

Chapitre 3

Déformations et contraintes dans les milieux dilués

3.1 Déformations dans un solide

Dans un référentiel galiléen R , envisageons un corps solide S soumis à des contraintes mécaniques lui faisant subir des modifications de forme et de volume. Dans cette opération, le vecteur position initial $\vec{R}_a = \vec{OM}_a$ d'une "molécule" M_a du corps devient

$$\vec{r}_a = \vec{R}_a + \vec{\xi}(M_a)$$

où $\vec{\xi}(M_a)$ représente un champ de vecteur de déplacement. Les modifications du corps qui en résultent sont étudiées de façon appropriée en considérant à l'échelle locale la variation de l'écart entre deux molécules voisines M_a et M_b . Ces molécules sont suffisamment proches l'une de l'autre pour que l'on puisse considérer l'écart $\vec{M}_a\vec{M}_b = \vec{R}_b - \vec{R}_a = \Delta\vec{R}_{ab}$ comme infinitésimal et écrire (au plus bas ordre)

$$\delta(\Delta R_{ab}^k) = \xi^k(M_b) - \xi^k(M_a) \simeq \sum_{\ell} \frac{\partial \xi^k}{\partial R^{\ell}}(M_a) \Delta R_{ab}^{\ell} \quad (3.1)$$

Les quantités $T_{\ell}^k(M_a) = \frac{\partial \xi^k}{\partial R^{\ell}}(M_a)$ sont les composantes d'un champ tensoriel appelé *tenseur gradient du déplacement*. Il est important de noter que ce tenseur ne donne pas directement une description satisfaisante de ce que peut être une véritable déformation du corps. En effet, si celui-ci est animé en bloc d'un mouvement de translation-rotation, on a

$$\delta\vec{OM}_a = \delta t \left[\vec{V}_0(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{OM}_a \right], \quad \delta\vec{M}_b\vec{M}_a = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{M}_b\vec{M}_a, \quad \text{et}$$
$$T_i^j = \epsilon_{jki} \Omega^k$$

où l'on voit que le tenseur gradient du déplacement est ici directement lié à la rotation du corps, qui n'engendre aucune déformation de celui-ci. Cette constatation laisse à penser que dans des cas plus complexes, une partie dudit tenseur est associée à une rotation locale n'impliquant aucune déformation ou de variation de volume.

Physiquement, les déformations d'un solide se caractérisent par le fait que les distances entre ses molécules et l'angle entre deux directions attachées à ce solide vont changer. Ainsi, le produit scalaire $\vec{\Delta R}_1 \cdot \vec{\Delta R}_2$ de deux vecteurs infinitésimaux devient

$$\begin{aligned} \vec{\Delta R}'_1 \cdot \vec{\Delta R}'_2 &= [\Delta R_1^k + T_i^k \Delta R_1^i] [\Delta R_2^k + T_j^k \Delta R_2^j] = C_{ij} \Delta R_1^i \Delta R_2^j \quad \text{où} \\ C_{ij} &= [\delta_i^k + T_i^k] [\delta_j^k + T_j^k] = \delta_{ij} + T_i^j + T_j^i + T_i^k T_j^k \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le tenseur symétrique C_{ij} est le *tenseur de Cauchy-Green droit*, à partir duquel est défini le *tenseur de Green-Lagrange* :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [C_{ij} - \delta_{ij}] = \frac{1}{2} [T_i^j + T_j^i + T_i^k T_j^k] \quad (3.3)$$

Notons que le terme $T_i^k T_j^k$ n'est pris en considérations que pour de grandes déformations. Lorsque celles-ci sont petites, le tenseur (3.3) s'identifie à la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement. On a

$$\cos \theta'_{12} = \frac{\vec{\Delta R}'_1 \cdot \vec{\Delta R}'_2}{\sqrt{\Delta R_1'^2} \sqrt{\Delta R_2'^2}} = \frac{C_{ij} \Delta R_1^i \Delta R_2^j}{\sqrt{C_{ij} \Delta R_1^i \Delta R_1^j} \sqrt{C_{kl} \Delta R_2^k \Delta R_2^l}} = \frac{C_{ij} n_1^i n_2^j}{\sqrt{C_{ij} n_1^i n_1^j} \sqrt{C_{kl} n_2^k n_2^l}}$$

où \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les vecteurs unitaires portés par $\vec{\Delta R}_1$ et $\vec{\Delta R}_2$, respectivement. Si par exemple ces vecteurs sont les vecteurs de base \vec{e}_x et \vec{e}_y , on voit que leur angle est passé de $\pi/2$ à θ'_{xy} tel que

$$\cos \theta'_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx} C_{yy}}} = \sin \gamma_{xy} \quad (3.4)$$

où γ_{xy} est le complémentaire de θ'_{xy} , proche de zéro pour les petites déformations car alors

$$\gamma_{xy} \simeq \frac{1}{2} [T_x^y + T_y^x]$$

Les angles γ_{ij} , appelés aussi *glissements*, sont ainsi directement reliés aux éléments du tenseur C_{ij} .

