$\boxed{\textbf{Formule de Stirling}}$

La formule de Stirling donne une approximation de $n!$ lorsque $n \gg 1$, très utilisée en statistique :

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n}} \qquad (1)$$

Il existe plusieurs démonstrations de cette formule [1]. Nous en donnons ci-après une autre, ne nécessitant que peu de ressources mathématiques [2].

Soit tout d'abord l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \ \exp(-\alpha\ t)\ dt$$

définie pour $\alpha > 0$ et dont la valeur se calcule aisément :

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

Par dérivations successives par rapport à α, on obtient

$$\frac{d^n I}{d\alpha^n} = \frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\ \exp(-\alpha\ t)\ \right] dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n \exp(-\alpha t)\ dt$$

d'où l'on tire la relation

$$\int_0^\infty \ t^n \exp(-\alpha t)\ dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Dans cette dernière formule, nous prendrons $\alpha = n$. Compte-tenu de ce que

$$t^n \exp(-nt) \ = \ \exp n[\ln t - t]$$

on aboutit à la relation suivante qui servira de point de départ à notre démonstration :

$$\frac{n!}{n^{n+1} e^{-n}} \ = \ \int_0^\infty \ \exp[-n\phi(t)]\ dt = J$$

où

$$\phi(t) \ = \ t - 1 - \ln t$$

[1] Voir par exemple le "Cours de Mathématiques" de J. Bass, tome 1, Masson ed., 1968, §29-8.

[2] Nous laissons au lecteur pointilleux le soin de vérifier que toutes les opérations ici présentées peuvent être justifiées selon les canons des Mathématiques.

Il est facile de montrer que la fonction $\phi(t)$ est positive pour tout $t > 0$. En effet, d'une part, $\phi(1) = 0$, et, d'autre part, sa dérivée

$$\phi'(t) \; = \; 1 - \frac{1}{t}$$

est négative pour $0 < t \leq 1$, positive pour $t \geq 1$, et s'annule uniquement pour $t = 1$. Cette valeur de t correspond au seul minimum de $\phi(t)$. On en conclut que $\phi(t)$ est bien positif pour tout $t > 0$, et que, par suite, l'intégrale J plus haut doit tendre vers zéro lorsque n devient infiniment grand.

Dans une attitude pragmatique, on observe alors que puisque

$$\lim_{n\to\infty} \exp[-n\phi(t)] = 0 \quad \text{pour } \phi(t) > 0 \quad \text{et} \quad \exp[-n\phi(1)] = 1$$

les seules valeurs efficientes de t dans l'intégrale lorsque $n >> 1$ sont certainement celles qui sont voisines de 1. Ceci incite à effectuer un développement limité de $\phi(t)$ au voisinage de $t = 1$. On trouve

$$\phi(t) \approx \frac{1}{2}(t-1)^2$$

On obtient ainsi

$$J \;\approx \int_0^\infty \; \exp[-n(t-1)^2/2] \; dt =$$
$$\int_{-1}^\infty \; \exp[-nu^2/2] \; du \; = \; \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^\infty \; \exp(-v^2) \; dv$$

où ont été successivement faits les changements de variable $u = t - 1$ et $v = u\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \; J = \int_{-\infty}^\infty \; \exp(-v^2) \; dv \; = \; Q$$

L'intégrale Q qui apparaît au second membre est parfaitement définie et se calcule aisément comme suit.

On a

$$Q^2 = \int_{-\infty}^\infty \; \exp(-x^2) \; dx \int_{-\infty}^\infty \; \exp(-y^2) \; dy$$

le carré de Q peut être récrit comme l'intégrale double étendue à tout le plan xOy de la fonction

$$q(x, y) = \exp -(x^2 + y^2)$$

En passant alors aux coordonnées polaires $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \cos^{-1}(\frac{x}{r})$, il vient ($dxdy \rightarrow rdrd\theta$)

$$Q^2 = \int_0^{\infty} \exp(-r^2)\ rdr \int_0^{2\pi} d\theta\ =\ \pi \int_0^{\infty} \exp(-w)\ dw\ = \pi\ \text{ soit }\ Q = \sqrt{\pi}\ \ (2)$$

On obtient donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\ J = 1} \tag{3}$$

résultat duquel on déduit l'approximation de Stirling :

$$\frac{n!}{n^{n+1}e^{-n}}\ = \int_0^{\infty} \exp[-n\phi(t)]\ dt = J\ \approx\ \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

Voici maintenant une méthode plus rigoureuse. Introduisons les deux fonctions

$$f(t) = \phi(t) -\ \frac{1}{2}(t-1)^2\ , \qquad \text{et} \qquad g(t) = \phi(t) - \frac{1}{2}\ln^2 t$$

L'utilisation de ces fonctions est motivée par le fait que dans le domaine efficient où t est voisin de 1, les valeurs de $f(t)$ et de $g(t)$ sont seulement du troisième ordre selon l'écart $t-1$ [3]

