

## Chapitre 6

# Introduction à la mécanique des fluides

Sous le terme de fluides sont englobés les liquides et les gaz. La différence essentielle entre solide et fluide tient au fait que dans un fluide une molécule en agitation thermique peut voyager, d'où la propriété de *fluidité* ou de *déformabilité* d'un fluide, alors que dans un solide une molécule garde une position moyenne fixe, d'où le caractère rigide d'un solide. On pourrait définir un fluide comme un milieu qui se déforme tant que lui sont appliqués des efforts, si faibles soient-ils. Ces efforts peuvent d'ailleurs mettre le fluide en mouvement. On parle alors d'écoulement de fluide, objet d'étude de la Dynamique des fluides.

### 6.1 Du microscopique au macroscopique

Un fluide est bien sûr constitué de molécules en interaction, ce qui tendrait à donner de ce milieu une image de discontinuité. Cependant, il est possible de le modéliser comme un *milieu continu* lorsqu'on s'intéresse uniquement à ses propriétés macroscopiques. Cette vision s'appuie sur l'existence de trois échelles de distance.

Pour illustrer ceci, considérons au voisinage d'un point  $M$  à l'intérieur du fluide un cube d'arête  $L$  renfermant un nombre de molécules égal à  $N(L)$ . La densité de molécules dans le cube est

$$n(L) = \frac{N(L)}{L^3}$$

Étudions alors l'évolution de cette densité lorsqu'on fait varier la taille du cube (figure 6.1).

Lorsque  $L$  est très petit, de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen  $\ell$  d'une molécule dans le fluide, la densité  $n(L)$  présente de très grandes fluctuations qui sont dues aux fluctuations de position des molécules. A cette échelle le fluide est un milieu discontinu. On peut choisir le libre parcours moyen lui-même pour définir l'*échelle microscopique*  $L_1$ . Nous avons vu que le libre parcours moyen est inversement proportionnel à la concentration moléculaire. On obtient par exemple  $\ell \approx 10^{-7}$  m pour l'Argon, dans les conditions normales.

Lorsqu'on augmente la taille du cube, on arrive à une échelle dite *échelle mésoscopique* qui caractérise le domaine entre l'échelle moléculaire où le nombre de molécules est restreint, et l'échelle macroscopique. Le nombre de molécules concernées étant devenu grand<sup>1</sup>, on obtient alors une densité  $n(L)$  non fluctuante, de valeur locale  $n(M)$ , qui peut dépendre de l'endroit où l'on situe le cube dans le fluide. A cette échelle  $L_2$ , le milieu apparaît déjà comme un milieu continu.

---

<sup>1</sup>Une goutte d'eau sphérique de 1 mm de diamètre, prise dans les conditions normales, contient  $1,75 \cdot 10^{19}$  molécules  $H_2O$

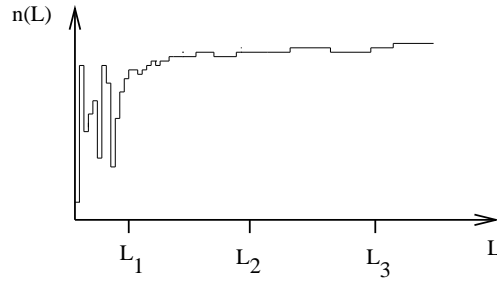


Figure 6.1

Enfin, l'échelle macroscopique  $L_3$  est celle qui caractérise les variations spatiales de la densité  $n(M)$  : c'est la distance minimum à parcourir dans le fluide pour observer un changement notable de cette densité macroscopique.

Un fluide pourra être modélisé comme un milieu continu si l'on a

$$L_1 \ll L_2 \ll L_3$$

On peut alors donner un sens à ce qu'on appellera une *particule de fluide*. Il s'agit d'une quantité de fluide à l'intérieur d'un volume d'extension  $\delta V \simeq L_2^3$ , qui contient déjà un très grand nombre de molécules, mais dont la taille mésoscopique permet de considérer que les grandeurs macroscopiques y restent constantes.

Cette notion de particule fluide permet de définir la valeur prise en un point par une grandeur macroscopique telle que la pression, la température, la densité, la vitesse du fluide, comme la valeur moyenne de cette grandeur sur l'extension de la particule de fluide. La particule de fluide est l'analogue du point matériel en Mécanique usuelle.

## 6.2 Forces dans un fluide

La *Mécanique des fluides* a pour objet l'étude des propriétés spatio-temporelles des mouvements des fluides, appelés aussi *écoulements fluides*. Un cas particulier de cette étude est l'*Hydrostatique* qui concerne l'étude de l'équilibre d'un fluide au repos (macroscopiquement parlant) dans le champ de pesanteur.

En Mécanique on étudie usuellement le comportement des systèmes sous l'action des forces qui lui sont appliquées. En Mécanique des fluides, on distingue généralement deux types de forces : les forces dites *volumiques* provenant de l'action d'éventuels systèmes extérieurs, telle celle due à la pesanteur, et les forces de contact entre particules de fluide. Ces dernières résultent des interactions à courte portée entre les molécules constituant le fluide, comme les forces de pression. Elles donnent lieu à des forces dites *surfiques*.

Considérons alors un volume de fluide  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $S$ , couramment appelée *surface de contrôle*. Au voisinage d'un point  $M$  de cette surface, envisageons un élément de surface d'aire infinitésimale  $dS$ . Du fait des forces de contact, il s'exerce sur cet élément de surface une force surfacique  $d\vec{F}_s$  que l'on peut exprimer comme

$$d\vec{F}_s = \vec{f}_s(M) dS$$

En effet,  $d\vec{F}_s$  doit être proportionnelle au nombre de molécules qui interagissent au travers de l'élément de surface et ce nombre est proportionnel lui-même à l'extension de cet élément, c'est-à-dire à  $dS$ . Le vecteur  $\vec{f}_s(M)$  est homogène à une force divisée par une surface. C'est ce qu'on appelle couramment une *contrainte*.

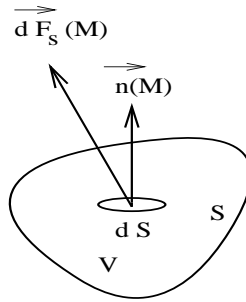


Figure 6.2

Dans le cas général d'un fluide réel,  $\vec{f}_s(M)$  n'est pas orthogonal à la surface  $S$ . Ses composantes dans le plan tangent à  $S$  correspondent aux forces dites de *viscosité*. La composante perpendiculaire est liée à la *pression*. Lorsque les forces de viscosité peuvent être négligées, on dit que le fluide est *parfait*.

On définit alors la pression au point  $M$  par la fonction scalaire  $P(M)$  telle que

$$\vec{f}_s(M) = -P(M) \vec{n}_s(M)$$

où  $\vec{n}_s(M)$  est le vecteur normal en  $M$  à la surface  $S$ , orientée de l'intérieur du volume  $\mathcal{V}$  vers l'extérieur de ce volume.

Tous les fluides, liquides ou gaz, exercent sur toute surface avec laquelle ils sont en contact une force de pression, perpendiculaire en tout point à cette surface.

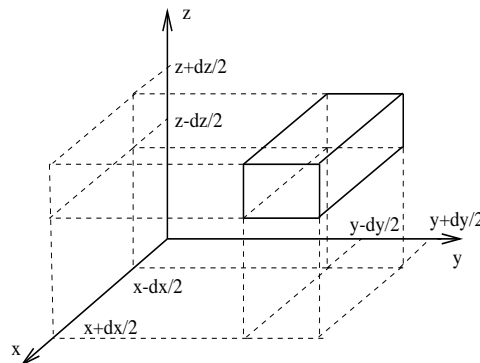


Figure 6.3

Montrons que les forces de pression, bien que s'exerçant à la surface d'un volume, peuvent néanmoins être exprimées de façon équivalente comme des forces volumiques. Il nous suffira de le montrer pour un volume de dimensions infinitésimales. Considérons un parallélépipède rectangle dont les faces sont parallèles aux plans  $xOy$ ,  $yOz$  et  $xOz$  : les faces parallèles au plan  $xOy$  sont aux cotes  $z - dz/2$  et  $z + dz/2$  respectivement ; les faces parallèles au plan  $yOz$  sont aux abscisses  $x - dx/2$  et  $x + dx/2$  respectivement ; les faces parallèles au plan  $xOz$  sont aux ordonnées  $y - dy/2$  et  $y + dy/2$  respectivement.

