COURS DE 1ÈRE ANNÉE

Matière et Energie

C. Carimalo

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 La démarche du Physicien

De la plus petite échelle à la plus grande actuellement accessibles, l'Univers apparaît comme constitué de systèmes en interaction.

Le but de la Physique est de nous rendre compréhensible les mécanismes de ces interactions et d'expliquer les phénomènes qui en résultent[1].

Il s'agit plus de tenter d'expliquer *comment* s'organise le contenu de l'Univers et de là *comment* apparaissent les phénomènes, que de donner une réponse au *pourquoi* de l'existence même de l'Univers.

La démarche du Physicien comporte généralement quatre phases.

La première est une phase d'observation du phénomène à l'étude, pouvant être assortie de mesures. Ici, il s'agit plutôt d'un constat du phénomène, pouvant être simplement qualitatif : "quand on lâche un objet, il tombe" ou quantitatif (mesure) : "l'objet met 1 seconde pour atteindre le sol s'il est lâché d'une hauteur de 5 m, et 2 secondes s'il est lâché d'une hauteur de 19,6 m".

La seconde phase est une phase d'analyses où les résultats de l'observation (et des mesures) sont consignés et analysés en vue de dégager des règles générales propres au phénomène observé. Exemples : les lois de Kepler en gravitation ; la loi de Lenz dans les phénomènes d'induction magnétique ; la loi de Le Châtelier en Thermodynamique ; la loi des raies de Balmer en Physique Atomique[2].

Cette phase d'analyse peut rassembler les résultats de très nombreuses observations d'un grand nombre de phénomènes apparentés. A partir de là peuvent être énoncés des *principes* généraux de comportement. Exemple : principe de l'équivalence entre chaleur et travail en Thermodynamique, principe de conservation de l'énergie, premier principe de la Thermodynamique (Joule), second principe de la Thermodynamique.

La troisième phase est celle de la modélisation théorique. C'est la plus difficile. Elle utilise les mathématiques qui, jusqu'à présent, constituent le langage le plus universel que l'on ait trouvé pour décrire l'Univers, et donc le langage scientifique par excellence.

Dans cette phase, il s'agit de trouver les bons concepts et le bon langage théoriques qui nous rendent intelligible la classe de phénomènes à l'étude. Cette théorie doit bien sûr rendre compte des phénomènes déjà observés, mais elle peut en prévoir d'autres relevant des mêmes mécanismes et qui jusqu'alors avaient échappé à l'observation.

C'est d'ailleurs ce qu'on demande à une bonne théorie : avoir un pouvoir prédictif *le plus grand possible*.

Vient alors la quatrième phase, celle de la confrontation avec l'expérience. La théorie prédit, l'expérience confirme ou infirme les prédictions. A condition que les mesures expérimentales soient suffisamment

[1] Voir, à titre de curiosité, le site http ://semsci.u-strasbg.fr/demarche.htm.

[2] Voir Kepler, Lenz, Le Châtelier, Balmer dans http ://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil

précises, ceci permet de tester la justesse du modèle théorique proposé et de le pousser jusqu'à ses extrêmes limites. On peut citer comme exemple notoire la théorie de la relativité d'Einstein, qui jusqu'à présent n'a jamais été démentie par l'expérience.

Cependant, la théorie peut se révéler satisfaisante pour un état donné des techniques expérimentales. A mesure que ces techniques s'améliorent, les mesures deviennent plus précises et d'autres phénomènes peuvent être mis en évidence. Comme il arrive assez souvent, le modèle théorique initial se révèle être alors une *approximation* d'un modèle plus fin. C'est, par exemple, ce qu'il est advenu pour la Mécanique Classique : elle est apparue comme une approximation de la Mécanique Relativiste, qui reste valable tant que les corps étudiés ont des vitesses faibles en comparaison de la célérité de la lumière ; elle est aussi apparue comme une approximation de la Mécanique Quantique, qui s'applique bien d'une façon générale à une échelle macroscopique. D'autres théories cependant, tout en restant satisfaisantes pour les phénomènes qu'elles sont censées décrire, se retrouvent englobées dans des théories plus vastes, décrivant un plus grand nombre de phénomènes. C'est ce qu'il est advenu de l'Electricité et du Magnétisme qui sont deux aspects d'une même théorie, l'Electromagnétisme.

Ceci montre qu'il est très difficile, voire illusoire, de trouver d'emblée une *théorie du tout*, et que, plus modestement, nous n'arrivons à connaître les mécanismes de la nature que par approximations successives.

Il nous faut aussi considérer toute théorie comme un simple modèle mathématique de la réalité physique, qui peut se voir remis en question par la découverte d'un phénomène qu'il ne saurait décrire[3].

