbf{L}$ , car

$$L_i \{u_i, u_j\} = \{L_i u_i, u_j\} - u_i \{L_i, u_j\} = -\epsilon_{ijk} u_i u_k = 0 \quad (\text{C.1})$$

Il est aussi orthogonal à  $\mathbf{u}$  parce que

$$u_i T_{ij} = \frac{1}{2} \{u_i u_i, u_j\} = \frac{1}{2} \{1, u_j\} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Définissons ensuite  $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}/L$  avec  $L = \|\mathbf{L}\|$ , et  $\mathbf{w} = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{u}$ . Les trois vecteurs unitaires  $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\ell}$  forment une base orthonormée d'orientation directe et, comme tels, vérifient les relations

$$\begin{aligned} u_i u_j + w_i w_j + \ell_i \ell_j &= \delta_{ij} \\ u_i w_j - u_j w_i &= \epsilon_{ijk} \ell_k, \quad w_i \ell_j - w_j \ell_i = \epsilon_{ijk} u_k, \quad \ell_i u_j - \ell_j u_i = \epsilon_{ijk} w_k \\ u_i &= \epsilon_{ijl} w_j \ell_k, \quad w_i = \epsilon_{ijk} \ell_j u_k, \quad \ell_i = \epsilon_{ijk} u_j w_k \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ecrivant

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \delta_{ia} T_{ab} \delta_{jb} = (u_i u_a + w_i w_a + \ell_i \ell_a) T_{ab} (u_b u_j + w_b w_j + \ell_b \ell_j) \\ &= w_i (w_a T_{ab} w_b) w_j \end{aligned}$$

où Eqs (C.1) et (C.2) ont été utilisées des deux côtés, nous obtenons pour  $T_{ij}$  une expression symétrique alors qu'il doit être antisymétrique. Nous en concluons qu'il est en fait nul. Cette conclusion vaut aussi pour les crochets de Poisson des composantes  $w_i$ . Ainsi,

$$\{u_i, u_j\} = 0, \quad \{w_i, w_j\} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Considérons maintenant le tenseur  $W_{ij} = \{u_i, w_j\}$ . Sur son côté gauche il est orthogonal à  $\mathbf{u}$ , voir (C.1); et aussi à  $\mathbf{w}$  du fait que, selon (C.4),

$$w_i \{u_i, w_j\} = \{w_i u_i, w_j\} - u_i \{w_i, w_j\} = -u_i \{w_i, w_j\} = 0$$

Sur son côté droit,  $W_{ij}$  est orthogonal à  $\mathbf{w}$  et aussi à  $\mathbf{u}$  :

$$\{u_i, w_j\} u_j = \{u_i, w_j u_j\} - \{u_i, u_j\} w_j = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \delta_{ia} W_{ab} \delta_{jb} = (u_i u_a + w_i w_a + \ell_i \ell_a) W_{ab} (u_b u_j + w_b w_j + \ell_b \ell_j) \\ &= \ell_i (\ell_a W_{ab} \ell_b) \ell_j \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} L_a \{u_a, w_b\} &= \{L_a u_a, w_b\} - u_a \{L_a, w_b\} = -u_a \epsilon_{abc} w_c = \ell_b, \quad \text{et} \\ \ell_a \{u_a, w_b\} &= \ell_b / L \end{aligned}$$

D'où,

$$\{u_i, w_j\} = \ell_i \ell_j / L = L_i L_j / L^3 \quad (\text{C.5})$$

Insistons sur le fait que toutes les relations déduites ici sont complètement indépendantes de la forme exacte du vecteur  $\mathbf{u}$  : elles sont valables pour n'importe quel vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{L}$ .

## D Vecteur de symétrie pour $n$ dimensions

Dans l'espace des phases des vecteurs  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , de dimension  $2n$ , le groupe des rotations est  $SO(n)$ . Au moyen des crochets de Poisson, il est généré par les composantes  $L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$  du moment angulaire généralisé, qui satisfont les relations

$$\{L_{ij}, L_{kl}\} = \delta_{ik} L_{j\ell} - \delta_{jk} L_{i\ell} - \delta_{i\ell} L_{jk} + \delta_{j\ell} L_{ik} \quad (\text{D.1})$$

Comme conséquence de la symétrie sphérique du potentiel, ces  $n(n-1)/2$  composantes sont des grandeurs conservées. En fait, le véritable équivalent du moment cinétique usuel en trois dimensions est plutôt le tenseur dual de  $L_{ij}$ , obtenu à l'aide du tenseur de Levi-Civita d'ordre  $n$  :

$$\mathcal{L}_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}} = \frac{1}{2} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n} L_{i_{n-1} i_n} = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n} x_{i_{n-1}} p_{i_n} \quad (\text{D.2})$$

Ce tenseur dual est un tenseur d'ordre  $n-2$ , complètement antisymétrique. De façon évidente, il est orthogonal aux deux vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  selon chacun de ses indices. Pour  $n=3$  il est équivalent au pseudo-vecteur couramment utilisé pour définir la normale au plan  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Pour  $n > 3$ , il peut être utilisé pour définir la matrice de projection dans l'espace de dimension  $n-2$  qui est orthogonal au plan  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , au moyen de la formule

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{3!(n-3)!L^2} \mathcal{L}_{i_1 i_2 \dots i_{n-3} i} \mathcal{L}_{i_1 i_2 \dots i_{n-3} j} \\ &= \frac{1}{L^2} \{ \delta_{ij} L^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) [x_i p_j + x_j p_i] - p^2 x_i x_j - r^2 p_i p_j \} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Les  $C_{n-2}^n = n(n-1)/2$  composantes de (D.2) sont aussi des intégrales premières. Il s'ensuit que les deux vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  restent toujours dans un plan de dimension 2, fixé par son orthogonalité au tenseur constant (D.3) et contenant la source  $O$  : exactement comme en dimension 3, une trajectoire quelconque de la particule repose dans un 2-plan constant contenant la source du potentiel. Une fois ce fait établi, on peut affirmer que les équations du mouvement restantes sont finalement les mêmes qu'en trois dimensions. Cette simple observation nous permet de conclure<sup>70</sup>, que les lois de Kepler sont universelles pour  $n \geq 3$ , et que le théorème de Bertrand dans sa forme originelle est aussi valide dans des espaces de dimension  $n \geq 3$ <sup>71</sup>. Toutefois, concernant le potentiel de Newton  $-K/r$ , il faut préciser que ce résultat est de moindre intérêt, étant donné que dans des espaces de dimension

70. Voir M. Önder, A. Verçin, Eur. J. Phys, 27 (2006) 49-55,  
DOI : 10.1088/0143-0807/27/1/005.

71. Voir V. Balakrishnan, Suresh Govindarajan, S. Lakshmibala, Resonance, 25 (2020) 513-538.

$n > 3$ , ce potentiel n'est plus corrélé au théorème de Gauss en Electrostatique ou en Gravitation, et perd alors son interprétation physique.

Ensuite, notons que les  $L_{ij}$  ne sont pas tous indépendants, dans le sens où les relations

$$\{L_{1j}, L_{1\ell}\} = L_{j\ell} \quad (\text{D.4})$$

permettent d'exprimer les  $C_2^{n-1} = (n-1)(n-2)/2$  composantes  $L_{j\ell}$  avec  $j > 1$  et  $\ell > 1$  en fonction des dérivées des seuls  $L_{1j}$ . De ce point de vue, il y a seulement  $n-1$  composantes  $L_{ij}$  indépendantes, qui peuvent servir à définir un vecteur unitaire.

Rappelons que le système d'équations

$$\dot{p}_i = -\frac{x_i}{r} \frac{dV}{dr}(r) \quad (\text{D.5})$$

possède au maximum  $2n - 1$  intégrales premières indépendantes et que, selon le théorème de Liouville, il est intégrable si on peut trouver  $n$  intégrales premières indépendantes *et* involutives. Aussi, supposant ce système résolu, et en tenant compte de l'énergie, il reste  $2n - 1 - (n - 1) - 1 = n - 1$  intégrales premières à trouver. Il est illusoire de les rechercher parmi les composantes d'un autre tenseur antisymétrique tel que  $L_{ij}$ , car, à un facteur scalaire près, ce dernier tenseur est le seul pouvant être construit à partir des seules variables canoniques. D'un autre côté, elles peuvent être recherchées comme les  $n - 1$  composantes indépendantes d'un vecteur unitaire  $\mathbf{U}$ , exactement comme en 3 dimensions, ce vecteur étant censé, là aussi, rendre compte d'une éventuelle symétrie du système étudié.

Le tenseur  $T_{ij} = \{U_i, U_j\}$  est antisymétrique et se construit à l'aide des seules variables canoniques. Comme remarqué ci-dessus, un tel tenseur est certainement proportionnel à  $L_{ij}$  d'un facteur  $\Phi$ , fonction scalaire des invariants  $p^2 = \mathbf{p}^2$ ,  $r^2 = \mathbf{r}^2$  et  $u = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} T_{ij}U_j &= \{U_i, U_j\}U_j = \frac{1}{2}\{U_i, U_jU_j\} = \frac{1}{2}\{U_i, 1\} = 0, \quad \text{et} \\ T_{ij}U_j &= \Phi (x_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - p_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{U}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

et cette dernière équation n'est réalisée pour tous  $x_i$  et tous  $p_i$  que si et seulement si  $\Phi = 0$ . Ce résultat conduit aux équations

$$\begin{aligned} \{L_{ij}, L_{k\ell}\} &= \delta_{ik}L_{j\ell} - \delta_{jk}L_{i\ell} - \delta_{i\ell}L_{jk} + \delta_{j\ell}L_{ik} \\ \{L_{ij}, U_k\} &= \delta_{ik}U_j - \delta_{jk}U_i, \quad \{U_i, U_j\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

définissant une algèbre de Lie qui généralise celle obtenue en trois dimensions.