La force de pression qui s'exerce sur la face à la cote  $z + dz/2$  est  $-\vec{k} P(x, y, z + dz/2) dxdy$ , tandis que la force de pression qui s'exerce sur la face à la cote  $z - dz/2$  est  $\vec{k} P(x, y, z - dz/2) dxdy$ . La résultante de ces deux forces est donc

$$\vec{k} dxdy (P(x, y, z + dz/2) - P(x, y, z - dz/2))$$

Comme (à des termes d'ordre supérieur près en  $dz$ )

$$P(x, y, z + dz/2) - P(x, y, z - dz/2) = dz \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)$$

cette résultante s'écrit donc

$$-\vec{k} dxdydz \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)$$

Un calcul analogue relatif aux autres faces du cube donne les résultantes

$$-\vec{i} dxdydz \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z)$$

pour les faces parallèles au plan  $yOz$ , et

$$-\vec{j} dxdydz \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)$$

pour les faces parallèles au plan  $xOz$ . On trouve ainsi que la résultante des forces de pression s'exerçant sur le cube est

$$d\vec{F}_v = -dxdydz \left[ \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \right]$$

Il s'agit bien de l'expression d'une force volumique, de densité

$$\frac{d\vec{F}_v}{dxdydz} = - \left[ \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \right]$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\vec{F}_v}{dxdydz} = \vec{f}_v(M) = -\vec{\text{grad}} P(x, y, z)$$

Ainsi, et nous admettrons qu'il s'agit là d'un résultat général, les forces de pression surfaciques sont réexprimables en termes de forces volumiques de pression, dont la densité est l'opposé du gradient de pression. De la sorte, la pression joue pour ces forces le rôle d'énergie potentielle (par unité de volume).

Le champ des pressions est un champ scalaire défini partout dans le fluide, et la notion de *force de pression* n'apparaît en fait qu'à partir du moment où l'on se définit une surface d'action limitant un certain volume. La force de pression s'exerçant sur cette surface est alors orthogonale à celle-ci et dirigée vers l'extérieur du volume considéré. Il s'agit pour ce volume d'une force *extérieure* décrivant l'action des molécules environnantes sur ses propres molécules.

### 6.3 Aperçu d'Hydrostatique

L'hydrostatique est l'étude de l'équilibre d'un fluide plongé dans un champ de forces *extérieure*, tel que celui dû à la pesanteur terrestre, cas auquel nous nous limiterons. On suppose que le référentiel d'étude peut être considéré comme galiléen.

### 6.3.1 Relation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un fluide globalement au repos dans le champ de pesanteur terrestre. Un élément de volume  $dV$  du fluide autour d'un point  $M$  est soumis à deux forces

- ♠ d'une part à son poids,  $\rho(M)dV \vec{g}$ ,  $\rho(M)$  étant la masse volumique du fluide au point  $M$  et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur terrestre ;
- ♠ d'autre part, aux forces de pression dues au fluide extérieur à ce volume, forces qui, comme nous l'avons montré, sont équivalentes à la force volumique

$$-\text{grad } P(M)dV$$

D'après la relation fondamentale de la Dynamique, l'équilibre de l'élément de volume considéré se traduira donc par l'égalité

$$\left[ \rho(M) \vec{g} - \text{grad } P(M) \right] dV = \vec{0}$$

soit

$$\text{grad } P(M) = \rho(M) \vec{g}$$

Cette dernière relation constitue la *relation fondamentale de l'hydrostatique*.

Elle montre que le gradient de pression a la même orientation que le champ de pesanteur. Tenant compte des propriétés du gradient, on en déduit, d'une part, que les surfaces d'égale pression, appelées surface *isobares*, sont des surfaces horizontales (perpendiculaires à  $\vec{g}$ ) : *la pression est la même en tous les points de même cote*, et que, d'autre part, *la pression diminue quand l'altitude augmente*, ou encore que *la pression augmente quand la profondeur dans le fluide augmente*.

L'équation d'équilibre ne peut être intégrée que si l'on connaît la fonction  $\rho(M)$ . Dans le cas des fluides compressibles tels que les gaz, il faut alors tenir compte de l'équation d'état qui relie la masse volumique à la pression et la température<sup>2</sup>. On appelle *coefficient de compressibilité isotherme* d'un fluide le rapport, à température constante, de la diminution relative de volume à l'augmentation de pression. Il s'agit donc du coefficient (positif !)

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

La compressibilité des liquides est généralement négligeable, même pour des pressions élevées. Ainsi,  $\chi_T$  est de l'ordre de  $10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$  pour les gaz, alors que pour l'eau liquide par exemple, il vaut  $4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  à  $20^\circ\text{C}$ . Il en résulte qu'une augmentation de pression de 10 atmosphère ( $\Delta P = 10^6 \text{ Pa}$ ) n'entraîne qu'une variation relative d'un volume d'eau de l'ordre de 4 dix-millièmes !! En revanche, la variation relative d'un volume d'air serait alors de l'ordre de 10...

Un fluide est dit *incompressible* si sa masse volumique peut être considérée comme uniforme, c'est-à-dire la même partout dans le fluide.

Pour un fluide incompressible de masse volumique  $\rho_0$ , l'équation fondamentale est aisément intégrable. La pression est fonction de la cote  $z$  uniquement et l'on a

$$P(z) + \rho_0 g z = \text{constante}$$

<sup>2</sup>Ce cas sera considéré en Travaux Dirigés

ou encore, considérant à l'intérieur du fluide deux points  $A$  et  $B$  de cotes  $z_A$  et  $z_B$  respectivement,

$$P_A + \rho_0 g z_A = P_B + \rho_0 g z_B$$

Cette relation permet de déduire un résultat connu sous le nom de *théorème de Pascal* :

*Une pression extérieure s'exerçant sur un fluide incompressible est uniformément transmise par le fluide en chacun de ses points et dans toutes les directions.*

En effet, d'après la relation ci-dessus, du fait de l'incompressibilité du fluide, la différence de pression  $P_A - P_B = \rho_0 g (z_B - z_A)$  ne dépend que de la différence des cotes des points  $A$  et  $B$ . C'est pourquoi toute variation de  $P_A$  est intégralement répercutée sur  $P_B$  en  $B$ . Les applications de ce résultat sont nombreuses.

Notons aussi que la différence de pression entre les deux points représente simplement le poids d'une colonne de fluide de base unité et de hauteur  $|z_A - z_B|$ . A titre de première d'application de la précédente relation, calculons la dénivellation  $D = |z_A - z_B|$  correspondant à un écart de pression de 1 atmosphère, lorsque le fluide est de l'eau (de masse volumique  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). Il vient

$$D = \frac{\Delta P}{\rho_0 g} = 10,33 \text{ m}$$

Si le fluide est du mercure  $\rho_0 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , on obtient  $D = 0,76 \text{ m}$ . Cette comparaison laisse déjà entrevoir pourquoi, pour mesurer des différences de pression à l'aide de dénivellations de fluides manométriques, on a souvent préféré utiliser des fluides de grande densité, comme le mercure, pour ne pas avoir à construire des appareils de taille prohibitive...

### 6.3.2 Applications

#### I - Machines hydrauliques

Considérons deux récipients  $R_1$  et  $R_2$  de forme cylindrique d'axe vertical et dont les surfaces de base ont pour aires  $S_1$  et  $S_2$  respectivement, avec  $S_1 < S_2$ . Ces deux récipients communiquent entre eux par un tube horizontal, comme l'indique la figure 4. Remplissons les récipients d'un liquide incompressible de densité  $\rho_0$  et fermons hermétiquement l'ensemble en disposant des pistons sur les surfaces du liquide dans chacun des récipients. Nous supposons que les masses des pistons peuvent être négligées dans les évaluations suivantes.