1.2 La modélisation de l'espace environnant

C'est l'observation quotidienne de corps de différentes tailles dont la plupart peuvent être réduits en éléments de plus en plus petits qui nous conduit à modéliser notre espace environnant comme un ensemble de points, même là où il n'y a pas de matière.

Le point est une abstraction mathématique auquel il est difficile encore à l'heure actuelle de donner un sens physique[4]. Cependant, pour être pragmatique, la représentation de l'Univers comme un continuum de points dans lequel les systèmes matériels évoluent et interagissent s'est montré et se montre encore très fructueuse dans l'analyse physique des phénomènes.

Nous admettrons donc ici cette représentation comme hypothèse de départ.

Nous appellerons *point matériel* un objet fait de matière mais dont la taille est si petite par rapport à l'environnement considéré, qu'on peut l'assimiler géométriquement à un point sans structure.

L'expérience courante nous révèle qu'un tel objet a la possibilité de se déplacer dans l'Univers, selon trois directions *indépendantes*. Nous disons que notre espace ponctuel est de *dimension trois*. Tout déplacement dans cet espace peut être envisagé comme une combinaison particulière de trois déplacements élémentaires.[5]

C'est justement l'observation des déplacements des corps dans l'espace qui a conduit d'abord à la notion de *bipoints*, puis à celle, plus formelle, de *vecteurs*.

Lorsqu'il se déplace dans l'espace, un point matériel y occupe successivement diverses positions, chacune étant modélisée par un point mathématique.

Supposons tout d'abord le déplacement rectiligne[6]. Soit A le point de départ, B le point d'arrivée. A ce déplacement nous associons le couple ordonné des deux points A et B, noté $(A,\ B)$ ou encore

[3] Moralité : Ne jamais confondre Mathématiques et Physique !

[4] A notre échelle, un petit grain de sable peut en donner une représentation suffisante.

[5] Le fait que la dimension de notre espace soit égale à ce nombre magique 3 reste encore mystérieux et pourrait résulter d'une exigence de stabilité de l'Univers. Ceci fait actuellement l'objet de réflexions, voire de recherches approfondies.

[6] C'est-à-dire selon une direction donnée

$\overrightarrow{AB}$, et appelé *bipoint* $A,\ B$, dont A en est l'origine et B l'extrémité. Au déplacement de B vers A on peut aussi associer le bipoint $\overrightarrow{BA}$.

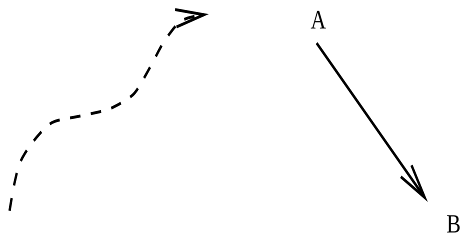

Figure 1.1

Logiquement, le non-déplacement doit correspondre à ce que nous appellerons le bipoint nul $\overrightarrow{0}$. Ainsi, $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

Considérons ensuite deux déplacements rectilignes $A \to B$ et $B \to C$. Logiquement, au déplacement $A \to B \to C$ doit correspondre le bipoint $\overrightarrow{AC}$. Comme ce déplacement est constitué des deux déplacements $A \to B$ correspondant au bipoint $\overrightarrow{AB}$ et $B \to C$ correspondant au bipoint $\overrightarrow{BC}$, nous admettrons la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

qui introduit un principe fondamental de composition des déplacements au moyen d'une loi de composition interne d'addition des bipoints utilisant le signe "+" usuel.

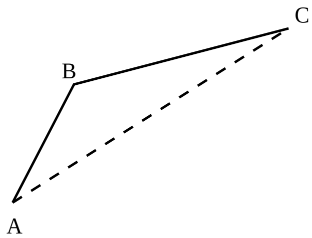

Figure 1.2

Notons aussi que le déplacement de A vers B puis de B vers A par le chemin inverse est équivalent à un non-déplacement global et doit donc être associé au bipoint nul. Nous écrirons alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$$

et nous dirons que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$, soit

$$\overrightarrow{BA} = -\ \overrightarrow{AB}$$

en utilisant le signe "-" usuel.

Nous retiendrons dès maintenant qu'un bipoint est de nature tout à fait différente de celle d'un nombre réel. Vouloir écrire une égalité telle que

$$\overrightarrow{AB} = 0,4127$$

serait absurde car la seule donnée du nombre $0,4127$ ne nous renseigne en aucune manière sur la direction du déplacement : $0,4127$ est ce qu'on appelle une grandeur *scalaire*, alors qu'un bipoint est de nature *vectorielle*. Pour bien distinguer ces deux notions, le physicien place toujours une flèche au dessus du symbole représentant une grandeur vectorielle (ou, quelquefois, notamment en imprimerie, par une lettre grasse).