D'un autre côté, le vecteur infinitésimal $\vec{\Delta R} = \Delta R \vec{n}$, où $\Delta R = \|\vec{\Delta R}\|$, est transformé en $\vec{\Delta R}' = \Delta R' \vec{n}'$ avec $\Delta R' = \|\vec{\Delta R}'\|$, tel que

$$\vec{\Delta R}' \cdot \vec{\Delta R}' = (\Delta R')^2 = C_{ij} \Delta R^i \Delta R^j = (\Delta R)^2 C_{ij} n^i n^j, \text{ soit } \Delta R' = \Delta R \sqrt{C_{ij} n^i n^j}$$

ce qui amène à définir l'élongation dans une direction \vec{n} comme

$$\ell(\vec{n}) = \frac{\Delta R' - \Delta R}{\Delta R} = \sqrt{C_{ij} n^i n^j} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{ij} n^i n^j} - 1 \quad (3.5)$$

On voit alors que les éléments diagonaux C_{xx} , C_{yy} et C_{zz} caractérisent les allongements dans les directions des axes de coordonnées, tandis que les éléments non-diagonaux C_{xy} , C_{xz} et C_{yz} caractérisent plutôt les glissements γ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz} .

La matrice E représentative du tenseur E_{ij} est symétrique, définie et positive. Elle est diagonalisable et ses valeurs propres e_1 , e_2 et e_3 , positives, définissent les élongations selon les axes principaux du tenseur

$$\ell_a = \sqrt{1 + 2e_a} - 1, \quad a = 1, 2, 3$$

tandis que les glissements γ_{ab} , γ_{bc} , γ_{ac} sont nuls.

Considérons maintenant quatre points voisins non alignés M_1 , M_2 , M_3 et M_4 et écrivons pour simplifier $\vec{M_1 M_2} = \vec{a}$, $\vec{M_1 M_3} = \vec{b}$, $\vec{M_1 M_4} = \vec{c}$. Le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} est le produit mixte

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita, tenseur de rang 3 complètement antisymétrique et tel que $\epsilon_{123} = 1$. Le volume après déformation est

$$\begin{aligned} V' &= \epsilon_{rst} (a^r + \delta a^r) (b^s + \delta b^s) (c^t + \delta c^t) \simeq V + \epsilon_{rst} (\delta a^r b^s c^t + a^r \delta b^s c^t + a^r b^s \delta c^t) \\ &= V + \epsilon_{rst} (T_p^r a^p b^s c^t + a^r T_p^s b^p c^t + a^r b^s T_p^t c^p) \\ &= V + T_p^r \epsilon_{rst} (a^p b^s c^t + a^t b^p c^r + a^s b^t c^p) \end{aligned}$$

Or, on montre que

$$\epsilon_{rst} (a^p b^s c^t + a^t b^p c^r + a^s b^t c^p) = \delta_p^r V$$

On obtient donc

$$\delta V = V' - V = V \delta_r^p T_p^r = T_r^r V \quad (3.6)$$

où nous avons effectué des changements de notation d'indices et tenu compte de l'antisymétrie complète du tenseur de Levi-Civita. La grandeur T_r^r est la trace du tenseur des déformations, égale à

$$T_r^r = \operatorname{div} \vec{\xi} \quad (3.7)$$

Cette relation est à rapprocher de (1.71).

On sait qu'un tenseur quelconque T_i^j se décompose de façon irréductible¹ en une somme de trois termes :

$$T_i^j = S_i^j + W_i^j + D_i^j$$

où :

- $S_i^j = \frac{1}{3} \delta_i^j T$, T étant la *trace* du tenseur,
- $W_i^j = \frac{1}{2} (T_i^j - T_j^i)$ est sa partie antisymétrique,
- $D_i^j = \frac{1}{2} \left(T_i^j + T_j^i - \frac{2}{3} \delta_i^j T \right)$ est sa partie symétrique telle que $D_k^k = 0$.

Identifions alors le type de modification associé à chacun de ces termes.

i) De (3.6) et (3.7), on déduit qu'au terme scalaire S_i^j correspond une *dilatation*, chacune des dimensions étant multipliée par le facteur $1 + \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{\xi}$. On a donc ici une dilatation uniforme qui change le volume *sans changer la forme*. La partie scalaire S est aussi appelée *partie sphérique* du tenseur T_j^i .

ii) Le tenseur W_i^j n'a que trois composantes non nulles, pouvant servir à définir un vecteur par l'opération usuelle²

$$W_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} W_{jk}, \quad \text{et} \quad W_{ij} = \epsilon_{ijk} W_k$$

Pour le champ des déplacements, ce vecteur est

$$W_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T_j^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial \xi^k}{\partial R^j}, \quad \text{soit} \quad \vec{W} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\xi} \quad (3.8)$$

1. Ce terme fait référence à la décomposition d'une représentation du groupe des rotations, ici un tenseur de rang 2, en représentations irréductibles de ce groupe, chacune associée à une valeur donnée du moment angulaire. Ainsi, S , V et D correspondent aux représentations irréductibles de moments angulaires 0, 1 et 2, respectivement.