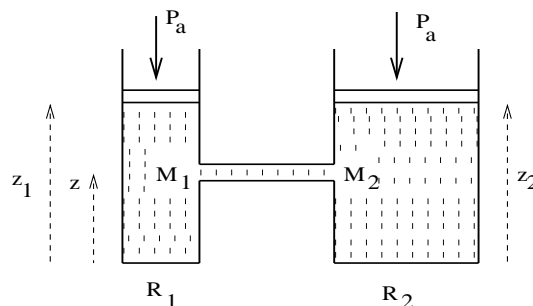


Figure 6.4

Montrons qu'à l'équilibre, les deux pistons sont à la même cote. Désignons par  $M_1$  un point de cote  $z$  situé dans le premier récipient  $R_1$ , au niveau du tube de communication, et par  $M_2$  le point de même cote situé dans le second récipient  $R_2$ , donc en face de  $M_1$ . Les pistons étant soumis à la pression

atmosphérique  $P_a$  sur leurs faces supérieures, la pression du liquide au niveau des pistons doit être égale à  $P_a$  dans un récipient comme dans l'autre, puisque les pistons sont à l'équilibre. D'après la relation fondamentale, la pression en  $M_1$  est

$$P_1 = P_a + \rho_0 g(z_1 - z)$$

$z_1$  étant la cote du piston du récipient  $R_1$ , et la pression en  $M_2$  est

$$P_2 = P_a + \rho_0 g(z_2 - z)$$

$z_2$  étant la cote du piston du second récipient  $R_2$ . Comme  $M_1$  et  $M_2$  sont à la même cote, la pression du liquide est la même en ces deux points. On a donc  $P_1 = P_2$ , d'où l'on déduit  $z_1 = z_2$ , comme annoncé : c'est le *théorème des vases communicants*!

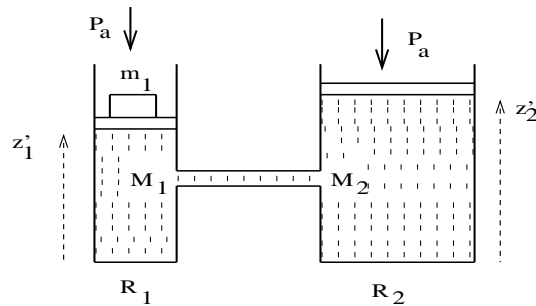


Figure 6.5

Disposons ensuite un corps de masse  $m_1$  sur le piston du premier récipient, et attendons l'équilibre. La pression s'exerçant sur la face supérieure du piston de  $R_1$  est alors  $P_a + m_1g/S_1$  et la pression en  $M_1$  est devenue

$$P'_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0 g(z'_1 - z)$$

$z'_1$  étant la nouvelle cote du piston de  $R_1$ . Tenant compte de ce que les pressions en  $M_1$  et  $M_2$  sont encore égales, l'application de la relation fondamentale au liquide de  $R_2$  donne :

$$P'_2 = P_a + \rho_0 g(z'_2 - z) = P'_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0 g(z'_1 - z)$$

On obtient ainsi

$$m_1g/S_1 = \rho_0 g(z'_2 - z'_1)$$

Les deux pistons sont maintenant à des cotes différentes, et leur écart est

$$z'_2 - z'_1 = \frac{m_1}{\rho_0 S_1}$$

Pour rétablir l'égalité des cotes des deux pistons, disposons sur le piston de  $R_2$  une masse  $m_2$ . A l'équilibre, les pressions en  $M_1$  et en  $M_2$  seront

$$P''_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0 g(z''_1 - z)$$

et

$$P''_2 = P_a + m_2g/S_2 + \rho_0 g(z''_2 - z)$$

respectivement. L'égalité des pressions en  $M_1$  et  $M_2$  donne

$$m_2g/S_2 + \rho_0 g z''_2 = m_1g/S_1 + \rho_0 g z''_1$$

Le rétablissement de l'égalité des cotes des deux pistons se fera donc en disposant sur le piston de  $R_2$  une masse égale à

$$m_2 = m_1 S_2 / S_1$$

On voit alors que par le jeu du rapport des surfaces, des corps de masses très différentes peuvent réaliser l'équilibre. Supposons par exemple que le rapport  $S_2/S_1$  soit de l'ordre de  $10^2$  : ceci peut être facilement réalisé en prenant pour  $R_1$  et  $R_2$  des cylindres dont les sections droites ont pour diamètre 30 cm et 3 m respectivement. Une masse de 1 kg disposée sur le piston de  $R_1$  suffit alors pour équilibrer une masse de 100 kg placée sur le piston de  $R_2$  !! Le principe des machines et des transmissions hydrauliques est fondé sur cette constatation.

Ayant réalisé cet équilibre, l'ajout de faibles masses sur le piston de  $R_1$ , ou ce qui revient au même, l'application d'une faible surpression sur ce piston suffit à déplacer une lourde charge placée sur le piston de  $R_2$ . Désignons par  $\Delta P$  cette surpression, par  $\Delta h_1$  la variation de cote du piston de  $R_1$  et par  $\Delta h_2$  celle du piston de  $R_2$ . Les calculs précédents montrent que l'on a

$$\Delta h_2 - \Delta h_1 = \frac{\Delta P}{\rho_0 g}$$

Or, la masse de fluide déplacée dans  $R_1$  se retrouve bien sûr dans  $R_2$ <sup>3</sup>. On a donc la relation

$$-\Delta h_1 S_1 \rho_0 = \Delta h_2 S_2 \rho_0$$

soit

$$-\Delta h_1 = \Delta h_2 S_2 / S_1$$

Les déplacements des deux pistons sont dans le rapport inverse de celui de leurs surfaces. Si, comme nous l'avons supposé, le rapport  $S_1/S_2$  est de l'ordre de 100, le déplacement du piston de  $R_1$  est donc 100 fois plus important que celui du piston de  $R_2$ . Ce dernier est approximativement donné par

$$\Delta h_2 \approx \frac{\Delta P S_1}{\rho_0 g S_2}$$

## II - Manomètres à colonnes liquides

Un manomètre<sup>4</sup> est un appareil servant à mesurer des pressions. Son principe de base repose également sur le théorème de Pascal. Nous avons vu dans le dispositif précédent que le déplacement du liquide incompressible est plus important dans le récipient de plus petite section droite. Ce fait est mis à profit dans les manomètres à colonne de liquide.

Si, dans le dispositif précédent, une surpression  $\Delta P$  (par rapport à la pression atmosphérique) est appliquée sur le piston de  $R_2$ , le déplacement consécutif du piston de  $R_1$  est donné par

$$\Delta h_1 \approx \frac{\Delta P}{\rho_0 g}$$

La mesure de  $\Delta h_1$  permet alors la mesure de  $\Delta P$ . Si cette augmentation de pression est due non pas à l'ajout de masses sur le piston de  $R_2$  mais plutôt à la pression exercée par un fluide sur ce piston, on voit que ce dispositif permet la mesure de la pression de ce fluide. C'est le principe du manomètre à mercure par exemple.

Dans le manomètre à "tube en U", un récipient contient le fluide étudié. Ce récipient est muni d'un tube en U contenant le fluide manométrique. D'après le schéma de la figure 6.6, on a les relations

$$P_M + \rho_f g h = P_a + \rho_F g H$$

où  $\rho_f$  et  $\rho_F$  sont les masses volumiques du fluide dont on veut mesurer la pression et celle du fluide manométrique, respectivement. On a ainsi

$$P_M = P_a + g (\rho_F H - \rho_f h)$$



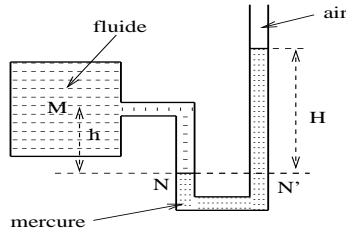


Figure 6.6

noindent Si le fluide étudié est un gaz, on peut admettre que  $\rho_f \ll \rho_F$  et l'on a approximativement

$$P_M = P_a + g\rho_F H$$

La *sensibilité* d'un manomètre est définie par le rapport du déplacement  $\Delta h$  de l'interface, consécutif à une variation  $\Delta P$  de pression

$$s = \frac{\Delta h}{\Delta P}$$

Dans les dispositifs précédents, on a

$$s = \frac{1}{g\rho_F}$$

$\rho_F$  étant, rappelons-le, la masse volumique du fluide manométrique.

On peut améliorer cette sensibilité de diverses manières.

Une astuce simple consiste à incliner par rapport à la verticale le tube prolongateur dans lequel le fluide manométrique s'élève, selon le schéma de la figure 6.7.

