

Chapitre 4

Statique des fluides

4.1 Equilibre d'un fluide dans un champ de forces extérieur et sa stabilité

4.1.1 Equation fondamentale

Un fluide placé dans un champ de forces extérieur est en équilibre si le champ des vitesses hydrodynamique y est partout nul. D'après l'équation de diffusion (1.55), il en résulte qu'en tout point, le champ de pressions, alors statique, vérifie l'équation

$$\partial_\ell P_{k\ell} = n F_k \quad (4.1)$$

Si de plus la région du fluide observée est isotrope, le champ de pressions se réduit à sa partie scalaire : $P_{k\ell} = \delta_{k\ell} P$ où P est la pression statique dont l'expression en fonction des coordonnées dépend du champ de forces appliqué. Dans ce cas, l'équation (4.1) devient¹

$$\vec{\text{grad}} P = n \vec{F} \quad (4.2)$$

De la relation (4.2), on tire les conclusions suivantes.

- En l'absence de champ extérieur, la pression est la même partout dans le fluide.

1. Le principe fondamental de l'Hydrostatique définissant les conditions d'équilibre d'une masse de fluide a été énoncé par A-C Clairaut : *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'Hydrodynamique*, Durand, Paris, 1743. Voir aussi : I. Passeron, *Clairaut et la figure de la Terre au XVIII^e siècle, cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse, Paris 7, 1994.

- Un fluide ne peut être au repos que si la force $n \vec{F}$ dérive d'un potentiel.
- Si le champ extérieur \vec{F} dérive d'un potentiel $\Psi(M)$ ($\vec{F} = - \vec{\text{grad}} \Psi$), les surfaces équipotentielles $\Psi(M) = \text{constante}$ sont aussi des isobares, le vecteur $\vec{\text{grad}} P$ étant partout colinéaire à $\vec{\text{grad}} \Psi$.

Notons que dans ce dernier cas, l'équation d'équilibre

$$\vec{\text{grad}} P = -n \vec{\text{grad}} \Psi \quad (4.3)$$

ne peut être intégrée que si l'on connaît la fonction $n(M)$. Dans le cas des fluides compressibles tels que les gaz, il faut alors tenir compte de l'équation d'état qui relie cette densité à la pression et la température. Cette dépendance peut être en partie évaluée au moyen du *coefficient de compressibilité isotherme* du fluide étudié, défini comme le rapport, à température constante, de la diminution *relative* de volume à l'augmentation de pression, soit

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_T$$

La compressibilité des liquides est généralement négligeable, même pour des pressions élevées. Ainsi, χ_T est de l'ordre de 10^{-5} Pa^{-1} pour les gaz, alors que pour l'eau liquide par exemple, il vaut $4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ à 20°C . Il en résulte qu'une augmentation de pression de 10 atmosphères ($\Delta P = 10^6 \text{ Pa}$) n'entraîne qu'une variation relative d'un volume d'eau de l'ordre de 4 dix-millièmes!! En revanche, la variation relative d'un volume d'air serait alors de l'ordre de 10...

Un fluide est dit *incompressible* si sa masse volumique, et donc aussi sa densité numérique n , peuvent être considérées comme constantes partout dans le fluide. On peut alors écrire

$$P(M) + n\Psi(M) = \text{constante} \quad (4.4)$$

Pour une raison évidente, c'est le plus souvent le champ de pesanteur terrestre qui doit être considéré.

4.1.2 Sur la stabilité de l'équilibre²

Pour tester la stabilité de l'équilibre envisagé plus haut, on imagine le déplacement virtuel d'une particule de fluide depuis sa position d'équilibre M_e vers un point voisin M' qui serait une position d'équilibre M'_e pour cette particule si à la fin de l'opération les paramètres définissant son état prenaient les valeurs adéquates pour qu'il en soit ainsi. Cependant, pour ne pas perturber l'équilibre thermodynamique de l'ensemble du fluide, le déplacement doit être réversible et ne doit impliquer que des échanges d'énergie d'origine mécanique; autrement dit, il doit s'agir d'une transformation infinitésimale réversible et adiabatique, soit encore *isentropique*. De ce fait, les paramètres finals de la particule ne correspondent pas à ceux de M'_e et l'on doit vérifier que les inévitables efforts s'exerçant alors sur elle tendent à la ramener vers sa position d'équilibre initiale M_e . D'après (1.55), la force totale s'exerçant sur la particule en M' , est

$$\mathbb{F}_k = m \frac{DV'_k}{Dt} = F'_k - \frac{1}{n'} \partial_\ell P'_{k\ell}$$

alors que si elle était en équilibre en M'_e on aurait

$$\partial_\ell P'_{k\ell} = n'_e F'_k$$

Le déplacement revient donc au remplacement par n' de la valeur d'équilibre n'_e de la densité moléculaire. Il vient

$$\mathbb{F}_k = \left(\frac{1}{n'_e} - \frac{1}{n'} \right) n'_e F'_k = \frac{v' - v'_e}{v'_e} F'_k$$

où la lettre v représente le volume de la particule. La position M_e n'est une position d'équilibre stable que si

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{F}} \cdot \vec{\Delta M} < 0, \quad \text{où} \quad \vec{\Delta M} = \vec{M_e M'}, \quad \text{soit} \\ (v'_e - v') \vec{F}' \cdot \vec{\Delta M} < 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Prenons pour exemple celui d'un fluide dans le champ de pesanteur terrestre supposé constant : $\vec{F} = -mg \vec{e}_z$. La condition de stabilité s'écrit ici

$$(v'_e - v') \Delta z > 0$$

2. L. Landau, E. Lifchitz : "Mécanique des fluides", Ed. Librairie du globe, Ed. Mir, 2nde édition, 1989, §1.4.

ce qui revient à dire que la particule doit être plus lourde pour $\Delta z > 0$ et plus légère pour $\Delta z < 0$. Les données de la particule à l'état initial $M_e(z)$ et à l'état final $M'(z + \Delta z)$ de la transformation virtuelle sont les suivantes :

au point d'équilibre M_e : pression d'équilibre $P_e(z)$, entropie $S(z) = S$;

au point M' : pression P'_e , entropie S .