## E La transformation $\mathcal{T}_A$

En Relativité Restreinte, tous les référentiels d'inertie sont reliés par des transformations de Lorentz. Celles-ci forment un groupe de Lie, le groupe de Lorentz<sup>72</sup>, généré par une algèbre de Lie homomorphe à celle du groupe  $SL(2, C)$ . Avec un choix approprié de leurs axes de référence spatiaux, deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , ayant une vitesse relative  $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$  le long d'un axe défini par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  ( $V$  étant positif ou négatif), peuvent toujours être reliés par un "boost" de Lorentz le long de  $\mathbf{n}$ . Cela signifie que pour un événement donné dont les données "temps-position" sont  $(t, \mathbf{r})$  dans  $\mathcal{R}$  et  $(t', \mathbf{r}')$  dans  $\mathcal{R}'$ , ces données se comparent au moyen des formules

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sinh \xi \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \cosh \xi + ct \sinh \xi \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}' &= \mathbf{r}' - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \\ \text{avec } \xi &= \tanh^{-1} \left( \frac{V}{c} \right) \end{aligned}$$

$c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide, ou

$$ct' = ct \cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sinh \xi, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{n} (\cosh \xi - 1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{n} ct \sinh \xi \quad (\text{E.1})$$

Le boost de Lorentz défini par (E.1), s'applique aussi bien à tout 4-vecteur  $Q$  de l'espace de Minkowski à 4 dimensions. Soit  $Q_0$  et  $\mathbf{Q}$  ses composantes temporelle et spatiales dans  $\mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}'$  elles sont  $Q'_0$  et  $\mathbf{Q}'$  et l'on a

$$Q'_0 = Q_0 \cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \sinh \xi, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \mathbf{n} (\cosh \xi - 1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) + \mathbf{n} Q_0 \sinh \xi \quad (\text{E.2})$$

La similarité des équations (139), (144) et (E.2) nous conduit à interpréter la transformation  $\mathcal{T}_A$  comme un boost de Lorentz agissant sur un 4-vecteur fictif  $B$ , ayant  $L$  pour composante temporelle et  $\mathbf{B}$  pour partie spatiale. Ce 4-vecteur a la particularité d'être du genre lumière car sa pseudo-norme est nulle :

$$B^2 = B_0^2 - \mathbf{B}^2 = L^2 - L^2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

Ensuite, définissons la rotation  $R_A : (\mathbf{U}, \mathbf{W}, \ell) \rightarrow (\mathbf{U}', \mathbf{W}', \ell')$  induite par  $\mathcal{T}_A$ . Il est facile d'obtenir l'angle de rotation  $\gamma$ , en utilisant la propriété  $\text{tr} R_A = 1 + 2 \cos \gamma$ . On obtient ainsi

<sup>72</sup>. Voir notre cours *Introduction à la Théorie Lagrangienne*, chap. 5

$$\begin{aligned}
1 + 2 \cos \gamma &= \mathbf{U}' \cdot \mathbf{U} + \mathbf{W}' \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\ell}' \cdot \boldsymbol{\ell}, \quad \text{d'où} \\
\cos \gamma &= \frac{1}{\rho} \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2 (\cosh \xi - 1) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi \right] \quad \text{avec} \quad (\text{E.4}) \\
\rho &= \cosh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi
\end{aligned}$$

et

$$\sin \gamma = \pm \frac{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}}{\rho} [\sinh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} (\cosh \xi - 1)] \quad (\text{E.5})$$

Les composantes  $N_X$ ,  $N_Y$  et  $N_Z$ , relativement à la base  $(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\ell})$ , du vecteur unitaire  $\mathbf{N}$  définissant l'axe de rotation, sont ensuite obtenues en utilisant la formule de transformation

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cos \gamma + (\mathbf{N} \wedge \mathbf{a}) \sin \gamma + (1 - \cos \gamma)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a})\mathbf{N}$$

On a

$$\mathbf{U}' \cdot \mathbf{U} = \cos \gamma + (1 - \cos \gamma)N_X^2 = 1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 \frac{(\cosh \xi - 1)}{\rho}, \quad \text{d'où}$$

$$N_X^2 = \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^2}{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2},$$

en tenant compte de l'identité  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^2 = \mathbf{n}^2 = 1$ . De la même façon, on obtient

$$\boldsymbol{\ell}' \cdot \boldsymbol{\ell} = \cos \gamma + (1 - \cos \gamma)N_Z^2 = 1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^2 \frac{(\cosh \xi - 1)}{\rho}, \quad \text{d'où}$$

$$N_Z^2 = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U})^2}{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2},$$

Puisque  $N_X^2 + N_Y^2 + N_Z^2 = 1$ , on doit avoir  $N_Y = 0$ . On peut le vérifier comme suit. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}' \cdot \mathbf{W} &= \cos \gamma + (1 - \cos \gamma)N_Y^2 = \frac{1}{\rho} \left[ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2 (\cosh \xi - 1) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \sinh \xi \right] \\
&= \cos \gamma, \quad \text{d'où} \quad N_Y = 0
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant



$$\mathbf{U}' \cdot \mathbf{W} = N_Z \sin \gamma = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}}{\rho} [\sinh \xi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} (\cosh \xi - 1)],$$

$$\mathbf{U}' \cdot \boldsymbol{\ell} = N_Z N_X (1 - \cos \gamma) = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \frac{\cosh \xi - 1}{\rho}$$

on aboutit à

$$N_X = \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}}{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}}, \quad N_X = \mp \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}}{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}}, \quad \text{et}$$

$$N_i = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}} n_j [\ell_j U_i - U_j \ell_i] = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}} \epsilon_{ijk} n_j W_k$$

$$= \mp \frac{(\mathbf{n} \wedge \mathbf{W})_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})^2}}$$

## F Existence d'axes de symétrie pour les potentiels homogènes

Rappelons que les points de retournement sont associés à des axes de symétrie. Dans cet appendice, nous recherchons les conditions d'existence de tels points pour des potentiels homogènes.

### F.1 Potentiels attractifs

Dans cette section, seuls sont considérés les potentiels attractifs.

#### F.1.1 Potentiels en puissance négative

Considérons donc un potentiel de la forme  $V(r) = -K/r^\alpha$ , avec  $K > 0$  et  $\alpha > 0$ . Partant de (10), écrivons

$$\frac{mr^2}{2} = E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r^\alpha} = KF(w), \quad \text{où}$$
$$F(w) = w^\nu - aw + b, \quad \text{avec} \tag{F.6}$$

$$w = 1/r^2, \quad \nu = \alpha/2, \quad a = \frac{L^2}{2mK} > 0, \quad b = E/K$$

Les points de retournement correspondent aux zéros de  $F(w)$ . Notons que

$$F'(w) = \nu w^{\nu-1} - a, \quad F''(w) = \nu(\nu-1)w^{\nu-2} \tag{F.7}$$

et l'on remarque que si  $\nu \neq 1$  ( $\alpha \neq 2$ ),  $F(w)$  possède un unique extremum pour

$$w = w_e = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}, \quad \text{et l'on a} \quad F(w_e) = b + aw_e\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$$

Avant d'étudier les différentes situations, précisons les points suivants

$$F(0) = b, \quad \text{qui est positif ou négatif selon que } E > 0 \text{ ou } E < 0 ;$$

$$F'(0) = -a \quad \text{si } \nu > 1 ; \quad F'(0) = +\infty \quad \text{si } \nu < 1 ;$$

$$\text{pour } w \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow 0), \quad F(w) \simeq w^\nu \rightarrow +\infty \quad \text{si } \nu > 1,$$

$$\text{et } F(w) \simeq -aw \rightarrow -\infty \quad \text{si } \nu < 1 \tag{F.8}$$

Notons aussi que l'énergie potentielle effective s'écrit

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r^\alpha} = K [b - F(w)], \text{ que } \frac{dU}{dr} = 2Kw^{3/2}F'(w)$$

$$\text{et que } \ddot{r}F'(w) < 0 \quad (\text{F.9})$$

1°) **Cas**  $\nu > 1$

①  $b < 0$  ( $E < 0$ )

$$F(0) = b < 0, \quad F(w_e) < 0, \quad F''(w_e) > 0, \quad F(+\infty) = +\infty.$$

La fonction  $F(w)$  présente un *minimum* strictement négatif en  $w = w_e$ , alors que  $F(0) < 0$  et  $F(+\infty) = +\infty$ . Il est alors évident que  $F(w)$  prend une seule fois la valeur zéro pour  $w = w_0 > w_e$ . Aucun mouvement n'est possible dans la région  $0 < w \leq w_0$  où  $F(w)$  est négatif. Les seuls mouvements possibles, pour lesquels  $F(w)$  est positif, sont bornés, dans la région  $w \geq w_0$ , soit  $0 < r < r_0 = 1/\sqrt{w_0}$ . Dans cette même région,  $F'(w) > 0$ , donc  $\ddot{r} < 0$ , et  $\dot{r}$  ne peut que décroître. Si  $\dot{r}(0) < 0$ ,  $\dot{r}$  reste négatif, la distance  $r$  diminue et la particule chute ultérieurement sur la source en un mouvement de spirale, de plus en plus rapide. Si  $\dot{r}(0) > 0$ , la distance  $r$  croît jusqu'à la valeur  $r_0$ , puis,  $\dot{r}$  devenant négatif, la particule va retourner vers les distances plus faibles pour finalement chuter vers la source en tournant autour de celle-ci de plus en plus rapidement.

②  $b > 0$  ( $E > 0$ )

$$F(0) = b > 0, \quad F''(w_e) > 0, \quad F(+\infty) = +\infty.$$

Trois cas se présentent.