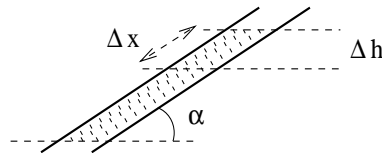


Figure 6.7

La lecture se fait sur le côté du tube. Comme on a

$$\Delta x = \frac{\Delta h}{\sin \alpha}$$

la sensibilité se trouve ainsi améliorée par le facteur  $1/\sin \alpha$ .

Un autre dispositif est le "micromanomètre" décrit par le schéma de la figure 6.8. La lecture se fait par un index mobile dans le tube de communication des deux récipients. Cet index est hermétique au fluide manométrique et isole donc les deux récipients. Une surpression  $\Delta P$  dans le récipient  $R_1$  provoque un déplacement  $\Delta x$  de l'index.

Les manomètres métalliques utilisent des ressorts creux et de formes diverses remplis d'air (tubes, membranes ou capsules scellées) dont les déformations sous l'effet de la pression à mesurer sont transmises mécaniquement à une aiguille se déplaçant devant un cadran gradué. Le plus connu est le manomètre de Bourdon.

<sup>3</sup>Nous reviendrons plus loin sur la loi de conservation de la masse

<sup>4</sup>Le premier manomètre à mercure fut construit en 1643 par Toricelli.

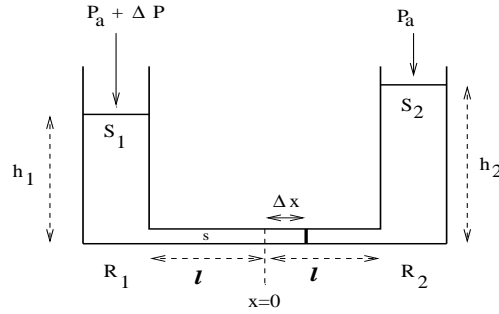


Figure 6.8

## 6.4 Théorème d'Archimède

### 6.4.1 Énoncé

Le théorème d'Archimède s'énonce ainsi :

*Tout corps immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de ce fluide à une force opposée au poids de la quantité de fluide déplacée.*

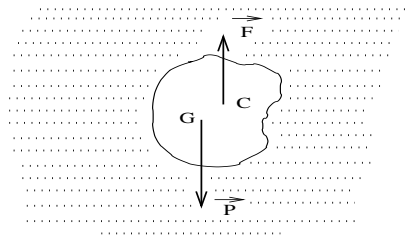


Figure 6.9

Il importe de bien remarquer que ce théorème ne s'applique que si le fluide est en équilibre *avant* immersion et *après* immersion du corps.

A l'intérieur du fluide à l'équilibre, considérons un certain volume  $V$  délimité par une surface de contrôle  $S$ . Ce volume est soumis de la part du fluide qui lui est extérieur des forces de pression de résultante  $\vec{F}_s$ . Comme le fluide est à l'équilibre dans le champ de pesanteur terrestre, ces forces de pression sont équilibrées par le poids  $\vec{P}_v$  de la quantité de fluide contenue dans  $V$ . Ainsi

$$\vec{F}_s = - \vec{P}_v$$

Lorsqu'on remplace la quantité de fluide considérée par un corps de même volume et de même forme, la surface du corps s'identifie à la surface de contrôle  $S$ . Pour le fluide à l'extérieur, il importe peu que cette surface soit celle d'une masse de fluide ou celle d'un corps immergé : il exerce sur cette surface les mêmes forces de pression, de même résultante  $\vec{F}_s$ . Ainsi, le corps se voit soumis de la part du fluide à une force dite *force de poussée d'Archimède*, égale à

$$\vec{F}_C = -\vec{P}_v$$

Notons tout de suite que cette force s'applique non pas au centre de gravité du corps immergé, mais au centre de gravité de la quantité de fluide déplacée, que l'on appelle *centre de poussée*. A l'équilibre, le centre de gravité du corps immergé et le centre de poussée sont sur la même verticale.

Le corps immergé sera donc soumis à son propre poids  $\vec{P}_C$  et à la poussée d'Archimède. Il aura donc dans le fluide un *poids apparent* égal à

$$\vec{P}_a = \vec{P}_C - \vec{P}_v = V(\rho_C - \rho_F) \vec{g}$$

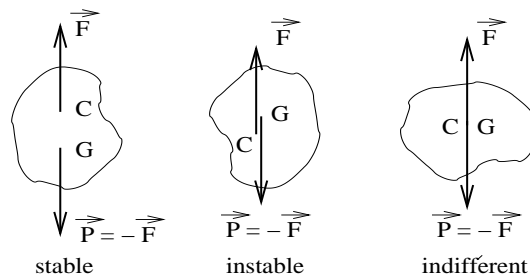


Figure 6.10

où  $V$  est le volume de fluide déplacé,  $\rho_C$  la masse volumique du corps,  $\rho_F$  celle du fluide.

On notera aussi que l'équilibre du corps n'est stable que si le centre de gravité du corps immergé est situé au-dessous du centre de poussée. Il est instable dans le cas contraire. Si le centre de gravité coïncide avec le centre de poussée, l'équilibre est indifférent.

### 6.4.2 Application : stabilité d'un corps flottant

Un corps solide hétérogène  $S$  est constitué de deux objets  $S_1$  et  $S_2$  en forme de parallélépipède rectangle, ayant une base commune  $\Sigma$  horizontale d'aire  $s$ . Le premier,  $S_1$ , constitue la partie inférieure de  $S$ . Il est fait d'un matériau de masse volumique  $\rho_1$  et a pour hauteur  $h_1$ . Le second,  $S_2$ , constitue la partie supérieure de  $S$ . Il est fait d'un autre matériau de masse volumique  $\rho_2$  et a pour hauteur  $h_2$ . Le corps  $S$  est plongé dans un liquide de masse volumique  $\rho_\ell$ . On suppose qu'à l'équilibre le corps est disposé comme l'indique la figure 6.11. Le milieu extérieur est l'air, de masse volumique  $\rho_a$ .

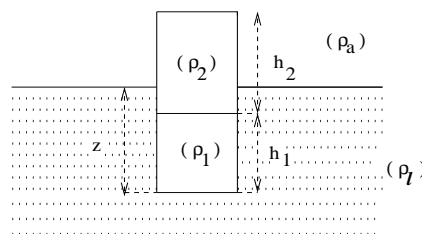


Figure 6.11

Soit  $z$  la profondeur à laquelle se trouve la base inférieure du corps dans le liquide. En toute rigueur, la poussée d'Archimède totale à laquelle est soumis le corps comprend :

♠ la poussée d'Archimède due au liquide déplacé :

$$\vec{F}_\ell = \rho_\ell s z \vec{e}_z$$

♠ la poussée d'Archimède due à l'air déplacé :

$$\vec{F}_a = \rho_a s (h - z) \vec{e}_z$$

où  $h = h_1 + h_2$ . Cependant, à cause de la faible valeur de la densité de l'air, cette dernière poussée est négligeable par rapport à la première et nous n'en tiendrons pas compte dans ce qui suit. A l'équilibre, le poids total du corps, égal à

$$\vec{P} = -gs(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \vec{e}_z$$

doit équilibrer cette poussée. On en déduit la valeur de la profondeur  $z$  :

$$z = \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell}$$

Une première condition évidente de réalisation d'un tel équilibre, pour lequel on suppose que le corps  $S$  n'est pas immergé est que la profondeur  $z$  reste inférieure à la hauteur totale  $h$  du corps, est  $z \leq h$ . Ceci implique que soit vérifiée la condition

$$\frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell} \leq h$$

ce qui donne ( $h_2 = h - h_1$ )

$$h_1(\rho_1 - \rho_2) \leq h(\rho_\ell - \rho_2)$$

Le centre de poussée  $C$  est le centre de gravité du liquide déplacé. Si  $O$  est le centre de la base inférieure du corps, la position de  $C$  est définie par

$$\vec{OC} = \frac{z}{2} \vec{e}_z$$

Quant au centre de gravité  $G$  du corps, sa position est définie par

$$\vec{OG} = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \left( m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 \right)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  sont les centres de gravité des objets  $S_1$  et  $S_2$  respectivement, dont les masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  sont

$$m_1 = \rho_1 s g h_1, \quad m_2 = \rho_2 s g h_2$$

Comme

$$\vec{OG}_1 = \frac{h_1}{2} \vec{e}_z, \quad \vec{OG}_2 = \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) \vec{e}_z$$

on a

$$\vec{OG} = \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)} \vec{e}_z$$

Le corps flottant ne sera en équilibre stable que si le centre de poussée  $C$  se trouve au-dessus du centre de gravité  $G$ . La stabilité de l'équilibre impose donc que l'on ait

$$z \geq \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

En reportant dans cette inéquation l'expression trouvée pour  $z$ , on en déduit la condition

$$\frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell} \geq \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2(2h_1 + h_2)}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

Posons  $u = h_1/h$ . On obtient alors l'inéquation

$$T(u) \geq 0$$

où  $T(u)$  est le trinôme

$$T(u) = u^2(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_2 - \rho_\ell) + 2u\rho_2(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2(\rho_2 - \rho_\ell)$$

Nous ne discuterons pas ici toutes les possibilités découlant de cette inéquation, qui dépendent non seulement des valeurs des masses volumiques, mais aussi de la taille des objets. Donnons deux exemples.