2. Noter que l'indice "i" de W_i^j et de W_{ij} correspond à la dérivation ∂_i .

La transformation correspondante est

$$\delta(\Delta R^k) = V_\ell^k \Delta R^\ell = \epsilon_{\ell ks} W_s \Delta R^\ell = \epsilon_{ks\ell} W_s \Delta R^\ell, \text{ soit, sous forme vectorielle}$$

$$\delta(\vec{\Delta R}) = \vec{W} \wedge \vec{\Delta R} \quad (3.9)$$

Il s'agit donc d'une rotation autour d'un axe défini par $\frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{\xi}$ et dont l'angle est la norme de ce vecteur.

iii) Le tenseur D est symétrique, donc diagonalisable. Notons \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} ses vecteurs propres unitaires, correspondant aux valeurs propres réelles λ_a , λ_b et λ_c , respectivement. Elles sont liées par la relation $\text{Tr}D = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 0$. Le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme une base orthonormée qu'on suppose d'orientation directe. Un vecteur $\vec{\Delta R}$ peut être écrit sous la forme

$$\vec{\Delta R} = X_a \vec{a} + X_b \vec{b} + X_c \vec{c}$$

Sa variation par D est

$$\delta(\vec{\Delta R}) = D(\vec{\Delta R}) = \lambda_a X_a \vec{a} + \lambda_b X_b \vec{b} + \lambda_c X_c \vec{c}$$

et il devient

$$\vec{\Delta R}' = (1 + \lambda_a) X_a \vec{a} + (1 + \lambda_b) X_b \vec{b} + (1 + \lambda_c) X_c \vec{c}$$

Le résultat est donc la multiplication de la composante d'un vecteur $\vec{\Delta R}$ selon une direction propre de D par le facteur $(1 + \lambda)$ où λ est la valeur propre correspondant à cette direction.

Comme $\text{Tr}D = 0$, les volumes sont conservés par D , certes en grandeur, mais pas en forme. A cet égard, les surfaces ne sont pas conservées, ni en grandeur ni en forme. Le produit vectoriel $\vec{S} = \vec{\Delta R}_1 \wedge \vec{\Delta R}_2$, qui représente la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{\Delta R}_1$ et $\vec{\Delta R}_2$, voit sa composante le long d'un axe principal multipliée par $(1 - \lambda)$. Le tenseur D est appelé *déviateur*. Il provoque des distorsions, c'est-à-dire, des déformations *sans changement de volume*.

Rappelons que l'équation aux valeurs propres, ou équation caractéristique, d'une matrice 3×3 quelconque M est

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 \text{Tr}M + \lambda \frac{1}{2} [\text{Tr}M^2 - (\text{Tr}M)^2] + \det M = 0 \quad (3.10)$$

dont les coefficients sont bien sûr indépendants de la base choisie. On est ainsi amené à attribuer au tenseur gradient du déplacement les 3 invariants :

$$I_1 = \text{Tr} T, \quad I_2 = \frac{1}{2} [\text{Tr} T^2 - (\text{Tr} T)^2], \quad I_3 = \det T \quad (3.11)$$

3.2 Déformations dans un fluide en écoulement

L'analyse des déformations au sein d'un fluide en mouvement se fait à l'échelle mésoscopique, le déplacement $\vec{\xi}$ étant interprété comme celui d'une particule de fluide pendant un laps de temps infinitésimal δt , soit $\vec{\xi} = \vec{V} \delta t$, où \vec{V} est le champ des vitesses hydrodynamique. Après division par le facteur commun δt , les déformations seront comprises comme des *taux* de déformations, c'est-à-dire, des déformations *par unité de temps*. Il est clair que les déformations résultent ici de la non-uniformité du champ des vitesses. Considérant un écoulement stationnaire avec un champ des vitesses uniforme \vec{V}_0 , on constate l'absence de déformations en se plaçant dans un référentiel animé de la vitesse \vec{V}_0 par rapport à celui du laboratoire supposé galiléen, dans lequel le fluide est globalement au repos. L'analogie du tenseur gradient du déplacement étudié dans le cas d'un solide est ici

$$T_\ell^k = \frac{\partial V^k}{\partial x^\ell} \quad (3.12)$$

parfois appelé *tenseur du gradient de vitesse*. Il se décompose en une somme de trois termes :

$$T_\ell^k = S_\ell^k + \Omega_\ell^k + D_\ell^k \quad (3.13)$$

L'interprétation de chacun des termes est la suivante.

- $S_\ell^k = \delta_\ell^k \frac{1}{3} \text{div} \vec{V}$ est un terme diagonal décrivant une dilatation localement uniforme, en ce sens qu'elle est la même dans toutes les directions.
- $\Omega_\ell^k = \frac{1}{2} [T_\ell^k - T_k^\ell]$ est la partie antisymétrique du tenseur. On l'écrit sous la forme $\Omega_\ell^k = \epsilon_{k\ell s} \Omega^s$ où

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \quad (3.14)$$

est appelé le *vecteur tourbillon*, qui décrit localement une rotation pure autour de son axe. Le vecteur $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{V}$ est aussi appelé *vorticité* de l'écoulement.