**a)**  $b > aw_e(1 - 1/\nu)$

Le minimum  $F(w_e)$  est strictement positif et  $F(w)$  reste partout strictement positif. Il n'y a aucune valeur de retournement pour  $w$ . Comme  $\dot{r}$  ne peut s'annuler, cette grandeur garde le signe de sa valeur initiale, la valeur absolue de cette dernière devant être supérieure à  $\sqrt{\frac{2KF(w_e)}{m}}$  pour qu'un mouvement soit possible. Si  $\dot{r}(0) > 0$ , la particule va s'éloigner de la source, jusqu'à des distances infinies. Si  $\dot{r}(0) < 0$ , la particule va chuter sur la source, comme décrit précédemment.

**b)**  $0 < b < aw_e(1 - 1/\nu)$

Le minimum  $F(w_e)$  est strictement négatif, et la fonction  $F(w)$  possède deux zéros pour  $w = w_1$  et  $w = w_2 \geq w_e \geq w_1$ . Dans la région  $w_1 \leq w \leq w_2$  ( $r_2 = 1/\sqrt{w_2} \leq r \leq r_1 = 1/\sqrt{w_1}$ ),  $F(w)$  est négatif, et tout mouvement y donc est impossible. Les mouvements sont possibles dans les deux régions bien séparées :  $r \geq r_1$  et  $r \leq r_2$ . Dans la première, ils ne sont pas bornés, dans la seconde, la particule chute sur

la source, ces mouvements s'effectuant avec retournement ou non pour  $r = r_1$  ou  $r = r_2$ , respectivement, selon le signe de  $\dot{r}(0)$ .

c)  $b = aw_e(1 - 1/\nu) > 0$

On a ici  $F(w_e) = 0$ . C'est un cas particulier de ② a) où, selon le signe de  $\dot{r}(0)$  et la position de départ, la particule peut s'éloigner indéfiniment de la source, chuter sur celle-ci, ou être "capturée" sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r_e = 1/\sqrt{w_e}$  où elle va continuer à effectuer un mouvement uniforme<sup>73</sup>. Comme il a été vu au paragraphe 4.2, cette trajectoire circulaire n'est pas stable pour  $\nu > 1$ . Ici,  $r_e$  ne peut pas être considéré comme une valeur de retournement pour  $r$ .

③  $b = 0$  ( $E = 0$ )  $F(0) = 0$

Dans ce cas,  $w_1 = 0$ , et comme  $F(w_e) \leq 0$ , il ne susiste qu'une seule région permise,  $w \geq w_2$  ( $r \leq r_2$ ), où les mouvements sont bornés, avec une seule valeur de retournement  $r_2$  pour  $r$ .

2°) **Cas  $\nu < 1$**

①  $b < 0$  ( $E < 0$ )

Ici aussi, trois cas se présentent.

a)  $|b| > aw_e(1/\nu - 1)$

Le *maximum*  $F(w_e)$  est strictement négatif, et  $F(w)$  est donc partout strictement négatif : aucun mouvement n'est possible.

b)  $|b| < aw_e(1/\nu - 1)$

Le maximum  $F(w_e)$  est strictement positif. Il s'ensuit que  $F(w)$  a deux zéros pour  $w = w_1 < w_e$  ( $r = r_1 = 1/\sqrt{w_1} > r_e$ ) et  $w = w_2 \geq w_e$  ( $r = r_2 = 1/\sqrt{w_2} < r_e$ ). Les mouvements possibles sont bornés dans la région  $r_2 \leq r \leq r_1$ , avec ici deux valeurs de retournement  $r_1$  et  $r_2$  pour  $r$ .

c)  $b = -aw_e(1/\nu - 1)$

Ici,  $F(w_e) = 0$  et, sauf pour  $w = w_e$ ,  $F(w)$  est partout strictement négatif. Un seul mouvement circulaire uniforme est donc possible pour  $r = r_e$ .

②  $b \geq 0$

Le maximum  $F(w_e)$  est strictement positif. Comme  $F(0)$  est positif tandis que  $F(+\infty) = -\infty$ , il existe un seul zéro de  $F(w)$  pour  $w = w_0 > w_e$ . Les mouvements possibles ne s'effectuent que dans la région  $r \geq r_0 = 1/\sqrt{w_0}$ , puisque  $F(w) < 0$  pour  $r < r_0$ . En outre, ces mouvements ne peuvent être réalisés qu'avec une vitesse

---

73. Les deux conditions d'un tel mouvements sont ici réunies :  $\dot{r}_e = 0$  et  $\ddot{r}_e = 0$ .

radiale initiale  $\dot{r}(0)$  de valeur absolue inférieure à  $\dot{r}_e = \sqrt{\frac{2KF(w_e)}{m}}$ .

Supposons qu'à  $t = 0$ , la particule se trouve à la distance  $r(0) > r_e$  avec une vitesse radiale initiale positive, qui doit être supérieure à  $\dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2Kb}{m}}$ . Dans cette région, on a  $\ddot{r} < 0$ , et la vitesse radiale diminue tout en restant positive : la particule s'éloigne à l'infini où la vitesse radiale prend la valeur  $\dot{r}_\infty$ . Si  $-\dot{r}_\infty < \dot{r}(0) < -\dot{r}_b$ ,  $\dot{r}$  croît en valeur absolue, tout en restant négative et la distance  $r$  diminue. Pour  $r \geq r_e$ ,  $\dot{r}$  diminue en valeur absolue tout en restant négative car alors  $\ddot{r} > 0$ . La distance continue donc à décroître jusque  $r = r_0$ , distance à laquelle la vitesse radiale s'annule. La vitesse radiale devient positive et la particule repart alors vers les plus grandes distances, jusqu'à l'infini.

Supposons maintenant  $r_e \leq r(0) \leq r_0$ . Si  $\dot{r}(0) > 0$  avec  $|\dot{r}(0)| \leq \dot{r}_e$ , la particule s'éloigne directement vers l'infini car l'accélération radiale est positive dans cette région et permet à la particule d'acquérir la vitesse radiale maximum  $\dot{r}_e$  pour  $r = r_e$ . Si  $\dot{r}(0) < 0$ , la particule voit sa vitesse décroître en valeur absolue tout en restant négative, faisant ainsi diminuer la distance jusque la valeur  $r_0$  pour laquelle la vitesse radiale s'annule. Puis la vitesse radiale devient positive, et comme précédemment, la particule s'éloigne à l'infini.

La valeur  $r_0$  est donc bien celle d'un retournement.

### 3°) Cas $\nu = 1$

Ce cas est celui du potentiel considéré au paragraphe 3.3, pour lequel on a  $F(w) = w(1-a) + b$ , la dérivée  $F'(w) = 1-a$  gardant un signe constant. Nous excluons le cas  $a = 1$ . On note que

$$F(0) = b, \quad F(+\infty) = +\infty \text{ si } a < 1, \quad F(+\infty) = -\infty \text{ si } a > 1$$

①  $b < 0$

a)  $a > 1$

Dans ce cas,  $F(w)$  est toujours négatif, aucun mouvement n'est réalisable.

b)  $a < 1$ ,  $F'(w) > 0$ , donc  $\ddot{r} < 0$ .

Les mouvements ne sont possibles que dans la région  $w \geq w_0 = \frac{|b|}{1-a}$ , soit  $r \leq r_0 = 1/\sqrt{w_0}$ . Ils sont donc bornés et se terminent tous par une chute sur la source. la valeur  $r_0$  de  $r$  est celle d'un retournement.

②  $b > 0$

a)  $a > 1$ ,  $F'(w) < 0$ , donc  $\ddot{r} > 0$ .

Seuls sont possibles des mouvements non bornés, dans la région  $w \leq w'_0 = \frac{b}{a-1}$ , soit  $r \geq r'_0 = 1/\sqrt{w'_0}$ . Ils se terminent tous par une fuite vers l'infini de la particule, et  $r'_0$  est une valeur de retournement pour  $r$ .

**b)**  $a < 1$ ,  $F'(w) > 0$ , donc  $\ddot{r} < 0$ .

Quelle que soit la position de départ, si  $\dot{r}(0) > 0$ , la particule s'éloigne à l'infini où sa vitesse radiale devient égale à  $\dot{r}_\infty$ . Si  $\dot{r}(0) \leq 0$ , exécute une chute spiralee sur la source. Il n'y a aucun point de retournement.

③  $b = 0$

**a)**  $a > 1$

Comme  $F'(w) \leq 0$ , aucun mouvement n'est possible.

**b)**  $a < 1$

Ce cas est similaire à celui de ② **b)**, avec cette fois  $\dot{r}_\infty = 0$ .

### F.1.2 Potentiels en puissance positive

Considérons maintenant un potentiel de la forme  $V(r) = Kr^\alpha$  avec  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  et définissons

$$G(w) = \frac{m\dot{r}^2}{2mK} = b - aw - w^{-\nu},$$

avec  $w = \frac{1}{r^2}$ ,  $b = \frac{E}{K}$ ,  $a = \frac{L^2}{2mK} > 0$ ,  $\nu = \alpha/2$  (F.10)

De

$$G'(w) = -a + \nu w^{-\nu-1}, \quad G''(w) = -\nu(\nu+1)w^{-\nu-2} < 0$$

on déduit que  $G(w)$  possède toujours un *maximum* pour  $w = w_e = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}$ , de valeur  $G(w_e) = b - w_e(1 + 1/\nu)$ . Notant qu'un mouvement ne peut exister que si l'énergie  $E = Kb = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + Kr^\alpha$  est strictement positive, le seul cas  $b > 0$  sera considéré. Notant aussi que

$$G(0) = -\infty, \quad G(+\infty) = -\infty$$

on voit que la recherche d'éventuels zéros de  $G(w)$  se résume à la simple étude du signe de son unique maximum.

$$\textcircled{1} \quad b < w_e(1 + 1/\nu)$$

Dans ce cas,  $G(w)$  est partout négatif et aucun mouvement n'est permis.

$$\textcircled{2} \quad b > w_e(1 + 1/\nu)$$

Le maximum  $G(w_e)$  est positif et compte tenu de ses valeurs limites négatives,  $G(w)$  possède nécessairement deux zéros pour  $w = w_1 < w_e$  et pour  $w = w_2 > w_e$ . Les mouvements permis sont bornés dans la région  $r_2 = 1/\sqrt{w_2} \leq r \leq r_1 = 1/\sqrt{w_1}$  où  $G(w) \geq 0$ , les valeurs  $r_1$  et  $r_2$  correspondant à des retournements. .

$$\textcircled{3} \quad b = w_e(1 + 1/\nu)$$

Dans ce dernier cas, on a à la fois  $G(w_e) = 0$  et  $G'(w_e) = 0$ , soit  $\dot{r}_e = 0$  et  $\ddot{r}_e = 0$ . Le seul mouvement possible est circulaire uniforme sur un cercle de rayon  $r_e = 1/\sqrt{w_e}$ .