1°) L'objet  $S_1$  est fait de plomb, de masse volumique  $\rho_1 = 11,35 \text{ g/cm}^3$  et a pour hauteur  $h_1 = 3 \text{ mm}$ . L'objet  $S_2$  est fait de liège, de masse volumique  $\rho_2 = 0,24 \text{ g/cm}^3$  et a pour hauteur  $h_2 = 5 \text{ cm}$ . Le liquide est de l'eau ( $\rho_\ell = 1 \text{ g/cm}^3$ ). D'après les formules données ci-dessus, on obtient

$$z = 4,6 \text{ cm}; OC = z/2 = 2,3 \text{ cm}; OG = 0,84 \text{ cm}$$

L'équilibre, réalisable, est donc stable.

2°) L'objet  $S_1$  est fait de caoutchouc, de masse volumique  $\rho_1 = 0,91 \text{ g/cm}^3$  et a pour hauteur  $h_1 = 1 \text{ cm}$ . L'objet  $S_2$  est ici encore fait de liège et a pour hauteur  $h_2 = 3 \text{ cm}$ . Le liquide est aussi de l'eau. On obtient

$$z = 1,63 \text{ cm}; OC = z/2 = 0,815 \text{ cm}; OG = 1,38 \text{ cm}$$

L'équilibre, réalisable, est ici instable.

## 6.5 Aperçu d'Hydrodynamique

Comme en mécanique usuelle, la mécanique des fluides est traditionnellement séparée en deux parties. La première concerne la *cinématique* des fluides en mouvement. La question alors posée est celle de la recherche des variables pertinentes permettant de décrire les propriétés spatio-temporelles des écoulements des fluides. La seconde partie concerne la *dynamique* des fluides, où l'on s'intéresse aux causes provoquant ces écoulements, ainsi qu'aux équations d'évolution concernant certaines grandeurs comme la masse ou l'énergie.

### 6.5.1 Description de l'écoulement d'un fluide

Par rapport à la cinématique du point matériel ou celle d'un corps solide considéré comme un tout, il apparaît ici une différence majeure qui est la multitude de particules impliquées dans le mouvement d'un fluide.

Une première approche pour étudier un tel mouvement est celle de la mécanique usuelle. Envisageons l'écoulement d'un fleuve, tel que la Seine, et contemplons cet écoulement depuis le Pont-Neuf. Le regard est, malheureusement, très souvent attiré par certains immondices flottant sur ce superbe fleuve. Regardons passer un sac poubelle porté par le courant et établissons les lois horaires  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  de son mouvement, sans nous intéresser aux causes de ce mouvement, ni du reste à la raison de la présence du sac... Ceci fait, l'étude du mouvement du sac est aussi celle du mouvement des particules d'eau qui l'accompagnent. Cette façon d'analyser un écoulement fluide, qui consiste à répertorier les mouvements de toutes les particules de fluide, est appelée *méthode lagrangienne*<sup>5</sup>. Elle n'est pratiquement jamais utilisée car elle nécessite la connaissance des lois horaires de chaque particule de fluide, comprenant la connaissance des conditions initiales pour chacune d'entre elles, ce

<sup>5</sup>Du nom du physicien Lagrange.

qui est pratiquement inabordable. Cette approche, directement issue des méthodes d'analyse de la mécanique du point matériel, est donc peu pratique.

Une seconde approche, plus économique, est la suivante. Prenons tout d'abord une photo de l'écoulement à une date  $t$ . A supposer que cela soit réalisable, commençons par répertorier les vitesses des particules de fluide photographiées, en fonction de leurs positions. Cette collection des vitesses définira ce que nous appellerons *le champ des vitesses* de l'écoulement à la date  $t$ , soit  $\vec{V}(M, t)$ .

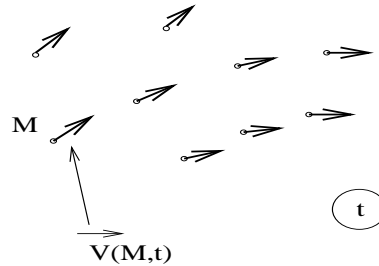


Figure 6.12

Supposons qu'en fait la photo soit un arrêt sur image d'une bande vidéo. Laissons défiler la bande et intéressons-nous plus particulièrement à ce qui se passe en un point  $M$ . Au cours du temps, défilent en ce point des particules de fluide différentes. Si la vitesse observée est différente d'une particule à l'autre, cette variation définira la variation temporelle du champ des vitesses en ce point, ce qui sera traduit par une dépendance explicite suivant la date d'observation  $t$  dans la notation  $\vec{V}(M, t)$ . Cette description de l'écoulement est appelée *méthode eulérienne*<sup>6</sup>.

Cette description est en fait plus avantageuse que la description lagrangienne lorsqu'il s'agit par exemple d'introduire des conditions aux limites en présence d'obstacles, et surtout elle correspond mieux à la vision globale que l'on a d'un écoulement. Le champ des vitesses  $\vec{V}(M, t)$  ainsi défini s'appelle le *champ eulérien des vitesses*.

Il faut prendre garde au fait que ce champ ne représente plus le vecteur vitesse d'une particule fluide donnée au cours du temps. En effet, le vecteur  $\vec{V}(M, t)$  correspond seulement au vecteur vitesse de la particule fluide qui passe au point  $M$  à la date  $t$ . Lorsque  $t$  évolue, la particule fluide est partie du point  $M$ , une autre est venue la remplacer à la date  $t'$ . La vitesse de cette nouvelle particule définit  $\vec{V}(M, t')$ , la valeur du champ des vitesses en  $M$  à la date  $t'$ .

On notera bien que dans cette description, les coordonnées spatiales et la date sont indépendantes. Le choix de leurs valeurs est laissé à l'arbitraire de l'observateur : il ne s'agit plus ici de *suivre* une particule fluide au cours de son mouvement, pour laquelle il y aurait une corrélation entre les coordonnées et le temps, corrélation caractérisée par les lois horaires définissant le mouvement de la particule en question.

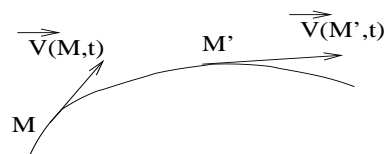


Figure 6.13

<sup>6</sup>Du nom du physicien Euler.

Comme pour tout champ de vecteurs, on est amené à définir à une date  $t$  donnée les lignes du champ des vitesses, qui portent ici le nom de *lignes de courant*. Ces lignes de champ diffèrent généralement des trajectoires des particules de fluide.

Prenons un exemple à deux dimensions. Soit dans le plan  $xOy$  le champ des vitesses de composantes cartésiennes

$$V_x = a, \quad V_y = bt$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes positives. Ce champ est à l'évidence indépendant des coordonnées d'espace : à une date  $t$  donnée, c'est un champ uniforme. Les lignes de champ sont des droites parallèles. Par exemple, à  $t = 0$ , ce sont des droites parallèles à l'axe des  $x$  puisqu'alors  $V_y = 0$ . A mesure que  $t$  augmente, la pente de ces droites, égale à  $V_x/V_y = bt/a$ , augmente jusqu'à donner, à la limite  $t \rightarrow +\infty$  des droites parallèles à l'axe des  $y$ . Ce champ n'est pas un champ stationnaire.