- Le tenseur $D_\ell^k = \frac{1}{2} \left[T_\ell^k + T_k^\ell - \frac{2}{3} \delta_\ell^k \text{Tr} T \right]$ est la partie symétrique et de trace nulle du tenseur, appelée aussi *déviateur*. Elle décrit une déformation locale du fluide sans variation de volume qui peut être analysée comme il est fait dans le cas des déformations d'un solide.

Le lecteur trouvera dans l'Appendice A une illustration des transformations correspondant à chacun des termes introduits ci-dessus dans le cas d'un écoulement fluide à deux dimensions.

3.3 Tenseur des contraintes d'un fluide

Le tenseur des contraintes $\sigma_{k\ell}$ a été défini au chapitre 1 (formule 1.58). Selon les formules (1.36) et (1.51), il prend en compte à la fois des interactions entre constituants élémentaires et de leur agitation thermique. Ces processus à l'échelle microscopique ont pour résultat que sur la surface Σ d'une partie A quelconque d'un fluide s'exerce une force moyenne, due aux autres parties du fluide, ayant pour composantes (formule 1.59)

$$F_k = \int_{\Sigma} \sigma_{k\ell} u_\ell d\Sigma \quad (3.15)$$

où les u_ℓ sont les composantes du vecteur unitaire \vec{u} définissant la normale *sortante* au point considéré de la surface. Sur un élément de surface $d\Sigma$ s'exerce la force

$$dF_k = \sigma_{k\ell} u_\ell d\Sigma$$

qui n'est généralement pas orientée selon la normale à $d\Sigma$. Le tenseur des contraintes admet une décomposition similaire à celle du tenseur des contraintes (3.13), à ceci près que le terme antisymétrique n'apparaît pas car ledit tenseur est symétrique. Posons donc :

$$\sigma_{k\ell} = -\delta_{k\ell} P + \sigma'_{k\ell} \quad (3.16)$$

Dans cette décomposition, le terme isotrope en $\delta_{k\ell}$ fait intervenir la *pression mécanique* P . Il produit une force orientée suivant la normale à la surface de A . C'est le seul terme qui subsiste pour un fluide lorsque celui-ci est globalement au repos, la pression mécanique devenant alors la pression statique. Le terme anisotrope $\sigma'_{k\ell}$, lui aussi symétrique, représente le *tenseur des contraintes de viscosité* et donne par contre des forces *tangentielles* à la surface, nommées pour cette raison *forces de cisaillement*. Ces forces n'apparaissent pas lorsque le fluide est au repos, ce qui présage leur lien avec la vitesse hydrodynamique. Comme elles sont également inexistantes lorsque le fluide

est globalement en translation rectiligne uniforme³, ce lien ne peut être qu'avec les gradients de vitesses. En outre, supposées responsables de réelles déformations, elles ne doivent pas dépendre des combinaisons des gradients de vitesses qui n'en produisent pas, telles les combinaisons antisymétriques qui engendrent de simples rotations. Par conséquent, le tenseur σ'_{kl} doit s'exprimer uniquement en fonction des combinaisons symétriques des gradients de vitesses, c'est-à-dire, uniquement en fonction du tenseur

$$\mathbb{D}_{ij} = \frac{1}{2} [\partial_i V_j + \partial_j V_i]$$

Admettons que la fonction $\sigma'_{kl} [\mathbb{D}_{ij}]$ soit *analytique*. Si l'on peut considérer que le mouvement du fluide n'implique pas de trop grands gradients de vitesse, on peut alors entreprendre un développement limité de cette fonction. Remarquons qu'un développement général en série de Taylor ne doit inclure que les termes d'ordres impairs selon \mathbb{D} , car les déformations vont dans le même sens que les contraintes. Le terme de plus bas ordre du développement est donc celui du premier ordre, c'est-à-dire, un terme linéaire vis-à-vis de \mathbb{D} .

On appelle *fluides newtoniens* les fluides pour lesquels on peut se satisfaire d'une relation linéaire entre σ'_{kl} et \mathbb{D}_{ij} telle que

$$\sigma'_{kl} = A_{klij} \mathbb{D}_{ij}$$

où A_{klij} est un tenseur de rang quatre qui ne dépend que des propriétés du fluide isotrope, c'est-à-dire, qui est lui-même isotrope. Comme nous le montrons dans l'appendice B, un tel tenseur est nécessairement de la forme $A_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + A_2 \delta_{il} \delta_{jk} + A_3 \delta_{ij} \delta_{kl}$ où A_1 , A_2 et A_3 sont des grandeurs invariantes par rotation. Compte tenu de la symétrie de \mathbb{D} , on a alors