Il existe cependant une grandeur de nature scalaire permettant de caractériser partiellement un bipoint $\overrightarrow{AB}$. Il s'agit de l'amplitude du déplacement, ce que nous appellons distance entre les deux points A et B, ou *longueur* du bipoint $\overrightarrow{AB}$. Ici, il s'agit de faire une mesure. Cela consiste à comparer le déplacement $A \rightarrow B$, matérialisé par un objet rectiligne d'extrémités A et B, à un autre $C \rightarrow D$ lui aussi matérialisé par un autre objet rectiligne qui sera choisi comme *étalon*. Cet étalon est dit *étalon des longueurs*. On connaît le principe de la mesure : on aligne AB et CD et on note combien de fois on peut faire rentrer CD dans AB.

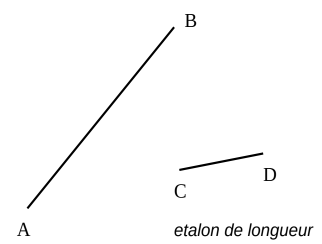

Figure 1.3

En 1790, l'unité des longueurs était définie comme la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Un exemplaire en fut établi en platine irridié pour servir d'étalon. En réalité, à la suite de mesures plus précises, on s'est aperçu que le mètre étalon était plus court que la partie 1/40000000 du méridien. Pour ne pas avoir à modifier à chaque nouvelle mesure la longueur du mètre, on avait décidé de considérer le *mètre-étalon* en platine irridié du pavillon de Breteuil à Sèvres comme l'unité des longueurs.

Depuis, les techniques ont évolué de telle façon que cet étalon s'est révélé insuffisamment précis et le mètre, unité internationale des longueurs est maintenant défini comme : *la longueur du trajet que parcourt la lumière dans le vide pendant un intervalle de temps égal à la fraction 1/299792458 de seconde*[7].

La définition d'un étalon des longueurs permet de faire des comparaisons entre bipoints de même orientation. Soit par exemple deux bipoints $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de même orientation, d_{AB} la distance entre A et B, d_{AC} celle entre A et C. Nous pouvons écrire symboliquement

$$\overrightarrow{AB} = \frac{d_{AB}}{d_{AC}} \overrightarrow{AC}$$

(règle de trois sur les longueurs).

Nous voyons que pour une direction donnée, ici la direction de A vers B qui est aussi la direction de A vers C, il existe une grandeur caractéristique, indépendante du bipoint considéré selon cette direction, qui est

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{d_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{d_{AC}}$$

[7]A propos du système d'unités internationales, il est conseillé de consulter les sites http ://physics.nist.gov/cuu/Units/ ; http ://www.bipm.fr/

C'est ce qu'on appelle un *vecteur unitaire*. Celui-ci caractérise une orientation particulière dans l'espace.

La notion de vecteur apparaît lorsqu'on observe des bipoints ayant même orientation, mais correspondant à des couples de points différents dans l'espace.

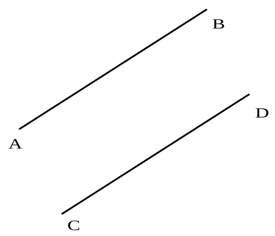

Figure 1.4

Soient deux bipoints $\overset{\longmapsto}{AB}$ et $\overset{\longmapsto}{CD}$, de même orientation et de même longueur mais non situés sur une même droite. Nous dirons que ces deux bipoints sont *équipollents*. Il y a une infinité de bipoints tous équipollents à un bipoint donné, se déduisant les uns des autres par translation parallèle dans l'espace. Un *vecteur* est censé représenter une classe entière de bipoints équipollents, c'est-à-dire, finalement, une direction et une distance. C'est une entité mathématique faisant partie d'une structure mathématique appelée *espace vectoriel*.

Une représentation physique d'un vecteur est l'un des bipoints de la classe qu'il représente. Nous noterons $\overrightarrow{AB}$ le vecteur associé au bipoint $\overset{\longmapsto}{AB}$.[8]

1.3 Un peu de géométrie

Plaçons nous dans un plan[9]. Dans ce plan, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O est l'ensemble des points M équidistants de O. Soit R le rayon de $\mathcal{C}$. On a donc $d(O, M) = R$. Prolongeons OM en une demi-droite et traçons une autre demi-droite issue de O coupant $\mathcal{C}$ en E (voir figure). Les régions de l'espace situées entre les deux demi-droites s'appellent des *secteurs*. On caractérise "l'ouverture" d'un secteur par ce qu'on appelle un *angle*. Considérons par exemple, "l'angle" $\widehat{EOM}$. On lui attribue une mesure, définie par le rapport

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{EM}}{R}$$

où $\overset{\frown}{EM}$ est la longueur de l'arc de cercle allant de E vers M. Cette quantité θ est en fait indépendante du cercle $\mathcal{C}$ considéré[10] et caractérise bien l'étendue du secteur. Elle est sans dimension et s'exprime en *radians*, voire en degrés. L'angle total correspondant au cercle entier est, comme on sait, égal à 2π :

$$\text{périmètre du cercle/rayon} = 2\pi \text{ radians}$$

On dit que deux droites sont perpendiculaires ou orthogonales si l'angle du secteur qu'elles forment vaut $\pi/2$, ou 90°. On parle alors d'angle *droit*. Un tel angle est obtenu, par exemple, en divisant le cercle $\mathcal{C}$ considéré plus haut en quatre parties identiques : $\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FE'}=\overset{\frown}{E'F'}=\overset{\frown}{F'E}$ (voir figure).