Au point d'équilibre M'_e , la pression est $P'_e = P_e(z + \Delta z)$, et l'entropie est $S' = S_e(z + \Delta z)$. Donc $v'_e = v(P'_e, S'_e)$, $v' = v(P'_e, S)$ et

$$v'_e - v' \simeq \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)_P (S'_e - S) \Delta z \simeq \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)_P \frac{dS}{dz} (\Delta z)^2 > 0$$

Or $\left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)_P = \frac{T v \alpha}{C_P}$ où C_P est la capacité calorifique à pression constante de la particule, grandeur toujours positive, et où $\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$ est son coefficient de dilatation isobare, lequel est aussi positif pour les fluides usuels. On en déduit la condition de stabilité

$$\frac{dS}{dz} > 0$$

c'est-à-dire, l'entropie doit être une fonction croissante de z . De l'expression usuelle $dS = \frac{1}{T} (C_P dT - v T \alpha dP)$ et tenant compte de la relation d'équilibre $dP/dz = -mng$, on tire la condition $C_P dT/dz + \mathbb{M} g \alpha T > 0$, où \mathbb{M} est la masse de la particule de fluide, soit

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g \alpha T}{c_P}$$

où ici, c_P est la *chaleur massique* du fluide à pression constante. L'équilibre est instable si cette condition n'est pas satisfaite. Dans ce cas, des mouvements de convection apparaissent dans le fluide.

Pour un gaz parfait on a $\alpha T = 1$ C'est alors la grandeur

$$\Gamma = \frac{g}{c_P}$$

qui fixe la limite de stabilité. On l'appelle *gradient adiabatique*.

4.2 Hydrostatique

4.2.1 Principe de Pascal, Théorème de Pascal

Le principe de Pascal s'applique aux fluides en équilibre dans un champ de forces extérieur dérivant d'un potentiel, et dont la densité moléculaire n est constante. Il se fonde sur l'équation (4.4). Dans celle-ci, la constante d'intégration est fixée par la donnée de la pression P_0 en un point M_0 et correspond à un équilibre particulier :

$$\text{constante} = P_0 + n\Psi(M_0)$$

En modifiant de ΔP_0 la pression en M_0 , on obtient un autre équilibre avec la constante associée : $P_0 + \Delta P_0 + n\Psi(M_0)$. Dans ce nouvel équilibre, la pression en M est $P'(M) = P(M) + \Delta P(M)$ et l'on a, compte tenu des précédentes équations,

$$P(M) + \Delta P(M) + n\Psi(M) = P_0 + \Delta P_0 + n\Psi(M_0), \text{ soit}$$

$$\boxed{\Delta P(M) = \Delta P_0} \quad (4.6)$$

d'où résulte le *principe de Pascal*³ :

Dans un fluide incompressible à l'équilibre, toute variation de pression en un point s'accompagne d'une égale variation de pression en tout autre point.

Lorsque le champ extérieur est celui dû au champ de pesanteur terrestre, supposé constant, on a $\Psi(M) = mgz$, g étant l'accélération de la pesanteur. En introduisant la masse volumique $\rho = mn$ (ici supposée constante), la relation (4.4) devient

$$\boxed{P(M) + \rho g z = \text{constante}} \quad (4.7)$$

La pression dépend plus que de la cote z , ce qui conduit au théorème fondamental de l'Hydrostatique

3. B. Pascal, "Traité de l'équilibre des liqueurs", 1651.

Dans un fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre, la différence des pressions entre deux points est égale au poids de la colonne de fluide de section droite unité et pour hauteur la différence de niveau des deux points.

On a en effet, pour une section droite Σ , $\Sigma |P(z_2) - P(z_1)| = \rho |z_1 - z_2| \Sigma$ qui est bien le poids d'une colonne du fluide de section droite Σ et de hauteur $|z_1 - z_2|$. En première application, calculons la dénivellation $D = |z_A - z_B|$ correspondant à un écart de pression de 1 atmosphère, lorsque le fluide est de l'eau (de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Il vient

$$D = \frac{\Delta P}{\rho g} = 10,33 \text{ m}$$

Par contre, si le fluide est du mercure, $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, et alors $D = 0,76 \text{ m}$. Cette comparaison montre que, pour mesurer des différences de pression à l'aide de dénivellations de fluides, il est préférable d'utiliser des fluides de grande densité, comme le mercure, pour ne pas avoir à construire des appareils de taille prohibitive...

Il est utile de noter ici que la relation (4.7) repose sur les hypothèses suivantes.

☞ Le référentiel d'étude est supposé galiléen, ou au moins supposé tel pendant la durée d'observation. Dans le cas contraire, des "forces" d'inertie doivent être prises en compte (voir plus loin). Si un équilibre du fluide peut exister dans un tel référentiel non galiléen, ces forces en modifient certainement la nature.