## F.2 Potentiels répulsifs

Ce cas est de loin le plus simple : que la puissance du potentiel  $V(r)$  soit positive ou négative, le potentiel effectif  $U(r)$  est une fonction strictement décroissante de  $r$ . Il ne peut donc exister qu'un seul point de retournement.

## G Symétrie dynamique du problème de Hooke <sup>74</sup>

Il est facile de montrer que le tenseur symétrique, défini et positif

$$T_{ij} = p_i p_j + mK x_i x_j \quad (\text{G.1})$$

est une constante du mouvement d'une particule soumise au potentiel de Hooke. Ce fait a été exploité dans le passé pour définir la symétrie dynamique qui lui est associée, ou pour définir un analogue du vecteur LRL <sup>75</sup>. La relation  $\text{Tr } T = 2mH$  révèle que les composantes de (G.1) ne sont pas toutes indépendantes des intégrales premières fondamentales. On peut y remédier partiellement en introduisant le nouveau tenseur  $T'_{ij} = T_{ij} - \delta_{ij}[\text{Tr } T]/3$  de trace nulle, et utiliser ses cinq composantes indépendantes avec les trois composantes du moment angulaire pour former une algèbre de Lie homomorphe à celle du groupe  $U(3)$  <sup>76</sup>. Il est également possible d'utiliser (G.1) pour former une algèbre de Lie homomorphe à celle du groupe  $SU(2)$ , qui peut être interprétée dans l'espace à trois dimensions des paramètres orbitaux.

Voyons maintenant ce que l'on peut faire de plus avec ce tenseur. Ses deux valeurs propres, positives et non nulles, sont

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= m \left[ E \pm \sqrt{E^2 - \frac{K}{m} L^2} \right], \quad \text{où} \\ E &= \frac{1}{2m} [p^2 + Kmr^2] = \frac{1}{2m} \text{Tr } T, \\ L^2 &= p^2 r^2 - u^2 = \frac{1}{2Km} [(\text{Tr } T)^2 - T_{ij} T_{ij}] \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Les vecteurs propres correspondants et normalisés sont, à un signe près,

$$\mathbf{t}_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}} [u\mathbf{p} + (\lambda_{\pm} - p^2) \mathbf{r}], \quad \text{où} \quad (\text{G.3})$$

$$N_{\pm} = \sqrt{u^2 p^2 + 2u^2 (\lambda_{\pm} - p^2) + r^2 (\lambda_{\pm} - p^2)^2} = \sqrt{\frac{\lambda_{\pm} (\lambda_{+} - \lambda_{-})}{Km} |\lambda_{\pm} - p^2|},$$

avec  $\mathbf{t}_{+}$  définissant l'axe long  $\Delta_M$  et  $\mathbf{t}_{-}$  l'axe court  $\Delta_m$  des ellipses. Tous les deux sont constants dans le temps. Remarquons ici que  $\mathbf{L}$  est le troisième vecteur propre dudit tenseur avec la valeur propre zéro. Notons les relations suivantes :

<sup>74</sup>. Voir : C. Carimalo, *Dynamical symmetries behind Bertrand's theorem*, Am. J. Phys. **89** (2021), 1012-1017.

<sup>75</sup>. Voir par exemple, H. Goldstein, J.L. Safko, C.P. Poole Jr., *Classical Mechanics*, 3rd ed. (Pearson, 2014), Sec. 9.8; J. Sivardière, Bull. Union Phys. **87**, 165-193 (1993), et ses références.

<sup>76</sup>. Voir H. Bacry, loc. cit.



$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= Kmr_{M,m}^2, \quad \lambda_+ + \lambda_- = 2mE = p^2 + Kmr^2, \quad \lambda_+\lambda_- = KmL^2, \\ p_m^2 &= Kmr_M^2, \quad p_M^2 = Kmr_m^2, \quad (\lambda_+ - p^2)(\lambda_- - p^2) = -Kmu^2\end{aligned}\quad (\text{G.4})$$

D'après (G.4), on voit qu'aux points extrêmes d'une ellipse correspondant aux valeurs  $E$  and  $L$  de l'énergie et du moment angulaire, on a

$$\lambda_+ - p_m^2 = 0, \quad \lambda_+ - p_M^2 = Km(r_M^2 - r_m^2) = -(\lambda_- - p_m^2), \quad \lambda_- - p_M^2 = 0 \quad (\text{G.5})$$

Aussi, on doit être prudent avec les expressions précédentes de  $\mathbf{t}_{\pm}$ , car leurs numérateurs et dénominateurs peuvent s'annuler. Pour circonscrire cette difficulté, il faut réexprimer  $\mathbf{t}_{\pm}$  sous une forme plus maniable. Définissons

$$\cos \theta = \frac{p^2 - Kmr^2}{X}, \quad \sin \theta = \frac{2u\sqrt{Km}}{X}, \quad X = \sqrt{(p^2 - Kmr^2)^2 + 4Kmu^2} \quad (\text{G.6})$$

Puisque  $p^2 + Kmr^2 = 2mE = \lambda_+ + \lambda_-$ ,  $u^2 = p^2r^2 - L^2$  avec  $KmL^2 = \lambda_+\lambda_-$ , on a  $X = \lambda_+ - \lambda_- = Km(r_M^2 - r_m^2) \neq 0$ . Remarquons que  $\sin \theta$  est nul à chaque fois que  $u$  s'annule, tandis que  $\cos \theta$  ne s'annule pas aux points extrêmes. Utilisant (G.6), on obtient

$$\lambda_+ - p^2 = X \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_- - p^2 = -X \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{Km}} X \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (\text{G.7})$$

ce qui permet de récrire  $\mathbf{t}_{\pm}$  comme

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_+ &= \frac{1}{\xi_+} \left[ \mathbf{p} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{r} \sqrt{Km} \sin \frac{\theta}{2} \right], \quad \mathbf{t}_- = \frac{1}{\xi_-} \left[ \mathbf{p} \sin \frac{\theta}{2} - \mathbf{r} \sqrt{Km} \cos \frac{\theta}{2} \right], \quad \text{où} \\ \xi_+ &= N_+ \sqrt{Km} / \left( X \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \xi_- = N_- \sqrt{Km} / \left( X \cos \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (\text{G.8})$$

Des expressions de  $N_{\pm}$  données dans (G.3), on déduit  $\xi_{\pm}^2 = \lambda_{\pm}$ . Finalement, à un signe près, les vecteurs propres peuvent être redéfinis comme

$$\mathbf{t}_+ = \frac{1}{\sqrt{\lambda_+}} \left[ \mathbf{p} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{r} \sqrt{Km} \sin \frac{\theta}{2} \right], \quad \mathbf{t}_- = \frac{1}{\sqrt{\lambda_-}} \left[ \mathbf{p} \sin \frac{\theta}{2} - \mathbf{r} \sqrt{Km} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{G.9})$$

c'est-à-dire, sous une forme plus maniable et élégante que celle de (G.3).

Comme on sait, dans le problème de Kepler, l'équation polaire de la trajectoire peut être obtenue par une simple projection du rayon vecteur  $\mathbf{r}$  sur le vecteur LRL. Dans le cas présent, projeter  $\mathbf{r}$  sur  $\mathbf{t}_-$  permet d'obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_- \cdot \mathbf{r})^2 = y^2 &= \frac{1}{N_-^2} [u^2 + r^2(\lambda_- - p^2)]^2 = \frac{\lambda_-^2(p^2 - \lambda_-)^2}{K^2 m^2 N_-^2} \\ &= \frac{\lambda_-}{(\lambda_+ - \lambda_-)} \left[ \frac{\lambda_+}{Km} - (x^2 + y^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

d'où

$$1 = Km \left[ \frac{x^2}{\lambda_+} + \frac{y^2}{\lambda_-} \right] = \frac{x^2}{r_M^2} + \frac{y^2}{r_m^2} \quad (\text{G.11})$$

# H Symétries d'une équation différentielle <sup>77</sup>

## H.1 Définitions

Une équation différentielle d'ordre  $n$  portant sur une fonction  $y$  d'une variable  $x$  est une relation entre cette fonction et ses  $n$  premières dérivées  $y', \dots, y^{(n)}$ , que l'on écrit sous la forme générale

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{H.1})$$

Bien entendu, nous admettons ici que toutes ces grandeurs sont non singulières.

Sous l'effet d'une transformation impliquant les  $n + 2$  grandeurs  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ , et telle que

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \tilde{x} = \tilde{x}(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \epsilon) \\ y &\rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \epsilon) \\ y' &\rightarrow \tilde{y}' = \tilde{y}'(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \epsilon) \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &\rightarrow \tilde{y}^{(n)} = \tilde{y}^{(n)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

l'équation (H.1) devient

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(n)}, \epsilon) = 0$$

Nous envisageons ici une transformation continue, caractérisée par un paramètre continu  $\epsilon$ . Ladite transformation constitue une symétrie de l'équation différentielle, appelée aussi *symétrie de Lie*, si celle-ci garde la même forme après transformation, c'est-à-dire, si  $\tilde{F} = F$ .