$$\begin{aligned} \sigma'_{kl} &= (A_1 + A_2) \mathbb{D}_{kl} + A_3 \delta_{kl} \text{Tr} \mathbb{D} \\ &= (A_1 + A_2) \frac{1}{2} \left[\partial_k V_l + \partial_l V_k - \frac{2}{3} \delta_{kl} \text{div } \vec{V} \right] + \left\{ A_3 + \frac{1}{3} (A_1 + A_2) \right\} \delta_{kl} \text{div } \vec{V} \end{aligned} \quad (3.17)$$

relation couramment écrite sous la forme

$$\boxed{\sigma'_{kl} = 2\eta D_{kl} + \zeta \delta_{kl} \text{div } \vec{V}} \quad (3.18)$$

$$\text{où } D_{kl} = \frac{1}{2} \left[\partial_k V_l + \partial_l V_k - \frac{2}{3} \delta_{kl} \text{div } \vec{V} \right],$$

3. Car le fluide est au repos dans le référentiel galiléen qui l'accompagne.

Cette expression est analogue à celle du tenseur des contraintes dans les corps solides, que l'on déduit en faisant, là aussi, l'approximation de petites déformations (loi de Hooke)⁴. On vérifie que le coefficient η dans (3.18) est bien la viscosité du fluide introduite au chapitre 2. En effet, pour l'écoulement d'un fluide unidirectionnel suivant Ox avec une vitesse V_x ne dépendant que de la variable y , ne subsiste de (3.18) que la seule composante $\sigma'_{xy} = \eta \partial_y V_x$, donnant la force par unité de surface s'exerçant sur le fluide $F_x = -\sigma'_{xy} = -\eta \partial_y V_x$ conformément à (2.14); η est aussi appelé *viscosité dynamique*.

Le second coefficient ζ dans (3.18), associé aux variations de volume, est appelé *deuxième viscosité* ou *viscosité de volume*. Dans l'étude des écoulements de fluides, l'*hypothèse de Stokes*, couramment utilisée, consiste à poser $\zeta = 0$. Par contre, ce coefficient ne peut être ignoré dans la propagation d'ondes sonores dans un fluide où il joue un rôle important dans l'atténuation des ondes.

A ce propos, il a été dit à la fin du chapitre 1 que la viscosité est cause de déperdition d'énergie. Nous pouvons maintenant être plus précis. D'après (1.80), le terme de dissipation correspondant fait intervenir le produit tensoriel $\sigma'_{kl} \mathbb{D}_{kl}$, qui doit être positif, quel que soit le type de mouvement. Utilisant (3.18), on obtient

$$\sigma'_{kl} \mathbb{D}_{kl} = 2\eta \mathbb{D}_{kl} \mathbb{D}_{kl} + \left[\zeta - \frac{2\eta}{3} \right] (\operatorname{div} \vec{V})^2 \quad (3.19)$$

En imposant la positivité de chacun des deux termes de cette expression, on trouve

$$\eta > 0, \quad \mu = \zeta - \frac{2\eta}{3} > 0, \quad \text{et donc} \quad \zeta > 0 \quad (3.20)$$

3.4 Faits expérimentaux sur la viscosité

La viscosité d'un fluide dépend de plusieurs facteurs : la nature du fluide, son comportement selon le type d'écoulement, la pression et la température.

3.4.1 Les fluides newtoniens

Les fluides newtoniens sont ceux dont la viscosité est indépendante de l'intensité du cisaillement qui leur est appliqué. Les exemples sont nombreux : la plupart des gaz, l'air ; l'eau, le miel, les solutions aqueuses, les huiles de faible viscosité, des solvants. L'influence de la pression et de la température sur les gaz et les liquides a déjà été mentionnée au chapitre 2. Le lecteur trouvera ci-après quelques données expérimentales.

4. Voir par exemple : L. Landau, E. Lifchitz, "Théorie de l'élasticité", Ed. Mir, 1967.

Substance	Température (°C)	Viscosité (Pa · s)
Air	20	$1,8 \times 10^{-5}$
Diazote	20	$1,3 \times 10^{-5}$
Dihydrogène	20	$2,7 \times 10^{-4}$
Eau	0	$1,753 \times 10^{-3}$
	20	$1,005 \times 10^{-3}$
	50	$0,535 \times 10^{-3}$
	100	$0,277 \times 10^{-3}$
Vapeur d'eau	100	$1,3 \times 10^{-5}$
Acétone	20	$3,2 \times 10^{-4}$
Essence	20	6×10^{-4}
Mercure	20	$1,6 \times 10^{-3}$
Miel	20	6 à 10

Notons aussi certaines formules empiriques donnant la viscosité en fonction de la température Kelvin T , pour l'air :

$$\eta = 8,8848 \times 10^{-15}T^3 - 3,2398 \times 10^{-11}T^2 + 6,2657 \times 10^{-8}T + 2,3543 \times 10^{-6}$$

et pour la vapeur d'eau (Speyerer, 1923)⁵

$$\eta = 125,4 \times 10^{-7} + 3,711 \times 10^{-8}(T - 373)$$

3.4.2 Les fluides non newtoniens

La *Rhéologie* est une partie de la mécanique des milieux continus qui a pour but d'établir des lois de comportement de matériaux soumis à des contraintes, notamment des fluides non-newtoniens. Ces derniers sont des fluides pour lesquels il n'y a pas de relation linéaire et instantanée entre les contraintes et les gradients de vitesse. Leurs comportements sont très divers.