☞ Ladite relation suppose aussi un milieu homogène infini, ce qui ne correspond pas aux situations courantes où le fluide peut être en contact avec des obstacles solides ou d'autres fluides. Par exemple, dans de nombreuses études, le fluide est un liquide contenu dans un récipient à parois solides et partiellement en contact avec l'atmosphère terrestre. Selon (4.7), en l'absence d'obstacle, la surface de séparation entre ce liquide et l'air, ces deux fluides étant soumis à la pesanteur terrestre, est, au moins localement, une surface horizontale où la pression est constante et égale à la pression atmosphérique locale. Ce résultat est généralement conforme à l'observation courante. Cependant, l'horizontalité de la surface de séparation, dite *surface libre*, est mise en défaut au voisinage d'obstacles solides, tels les parois d'un récipient contenant le fluide, où se manifestent des phénomènes de *tension superficielle* dont il sera question dans un autre chapitre. Ces phénomènes peuvent aussi bien intervenir, en l'absence d'obstacles solides, aux interfaces entre fluides.

4.2.2 Applications

I - Machines hydrauliques

Considérons deux récipients R_1 et R_2 de forme cylindrique d'axe vertical et dont les surfaces de base ont pour aires S_1 et S_2 respectivement, avec $S_1 < S_2$. Ces deux récipients communiquent entre eux par un tube horizontal, comme l'indique la figure 4.1. Remplissons les récipients d'un liquide incompressible de densité ρ_0 et fermons hermétiquement l'ensemble en disposant des pistons sur les surfaces du liquide dans chacun des récipients. Nous admettrons que les masses des pistons peuvent être négligées dans les évaluations suivantes.

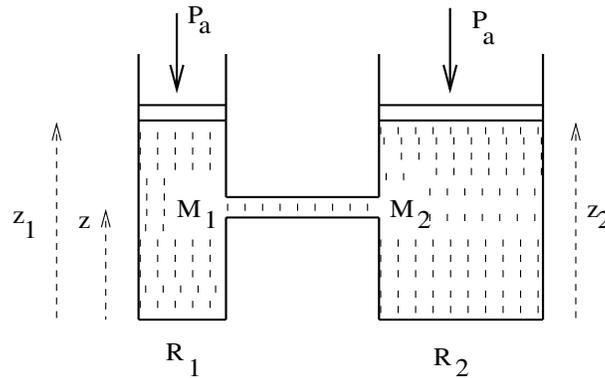


Figure 4.1

Montrons qu'à l'équilibre, les deux pistons sont à la même cote. Désignons par M_1 un point de cote z situé dans le premier récipient R_1 , au niveau du tube de communication, et par M_2 le point de même cote situé dans le second récipient R_2 , donc en face de M_1 . Les pistons étant soumis à la pression atmosphérique P_a sur leurs faces supérieures, la pression du liquide au niveau des pistons doit être égale à P_a dans un récipient comme dans l'autre, puisque les pistons sont à l'équilibre. D'après (4.7), la pression en M_1 est

$$P_1 = P_a + \rho_0 g(z_1 - z)$$

z_1 étant la cote du piston du récipient R_1 , et la pression en M_2 est

$$P_2 = P_a + \rho_0 g(z_2 - z)$$

z_2 étant la cote du piston du second récipient R_2 . Comme M_1 et M_2 sont à la même cote, la pression du liquide est la même en ces deux points. On a donc $P_1 = P_2$, d'où l'on déduit $z_1 = z_2$, comme annoncé : c'est le *théorème des vases communicants*!

Disposons ensuite un corps de masse m_1 sur le piston du premier récipient, et attendons l'équilibre. La pression s'exerçant sur la face supérieure du piston de R_1 est alors $P_a + m_1 g/S_1$ et la pression en M_1 est devenue

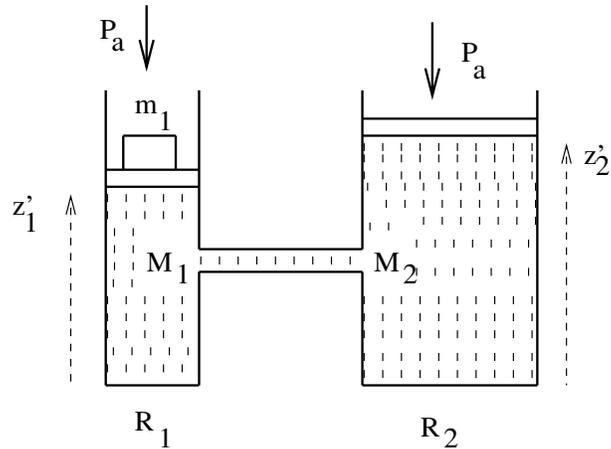


Figure 4.2

$$P'_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0g(z'_1 - z)$$

z'_1 étant la nouvelle cote du piston de R_1 . Tenant compte de ce que les pressions en M_1 et M_2 sont encore égales, l'application de la relation fondamentale au liquide de R_2 donne :

$$P'_2 = P_a + \rho_0g(z'_2 - z) = P'_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0g(z'_1 - z)$$