Cette notion d'orthogonalité conduit à celle de *projection orthogonale* d'un point. Dans la figure ci-dessus, cela consiste à construire une droite passant par M, coupant la demi-droite OE en H de

[8] Notons cependant qu'un vecteur unitaire, étant *sans dimension* n'a pas de représentation directe dans notre espace ponctuel où tous les bipoints sont homogènes à des longueurs.

[9] Pour des révisions de géométrie, voir http ://www.mathsgeo.net/

[10] On peut déjà le constater en considérant des cercles homothétiques.

telle sorte que l'angle $\widehat{MHE}$ soit droit. H est la projection orthogonale de M sur la demi-droite OE. Suivant le même procédé, construisons le point K, projection orthogonale de M sur la demi-droite OF.

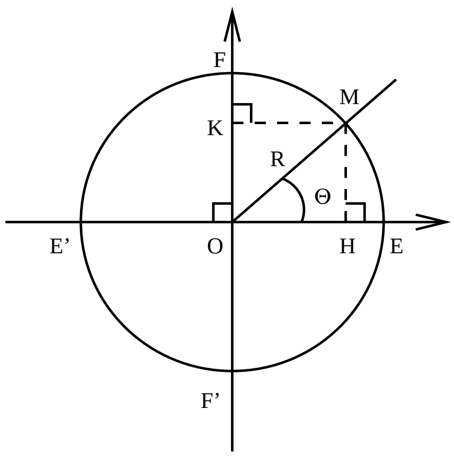

Figure 1.5

Manifestement, les longueurs OH et OK sont inférieures à $OM = R$. Les rapports de ces longueurs au rayon R définissent, respectivement, le "cosinus" et le "sinus" de l'angle θ :

$$\cos\theta = \frac{\overline{OH}}{R}, \qquad \sin\theta = \frac{\overline{OK}}{R}$$

Ce sont des quantités sans dimension, telles que

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1, \qquad -1 \leq \sin\theta \leq 1$$

Les triangles OHM et OKM étant rectangles en H et K respectivement, le théorème de Pythagore nous indique que

$$OM^2 = OH^2 + HM^2, \quad \text{et} \quad OM^2 = OK^2 + KM^2$$

mais, comme $\overline{OK} = \overline{HM}$, $\overline{OH} = \overline{KM}$, on en déduit $OM^2 = OH^2 + OK^2$, et la relation fondamentale

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

entre le cosinus et le sinus d'un angle.

Nous avons vu qu'on peut écrire, en termes de bipoints

$$\overset{\longmapsto}{OM} = \overset{\longmapsto}{OH} + \overset{\longmapsto}{HM}$$

Cette relation peut être transcrite en termes de vecteurs

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

D'après la géométrie, $\overset{\longmapsto}{HM}$ et $\overset{\longmapsto}{OK}$ sont équipollents. On écrira donc tout aussi bien

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

Définissons alors les vecteurs unitaires portés par chacun des axes OH et OK [11], soit

[11] Ces vecteurs n'ont pas vraiment de représentation dans l'espace physique, étant *sans dimension*. Ils servent à caractériser des *orientations* indépendantes dans l'espace, correspondant aux deux degrés de liberté de déplacement d'un point matériel dans un plan.

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\overline{OH}} \quad , \quad \overrightarrow{\jmath} = \frac{\overrightarrow{OK}}{\overline{OK}}$$

On a alors

$$\overrightarrow{OM} = \overline{OH}\ \overrightarrow{\imath} + \overline{OK}\ \overrightarrow{\jmath}$$

Mais, par définition, $\cos\theta = \dfrac{\overline{OH}}{R}$, $\sin\theta = \dfrac{\overline{OK}}{R}$, d'où

$$\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\ \overrightarrow{\imath} + R\sin\theta\ \overrightarrow{\jmath}$$

On a ici un exemple de repère cartésien, à deux dimensions (on est dans un plan).

Un *repère* est l'association d'un point O, appelé *origine* et deux axes perpendiculaires se coupant en O. A chacun des axes est associé un vecteur unitaire : $\overrightarrow{\imath}$ pour OE, $\overrightarrow{\jmath}$ pour OF.