5. H. Speyerer, Keit. für techn. Physik, 4 (1923) 430.

- Les *plastiques de Bingham* ne peuvent s'écouler si la contrainte est inférieure à une valeur critique. Au-delà de cette valeur, le fluide s'écoule en gardant une viscosité constante. Exemples : ciment frais, boues de forage, mais aussi le beurre...
- Les fluides *pseudo-plastiques ou rhéofluidifiants* s'écoulent même pour de faibles contraintes. Leurs viscosités qui peuvent être initialement élevées diminuent lorsque la contrainte augmente. Exemples : peintures, encre d'imprimerie, mais aussi la mayonnaise, le ketchup...
- Les fluides *dilatants* sont des fluides dont la viscosité augmente avec la contrainte ; exemples : certaines solutions de polymères et... le sable mouillé.
- Les fluides *thixotropes* ont une viscosité qui diminue avec le temps sous l'effet d'une contrainte constante qui fait évoluer sa structure.

Les corps plastiques

Les fluides anti-thixotropes

3.5 Appendices

3.5.1 A : Déformations à deux dimensions

Afin d'illustrer les conclusions de la section (3.2), envisageons un écoulement bi-dimensionnel dans le plan (xy) . Le tenseur gradient du déplacement $T_{ij} = \partial_i V_j$ s'écrit sous forme matricielle comme

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix}$$

et, à l'instar de (3.13), se décompose de façon unique en somme d'un terme scalaire

$$S = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma = \frac{1}{2} [T_{xx} + T_{yy}] \delta t$$

d'un terme antisymétrique

$$\Omega = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2} [T_{xy} - T_{yx}] \delta t$$

et d'un terme symétrique de trace nulle

$$D = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \beta_1 = \frac{1}{2} [T_{xx} - T_{yy}] \delta t, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} [T_{xy} + T_{yx}] \delta t$$

Une dilatation pure correspond à $T_{xy} = T_{yx} = 0$, $T_{xx} = T_{yy} = \gamma$, auquel cas seul subsiste le terme scalaire. Dans ce cas, un rectangle $OABC$ voit ses dimensions linéaires multipliée par le même facteur γ , comme indiqué à la figure A1 où l'on a exagérément choisi $\gamma = 1/2$.

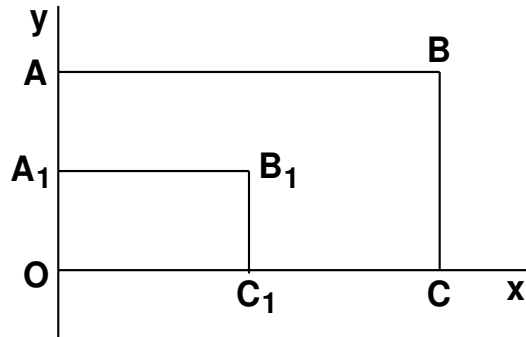


Figure A1

Une rotation pure correspond à $T_{xx} = T_{yy} = 0$, $T_{xy} = -T_{yx} = \alpha/\delta t$, auquel cas seul subsiste le terme Ω . Le vecteur \vec{MN} de composantes cartésiennes Δx et Δy varie de

$$\delta \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \Delta y \\ -\Delta x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

où l'expression finale de cette variation a été décomposée en deux parties.

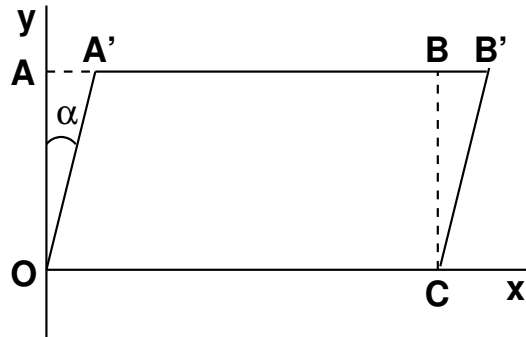


Figure A2

La première correspond à un glissement le long de l'axe des x des vecteurs de séparation tels que $\Delta y \neq 0$, figure A2, et la seconde à un glissement le long de l'axe des y des vecteurs de séparation tels que $\Delta x \neq 0$, figure A3.