On obtient ainsi

$$m_1g/S_1 = \rho_0g(z'_2 - z'_1)$$

Les deux pistons sont maintenant à des cotes différentes, et leur écart est

$$z'_2 - z'_1 = \frac{m_1}{\rho_0S_1}$$

Pour rétablir l'égalité des cotes des deux pistons, disposons sur le piston de R_2 une masse m_2 . A l'équilibre, les pressions en M_1 et en M_2 seront

$$P''_1 = P_a + m_1g/S_1 + \rho_0g(z''_1 - z) \quad \text{et} \quad P''_2 = P_a + m_2g/S_2 + \rho_0g(z''_2 - z)$$

respectivement. L'égalité des pressions en M_1 et M_2 donne

$$m_2g/S_2 + \rho_0gz''_2 = m_1g/S_1 + \rho_0gz''_1$$

Le rétablissement de l'égalité des cotes des deux pistons se fera donc en disposant sur le piston de R_2 une masse égale à

$$m_2 = m_1 S_2 / S_1$$

On voit alors que par le jeu du rapport des surfaces, des corps de masses très différentes peuvent réaliser l'équilibre. Supposons par exemple que le rapport S_2/S_1 soit de l'ordre de 10^2 : ceci peut être facilement réalisé en prenant pour R_1 et R_2 des cylindres dont les sections droites ont pour diamètre 30 cm et 3 m respectivement. Une masse de 1 kg disposée sur le piston de R_1 suffit alors pour équilibrer une masse de 100 kg placée sur le piston de R_2 !! Le principe des machines et des transmissions hydrauliques est fondé sur cette constatation.

Ayant réalisé cet équilibre, l'ajout de faibles masses sur le piston de R_1 , ou ce qui revient au même, l'application d'une faible surpression sur ce piston suffit à déplacer une lourde charge placée sur le piston de R_2 . Désignons par ΔP cette surpression, par Δh_1 la variation de cote du piston de R_1 et par Δh_2 celle du piston de R_2 . Les calculs précédents montrent que l'on a

$$\Delta h_2 - \Delta h_1 = \frac{\Delta P}{\rho_0 g}$$

Or, la masse de fluide déplacée dans R_1 se retrouve bien sûr dans R_2 . On a donc la relation

$$\begin{aligned} -\Delta h_1 S_1 \rho_0 &= \Delta h_2 S_2 \rho_0, \text{ soit} \\ -\Delta h_1 &= \Delta h_2 S_2 / S_1 \end{aligned}$$

Les déplacements des deux pistons sont dans le rapport inverse de celui de leurs surfaces. Si, comme nous l'avons supposé, le rapport S_1/S_2 est de l'ordre de 100, le déplacement du piston de R_1 est donc 100 fois plus important que celui du piston de R_2 . Ce dernier est approximativement donné par

$$\Delta h_2 \approx \frac{\Delta P S_1}{\rho_0 g S_2}$$

II - Manomètres à colonnes liquides

Un manomètre⁴ est un appareil servant à mesurer des pressions. Son principe de base repose également sur le théorème de Pascal. Nous avons vu dans le dispositif précédent que le déplacement du liquide incompressible est plus important dans le récipient de plus petite section droite. Ce fait est mis à profit dans les manomètres à colonne de liquide.

4. Le premier manomètre à mercure fut construit en 1643 par Toricelli.

Si, dans le dispositif précédent, une surpression ΔP (par rapport à la pression atmosphérique) est appliquée sur le piston de R_2 , le déplacement consécutif du piston de R_1 est donné par

$$\Delta h_1 \approx \frac{\Delta P}{\rho_0 g}$$

La mesure de Δh_1 permet alors la mesure de ΔP . Si cette augmentation de pression est due non pas à l'ajout de masses sur le piston de R_2 mais plutôt à la pression exercée par un fluide sur ce piston, on voit que ce dispositif permet la mesure de la pression de ce fluide. C'est le principe du manomètre à mercure par exemple.

Dans le manomètre à "tube en U", un récipient contient le fluide étudié. Ce récipient est muni d'un tube en U contenant le fluide manométrique. D'après le schéma de la figure 4.3 on a les relations

$$P_M + \rho_f g h = P_a + \rho_F g H$$

où ρ_f et ρ_F sont les masses volumiques du fluide dont on veut mesurer la pression et celle du fluide manométrique, respectivement. On a ainsi

$$P_M = P_a + g(\rho_F H - \rho_f h)$$

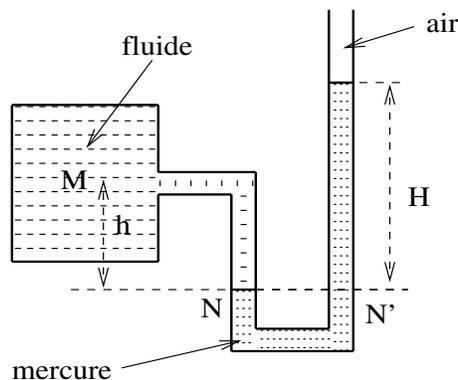


Figure 4.3

Si le fluide étudié est un gaz, on peut admettre que $\rho_f \ll \rho_F$ et l'on a approximativement

$$P_M = P_a + g\rho_F H$$

La *sensibilité* d'un manomètre est définie par le rapport du déplacement Δh de l'interface, consécutif à une variation ΔP de pression

$$s = \frac{\Delta h}{\Delta P}$$

Dans les dispositifs précédents, on a

$$s = \frac{1}{g\rho_F}$$

ρ_F étant, rappelons-le, la masse volumique du fluide manométrique. On peut améliorer cette sensibilité de diverses manières. Une astuce simple consiste à incliner par rapport à la verticale le tube prolongateur dans lequel le fluide manométrique s'élève, selon le schéma de la figure 4.4

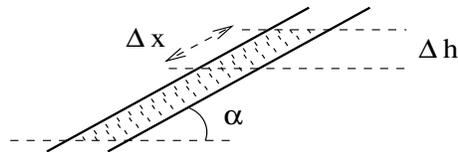


Figure 4.4

La lecture se fait sur le côté du tube. Comme on a

$$\Delta x = \frac{\Delta h}{\sin \alpha}$$

la sensibilité se trouve ainsi améliorée par le facteur $1/\sin \alpha$.