Pour assurer sa cohérence, certaines contraintes s'imposent à la transformation (H.2). Tout d'abord, elle doit respecter les conditions

$$\tilde{y}^{(k)} = \frac{d\tilde{y}^{(k-1)}}{d\tilde{x}}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad (\text{H.3})$$

qui impliquent que dans (H.2) les transformations des dérivées ne sont pas indépendantes. Envisageons une transformation infinitésimale  $|\epsilon| \ll 1$ . Au premier ordre en  $\epsilon$ , nous écrirons

$$\tilde{x} = x + \epsilon \xi, \quad \tilde{y}^{(k)} = y^{(k)} + \epsilon \eta^{(k)} \quad (0 \leq k \leq n) \quad (\text{H.4})$$

---

77. H. Stephani, loc. cit.

où  $\xi$  et  $\eta^{(k)}$  sont a priori fonctions des  $n + 2$  grandeurs  $x, y, \dots, y^{(n)}$ . On doit avoir

$$\tilde{y}^{(k)} = \frac{d\tilde{y}^{(k-1)}}{d\tilde{x}} = \frac{dy^{(k-1)} + \epsilon d\eta^{(k-1)}}{dx + \epsilon d\xi} \simeq y^{(k)} + \epsilon \left[ \frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx} \right]$$

et par conséquent la contrainte

$$\eta^{(k)} = \frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{H.5})$$

Un autre problème est que l'opération de dérivation des expressions dans (H.3) comme dans (H.5) fait apparaître la dérivée  $y^{(n+1)}$  qui devrait en principe en être absente. Comme

$$\frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx} = y^{(n+1)} \left[ \frac{\partial\eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n)}} - y^{(k)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}} \right] + \text{termes sans } y^{(n+1)}$$

on est conduit à imposer les conditions

$$\frac{\partial\eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n)}} - y^{(k)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{H.6})$$

pour que  $\eta^{(k)}$  ne dépende pas de ladite dérivée. Ces nouvelles conditions ont pour conséquence ce qui suit. D'après (H.5), on a

$$\eta^{(n-1)} = \frac{d}{dx} [\eta^{(n-2)} - y^{(n-1)} \xi] + y^{(n)} \xi$$

d'où

$$\frac{\partial\eta^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} [\eta^{(n-2)} - y^{(n-1)} \xi] + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial\eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n)}} - y^{(n-1)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}} \right] + \xi + y^{(n)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}}$$

soit

$$\frac{\partial\eta^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} - y^{(n)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial\eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n)}} - y^{(n-1)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n)}} \right] = \frac{\partial\eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(n-1)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n-1)}}$$

D'après (H.6), le membre de gauche de cette égalité est nul, et l'on a donc

$$\frac{\partial\eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} = y^{(n-1)} \frac{\partial\xi}{\partial y^{(n-1)}} \quad (\text{H.7})$$

Or, encore d'après (H.6),

$$\frac{\partial \eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n)}} = y^{(n-1)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n)}}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n)}} = y^{(n-1)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n)}} + \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n)}}$$

tandis que d'après (H.7),

$$\frac{\partial^2 \eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n-1)}} = y^{(n-1)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n-1)}}$$

Faisant l'identification  $\frac{\partial^2}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial^2}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n)}}$ , la comparaison des deux dernières égalités donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial y^{(n)}} = 0, \quad \text{puis} \quad \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{H.8})$$

Ainsi,  $\xi$  et les  $\eta^{(k)}$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  ne dépendent pas de  $y^{(n)}$ . Comme

$$\frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx} = y^{(n)} \left[ \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(k)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} \right] + \text{termes sans } y^{(n)}$$

on est donc aussi conduit à imposer la contrainte

$$\frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(k)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (\text{H.9})$$

Allons plus loin et écrivons

$$\eta^{(n-2)} = \frac{d}{dx} [\eta^{(n-3)} - y^{(n-2)} \xi] + y^{(n-1)} \xi$$

et

$$\frac{\partial \eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(n-2)}} [\eta^{(n-3)} - y^{(n-2)} \xi] + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \eta^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(n-2)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} \right] + \xi + y^{(n-1)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}}$$

soit

$$\frac{\partial \eta^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(n-1)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \eta^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} - y^{(n-2)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} \right] = \frac{\partial \eta^{(n-3)}}{\partial y^{(n-2)}} - y^{(n-2)} \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-2)}} = 0$$

Utilisant (H.9) pour  $k = n-2$ , il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \eta^{(n-3)}}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} &= y^{(n-2)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 \eta^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-2)}} \\
&= y^{(n-2)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-2)}}, \quad \text{d'où} \\
\frac{\partial \xi}{\partial y^{(n-1)}} &= 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1
\end{aligned} \tag{H.10}$$

On obtient ainsi que  $\xi$  et les  $\eta^{(k)}$  pour  $0 \leq k \leq n-2$  ne doivent pas dépendre de  $y^{(n-1)}$ . En poursuivant, on aboutit au résultat que les paramètres de la transformation  $\xi$  et  $\eta$  relatifs à  $x$  et  $y$  respectivement ne doivent dépendre que de  $x, y$  et  $y'$ , les paramètres  $\eta^{(k)}$  pour  $1 \leq k \leq n$  s'en déduisant au moyen de l'opération définie en (H.5). On notera que des déductions précédentes on tire aussi la relation

$$\frac{\partial \eta}{\partial y'} = y' \frac{\partial \xi}{\partial y'} \tag{H.11}$$

assurant que  $\eta^{(1)}$  est fonction de  $x, y, y'$  uniquement.

Si la transformation envisagée est bien une symétrie de l'équation différentielle, son action consiste à transformer une solution  $y(x)$  en une solution  $\tilde{y}(\tilde{x})$  de la même équation. Il s'agit donc d'une transformation dans l'espace des solutions de l'équation différentielle, qui agit sur les trois variables  $x, y, y'$  et qui, si  $\xi$  et  $\eta$  dépendent effectivement de  $y'$ , possède la particularité que si deux courbes  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  ont un point commun où elles ont la même tangente (point de contact), cette propriété est conservée pour leurs transformées  $\tilde{y}_1(\tilde{x})$  et  $\tilde{y}_2(\tilde{x})$ . Pour cette raison une telle transformation est dite "de contact". La transformation sera caractérisée par son générateur infinitésimal

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial y'} \tag{H.12}$$

dont l'extension jusque la nème dérivée est

$$X^{(n)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{H.13}$$

les  $\eta^{(k)}$  pour  $1 \leq k \leq n$  étant calculés selon la récurrence donnée en (H.5). La transformation est dite *ponctuelle* si  $\xi$  et  $\eta$  ne dépendent pas de  $y'$ . Dans ce cas on considère plutôt comme générateur de la transformation une expression ne comportant que les deux premiers termes de (H.12) :

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{H.14}$$

La symétrie de l'équation différentielle s'exprime analytiquement à l'aide du générateur  $X^{(n)}$ . En effet, la condition  $F(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{y}^{(n)}, \epsilon) = F(x, y, \dots, y^{(n)})$  devant être satisfaite quel que soit  $\epsilon$ , en donnant à ce paramètre une valeur infinitésimale, on obtient

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{y}^{(n)}, \epsilon) = F(x, y, \dots, y^{(n)}) + \epsilon [X^{(n)}F](x, y, \dots, y^{(n)}), \quad \text{d'où}$$

$$X^{(n)}F = 0 \tag{H.15}$$

Nous admettrons que (H.15) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle admette un groupe de symétrie de générateur  $X$ , sous réserve que les dérivées partielles de  $F$  ne soient pas toutes nulles pour  $F = 0$ .

## H.2 Equivalence avec une équation aux dérivées partielles du premier ordre

Ecrivons  $F$  sous la forme

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - \omega(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{H.16}$$

et associons-lui l'équation aux dérivées partielles

$$A(f) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + \omega \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \tag{H.17}$$

qui n'est autre que l'équation des intégrales premières de l'équation différentielle, à la condition d'y avoir remplacé  $y^{(n)}$  par  $\omega$ . On sait qu'une solution  $y$  de (H.16) dépend de  $n$  constantes d'intégration indépendantes  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) :

$$y = S(x, C_1, \dots, C_n) \tag{H.18}$$

lesquelles constantes peuvent, au moins en principe, être exprimées en fonction de  $x, y, \dots, y^{(n-1)}$  au moyen de la formule précédente et des  $n$  formules

$$y^{(k)} = \frac{d^k S}{dx^k}(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{et } y^{(n)} = \omega$$

Elles constituent autant d'intégrales premières de l'équation (H.16), vérifiant donc l'équation (H.17). Inversement, ladite équation (H.17) possède  $n$  solutions indépendantes  $C_k$ , à partir desquelles, en formant le système de  $n$  équations

$$C_k = C_k(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad (1 \leq k \leq n),$$

on peut exprimer  $y$  et ses  $n - 1$  premières dérivées en fonction de  $x$  et des  $n$  constantes  $C_k$ . Ceci montre l'équivalence entre les deux équations (H.16) et (H.17).