Vis-à-vis d'un tel repère, la position d'un point M quelconque est complètement déterminée par la donnée des deux longueurs "algébriques" $\overline{OH}$ et $\overline{OK}$. Ces deux quantités sont appelées *coordonnées cartésiennes* de M dans ce repère cartésien. Couramment, on note $x = \overline{OH}$ et x est appelé *abscisse* de M, $y = \overline{OK}$ et y est appelé *ordonnée* de M. L'axe OE est aussi appelé "axe des x" (axe Ox) et l'axe OF, "axe des y" (axe Oy), et l'on note généralement le repère cartésien (O, x, y), étant sous-entendu que les axes Ox et Oy sont orthogonaux.

On remarque que dans le schéma précédent, on a

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

et, plutôt que de caractériser la position de M au moyen de ses coordonnées cartésiennes x et y, on peut tout aussi bien le faire en utilisant les quantités R et θ. R est la distance OM tandis que θ est l'angle que fait la direction OM avec l'axe OE. R et θ sont appelées *coordonnées polaires* de M.

De ce paragraphe, il faut bien retenir la construction de x et de y : ce sont les *projections orthogonales* du bipoint $\overset{\longmapsto}{OM}$ suivant les deux axes OE et OF.

1.4 Un peu d'algèbre (pour la culture)

1.4.1 Espace vectoriel

Dans le cours de Mathématiques de première année, que le lecteur est invité à consulter, la structure d'*espace vectoriel* est présentée en bonne et dûe forme mathématique. Ici, il sera simplement question de certaines règles pratiques d'utilisation des vecteurs, sans vraiment chercher à faire un exposé mathématique rigoureux, et ne sera considéré que le cas d'un espace vectoriel construit sur l'ensemble des nombres réels[12].

Un espace vectoriel construit sur l'ensemble des réels est un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une opération interne, ici l'addition, et d'une opération externe, ici la multiplication par un réel, de sorte que, pour $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ appartenant à $\mathcal{E}$, et α et β étant deux réels, on a :

- $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
- $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{0}$ est le *vecteur nul*, élément neutre de l'addition vectorielle)
- pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ il existe un vecteur $\overrightarrow{a'}$ tel que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a'} = -\overrightarrow{a}$
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
- $\alpha(\beta\ \overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}\ (\alpha\beta)$
- $1(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}\ 1$, $0\ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}\ 0 = \overrightarrow{0}$
- $(\alpha + \beta)\ \overrightarrow{a} = \alpha\ \overrightarrow{a} + \beta\ \overrightarrow{a}$

[12]Voir par exemple http ://www.les-mathematiques.net/

- $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\ \overrightarrow{a} + \alpha\ \overrightarrow{b}$

Une *base* de vecteurs est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$ comportant un certain nombre de vecteurs, soit $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$, tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathcal{E}$ il existe une suite unique de nombres réels $\beta_1,\ \beta_2, \cdots, \beta_n$ tels que

$$\overrightarrow{b} = \beta_1\ \overrightarrow{a_1} + \beta_2\ \overrightarrow{a_2} + \cdots \beta_n\ \overrightarrow{a_n}$$

Les nombres β_i $(i = 1, \cdots, n)$ sont appelés *composantes* du vecteur $\overrightarrow{b}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il est engendré par un nombre fini de ses éléments. On démontre qu'un espace vectoriel de dimension finie n admet toujours une base de n éléments. Une base $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ a la propriété fondamentale suivante. Si

$$\overrightarrow{0} = \beta_1\ \overrightarrow{a_1} + \beta_2\ \overrightarrow{a_2} + \cdots \beta_n\ \overrightarrow{a_n}$$

alors

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \cdots,\ \beta_n = 0$$

On dit alors que les n vecteurs $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \cdots,\ \overrightarrow{a_n}$ sont *linéairement indépendants*. Toute suite de n vecteurs linéairement indépendants constitue une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n.

1.4.2 Espace métrique

Un espace métrique est un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur lequel est définie l'opération suivante. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}$. A ce couple de vecteurs on fait correspondre le *nombre réel* noté (pour l'instant) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, appelé *produit scalaire* des deux vecteurs, et possédant les propriétés suivantes.

- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ (symétrie)
- $(\alpha_1\ \overrightarrow{a_1} + \alpha_2\ \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}) = \alpha_1(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}) + \alpha_2(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b})$ (linéarité)
- $(\overrightarrow{a}, \beta_1\ \overrightarrow{b_1} + \beta_2\ \overrightarrow{b_2}) = \beta_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1}) + \beta_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_2})$ (bi-linéarité)
- $(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a}) = 0$

Le produit scalaire est dit *défini positif* s'il a de plus les propriétés suivantes

- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geq 0$ (positivité)
- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ("défini")

On définit alors la *norme* d'un vecteur par le nombre positif

$$||\ \overrightarrow{a}\ || = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}$$

Un vecteur est dit *unitaire* si sa norme vaut 1.