Un autre dispositif est le "micromanomètre" décrit par le schéma de la figure 4.5. La lecture se fait par un index mobile dans le tube de communication des deux récipients. Cet index est hermétique au fluide manométrique et isole donc les deux récipients. Une surpression ΔP dans le récipient R_1 provoque un déplacement Δx de l'index.

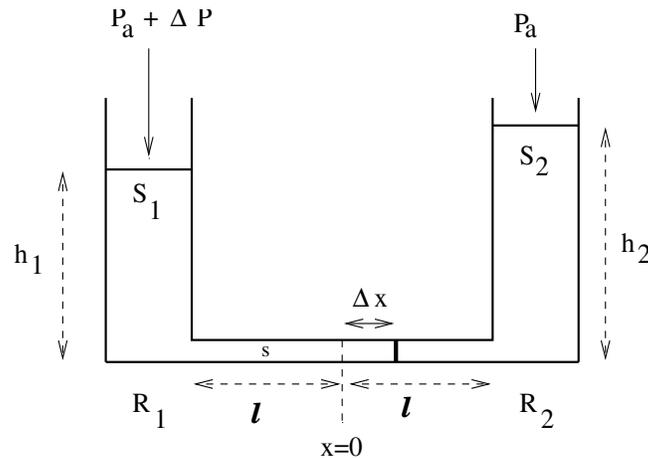


Figure 4.5

Les manomètres métalliques utilisent des ressorts creux et de formes diverses remplis d'air (tubes, membranes ou capsules scellées) dont les déformations sous l'effet de la

pression à mesurer sont transmises mécaniquement à une aiguille se déplaçant devant un cadran gradué. Le plus connu est le manomètre de Bourdon⁵.

4.3 Théorème d'Archimède

4.3.1 Enoncé

A l'intérieur d'un fluide à l'équilibre, considérons un certain volume V délimité par une surface de contrôle S (figure 4.6). Ce volume est soumis de la part du fluide qui lui est extérieur des forces de pression de résultante

$$\vec{F}_s = - \oiint_S P(M) \vec{N}(M) dS(M), \quad (4.8)$$

$\vec{N}(M)$ étant la normale sortante de la surface au point courant M .

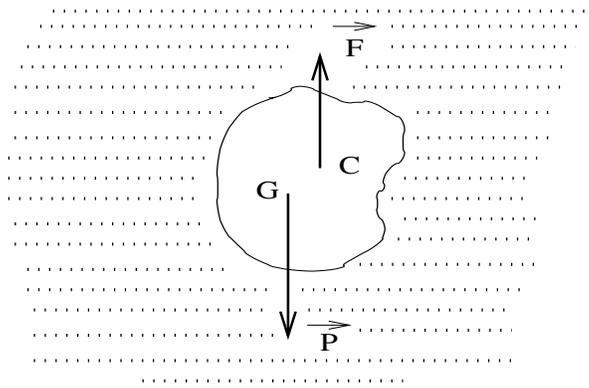


Figure 4.6

Comme le fluide est à l'équilibre dans le champ de pesanteur terrestre, ces forces de pression sont équilibrées par le poids $\vec{P}_v = M_\ell \vec{g}$ de la masse de fluide M_ℓ contenue dans V . En effet,

$$\oiint_S P(M) \vec{N}(M) dS(M) = \iiint_V \vec{\text{grad}} P dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV = M_\ell \vec{g}, \quad \text{d'où}$$

$$\vec{F}_s = - \vec{P}_v \quad (4.9)$$

Lorsqu'on remplace la quantité de fluide considérée par un corps de même volume et de même forme (figure 4.6), la surface du corps s'identifie à la surface de contrôle S .

5. Voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tube_de_Bourdon. Le lecteur intéressé pourra en outre consulter le site <https://fr.wikipedia.org/wiki/Manomètre> où sont répertoriés les différents capteurs de pression utilisés.

Pour le fluide à l'extérieur, il importe peu que cette surface soit celle d'une masse de fluide ou celle d'un corps immergé : il exerce sur cette surface les mêmes forces de pression, de même résultante \vec{F}_s . Ainsi, le corps se voit soumis de la part du fluide à une force dite *force de poussée d'Archimède*, égale à

$$\boxed{\vec{F}_C = -\vec{P}_v} \quad (4.10)$$

Le théorème d'Archimède s'énonce ainsi :

Tout corps immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de ce fluide à une force opposée au poids de la quantité de fluide déplacée.

Il importe de bien remarquer que ce théorème ne s'applique que si le fluide est en équilibre *avant* immersion et *après* immersion du corps.