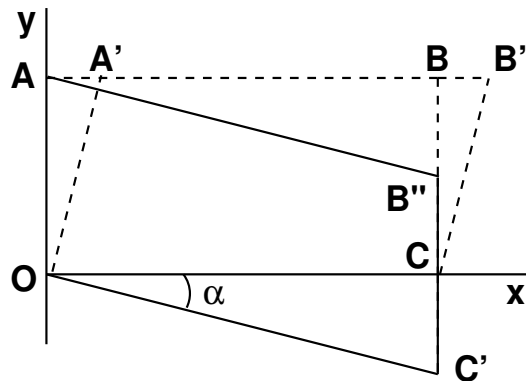


Figure A3

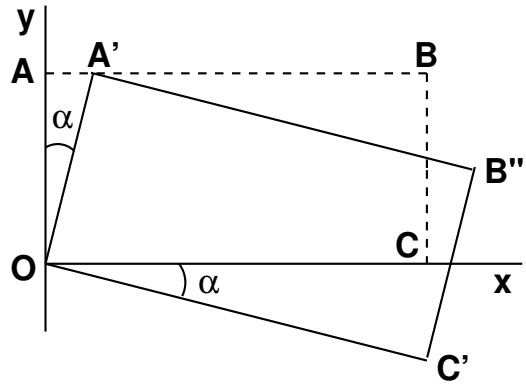


Figure A4

L'association de ces deux déplacements par une simple somme (et non par une succession résultant d'une composition de transformations, Δx et Δy restant les mêmes) équivaut à une rotation. Dans les figures ci-dessus, on a supposé les déplacements suffisamment petits, de telle sorte que $\tan \alpha \simeq \alpha$ (pour cela, il suffit de considérer que le déplacement s'effectue en un laps de temps δt suffisamment petit).

Enfin, une déformation pure correspond à $T_{xx} = -T_{yy} = \beta_1/\delta t$, $T_{xy} = T_{yx} = \beta_2/\delta t$, cas ne laissant subsister que le terme D . On a alors

$$\delta \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta y \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

S'il était seul, le premier terme avec β_1 correspondrait à une *déformation élongationnelle*, figure A5, où $(OABC)$ est changé en $(OA_2B_2C_2)$: $(\Delta x)' = (1 + \beta_1)\Delta x$, $(\Delta y)' = (1 - \beta_1)\Delta y$. On note qu'alors $(\Delta x)'(\Delta y)' = \Delta x\Delta y(1 - \beta_1^2) \simeq \Delta x\Delta y$ au second ordre près, comme il se doit puisque dans ce cas $\text{div } \vec{V} = 0$.

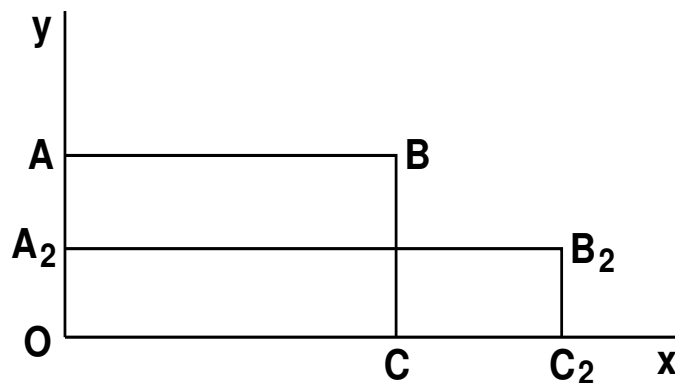


Figure A5

S'il était seul, le second terme avec β_2 correspondrait à un *cisaillement* pur. On a alors $T_{xx} = T_{yy} = 0$, $(\Delta x)' = \Delta x + \beta_2 \Delta y$, $(\Delta y)' = \Delta y + \beta_2 \Delta x$. Le résultat de cette opération est représenté à la figure A6, où le rectangle $OABC$ devient le parallélogramme $OA_3B_3C_3$. On a en effet

$$\vec{OA}_3 = y_A \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{OC}_3 = x_C \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{C}_3\vec{B}_3 = y_B \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3\vec{B}_3 = x_B \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \vec{C}_3\vec{B}_3 = \vec{OA}_3, \quad \vec{A}_3\vec{B}_3 = y_B = y_A, \quad \vec{OC}_3, \quad \text{puisque } y_B = y_A, \quad x_B = x_C$$

Comme

$$|\vec{OC}_3 \wedge \vec{OA}_3| = |x_C y_A (1 - \beta_2^2)|$$

on vérifie que $OA_3B_3C_3$ a la même surface que $OABC$, au second ordre près en β_2 .

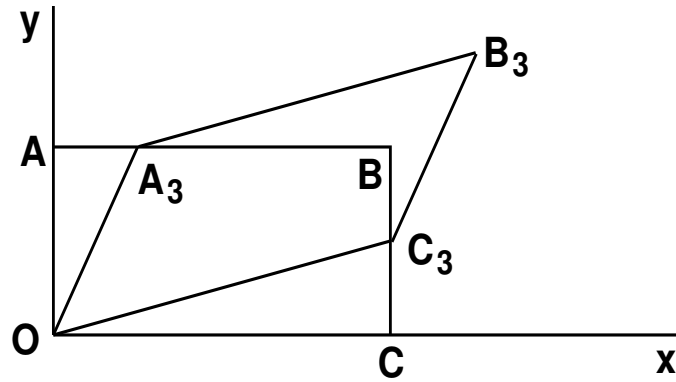


Figure A6

L'association des deux termes en β_1 et β_2 donne

$$\delta CB = y_B \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} = \delta OA, \quad \delta OC = x_C \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \delta AB, \quad \text{et}$$

$$\vec{OC}_4 = x_C \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \vec{A}_4\vec{B}_4, \quad \vec{OA}_4 = y_A \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 1 - \beta_1 \end{pmatrix} = \vec{C}_4\vec{B}_4$$

soit la transformation du rectangle $OABC$ en parallélogramme $OA_4B_4C_4$ de même surface, représentée à la figure A7.