L'équation différentielle étant écrite sous la forme (H.16), la condition de symétrie (H.15) s'exprime ici comme

$$\eta^{(n)} = X^{(n-1)}(\omega), \quad \text{avec} \quad (\text{H.19})$$

$$X^{(n-1)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \eta^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$$

Eu égard à l'équivalence entre (H.16) et (H.17), cherchons à quelle condition une symétrie de (H.16) est aussi une symétrie de (H.17). Nous savons qu'une symétrie d'une équation donnée, définie sur l'espace des solutions de cette équation, revient à transformer une solution en une autre. Aussi, si  $\phi(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  est une solution de (H.17),  $X^{(n-1)}(\phi)$  doit en être une autre. Ecrivons alors  $A\{X^{(n-1)}(\phi)\} = 0$ , et comme  $X^{(n-1)}\{A(\phi)\} = 0$ , il vient

$$[X^{(n-1)}, A](\phi) = 0 \quad (\text{H.20})$$

Cette dernière équation (H.20) doit être vérifiée pour toute solution de (H.17). Cela signifie que les deux équations ont le même ensemble de solutions et que le commutateur  $[X^{(n-1)}, A]$  doit s'identifier à  $\lambda A$  où  $\lambda$  est généralement une fonction numérique des  $n$  variables  $x, y, \dots, y^{(n-1)}$  :

$$[X^{(n-1)}, A] = \lambda A \quad (\text{H.21})$$

Utilisant la formule générale

$$[B, C] = \sum_{k, \ell=1}^{n-1} \left[ b_k \frac{\partial c_\ell}{\partial z_k} - c_k \frac{\partial b_\ell}{\partial z_k} \right] \frac{\partial}{\partial z_\ell}, \quad \text{où} \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad C = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

on obtient

$$[X^{(n-1)}, A] = -A(\xi) \frac{\partial}{\partial x} + [X^{(n-1)}(y') - A(\eta)] \frac{\partial}{\partial y} + \dots$$

$$+ [X^{(n-1)}(\omega) - A(\eta^{(n-1)})] \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \quad (\text{H.22})$$

et, tenant compte de  $X^{(n-1)}(y^{(k)}) = \eta^{(k)}$  pour  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $A \equiv \frac{d}{dx}$ ,  $\eta^{(k)} = \frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx}$  pour  $1 \leq k \leq n - 1$ , il vient



$$[X^{(n-1)}, A] = -\frac{d\xi}{dx} \frac{\partial}{\partial x} + \left[ \eta^{(1)} - \frac{d\eta}{dx} \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left[ \eta^{(2)} - \frac{d\eta^{(1)}}{dx} \right] \frac{\partial}{\partial y'} + \dots$$

$$\left[ X^{(n-1)}(\omega) - \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} \right] \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{d\xi}{dx} A + [X^{(n-1)}(\omega) - \eta^{(n)}] \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$$

Comparant cette expression à (H.21), on obtient les deux conditions

$$\lambda = -\frac{d\xi}{dx}, \quad \text{et} \quad X^{(n-1)}(\omega) = \eta^{(n)} \quad (\text{H.23})$$

la seconde étant strictement la même que celle de (H.19)<sup>78</sup>.

### H.3 Application aux équations différentielles du second ordre

Le but ici est d'appliquer le formalisme développé précédemment à des équations différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{q}_a = \omega_a(q), \quad 1 \leq a \leq N \quad (\text{H.24})$$

décrivant notamment l'évolution de systèmes mécaniques conservatifs à  $N$  degrés de liberté<sup>79</sup>. Envisageons tout d'abord une transformation ponctuelle ayant pour générateur d'ordre 1

$$X^{(1)} = \xi(t, q) \frac{\partial}{\partial t} + \eta_a(t, q) \frac{\partial}{\partial q_a} + \eta_a^{(1)}(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}, \quad \text{avec}$$

$$\eta_a^{(1)} = \frac{d\eta_a}{dt} - \dot{q}_a \frac{d\xi}{dt}$$

où, pour simplifier l'écriture, le signe somme sur les indices répétés a été omis. La condition de symétrie s'écrit ici

$$X^{(1)}(\omega_a) = \eta_a^{(2)} = \frac{d\eta_a^{(1)}}{dt} - \omega_a \frac{d\xi}{dt} \quad (\text{H.25})$$

On a d'une part

---

78. Toujours sous la condition sous-jacente d'identifier  $y^{(n)}$  à  $\omega$ .

79. La notation  $q$  représente l'ensemble des coordonnées  $q_a$  définissant l'état du système considéré.

$$X^{(1)}(\omega_a) = \eta_b \frac{\partial \omega_a}{\partial q_b} \quad (\text{H.26})$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \eta_a^{(2)} = & \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial t^2} - 2\omega_a \frac{\partial \xi}{\partial t} + \omega_b \frac{\partial \eta_a}{\partial q_b} - \dot{q}_a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \dot{q}_a \omega_b \frac{\partial \xi}{\partial q_b} - 2\omega_a \dot{q}_b \frac{\partial \xi}{\partial q_b} + 2\dot{q}_b \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial t \partial q_b} + \\ & \dot{q}_b \dot{q}_c \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial q_b \partial q_c} - 2\dot{q}_a \dot{q}_b \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q_b} - \dot{q}_a \dot{q}_b \dot{q}_c \frac{\partial^2 \xi}{\partial q_b \partial q_c} \end{aligned} \quad (\text{H.27})$$

Dans l'égalité  $X^{(1)}(\omega_a) - \eta_a^{(2)} = 0$ , les variables  $t, q, \dot{q}$  doivent être considérées comme indépendantes. Or, son membre de gauche se présente comme un polynôme suivant les vitesses  $\dot{q}$  dont les coefficients sont donc nécessairement nuls. On en déduit (terme d'ordre 3)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial q_b \partial q_c} = 0, \quad \text{d'où} \quad \xi = C^b(t) q_b + B(t) \quad (\text{H.28})$$

Puis (terme d'ordre 2)<sup>80</sup>

$$\frac{\partial^2 \eta_a}{\partial q_b \partial q_c} = \delta_{ab} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q_c} + \delta_{ac} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q_b}, \quad \text{d'où} \quad \eta_a = q_a q_b \dot{C}^b(t) + D_a^b(t) q_b + E_a(t) \quad (\text{H.29})$$

L'annulation du terme d'ordre 1 conduit à la relation

$$\delta_{ac} \left[ q_b \ddot{C}^b - \ddot{B} \right] - \delta_{ac} \omega_b C^b - 2\omega_a C^c + 2 \left[ \dot{D}_a^c + q_a \ddot{C}^c \right] = 0 \quad (\text{H.30})$$

Envisageons le cas du mouvement d'un point matériel dans un champ de forces centrales pour lequel  $\omega_a = q_a f(r)$ <sup>81</sup> où  $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ . L'exploitation de l'égalité précédente nécessite de préciser la forme de la loi de forces. Supposons tout d'abord  $f(r) = \text{constante} = -K < 0$  : c'est le cas du potentiel harmonique. Il vient alors

$$\delta_{ac} q_b \left[ \ddot{C}^b + KC^b \right] + 2q_a \left[ \ddot{C}^c + KC^c \right] + 2\dot{D}_a^c - \delta_{ac} \ddot{B} = 0$$

ce qui ne peut être réalisée pour toutes valeurs des coordonnées que si et seulement si

---

80. Comme  $\frac{\partial^2 \eta_a}{\partial q_b \partial q_c} = \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial q_c \partial q_b}$ , ce tenseur ne peut qu'être symétrique.

81.  $f(r) = -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$ .

$$\dot{D}_a^c = \frac{1}{2}\delta_{ac}\ddot{B} \quad \text{et} \quad C^c(t) = c^c \cos(\sqrt{K}t + \phi^c) \quad (\text{H.31})$$

où  $c^c$  et  $\phi^c$  ( $1 \leq c \leq 3$ ) sont des constantes. Supposons ensuite que  $f(r)$  ne soit pas constant. Dans ce cas, (H.30) conduit à

$$\dot{D}_a^c = \frac{1}{2}\delta_{ac}\ddot{B} \quad \text{et} \quad C^c(t) = 0 \quad (\text{H.32})$$

Enfin, l'annulation du terme d'ordre 0 donne

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ q_b q_c \dot{C}^c + D_b^c p_c + E_b \right] \left[ \delta_{ab} f(r) + f'(r) \frac{q_a q_b}{r} \right] - \left[ q_a q_c \ddot{C}^c + q_c \ddot{D}_a^c + \ddot{E}_a \right] \\ &\quad + 2f(r) q_a \left[ q_b \dot{C}^b + \dot{B} \right] - f(r) \left[ q_b D_a^b + 2q_a q_c \dot{C}^c \right] \\ &= q_a q_c \left[ \ddot{C}^c - f(r) \dot{C}^c \right] + \ddot{E}_a - f(r) E_a - f'(r) \frac{q_a q_b}{r} E^b - r f'(r) q_a q_c \dot{C}^c \\ &\quad + \ddot{D}_a^c q_c - f'(r) \frac{q_a}{r} q_c q^b D_b^c - 2f(r) q_a \dot{B}, \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

- dans le cas harmonique :

$$\begin{aligned} \ddot{E}_a + K E_a &= 0, \quad \ddot{D}_a^c = -2K \delta_{ac} \dot{B} = \frac{1}{2} \delta_{ac} \ddot{B}, \quad \text{soit} \\ E_a &= e_a \cos(\omega t + \psi_a), \quad B = B_1 \cos(2\omega t + \theta_0) + B_0, \\ D_a^c &= \delta_{ac} [-\omega B_1 \sin(2\omega t + \theta_0) + D_0], \quad \text{où } \omega = \sqrt{K} \end{aligned} \quad (\text{H.33})$$

- dans le cas  $f'(r) \neq 0$  :

$$E_a = 0, \quad \ddot{D}_a^c = 0, \quad \text{et} \quad f'(r) \frac{q_a}{r} q_c q^b D_b^c = -2f(r) q_a \dot{B}$$

La toute dernière égalité doit être traitée avec précaution. En effet, dans le terme  $q_c q^b D_b^c$  la partie antisymétrique du tenseur  $D_b^c$  y est certes inopérante, mais elle ne doit pas être oubliée pour autant. Ledit tenseur, étant un objet de  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  uniquement fonction du temps, sa partie antisymétrique se construit à l'aide du tenseur de Levi-Civita pour 3 dimensions,  $\epsilon_{bsc}$ , seul tenseur antisymétrique constant. Pour la même raison, la partie symétrique de  $D_b^c$  ne peut se contruire qu'à partir du tenseur symétrique constant  $\delta_{bc}$ . On doit donc avoir

$$D_b^c = D(t) \delta_{bc} + d^s(t) \epsilon_{bsc}$$

où  $D(t)$  et les trois grandeurs  $d_s(t)$  sont uniquement fonctions du temps. Ainsi, ladite égalité devient

$$rf'(r)D(t) = -2f(r)\dot{B} \quad (\text{H.34})$$

De plus, comme  $\dot{D}_a^c = \frac{1}{2}\delta_{ac}\ddot{B}$  ne fait pas apparaître  $\epsilon_{sac}$ , les  $d_s$  doivent être des constantes et l'on obtient

$$\dot{D} = \frac{1}{2}\ddot{B} \quad (\text{H.35})$$

Supposons  $\ddot{B} \neq 0$ ; dans ce cas, après dérivation de (H.34) par rapport au temps, on est conduit à la relation  $rf'(r) = -4f(r)$ , et, finalement, au potentiel  $V(r) = -\frac{K}{r^2} + K'$ , lequel ne donne pas d'extremum pour le potentiel effectif et que nous avons écarté pour cette raison.