La *distance* entre deux vecteurs est le nombre

$$||\ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\ ||$$

Muni de ce produit scalaire défini positif, l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ acquiert une structure d'espace *euclidien*.

On démontre que d'une façon générale on a *l'inégalité de Schwarz*

$$|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| \leq ||\ \overrightarrow{a}\ ||\ ||\ \overrightarrow{b}\ ||$$

l'égalité n'ayant lieu que si et seulement si les deux vecteurs sont *colinéaires*, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{b} = \lambda\ \overrightarrow{a}$. Cette inégalité de Schwarz permet de définir l'"angle" θ entre les deux vecteurs par la relation

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{||\ \overrightarrow{a}\ ||\ ||\ \overrightarrow{b}\ ||}$$

Deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul :

$$(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,) = 0$$

Dans ce cas, l'angle entre les deux vecteurs est $\pi/2 + k\pi$.

Dans un espace euclidien de dimension finie on peut toujours trouver des bases de vecteurs unitaires, orthogonaux deux à deux :

$$(\overrightarrow{a_i}\,,\,\overrightarrow{a_j}\,) = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker

$$\delta_{i,j} = 0 \ \text{ si } \ i \neq j \ \text{ et } \ \delta_{i,i} = 1$$

1.4.3 L'espace vectoriel euclidien de dimension trois

A partir de maintenant, nous nous limiterons à l'étude de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Soit alors $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs de cet espace, unitaires et orthogonaux deux à deux

$$(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,) = 0, \quad (\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{k}\,) = 0, \quad (\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\,) = 0, \ \ ||\,\overrightarrow{\imath}\,|| = ||\,\overrightarrow{\jmath}\,|| = ||\,\overrightarrow{k}\,|| = 1$$

Ces trois vecteurs forment ce qu'on appelle une *base orthonormée*. On remarquera qu'une telle base est définie par 6 relations.

Une base orthonormée formée de trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ pris dans cet ordre est dite *d'orientation directe* si l'orientation de $\overrightarrow{c}$ s'obtient à partir de celles de $\overrightarrow{a}$ et de $\overrightarrow{b}$ par la règle du tire-bouchon : on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{a}$ vers le vecteur $\overrightarrow{b}$ en un mouvement hélicoïdal allant du coté du plus petit angle, soit $\pi/2$ (et non du coté de l'angle $3\pi/2$), et en avançant. La direction de l'avancée est celle du vecteur $\overrightarrow{c}$. Si cette orientation n'est pas respectée, la base est dite d'orientation *négative* ou *inverse*.

Dans la suite, nous ne considérerons que des bases orthonormées d'orientation directe, qualifiées de bases *cartésiennes*. Les composantes des vecteurs relativement à une telle base sont appelées *composantes cartésiennes*.

Tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de l'espace $\mathcal{E}$ peut être décomposé selon une base cartésienne $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ et donc être écrit sous la forme[13]

$$\overrightarrow{V} = V_x\,\overrightarrow{\imath} + V_y\,\overrightarrow{\jmath} + V_z\,\overrightarrow{k}$$

On peut exprimer de façon simple le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leurs composantes cartésiennes. Utilisant les propriétés du produit scalaire et les relations de définition de la base, on obtient successivement

$$\begin{gathered}(\overrightarrow{V}\,,\,\overrightarrow{W}\,) \ = \ (V_x\,\overrightarrow{\imath} + V_y\,\overrightarrow{\jmath} + V_z\,\overrightarrow{k}\;V_x\,, W_x\,\overrightarrow{\imath} + W_y\,\overrightarrow{\jmath} + W_z\,\overrightarrow{k}\;V_x\,) = \\ V_x\,(\,\overrightarrow{\imath}\,, W_x\,\overrightarrow{\imath} + W_y\,\overrightarrow{\jmath} + W_z\,\overrightarrow{k}\,) + V_y\,(\,\overrightarrow{\jmath}\,, W_x\,\overrightarrow{\imath} + W_y\,\overrightarrow{\jmath} + W_z\,\overrightarrow{k}\,) + V_z\,(\,\overrightarrow{k}\,, W_x\,\overrightarrow{\imath} \\ + W_y\,\overrightarrow{\jmath} + W_z\,\overrightarrow{k}\,) = V_x\,W_x\,(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\imath}\,) + V_x\,W_y\,(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,) + \cdots\end{gathered}$$

et finalement

$$(\overrightarrow{V}\,,\,\overrightarrow{W}\,) = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z$$

[13] A noter dès maintenant que les composantes d'un vecteur dépendent bien sûr du choix de la base, alors que le vecteur lui-même n'en dépend pas.

c'est-à-dire, la somme des produits des composantes de même nom. La notation usuelle du produit scalaire avec le "point"

$$(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}$$

notation que nous utiliserons dorénavant, rappelle la simplicité de cette expression.