Les trajectoires des particules de fluide sont obtenues de la manière suivante. Pour la particule passant par le point  $(x, y)$  à la date  $t$ , on a

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = bt$$

ce qui donne, par intégration

$$x = at + x_0, \quad y = b\frac{t^2}{2} + y_0$$

$x_0$  et  $y_0$  étant deux constantes, correspondant aux coordonnées du point  $M_0(x_0, y_0)$  où se trouve la particule à la date  $t = 0$ . L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant  $t$  des équations horaires trouvées. Il vient

$$y = b\frac{t^2}{2} + y_0 = \frac{b}{2a^2}(x - x_0)^2 + y_0$$

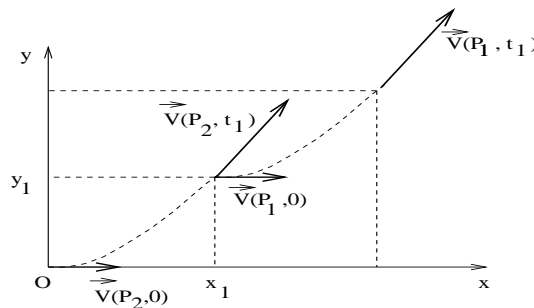


Figure 6.14

La relation  $y(x)$  qui définit la trajectoire indique que celle-ci est une parabole : les trajectoires des particules sont des paraboles, et sont donc très différentes des lignes de courant qui sont des droites.

Appelons  $P_1$  la particule de fluide qui à  $t = 0$  passe par le point  $M_1$  de coordonnées  $x_1$  et  $y_1 = \frac{b}{2a^2}x_1^2$

et dont les équations horaires sont donc  $x = at + x_1, y = b\frac{t^2}{2} + y_1$ . Soit  $P_2$  celle qui passe en  $O$  à

$t = 0$ , et dont les équations horaires sont  $x = at, y = b\frac{t^2}{2}$ . A  $t = 0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  ont pour vitesse

$$\vec{V} = a \vec{e}_x$$

tandis qu'à la date  $t'$  telle que  $t' = x_1/a$ , leur vitesse commune est

$$\vec{V} = a \vec{e}_x + \frac{bx_1}{a} \vec{e}_y$$

A ce moment, la particule  $P_2$  est au point de coordonnées

$$x = at' = x_1, \text{ et } y = \frac{b}{2a^2}x_1^2 = y_1$$

et est donc venue prendre la place qu'occupait  $P_1$  à la date  $t = 0$ , tandis que  $P_1$  s'en est allée au point  $M'$  de coordonnées

$$x' = at' + x_1 = 2x_1, \quad y' = \frac{b}{2a^2}(x' - x_1)^2 + y_1 = 2y_1.$$

Revenant au problème général, on démontre cependant que si l'écoulement est *stationnaire*, c'est-à-dire, finalement, si  $\vec{V}(M, t)$  est *indépendant du temps*, alors les lignes de courant et les trajectoires des particules sont confondues.

Nous ne considérerons par la suite que des écoulements stationnaires.

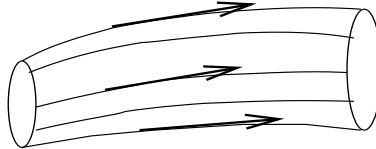


Figure 6.15

On appelle *tube de courant* une collection, en forme de gerbe, de lignes de courant. La surface latérale d'un tel tube est telle qu'en chacun de ses points le champ des vitesses lui est tangent. Les particules de fluide qui se trouvent dans un tube de courant *n'en sortent pas*, car sinon un vecteur vitesse d'une particule sur la surface du tube ne serait pas tangente à celle-ci, ce qui serait en contradiction avec la définition même d'un tube de courant. Un tube de courant ne conserve pas nécessairement une section droite constante : il peut se rétrécir ou s'élargir. Un tube de courant *élémentaire* possède une section droite infinitésimale sur laquelle on pourra considérer que le champ des vitesses est pratiquement constant.

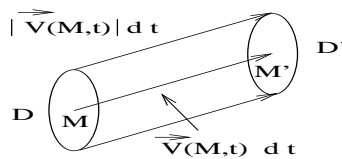


Figure 6.16

Donnons ensuite la définition du débit volumique. Pour cela, envisageons à l'intérieur du fluide une surface élémentaire d'aire  $dS$ , construite autour d'un point  $M$  et que, pour simplifier, nous assimilerons à un petit disque  $D$  de centre  $M$ . A partir d'une date  $t$ , comptons le nombre de particules qui passent à travers cette surface pendant un laps de temps infinitésimal  $dt$ . Etant au voisinage de  $M$  à la date  $t$ , ces particules ont toutes sensiblement la vitesse  $\vec{V}(M, t)$ . Si nous admettons qu'il n'y a pas de processus spontanés de création ou d'annihilation de particules, toutes les particules en question auront toutes parcouru la distance  $|\vec{V}(M, t)| dt$  et se retrouveront, à la date  $t + dt$ , dans le volume



délimité d'une part par le disque  $D$  et son translaté  $D'$  de centre  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}(M, t) dt$ , et d'autre part par une surface latérale s'appuyant sur les bords de  $D$  et  $D'$  (voir figure), donc parallèle à  $\overrightarrow{V}(M, t)$ , et de longueur  $|\overrightarrow{V}(M, t)| dt$ . Si nous notons  $\alpha$  l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{V}(M, t)$  avec la perpendiculaire à  $dS$ , ce volume a pour valeur

$$d\mathcal{V} = dS |\overrightarrow{V}(M, t)| dt \cos \alpha$$

et si nous notons  $n(M, t)$  le nombre de particules par unité de volume au voisinage de  $M$  à la date  $t$ , appelée aussi *densité particulaire*, le nombre de particules cherché est

$$dN = n(M, t) d\mathcal{V} = n(M, t) dS |\overrightarrow{V}(M, t)| dt \cos \alpha$$

Le *débit volumique* à travers  $dS$  est défini par

$$d\mathcal{D} = \frac{d}{dt} [d\mathcal{V}] = dS |\overrightarrow{V}(M, t)| \cos \alpha$$

Désignons par  $\overrightarrow{n_s}(M)$  le vecteur unitaire normal à  $dS$  en  $M$ . On a

$$d\mathcal{D} = dS \overrightarrow{V}(M, t) \cdot \overrightarrow{n_s}(M)$$

Cette formule se généralise au cas d'une surface quelconque finie : le débit volumique à travers une surface  $\Sigma$  est par définition

$$\mathcal{D}_\Sigma = \int \int_\Sigma \overrightarrow{V}(M, t) \cdot \overrightarrow{n_s}(M) d\Sigma$$

et le nombre de particules passant à travers  $\Sigma$  par unité de temps est

$$\frac{dN_\Sigma}{dt} = \int \int_\Sigma n(M, t) \overrightarrow{V}(M, t) \cdot \overrightarrow{n_s}(M) d\Sigma$$

### 6.5.2 Equations bilan en régime stationnaire

Nous nous intéresserons ici uniquement aux écoulements stationnaires de fluides *incompressibles*. Nous dirons ici qu'un fluide est incompressible si sa masse volumique est constante, à la fois par rapport aux coordonnées et par rapport au temps.

#### ♣ Conservation de la masse

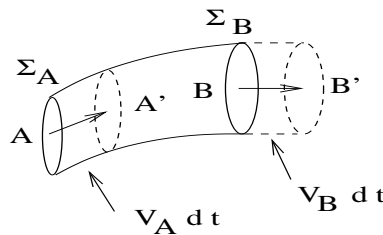


Figure 6.17

Considérons un tube de courant élémentaire délimité par deux sections droites  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  construites autour des points  $A$  et  $B$  respectivement, et d'aires respectives (infinitésimales)  $S_A$  et  $S_B$ . De part la définition du tube de courant, aucune particule ne s'y échappe par sa surface latérale. Comme la masse volumique est constante, cela signifie qu'il y a autant de particules (masses élémentaires) qui

rentrent dans le tube par sa section  $\Sigma_A$  que de particules qui en sortent par la section  $\Sigma_B$ . Effectuons explicitement un bilan de masse. Si l'on suit le fluide dans son mouvement, pendant le laps de temps  $dt$ , le point  $A$  est venu en  $A'$ , le point  $B$  en  $B'$ , de sorte que la quantité de fluide initialement contenue dans le tube de courant délimité par  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  et dont la masse sera notée  $M_{AB}(t)$  s'est transformée en celle contenue dans le tube de courant délimité par les sections droites construites autour des points  $A'$  et  $B'$  respectivement et dont la masse sera notée  $M_{A'B'}(t + dt)$ .