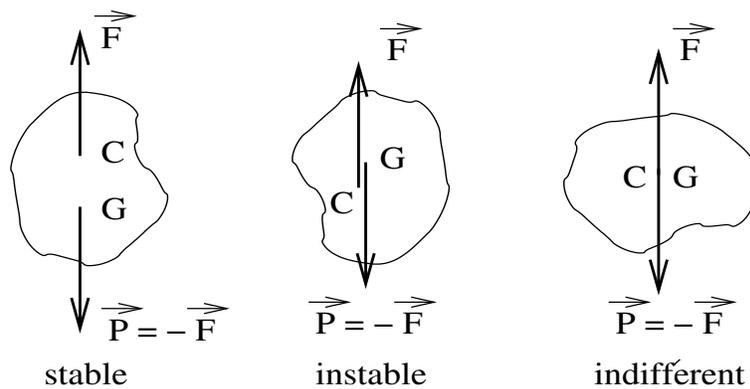


Figure 4.7

On notera aussi que la force de poussée s'applique non pas au centre de gravité du corps immergé, mais à celui de la quantité de fluide déplacée, point que l'on appelle pour cette raison le *centre de poussée*⁶. A l'équilibre, le centre de gravité du corps immergé et le centre de poussée sont nécessairement sur la même verticale. Finalement, le corps immergé sera donc soumis à son propre poids \vec{P}_C et à la poussée d'Archimède. Il aura ainsi dans le fluide un *poids apparent* égal à

6. On montre facilement que le moment des forces de pression, par rapport au centre de gravité de ladite quantité de fluide sur laquelle ces forces agissent, est nul.

$$\vec{P}_a = \vec{P}_C - \vec{P}_v = V(\rho_C - \rho_F) \vec{g} \quad (4.11)$$

où V est le volume de fluide déplacé, ρ_C la masse volumique du corps, ρ_F celle du fluide.

L'équilibre du corps n'est stable que si le centre de gravité G du corps immergé est situé au-dessous du centre de poussée C . Il est instable dans le cas contraire. Si le centre de gravité coïncide avec le centre de poussée, l'équilibre est indifférent (figure 4.7).

4.3.2 Poussée sur un corps au fond d'un lac

Tel quel, le théorème d'Archimède ne s'applique que si toute la surface du corps immergé est en contact avec le fluide, ce qui n'est pas toujours le cas. Considérons par exemple une demi-boule solide de rayon R dont la face plane Σ est en contact avec le fond d'un lac (eaux calmes), comme indiqué à la figure 4.8.

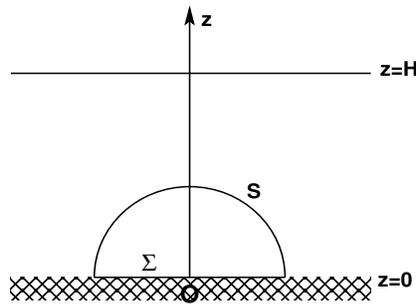


Figure 4.8

Les forces de pression du liquide, en l'occurrence l'eau, s'exercent uniquement sur la surface S et ont pour résultante

$$\vec{F} = - \iint_S P(M) \vec{N}(M) dS(M), \quad \text{avec}$$

$$P(M) = P_1 - \rho_\ell g z, \quad z = \vec{OM} \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{N} = \vec{OM}/R$$

où P_1 est la pression au fond du lac, soit $P_1 = P_a + \rho_\ell g H$, P_a étant la pression atmosphérique et H la profondeur du lac.

On peut éviter le calcul effectif de l'intégrale ci-dessus de la manière suivante. En l'absence de corps solide, la masse d'eau qui occuperait le même volume (même forme) serait soumise à une poussée équilibrant son poids, c'est-à-dire que, toutes choses étant égales par ailleurs, on aurait

$$-\iint_{S \cup \Sigma} P(M) \vec{N}(M) dS(M) = \rho_l g V \vec{e}_z = \vec{F} - \iint_{\Sigma} ; \text{ or, puisque } z = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

$$\iint_{\Sigma} = -P_1 \Sigma \vec{e}_z, \text{ avec } \Sigma = \pi R^2, \text{ d'où}$$

$$\vec{F} = \rho_l g V \vec{e}_z - P_1 \Sigma \vec{e}_z$$

On notera que le résultat est exactement le même pour un corps de forme différente, mais de même volume V et dont Σ est l'aire de la surface en contact avec le fond du lac. Dans le cas de la demi-boule, les forces élémentaires sur S sont toutes orientées suivant la direction radiale correspondante : leurs moments par rapport à O sont donc nuls. Il s'ensuit que le centre de poussée, point d'application de la résultante \vec{F} , est O . Ce n'est généralement plus le cas pour un corps de forme quelconque.

4.3.3 Corps flottant

Faisons le bilan des efforts que les forces de pression exercent sur un corps solide flottant à la surface d'un lac. Ce corps n'est donc pas complètement immergé, une partie S_a de sa surface est en contact avec l'atmosphère, l'autre partie S_e en contact avec l'eau, figure 4.9. Nous supposons que les masses volumiques ρ_a et ρ_e de l'air et de l'eau respectivement sont constantes et les effets de tension superficielle aux interfaces seront ici ignorés.