Envisageant une loi de forces centrales quelconque, (H.36) n'est compatible avec (H.34) que si et seulement si  $\dot{D} = 0$ , soit  $B(t) = B_1t + B_0$ . Un résultat annexe remarquable est que (H.34) n'est réalisable que si et seulement si la loi de forces est une loi de puissance :  $f(r) \propto \frac{1}{r^\nu}$  (avec  $\nu \neq 2$ ). En effet, on voit que  $D(t)$  est nécessairement égal à une constante  $D_0$  vérifiant

$$\frac{rf'(r)}{f(r)}D_0 = -2B_1 = -\nu D_0, \quad \text{donc} \quad D_0 = \frac{2}{\nu}B_1 \quad (\text{H.36})$$

Examinons maintenant les symétries qui s'en déduisent, dont les générateurs sont du type (H.14).

### 1) Pour le cas harmonique

On trouve

$$\begin{aligned} \xi &= B_1 \cos(2\omega t + \theta_0) + B_0 + q_c c^c \cos(\omega t + \phi^c) \\ \eta_a &= q_a [-\omega B_1 \sin(2\omega t + \theta_0) + D_0 - \omega q_c c^c \sin(\omega t + \phi^c)] \\ &\quad + e_a \cos(\omega t + \psi_a) \end{aligned} \quad (\text{H.37})$$

On sait que la solution générale de l'équation différentielle  $\ddot{q}_a = -\omega^2 q_a$  est de la forme  $q_a = \alpha_a \cos \omega t + \beta_a \sin \omega t$  où  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  sont des constantes. Toute translation du temps transforme cette forme en une forme similaire avec des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  différents, c'est-à-dire, en une forme vérifiant la même équation différentielle. La translation temporelle, décrite ici par le terme  $B_0$  de  $\xi$  est donc bien une symétrie

de l'équation différentielle, provenant du fait que le Lagrangien dont on la déduit ne dépend pas explicitement du temps.

Deux autres symétries résultent du fait que l'équation différentielle est ici *linéaire*. Une multiplication d'une solution par un facteur constant donne une autre solution. Cette opération est générée par le terme  $q_a D_0$  de  $\eta_a$ . De même, une combinaison linéaire de solutions avec des coefficients constants est encore une solution. Cette opération est générée par le terme  $e_a \cos(\omega t + \psi_a)$  de  $\eta_a$ . Ce terme est lui même une solution, ce qui montre, très simplement dans le cas présent, que la résolution de l'équation et la recherche de symétries sont étroitement liées.

Il reste les termes associés aux coefficients  $B_1$  et  $c_a$ , qui génèrent des transformations mêlant le temps et les coordonnées et dont l'interprétation n'est pas évidente. Le lecteur pourra vérifier que dans chacun des cas on a  $\eta_a^{(2)} = -\omega^2 \eta_a$ , ce qui assure que la coordonnée transformée  $\tilde{q}_a(\tilde{t})$  vérifie l'équation différentielle où  $\tilde{t}$  prend la place de  $t$ .

2) Pour le cas  $f(r) \propto \frac{1}{r^\nu}$

$$\begin{aligned}\xi &= B_1 t + B_0 \\ \eta_a &= \frac{2}{\nu} B_1 q_a + \epsilon_{acb} d^c q^b\end{aligned}\tag{H.38}$$

Comme précédemment, le terme  $B_0$  de  $\xi$  rend compte de l'invariance par translation temporelle, provenant du fait que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

Le terme de  $\eta_a$  avec les coefficients  $d^c$  s'interprète aisément. Il génère des rotations spatiales autour du centre de forces. Le système est bien invariant par de telles rotations, le potentiel ayant la symétrie sphérique.

Il reste le terme associé au coefficient  $B_1$ . Le générateur correspondant s'écrit

$$X = B_1 \left[ t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\nu} q^a \frac{\partial}{\partial q_a} \right] = B_1 \left[ t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\nu} r \frac{\partial}{\partial r} \right], \quad \text{où } r = \sqrt{q_a q^a},\tag{H.39}$$

donnant lieu à une transformation finie telle que

$$\begin{aligned}t \rightarrow \tilde{t} &= a t, \quad r \rightarrow \tilde{r} = a^{2/\nu} r \quad \text{avec } a > 0, \quad \text{d'où} \\ \frac{\tilde{t}^2}{\tilde{r}^\nu} &= \frac{t^2}{r^\nu}\end{aligned}\tag{H.40}$$

Dans le cas du potentiel newtonien, on a  $\nu = 3$  et l'on retrouve la relation (B.14).

La symétrie menant à (H.40) s'explique comme suit. Imaginons une transformation par laquelle les coordonnées sont multipliées par une constante commune  $b$  tandis que le temps est multiplié par une constante  $a$ . Les vitesses sont alors multipliées par  $b/a$  et l'énergie cinétique par  $b^2/a^2$ . Supposons que l'énergie potentielle soit une fonction homogène de degré  $\gamma$  des coordonnées. Elle est alors multipliée par le facteur  $b^\gamma$ . Si l'on a

$$\frac{b^2}{a^2} = b^\gamma, \text{ soit } b = a^{2/\nu} \text{ où } \nu = 2 - \gamma \quad (\text{H.41})$$

alors le Lagrangien est tout entier multiplié par le facteur constant  $b^\gamma$  et en conséquence les équations d'Euler-Lagrange restent inchangées. C'est ce qu'on appelle une *similitude mécanique*<sup>82</sup>. Comme il a été dit, ce principe ne s'applique que si le potentiel en action est une fonction homogène de degré  $\gamma$  des coordonnées qui satisfait donc l'équation des fonctions homogènes

$$\sum_1^3 x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = \gamma V$$

Or, si  $V$  est à symétrie sphérique, le premier membre de cette équation est égal à  $r \frac{dV}{dr}$ . L'intégration de l'équation montre alors que le potentiel ne peut être qu'une fonction puissance de  $r$  de degré  $\gamma$  supposé non nul<sup>83</sup>.

La similitude mécanique est ainsi une symétrie de Lie ponctuelle possible du Lagrangien, laquelle, pour les forces centrales, n'est réalisée que si le potentiel est en puissance de  $r$ . La transformation associée permet de passer d'une trajectoire à une autre qui lui est géométriquement semblable et qui ne lui est différente que par les dimensions linéaires et par le fait que le temps selon lequel elle est parcourue vérifie (H.40).

## H.4 Symétries de Noether et intégrales premières

On envisage ici les systèmes dont l'évolution est décrite au moyen d'un Lagrangien  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ , fonction de  $N$  coordonnées généralisées  $q_a$  et de leurs vitesses  $\dot{q}_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ), et éventuellement aussi fonction du temps  $t$ . Une symétrie de Noether est une transformation ponctuelle  $(q_a, t) \rightarrow (\tilde{q}_a, \tilde{t})$ , appelée aussi *symétrie de Lie ponctuelle*, qui laisse invariante la forme des équations d'Euler-Lagrange

<sup>82</sup>. L. Landau, E. Lifchitz, "Mécanique", 2<sup>nd</sup> éd., Editions Mir, 1966, §10.

<sup>83</sup>. Il n'y a donc pas lieu d'ajouter une constante d'intégration additionnelle qui, elle, est de degré zéro.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{q}}_b} \right] = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{q}_b}$$

et l'on sait que cette invariance ne peut être réalisé que si le Lagrangien transformé  $\tilde{\mathcal{L}}$  ne diffère de  $\mathcal{L}$  que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $F(q, t)$  :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t}) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}(q, t) \quad (\text{H.42})$$

On notera que la transformation envisagée diffère d'une transformation canonique usuelle par le fait qu'elle effectue aussi une transformation du temps. L'action (78) devient ainsi

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + F(q_2, t_2) - F(q_1, t_1) = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (\text{H.43})$$

avec des conditions aux limites compatibles<sup>84</sup>. Pour une transformation infinitésimale  $F(q, t) = \epsilon G(q, t)$  ( $|\epsilon| \ll 1$ ), il vient

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \epsilon \frac{dG}{dt} \right] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \epsilon X(\mathcal{L})(q, \dot{q}, t)] \left[ 1 + \epsilon \frac{d\xi}{dt} \right] dt$$

ce qui conduit à l'identification

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L}A(\xi) = A(G), \quad \text{avec} \quad (\text{H.44})$$