La loi de *conservation de la masse* conduit à écrire que

$$M_{AB}(t) = M_{A'B'}(t + dt)$$

Comme la masse volumique  $\rho$  est supposée constante, on a donc

$$M_{AB}(t) = \rho \mathcal{V}_{AB} = M_{A'B'}(t + dt) = \rho \mathcal{V}_{A'B'}$$

où  $\mathcal{V}_{AB}$  est le volume du tube de courant délimité par les sections droites  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$ ,  $\mathcal{V}_{A'B'}$  celui de son transformé à la date  $t + dt$ . On peut donc écrire

$$\mathcal{V}_{A'B'} = \mathcal{V}_{A'B} + \mathcal{V}_{BB'} = \mathcal{V}_{AB} = \mathcal{V}_{AA'} + \mathcal{V}_{A'B}$$

soit

$$\mathcal{V}_{BB'} = \mathcal{V}_{AA'}$$

Or

$$\mathcal{V}_{BB'} = V(B, t) dt S_B, \quad \mathcal{V}_{AA'} = V(A, t) dt S_A$$

où  $V(A, t)$  et  $V(B, t)$  sont les modules du champ des vitesses à la date  $t$  en  $A$  et  $B$  respectivement. On en déduit la relation

$$V(B, t) S_B = V(A, t) S_A$$

ce qui signifie qu'il y a *conservation du débit volumique le long d'un tube de courant*. Pour un fluide incompressible, cette loi de conservation est équivalente à la loi, plus générale, de conservation de la masse.

De cette loi de conservation on déduit notamment que la vitesse du fluide devient plus importante si la section droite du tube de courant se rétrécit :  $V_B > V_A$  si  $S_B < S_A$ .

### ♣ Conservation de l'énergie : théorème de Bernoulli

Effectuons un bilan similaire concernant cette fois l'énergie. Comme les fluides sur Terre sont toujours assujettis à l'action de la pesanteur terrestre, nous introduirons l'énergie potentielle de pesanteur dans le bilan énergétique. Ainsi, l'énergie mécanique totale  $E$  d'une quantité de fluide contenue dans un petit volume  $\mathcal{V}$  au voisinage d'un point  $M$ , comprendra :

- ♠ l'énergie cinétique  $\rho \mathcal{V} \frac{1}{2} V^2(M, t)$ , où  $V(M, t)$  est le module du champ des vitesses en  $M$  à la date  $t$  ;
- ♠ l'énergie potentielle de pesanteur  $\rho \mathcal{V} g z$  ;
- ♠ l'énergie interne  $U$  de cette quantité de fluide.

Considérons à nouveau le tube de courant du paragraphe précédent et évaluons la différence d'énergie

$$\Delta E = E_{A'B'}(t + dt) - E_{AB}(t)$$

Tout d'abord, en régime stationnaire on a

$$E_{A'B'}(t + dt) = E_{A'B'}(t)$$

Puis (en omettant la date  $t$ )

$$E_{A'B'} = E_{A'B} + E_{BB'} , E_{AB} = E_{AA'} + E_{A'B}$$

d'où

$$\Delta E = E_{BB'} - E_{AA'}$$

Or

$$E_{BB'} = U_{BB'} + \rho \mathcal{V}_{BB'} \frac{1}{2} V^2(B) + \rho \mathcal{V}_{BB'} g z_B$$

et

$$E_{AA'} = U_{AA'} + \rho \mathcal{V}_{AA'} \frac{1}{2} V^2(A) + \rho \mathcal{V}_{AA'} g z_A$$

Nous admettrons ici que l'on a affaire à des écoulements parfaits s'effectuant sans viscosité. Il n'y a alors aucun transfert de chaleur entre les diverses parties du fluide et dans ces conditions les énergies internes  $U_{BB'}$  et  $U_{AA'}$  sont les mêmes. Il vient alors

$$\Delta E = \rho \mathcal{V}_{BB'} \left[ \frac{1}{2} V^2(B) + g z_B \right] - \rho \mathcal{V}_{AA'} \left[ \frac{1}{2} V^2(A) + g z_A \right]$$

Cette différence d'énergie mécanique est égale à la somme des travaux que les forces extérieures au tube de courant exercent sur celui-ci entre les deux dates  $t$  et  $t + dt$ , hormis les forces de pesanteur qui ont déjà été prises en compte dans ce bilan par l'énergie potentielle de pesanteur. Il s'agit des forces de pression que les masses de fluide exercent sur le tube en amont de  $A$  et en aval de  $B$ . La force de pression agissant sur  $\Sigma_A$  est

$$\vec{F}_A = \vec{n}_A P_A S_A$$

où  $\vec{n}_A$  est la normale à  $\Sigma_A$ , parallèle à  $\vec{V}(A)$ . Dans le déplacement de  $A$  en  $A'$ , cette force développe le travail

$$W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{V}(A) dt = P_A S_A dt = P_A \mathcal{V}_{AA'}$$

De façon analogue, la force de pression agissant sur  $\Sigma_B$  est

$$\vec{F}_B = - \vec{n}_B P_B S_B$$

(attention au signe). Son travail dans le déplacement de  $B$  en  $B'$  est

$$W_B = \vec{F}_B \cdot \vec{V}(B) dt = - P_B S_B dt = - P_B \mathcal{V}_{BB'}$$

On a donc

$$\Delta E = W_A + W_B = P_A \mathcal{V}_{AA'} - P_B \mathcal{V}_{BB'}$$

Mais d'après la loi de conservation du débit volumique, les deux volumes  $\mathcal{V}_{BB'}$  et  $\mathcal{V}_{AA'}$  sont égaux. On en déduit

$$\Delta E = \mathcal{V}_{AA'} [ P_A - P_B ] = \rho \mathcal{V}_{AA'} \left[ \frac{1}{2} V^2(B) + g z_B - \frac{1}{2} V^2(A) - g z_A \right]$$

d'où la relation

$$\rho \frac{1}{2} V^2(B) + \rho g z_B + P_B = \rho \frac{1}{2} V^2(A) + \rho g z_A + P_A$$

qui constitue l'une des formes du *théorème de Bernoulli*. La densité  $\rho$  étant constante, ce théorème exprime que la quantité

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} V^2 + g z + \frac{P}{\rho}$$

reste constante le long d'une ligne de courant. On peut interpréter  $\mathcal{E}$  de la manière suivante. Le premier terme  $\frac{1}{2} V^2$  représente l'énergie cinétique de l'unité de masse du fluide. Le second terme  $g z$  est l'énergie potentielle de pesanteur de l'unité de masse. Le troisième terme  $\frac{P}{\rho}$  quant à lui peut être envisagé comme une énergie potentielle d'interaction de l'unité de masse du fluide avec le reste du fluide. Cette interprétation repose en particulier sur la relation

$$\vec{f}_v (M) = - \vec{\text{grad}} P(x, y, z)$$

donnant la force volumique de pression à l'intérieur du fluide comme le gradient de la pression. La pression joue donc le rôle d'une énergie potentielle par unité de volume, et  $\frac{P}{\rho}$  joue bien le rôle d'une énergie potentielle d'interaction pour l'unité de masse. Avec cette interprétation, on peut dire que le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie *totale*. Pour terminer, notons que dans le cas particulier d'un fluide au repos ( $V = 0$ ), le théorème de Bernoulli conduit immédiatement au théorème de Pascal.