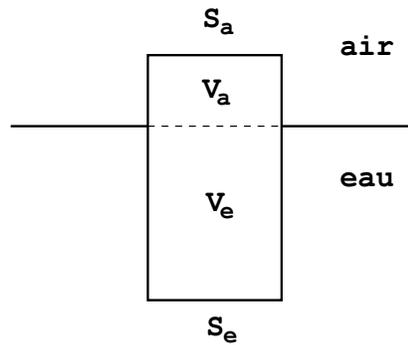


Figure 4.9

En l'absence du corps, la résultante des forces de pression due à l'air et à l'eau sur la surface totale $S = S_a \cup S_e$ du volume $V = V_a \cup V_e$ serait

$$\vec{F} = \oiint_S -P \vec{N} dS = -\iiint_V \vec{\text{grad}} P dV$$

Or, $\vec{\text{grad}} P = \rho_a \vec{g}$ dans V_a et $\vec{\text{grad}} P = \rho_e \vec{g}$ dans V_e , d'où

$$\boxed{\vec{F} = - \vec{g} (\rho_a V_a + \rho_e V_e)} \quad (4.12)$$

Cette force est aussi celle agissant sur ledit corps flottant. Son expression est bien conforme au théorème d'Archimède, Eq. (4.10), étant ici l'opposé du poids total de tous les fluides déplacés.

Trouvons ensuite le moment résultant de toutes les forces de pression, par rapport à un point O choisi arbitrairement. Son expression générale est

$$\vec{\mathcal{M}}_O = - \oiint_S P \vec{OM} \wedge \vec{N} dS,$$

laquelle, en l'absence du corps flottant, se transforme en

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \iiint_V \vec{\text{rot}} (P \vec{OM}) dV = - \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{\text{grad}} P dV, \quad \text{car} \quad \vec{\text{rot}} (\vec{OM}) = \vec{0}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{\mathcal{M}}_O = - \iiint_{V_a} \vec{OM} \wedge \vec{g} \rho_a dV_a - \iiint_{V_e} \vec{OM} \wedge \vec{g} \rho_e dV_e$$

Introduisons les centres de gravité respectifs G_a et G_e de la masse d'air et de la masse d'eau déplacées, définis par

$$\vec{OG}_a = \frac{1}{V_a} \iiint_{V_a} \vec{OM} dV_a. \quad \vec{OG}_e = \frac{1}{V_e} \iiint_{V_e} \vec{OM} dV_e$$

Il vient alors

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = - \left(\rho_a V_a \vec{OG}_a + \rho_e V_e \vec{OG}_e \right) \wedge \vec{g}} \quad (4.13)$$

Cette expression s'interprète comme la somme de deux moments : celui de la force de poussée de l'air déplacé $\vec{F}_a = -\rho_a V_a \vec{g}$ dont le point d'application est au centre de gravité G_a de cette masse d'air, et celui de la force de poussée de l'eau déplacée $\vec{F}_e = -\rho_e V_e \vec{g}$ dont le point d'application est au centre de gravité G_e de cette masse d'eau. Elle peut encore être réduite en introduisant le centre de gravité G de tous les fluides déplacés :

$$\vec{OG} = \frac{\rho_a V_a \vec{OG}_a + \rho_e V_e \vec{OG}_e}{\rho_a V_a + \rho_e V_e} \quad (4.14)$$

de sorte que

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -(\rho_a V_a + \rho_e V_e) \vec{OG} \wedge \vec{g} \quad (4.15)$$

Cette dernière expression montre que G est le point d'application de la résultante (4.12).

Les formules obtenues dans ce paragraphe pourraient se généraliser à des situations plus complexes impliquant différents fluides. Cependant, elles peuvent être simplifiées dans le cas présent, compte tenu de la faible densité de l'air par rapport à celle de l'eau. On a en effet $\rho_a/\rho_e \simeq 1,2 \cdot 10^{-3}$, ce qui incite généralement à négliger tous les effets de la masse d'air déplacée et à ne prendre en compte que ceux, prépondérants, dûs à la poussée de l'eau.

4.3.4 Stabilité d'un corps flottant

Considérons le système suivant. Un corps solide hétérogène S est constitué de deux objets S_1 et S_2 en forme de parallélépipède rectangle, ayant une base commune Σ horizontale d'aire s . Le premier, S_1 , constitue la partie inférieure de S . Il est fait d'un matériau de masse volumique ρ_1 et a pour hauteur h_1 . Le second, S_2 , constitue la partie supérieure de S . Il est fait d'un autre matériau de masse volumique ρ_2 et a pour hauteur h_2 . Le corps S est plongé dans un liquide de masse volumique ρ_l . On suppose qu'à l'équilibre le corps est disposé comme l'indique la figure 4.10. Le milieu extérieur est l'air, de masse volumique ρ_a . Les effets de tension superficielle aux interfaces seront ici encore ignorés.

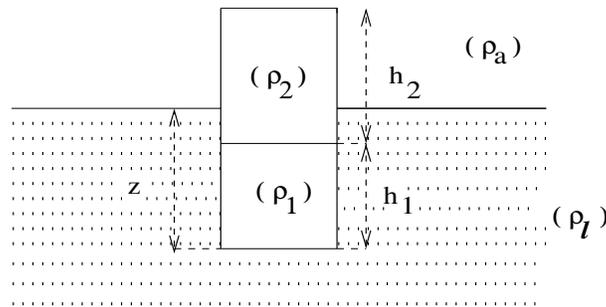


Figure 4.10

Soit z la profondeur à laquelle se trouve la base inférieure du corps dans le liquide. En toute rigueur, la poussée d'Archimède totale à laquelle est soumis le corps comprend :