En utilisant des composantes cartésiennes V_x, V_y et V_z d'un vecteur $\overrightarrow{V}$, la norme de ce vecteur s'exprime simplement comme

$$|| \overrightarrow{V} || = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

1.4.4 Relation bipoints-vecteurs

Suivant la même méthode que celle exposée au paragraphe 1.3, construisons, à partir d'un point O de l'espace, un système de trois axes orthogonaux deux à deux. Par exemple, partant du plan xOy dont il a été question précédemment, on construit à partir de O un axe perpendiculaire à ce plan (figure 6). Nous avons réellement cette possibilité parce que l'espace physique est à trois dimensions. Nous appellerons ce nouvel axe "axe Oz". L'association du point O est des trois axes Ox, Oy et Oz définit un *repère d'espace* de l'espace à trois dimensions.

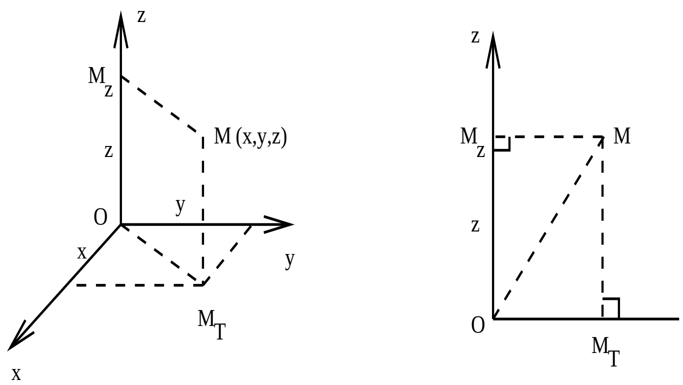

Figure 1.6

Soit maintenant un point M de l'espace. L'association de l'axe Oz et du point M définit un plan, auquel appartient le bipoint $\overset{\longmapsto}{OM}$. Dans ce plan, projetons le point M orthogonalement sur l'axe Oz et appelons M_z le point obtenu. La longueur algébrique $z = \overline{OM_z}$ est la *cote* du point M. A l'axe Oz nous associons aussi un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ qui caractérise son orientation. Nous projetterons aussi le point M orthogonalement dans le plan xOy. Ceci se fait parallèlement à l'axe Oz. Soit M_T le point obtenu dans le plan xOy. Ce point a pour coordonnées cartésiennes x et y dans le plan xOy. Par définition, les trois quantités x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M relativement au repère ainsi défini. Au bipoint $\overset{\longmapsto}{OM}$ nous associerons alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ défini par

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{\imath} + y \overrightarrow{\jmath} + z \overrightarrow{k}$$

Aux bipoints $\overset{\longmapsto}{OA}$ et $\overset{\longmapsto}{OB}$ étant associés les vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = x_A \overrightarrow{\imath} + y_A \overrightarrow{\jmath} + z_A \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{OB} = x_B \overrightarrow{\imath} + y_B \overrightarrow{\jmath} + z_B \overrightarrow{k}$$

au bipoint $\overset{\longmapsto}{AB}$ sera associé le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A)\ \overrightarrow{\imath}\ +(y_B-y_A)\ \overrightarrow{\jmath}\ +(z_B-z_A)\ \overrightarrow{k}$$

Les trois vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont supposés *unitaires* et *orthogonaux* deux à deux. Ils constituent donc une base orthonormée de l'espace des vecteurs à trois dimensions, base que nous supposerons d'orientation directe.

Ainsi, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\|\ \overrightarrow{AB}\ \| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

représente la distance entre les deux points A et B (longueur du bipoint $\overset{\longmapsto}{AB}$).

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(x_B-x_A)(x_D-x_C)+(y_B-y_A)(y_D-y_C)+(z_B-z_A)(z_D-z_C)$$

1.5 Les référentiels

Du fait de leurs interactions, les systèmes constituant notre Univers évoluent. Ils peuvent changer de position, changer de forme, subir des mutations, être détruits ou s'amalgamer : c'est ce qu'on entend par *évolution*.

Après avoir modélisé le continuum Univers, le physicien va chercher à décrire cette évolution et tenter de découvrir les grandes lois qui la régissent, dans le cadre de cette modélisation.

Un premier fait s'impose : toute évolution est *relative*. Ainsi, un voyageur assis dans un train dit que le train est immobile par rapport à lui, et n'évolue donc pas, tandis qu'un garde-barrière voit le train et son voyageur défiler devant lui, donc les voit évoluer.

Cet exemple familier montre qu'il est toujours *indispensable* de spécifier par rapport à quel observateur est étudiée telle ou telle évolution.