### 6.5.3 Applications

#### I - Effet Venturi

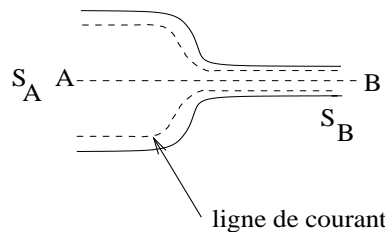


Figure 6.18

Il s'agit du phénomène consécutif à un rétrécissement d'une canalisation. Dans la figure ci-dessus, la vitesse du fluide est la même en tout point de la section droite passant par  $A$ , soit  $V_A$ . De même, la vitesse du fluide est la même en tout point de la section droite passant par le point  $B$ , soit  $V_B$ . La conservation du débit volumique permet d'écrire

$$V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}$$

et comme  $S_B < S_A$ , la vitesse du fluide en  $B$  est plus grande que sa vitesse en  $A$ . Les deux points  $A$  et  $B$  se trouvent sur une même ligne de courant et à la même altitude. Le théorème de Bernoulli permet d'exprimer la différence de pression qui résulte du rétrécissement

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho [ V_B^2 - V_A^2 ] = \frac{1}{2} \rho V_A^2 \left[ \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right] > 0$$

et qui est donc une *dépression*.

C'est l'association de ces deux phénomènes, accélération du fluide et dépression consécutives à un rétrécissement des lignes de courant du fluide, qui constitue l'effet Venturi. Cet effet est à l'origine de certains phénomènes relevant de la météorologie et est utilisé dans de nombreuses applications pratiques, telles que : les pulvérisateurs (pistolets à peinture notamment), les générateurs de vide à effet Venturi, certains instruments de médecine (aspirateurs de mucosités), les éoliennes. Il est également mis à profit en hydrothérapie et pour améliorer la tenue de route de voitures de course.

On trouvera sur le web de nombreux sites décrivant ces applications<sup>7</sup>. Une expérience très simple permet de mettre en évidence l'effet Venturi. Il suffit en effet de souffler entre deux feuilles de papier placées l'une en face de l'autre. Le souffle d'air entre les feuilles amoindrit la pression dans cette région par rapport à la pression que l'atmosphère exerce sur les autres faces des feuilles. Le résultat de cette différence de pression est que, contrairement à toute attente, les feuilles ont tendance à se rapprocher plutôt que de s'écarter.

## II - Formule de Toricelli

Considérons un réservoir d'eau de pluie de grande section droite constante  $\Sigma$ , dans le fond duquel est raccordée une canalisation de vidange horizontale, de section droite constante  $\sigma$ , petite devant  $\Sigma$  ( $\sigma \ll \Sigma$ ). Le réservoir étant rempli d'eau, on ouvre le robinet de vidange. Nous supposons qu'un régime permanent d'écoulement d'eau s'établit rapidement, et que cet écoulement peut être considéré comme stationnaire pendant la durée de l'observation. Nous admettrons que le champ des vitesses est uniforme sur toute section droite, aussi bien sur la surface libre de l'eau dans le réservoir (la vitesse est alors orientée selon la verticale descendante) qu'à la sortie de la canalisation (où la vitesse est orientée horizontalement).

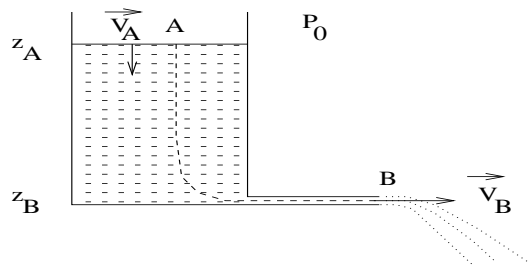


Figure 6.19

Lors de l'écoulement, il y a nécessairement une ligne de courant partant d'un point  $A$  sur la surface libre de l'eau dans le réservoir, où la vitesse d'écoulement est  $v_A$ , allant joindre un point  $B$  à la sortie de la canalisation, où la vitesse d'écoulement est  $v_B$  et où l'eau est à nouveau en contact avec l'atmosphère.

La conservation du débit d'eau permet d'écrire la relation

$$v_A = v_B \frac{\sigma}{\Sigma} \ll v_B$$

La vitesse d'écoulement de la surface libre de l'eau dans le réservoir est donc très petite par rapport à la vitesse à laquelle l'eau sort de la canalisation.

Appliquons ensuite le théorème de Bernoulli à la ligne de courant  $AB$ . La pression en  $A$  est égale à la pression atmosphérique  $P_0$ . En  $B$ , l'eau est à nouveau en contact avec l'atmosphère et la pression dans l'eau est aussi égale à  $P_0$ . On a donc

<sup>7</sup>Chercher par Google : effet Venturi

$$\frac{1}{2} V_A^2 + g z_A + \frac{P_0}{\rho} = \frac{1}{2} V_B^2 + g z_B + \frac{P_0}{\rho}$$

$\rho$  étant la masse volumique de l'eau. D'où

$$V_B^2 - V_A^2 = 2 g (z_A - z_B) = V_B^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\Sigma}\right)^2\right) \approx V_B^2$$

soit

$$V_B \approx \sqrt{2 g (z_A - z_B)}$$

C'est la célèbre formule de Toricelli. Elle indique que la vitesse de sortie de l'eau ne dépend que de la hauteur d'eau dans le réservoir. Par exemple, pour une hauteur d'eau de 5 m, cette vitesse vaut environ 10 m/s, soit 36 km/h.

### III - Portance des avions

L'aile d'un avion est un corps de grande longueur dont la section droite a une forme aérodynamique schématisée par la figure ci-dessous où l'on a aussi représenté qualitativement des lignes de courant de l'air s'écoulant autour des ailes de l'avion en vol. L'avion est supposé avoir une vitesse constante par rapport au référentiel terrestre, qu'on peut considérer comme galiléen. Pour étudier les lignes de courant des masses d'air autour de l'aile, nous nous placerons dans le référentiel lié à l'avion, lui aussi galiléen.

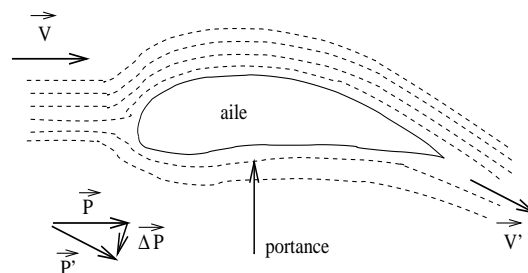


Figure 6.20

Le profil de l'aile est légèrement bombé sur la face du haut et plutôt plat sur la face du bas. L'air au contact de l'aile se trouve partagé en deux flux qui se rejoignent au bout de l'aile : l'un sur l'*extrados* (le dessus de l'aile) l'autre sur l'*intrados* (le dessous de l'aile). D'une façon générale, le profil de l'aile est tel qu'il provoque un resserment des lignes de courant sur l'*extrados* de l'aile. Autrement dit, les sections droites des tubes de courant sont plus faibles sur l'*extrados* de l'aile qu'elles ne sont loin en amont de l'avion. Cet effet est quasiment absent sur l'*intrados* de l'aile. Les débits d'air étant conservés le long d'un tube de courant, au-dessus comme en dessous de l'aile, ce resserment indique que la vitesse de l'air est plus grande au-dessus de l'aile qu'elle n'est en dessous. En fait, le flux d'air circulant sur l'*extrados* va plus vite que celui circulant sur l'*intrados*, car il a plus de trajet à parcourir. D'après le théorème de Bernoulli, il en résulte une diminution de pression au dessus de l'aile : la différence de vitesses engendre une différence de pressions. Globalement, l'aile est soumise à une force qui a tendance à la porter, donc à porter l'avion, et qui s'appelle la *portance*. La vitesse de l'avion a une grande influence sur la portance : plus l'air se déplace rapidement autour des ailes, plus la différence de pression sera grande et plus la portance sera forte. En outre, des calculs d'aérodynamique montrent que la répartition idéale de la portance le long d'une aile est obtenue par un profil elliptique.

On peut aussi analyser le phénomène en termes de quantité de mouvement de l'air, par unité de volume. Avant de circuler autour de l'aile, loin devant l'avion, cette quantité de mouvement est  $\rho \vec{V}$ , de direction horizontale. Derrière l'aile, elle est devenue  $\rho \vec{V}'$  et présente une composante suivant la verticale descendante. Du fait de la circulation de l'air autour de l'aile, il y a donc eu un transfert de quantité de mouvement de l'air, suivant la verticale descendante. Ce transfert est à l'origine d'une force exercée par l'air sur l'aile et qui est de sens opposé, donc suivant la verticale ascendante.