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^a \frac{\partial}{\partial q_a} + \eta^{(1)a} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}, \quad A = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q_a} + \ddot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}$$

où les  $\ddot{q}^a$  doivent être impérativement remplacés par leurs expressions déduites des équations d'Euler-Lagrange et où  $\eta^{(1)a} = \frac{d\eta^a}{dt} - \dot{q}^a \frac{d\xi}{dt}$ ,  $\xi$  et  $\eta^a$  étant ici des fonctions de  $t$  et des  $q^a$  uniquement. A partir de (H.44), il est facile d'établir l'existence d'une intégrale première. On a

$$\begin{aligned} X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \eta^{(1)a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} + \mathcal{L} \frac{d\xi}{dt} \\ &= \xi \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \dot{q}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \ddot{q}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right] + \eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \left[ \frac{d\eta^a}{dt} - \dot{q}^a \frac{d\xi}{dt} \right] + \mathcal{L} \frac{d\xi}{dt} \end{aligned}$$

---

84. C'est-à-dire,  $q(t_1) = q_1$  et  $q(t_2) = q_2 \iff \tilde{q}(\tilde{t}_2) = \tilde{q}_2$  et  $\tilde{q}(\tilde{t}_2) = \tilde{q}_2$ , pour préserver le principe d'Action extrême à limites fixées.

$$= \frac{d}{dt} \left[ \xi \mathcal{L} - \xi \dot{q}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} + \eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right]$$

en tenant compte des équations d'Euler-Lagrange dans la dernière étape. Introduisant les impulsions  $p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}$  et le Hamiltonien  $H = p_a \dot{q}^a - \mathcal{L}$ , l'équation (H.44) montre que la grandeur

$$I = G + \xi H - \eta^a p_a \quad (\text{H.45})$$

a une dérivée totale par rapport au temps nulle et qu'elle constitue donc une intégrale première. Son expression donnée en (H.45) suggère qu'elle s'exprime de façon naturelle en fonction des coordonnées  $q^a$  et de leurs impulsions associées  $p^a$ . Etant donné qu'une symétrie consiste à transformer une solution en une autre, ladite intégrale première doit être invariante par cette même transformation dont elle est issue, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$X(I) = 0 \quad (\text{H.46})$$

Vérifions-le directement. Exprimées en fonction des coordonnées ( $q$ ) et de la date  $t$  à la limite supérieure de l'intégrale d'Action, les différentielles de l'Action  $\mathcal{S}$  et de sa transformée  $\tilde{\mathcal{S}}$  sont

$$d\mathcal{S} = p^a dq_a - H dt, \quad d\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{p}^a d\tilde{q}_a - \tilde{H} d\tilde{t} = d\mathcal{S} + \epsilon dG$$

soit finalement

$$dG = X(p^a) dq_a + p^a d\eta_a - X(H) dt - H d\xi$$

Or, cette différentielle, qui est un écart infinitésimal, peut aussi bien résulter de la même transformation, c'est-à-dire que

$$dG = \epsilon X(G), \quad dq = \epsilon \eta, \quad d\eta = \epsilon X(\eta), \quad dt = \epsilon \xi, \quad d\xi = \epsilon X(\xi)$$

d'où il résulte que

$$X(G) = \eta^a X(p_a) + p^a X(\eta_a) - \xi X(H) - H X(\xi) = X[p^a \eta_a - \xi H], \quad \text{soit } X(I) = 0$$

En conclusion, on a établi une correspondance entre symétrie de Noether et intégrale première : si  $X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^a \frac{\partial}{\partial q_a} + \eta^{(1)a} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}$  est le générateur d'une symétrie de Noether, alors la grandeur  $I = G + \xi H - \eta^a p_a$  est une intégrale première vérifiant  $X(I) = 0$ .



Le développement précédent permet aussi d'exprimer la différentielle de l'intégrale première :

$$dI = X(p)dq - X(H)dt + \xi dH - \eta dp \quad (\text{H.47})$$

d'où l'on tire notamment

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_b} &= \xi \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_b} - \eta^a \frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}_b} = \left[ \xi \frac{\partial H}{\partial p_a} - \eta^a \right] \frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}_b} \\ &= [\xi \dot{q}_a - \eta_a] \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \end{aligned} \quad (\text{H.48})$$

Si le Lagrangien est celui d'une particule de masse  $m$  plongée dans un champ de forces conservatif, il ne dépend des vitesses que par l'intermédiaire de l'énergie cinétique  $\frac{m}{2} \dot{q}^a \dot{q}_a$  et l'on a alors simplement

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_a} = m [\xi \dot{q}_a - \eta_a] \quad (\text{H.49})$$

# I Keplerisation du problème où $V(r) = -K_1/r + K_2/r^2$

Etablissons tout d'abord des formules qui seront utiles pour déterminer si la transformation  $P \rightarrow P^*$  est canonique lorsque le potentiel est  $V(r) = -K_1/r + K_2/r^2$ . Nous nous appuyerons sur les formules générales obtenues dans l'Appendix C, auquel nous renvoyons le lecteur.

Reconsidérons les vecteurs définis dans l'équation (216),

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r = \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\psi = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{e}_r = -\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y, \quad \boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}/L$$

Puisque  $e_{ri} = x_i/r$ , on a évidemment  $\{r, e_{ri}\} = 0$ , et (voir l'Appendix C)

$$\{r, e_{\psi i}\} = \epsilon_{ijk} \{r, \ell_j e_{rk}\} = \epsilon_{ijk} \ell_j \{r, e_{rk}\} = 0$$

Alors, avec  $e_{ri}^* = x_i^*/r$ ,  $e_{\chi i}^* = \epsilon_{ijk} \ell_j e_{rk}^*$ , on obtient

$$\begin{aligned} e_{ri}^* &= \cos \chi e_{xi} + \sin \psi e_{yi} = c e_{ri} + s e_{\psi i} \\ e_{\chi i}^* &= -s e_{ri} + c e_{\psi i} \quad \text{où } c = \cos(\chi - \psi), \quad s = \sin(\chi - \psi), \text{ et} \\ \{r, e_{ri}^*\} &= e_{ri} \{r, c\} + e_{\psi i} \{r, s\} \end{aligned}$$

Les crochets de Poisson  $\{r, c\}$  et  $\{r, s\}$  s'expriment comme suit

$$\{r, c\} = -s \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)_{\mathbf{p}} \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} (\chi - \psi) \right]_{\mathbf{r}}, \quad \{r, s\} = c \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)_{\mathbf{p}} \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} (\chi - \psi) \right]_{\mathbf{r}}$$

d'où,

$$\{r, e_{ri}^*\} = e_{\chi i}^* \frac{x_k}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} (\chi - \psi) \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{I.50})$$

A partir des équations polaires  $r(\chi)$  et  $r(\psi)$ , les angles  $\chi$  et  $\psi$  sont obtenus comme des fonctions de  $r$ ,  $E$  and  $L$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} (\chi - \psi) \right]_{\mathbf{r}} &= \left[ \frac{\partial}{\partial E} (\chi - \psi) \right]_{r,L} \frac{\partial E}{\partial p_k} + \left[ \frac{\partial}{\partial L} (\chi - \psi) \right]_{r,E} \frac{\partial L}{\partial p_k}, \text{ avec} \\ \frac{\partial E}{\partial p_k} &= \frac{p_k}{m}, \quad \frac{\partial L}{\partial p_k} = \frac{1}{L} [r^2 p_k - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) x_k] = r e_{\psi k} \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\{r, e_{ri}^*\} = e_{\chi i}^* \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{m r} \left[ \frac{\partial}{\partial E} (\chi - \psi) \right]_{r,L} \quad (\text{I.51})$$

Concentrons-nous ensuite sur les crochets de Poisson  $\{x_i^*, x_j^*\}$ . On a

$$\{x_i^*, x_j^*\} = \{r e_{ri}^*, r e_{rj}^*\} = r \{e_{ri}^*, r e_{rj}^*\} + e_{ri}^* \{r, r e_{rj}^*\} = r e_{ri}^* \{r, e_{rj}^*\} - r e_{rj}^* \{r, e_{ri}^*\}$$

Des équations (I.51) et (C.3) on tire ainsi

$$\{x_i^*, x_j^*\} = \epsilon_{ijk} \ell_k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{m} \left[ \frac{\partial}{\partial E} (\chi - \psi) \right]_{r,L} \quad (\text{I.52})$$

Généralement,  $\chi$  et  $\psi$  dépendent effectivement de  $E$  et le second membre de (I.52) n'est pas nul et les crochets de Poisson  $\{x_i^*, x_j^*\}$  ne sont donc pas nuls. Ce seul fait est suffisant pour affirmer que la transformation  $P \rightarrow P^*$  n'est pas canonique.

Considérons à nouveau l'exemple donné dans la section 12.3, où le potentiel est  $V(r) = -K_1/r + K_2/r^2$  avec  $K_1$  et  $K_2$  positifs. Dans ce cas, on a

$$\chi = \beta \psi, \quad t^* = t, \quad E^* = E, \quad L^* = \beta L, \quad \text{avec } \beta = \sqrt{1 + \frac{2mK_2}{L^2}}$$

Puisque le temps est inchangé, nous pourrions être en présence d'une transformation canonique standard. Mais l'équation (195) donne

$$\begin{aligned} \cos \chi &= (ur_0^* - 1)/e^*, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = m r \dot{r} = -r L^* \frac{du}{d\chi} = r L^* \frac{e^*}{r_0^*} \sin \chi, \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \left[ \frac{\partial}{\partial E} (\chi - \psi) \right]_{r,L} &= \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) r L^* \frac{e^*}{r_0^*} \sin \chi \left[ \frac{\partial \chi}{\partial E} \right]_{r,L} = - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) r L^* \frac{e^*}{r_0^*} \left[ \frac{\partial \cos \chi}{\partial E} \right]_{r,L} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{r L^*}{e^* r_0^*} (ur_0^* - 1) \left[ \frac{\partial e^*}{\partial E} \right]_L = (\beta - 1) \frac{L}{K_1 e^*} r \cos \chi \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, même dans ce cas simple, la keplerisation n'est pas une transformation canonique.