D'une part, on a $f(1) = 0$ et $g(1) = 0$. D'autre part,

$$f'(t) = -\frac{(t-1)^2}{t}\ , \qquad f''(t) = \frac{1}{t^2} - 1$$

et

$$g'(t) = \frac{\phi(t)}{t}\ , \qquad g''(t) = \frac{\ln t}{t^2}$$

Eu égard aux signes de leurs dérivées respectives, la fonction $f(t)$ est donc décroissante alors que $g(t)$ est croissante. Elles présentent toutes deux un point d'inflexion pour $t = 1$, valeur de t pour laquelle elles s'annulent. On en déduit

$$f(t) \geq 0\ \text{ pour }\ 0 < t \leq 1\ ,\ \text{ et }\ f(t) \leq 0\ \text{ pour }\ t \geq 1$$

tandis que

$$g(t) \leq 0\ \text{ pour }\ 0 < t \leq 1\ ,\ \text{ et }\ g(t) \geq 0\ \text{ pour }\ t \geq 1$$

[3] Nous avons vu précédemment que pour t voisin de 1, on a $\phi(t) \approx \dfrac{1}{2}(t-1)^2$. Mais, puisqu'alors $|\ln t| \ll 1$, on peut tout aussi bien écrire $\phi(t) = \exp \ln t - 1 - \ln t \approx 1 + \ln t + \frac{1}{2}\ln^2 t - 1 - \ln t \approx \frac{1}{2}\ln^2 t$.

soit

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{2}(t-1)^2 \le \phi(t) \le \dfrac{1}{2}\ln^2 t \quad \text{pour} \quad 0 < t \le 1 \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{2}\ln^2 t \le \phi(t) \le \dfrac{1}{2}(t-1)^2 \quad \text{pour} \quad t \ge 1 \end{array} \tag{4}$$

Ces dernières inégalités nous permettent d'effectuer un encadrement de l'intégrale J. En effet, écrivons J comme somme des deux intégrales

$$K = \int_0^1 \exp[-n\phi(t)]\ dt \quad \text{et} \quad L = \int_1^\infty \exp[-n\phi(t)]\ dt$$

Des inégalités précédentes, on déduit les encadrements

$$\int_0^1 \exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt < K < \int_0^1 \exp[-\frac{n}{2}(t-1)^2]\ dt$$

et

$$\int_1^\infty \exp[-\frac{n}{2}(t-1)^2]\ dt < L < \int_1^\infty \exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt$$

Pour $0 < t \le 1$, posons $u = -\ln t$. On a alors

$$\exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt = -\exp[-\frac{n}{2}u^2 - u]\ du$$

d'où

$$\int_0^1 \exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt = \int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2 - u]\ du$$

Puis, pour $t \ge 1$, posons $u = \ln t$. On a alors

$$\exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt = \exp[-\frac{n}{2}u^2 + u]\ du$$

et

$$\int_1^\infty \exp[-\frac{n}{2}\ln^2(t)]\ dt = \int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2 + u]\ du$$

Les encadrements précédents prennent alors la forme

$$\int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2 - u]\ du < K < \int_0^1 \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ du$$

et

$$\int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ du < L < \int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2 + u]\ du$$

Compte-tenu du fait évident que

$$\int_0^1 \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ du < \int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ du$$

il vient finalement

$$\int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ [e^{-u}+1]\ du < J < \int_0^\infty \exp[-\frac{n}{2}u^2]\ [e^{u}+1]\ du$$

Dans chacune des intégrales, faisons le changement de variable $v = \sqrt{\frac{n}{2}}u$. Il vient

$$\int_0^\infty \exp(-v^2)\ [e^{-v\sqrt{\frac{2}{n}}}+1]\ dv < J\ \sqrt{\frac{n}{2}} < \int_0^\infty \exp(-v^2)\ [e^{v\sqrt{\frac{2}{n}}}+1]\ dv$$

Il devient ainsi manifeste que lorsque n tend vers l'infini, on a ($\exp \pm v\sqrt{\frac{2}{n}} \to 1$)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\ J = 2\int_0^\infty \exp(-v^2)\ dv\ =\ \int_{-\infty}^\infty \exp(-v^2)\ dv\ =\ \sqrt{\pi}$$

d'où, à nouveau, le résultat

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\ J = 1$$

On peut facilement évaluer l'erreur relative commise dans l'approximation de Stirling. En effet, pour tout n, posons

$$F(n) = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n}} \tag{5}$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$$

Or

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = e\ (\frac{n}{n+1})^{n+1/2}$$

ou

$$\ln F(n+1) - \ln F(n) = 1 - (n+\tfrac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})$$

Lorsque $n \gg 1$, soit $\frac{1}{n} \ll 1$, le premier membre de cette égalité peut être assimilé à la dérivée $(\frac{d}{dn} \ln F)(n)$ (ici, $\Delta n = 1 \ll n$), en considérant $F(n)$ comme une fonction d'une variable n. Quant au second membre, on montre facilement qu'il est alors équivalent à $-\frac{1}{12n^2}$. D'où l'équation

$$(\frac{d}{dn} \ln F)(n) \approx -\frac{1}{12n^2} \tag{6}$$

dont l'intégration conduit à

$$\ln F \approx \frac{1}{12n} + \text{constante} \tag{7}$$

Mais comme F doit prendre la valeur 1 pour n infini, la constante d'intégration doit être prise égale à zéro. D'où, pour $n \gg 1$, les équivalences

$$F(n) \approx \exp(\frac{1}{12n}) \approx 1 + \frac{1}{12n} \tag{8}$$

et

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-n}\ (1 + \frac{1}{12n})} \tag{9}$$

L'erreur relative commise par l'approximation de Stirling est donc donnée par ce terme $\frac{1}{12n}$.