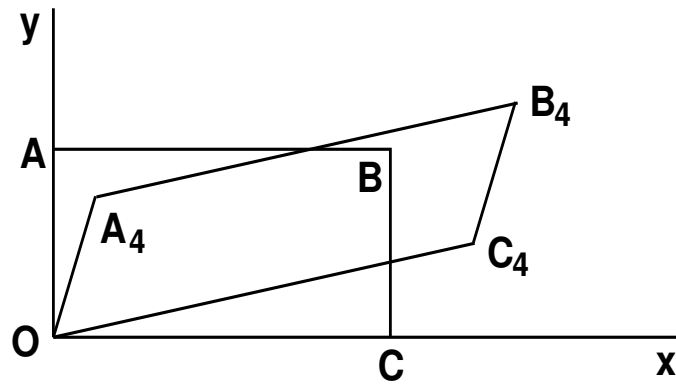


Figure A7

3.5.2 B : Justification de la formule 3.17

Le problème est en fait le suivant. Etant donné un tenseur de rang 4 de composantes A_{ijkl} où les indices courent de 1 à 3, quelle est sa partie invariante par rotation ? Du point de vue de la théorie des groupes, un tel tenseur est un élément de l'espace produit tensoriel de quatre représentations vectorielles du groupe des rotations : $[1] \otimes [1] \otimes [1] \otimes [1]$, chacune associée à un moment angulaire, ou spin, égal à 1. Cette représentation se décompose en représentations irréductibles dudit groupe selon une règle bien connue que l'on peut mener à bien comme suit. Le produit tensoriel de deux représentations $[J]$ et $[J']$ a pour décomposition

$$[J] \otimes [J'] = \sum_{L=|J-J'|}^{J+J'} [L]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} [1] \otimes [1] &= [0] \oplus [1] \oplus [2] \quad \text{et} \\ [1] \otimes [1] \otimes [1] \otimes [1] &= [[0] \oplus [1] \oplus [2]] \otimes [[0] \oplus [1] \oplus [2]] = [0] \otimes [0] \oplus [0] \otimes [1] \oplus \dots \\ &= (3[0]) \oplus (6[1]) \oplus (6[2]) \oplus (3[3]) \oplus [4] \end{aligned}$$

où l'on voit que la représentation $[0]$, qui est celle des grandeurs invariantes par rotation, intervient 3 fois dans la décomposition. Il n'y a donc que trois façons d'obtenir des invariants à partir du tenseur A_{ijkl} . Pour les découvrir, il suffit de considérer le tenseur $B_{ijkl} = a_i b_j c_k d_\ell$, produit tensoriel des quatre vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} et \vec{d} . Il est évident que la seule façon d'obtenir des invariants à partir de ces vecteurs est d'effectuer leurs produits scalaires deux à deux, ce qui donne les seules trois possibilités

$$\begin{aligned} I_1 &= (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}), \quad I_2 = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}), \quad I_3 = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}), \quad \text{soit} \\ I_1 &= \delta_{ij} \delta_{kl} B_{ijkl}, \quad I_2 = \delta_{ik} \delta_{jl} B_{ijkl}, \quad I_3 = \delta_{il} \delta_{jk} B_{ijkl} \end{aligned}$$

d'où l'on tire que ce sont les trois tenseurs indépendants $\delta_{ij} \delta_{kl}$, $\delta_{ik} \delta_{jl}$ et $\delta_{il} \delta_{jk}$ qui engendrent l'ensemble des trois représentations invariantes de la décomposition ci-dessus. Vérifions l'invariance de ces tenseurs. Effectuant une rotation R , $\delta_{ij} \delta_{kl}$ a pour transformé

$$R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{\ell'\ell} \delta_{ij} \delta_{kl} = (R^t R)_{i'j'} (R^t R)_{k'\ell'} = \delta_{i'j'} \delta_{k'\ell'}$$

car $R^t R = 1$. Ce tenseur est donc bien invariant. Il en est de même pour les deux autres qui sont obtenus par permutation des indices du premier. Tout tenseur de rang 4 invariant par rotation est donc de la forme $A_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + A_2 \delta_{il} \delta_{jk} + A_3 \delta_{ij} \delta_{kl}$ où A_1 , A_2 et A_3 sont des grandeurs scalaires, c'est-à-dire, invariantes par rotation.