Un observateur est soit un être humain, un animal, mais, le plus souvent, un ensemble d'appareils enregistreurs, immobiles les uns par rapport aux autres. Le terme "immobiles" signifie que la disposition géométrique des enregistreurs les uns par rapport aux autres reste immuable, étant sous-entendu que les appareils eux-mêmes restent identiques à eux-mêmes.

En Mécanique, on schématise un observateur par un repère d'espace, pris le plus souvent comme étant cartésien, l'observateur lui-même étant supposé se trouver à l'origine du système d'axes. Nous avons vu comment cette construction s'avère efficace pour repérer les points dans l'espace. Il est utile de souligner ici que cette méthode de repérage repose sur l'hypothèse de la validité de l'application des postulats de la géométrie d'Euclide au monde physique réel, c'est-à-dire là où ont lieu les phénomènes physiques (ceci inclut le parallélisme, l'orthogonalité, le théorème de Pythagore, etc).

Dans son repère, l'observateur, censé être physicien, constatant l'évolution de certains systèmes, va chercher à quantifier cette évolution. Cette opération passe nécessairement par la comparaison de l'évolution étudiée à une autre qui servira d'étalon. Cet étalon doit posséder suffisamment de régularité pour pouvoir être présenté comme un étalon universel.

Comme on sait, tant qu'on ne cherche pas trop de précision dans la datation des événements, on peut se satisfaire de la succession des jours et des nuits, et dire : "cet événement a eu lieu il y a trois jours". Par contre, lorsqu'il s'agit de départager les skieurs dans une compétition, il faut une échelle de durée beaucoup plus précise.

Cependant, dans le fond, le principe reste le même : on compare des événements à des événements de référence.

Considérons, par exemple, un *pendule simple* dans le champ de pesanteur terrestre. Si les frottements sont négligeables, on observe pour ce système une évolution périodique d'une très grande régularité, qui pourra donc être utilisée comme étalon dans le repérage des événements.

On appellera, par exemple, "événement zéro", celui qui correspond au lâchage de la masse se trouvant au bout du bras du pendule, alors que cette masse était initialement immobile, le bras faisant alors l'angle θ_0 avec la verticale. A partir de ce moment, le pendule exécute un mouvement de va-et-vient de part et d'autre de la verticale, avec des valeurs extrêmes égales à θ_0 de l'angle θ que fait le bras du pendule avec la verticale.

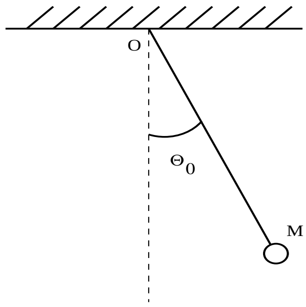

Figure 1.7

Lorsqu'apparaît un événement, l'observateur lié au "système pendule" va noter la valeur prise alors par l'angle θ, ainsi que le nombre d'allers et de retours que le pendule aura déjà effectués depuis l'événement zéro de référence. Il aura ainsi constitué une *chronologie*, qui lui permettra de classer les événements en *antériorité*, en *postériorité* ou en *coïncidence*, d'après les valeurs prises par l'angle du pendule. L'angle du pendule lui servira de *date* pour repérer les événements par rapport à l'évolution propre de son pendule, évolution qu'il pourra appeler *temps*.

Bien entendu, à mesure que les expériences de Physique sont devenues de plus en plus fines et les besoins de la vie quotidienne de plus en plus grands, il a fallu rechercher des chronologies de plus en plus fiables dans leur régularité et dans leur universalité.

C'est ainsi que nous sommes passés de l'antique sablier à la norme internationale actuelle concernant la définition de la *seconde*, unité légale des durées, qui est : *la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133*!!!

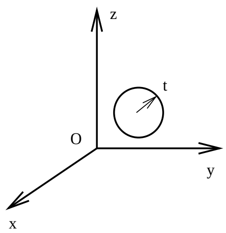

Figure 1.8

Muni de son système d'axes et de sa chronologie, l'observateur constitue ce qu'on appelle un *référentiel* : un référentiel est donc composé d'un point O dans l'espace, qui est censé représenter l'observateur, d'un système d'axes cartésiens d'origine O, à partir desquels sont faites des mesures de longueur permettant de localiser un événement dans l'espace, et d'une chronologie permettant de localiser l'événement dans le temps. Par rapport à un référentiel, un événement sera donc caractérisé par la donnée de quatre nombres : les trois coordonnées d'espace $x,\ y,\ z$ du point où a eu lieu l'événement et une coordonnée de temps, la date t de l'événement par rapport à la chronologie de référence.

Bien entendu, les trois coordonnées x, y, z sont mesurées avec le même étalon de longueur, pour tous les référentiels. De même, tous les observateurs utiliseront le même étalon des durées, après s'être entendus sur la définition du "top" de départ.