- la poussée due au liquide déplacé :

$$\vec{F}_\ell = \rho_\ell s z \vec{e}_z$$

- la poussée due à l'air déplacé :

$$\vec{F}_a = \rho_a s (h - z) \vec{e}_z$$

où $h = h_1 + h_2$. Nous supposons $\rho_\ell \gg \rho_a$, et de ce fait, négligerons les effets de la seconde par rapport à ceux de la première. A l'équilibre, le poids total du corps, égal à

$$\vec{P}_C = -g s (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \vec{e}_z$$

doit équilibrer cette poussée. On en déduit la valeur de la profondeur z :

$$z = \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell}$$

Une première condition évidente de réalisation d'un tel équilibre, pour lequel on suppose que le corps S n'est pas immergé est que la profondeur z reste inférieure à la hauteur totale h du corps, est $z \leq h$. Ceci implique que soit vérifiée la condition

$$\frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell} \leq h$$

ce qui donne ($h_2 = h - h_1$)

$$h_1(\rho_1 - \rho_2) \leq h(\rho_\ell - \rho_2)$$

Le centre de poussée C est le centre de gravité du liquide déplacé. Si O est le centre de la base inférieure du corps, la position de C est définie par

$$\vec{OC} = \frac{z}{2} \vec{e}_z$$

Quant au centre de gravité G du corps, sa position est définie par

$$\vec{OG} = \frac{1}{(m_1 + m_2)} (m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2)$$

où G_1 et G_2 sont les centres de gravité des objets S_1 et S_2 respectivement, dont les masses respectives m_1 et m_2 sont

$$m_1 = \rho_1 s g h_1, \quad m_2 = \rho_2 s g h_2$$

Comme

$$\vec{OG}_1 = \frac{h_1}{2} \vec{e}_z, \quad \vec{OG}_2 = \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) \vec{e}_z$$

on a

$$\vec{OG} = \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2(2h_1 + h_2)}{2(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)} \vec{e}_z$$

Le corps flottant ne sera en équilibre stable que si le centre de poussée C se trouve au-dessus du centre de gravité G . La stabilité de l'équilibre impose donc que l'on ait

$$z \geq \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2(2h_1 + h_2)}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

En reportant dans cette inéquation l'expression trouvée pour z , on en déduit la condition

$$\frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_\ell} \geq \frac{\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2(2h_1 + h_2)}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

Posons $u = h_1/h$. On obtient alors l'inéquation

$$T(u) \geq 0$$

où $T(u)$ est le trinôme

$$T(u) = u^2(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_2 - \rho_\ell) + 2u\rho_2(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2(\rho_2 - \rho_\ell)$$

Nous ne discuterons pas ici toutes les possibilités découlant de cette inéquation, qui dépendent non seulement des valeurs des masses volumiques, mais aussi de la taille des objets. Donnons deux exemples.

1°) L'objet S_1 est fait de plomb, de masse volumique $\rho_1 = 11,35 \text{ g/cm}^3$ et a pour hauteur $h_1 = 3 \text{ mm}$. L'objet S_2 est fait de liège, de masse volumique $\rho_2 = 0,24 \text{ g/cm}^3$ et a pour hauteur $h_2 = 5 \text{ cm}$. Le liquide est de l'eau ($\rho_\ell = 1 \text{ g/cm}^3$). D'après les formules données ci-dessus, on obtient

$$z = 4,6 \text{ cm}; \quad OC = z/2 = 2,3 \text{ cm}; \quad OG = 0,84 \text{ cm}$$

L'équilibre, réalisable, est donc stable.

2°) L'objet S_1 est fait de caoutchouc, de masse volumique $\rho_1 = 0,91 \text{ g/cm}^3$ et a pour hauteur $h_1 = 1 \text{ cm}$. L'objet S_2 est ici encore fait de liège et a pour hauteur $h_2 = 3 \text{ cm}$. Le liquide est aussi de l'eau. On obtient

$$z = 1,63 \text{ cm}; \quad OC = z/2 = 0,815 \text{ cm}; \quad OG = 1,38 \text{ cm}$$

L'équilibre, réalisable, est ici instable.

4.4 Forces de pression sur des parois solides

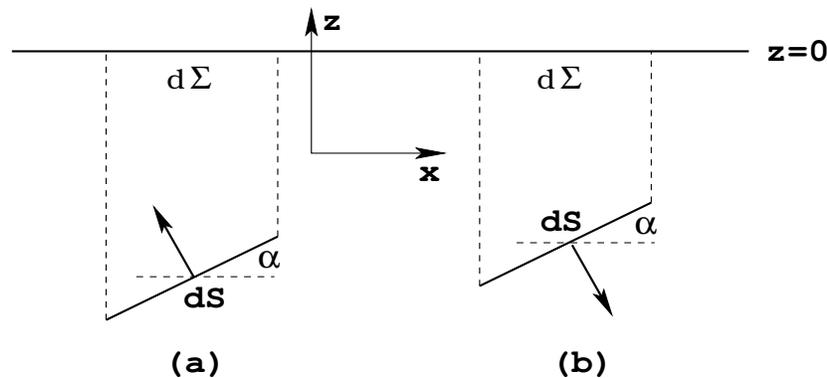


Figure 4.11

Considérons un élément de surface dS d'un corps solide immergé dans l'eau. Ainsi qu'il est représenté à la figure 4.11, les cas (a) et (b) sont ceux pour lesquels la composante verticale de la normale sortante du corps est, respectivement, positive et négative. La pression à la cote $z \leq 0$ est $P = P_0 - \rho g z$ où P_0 est la pression atmosphérique et ρ la masse volumique de l'eau. Comme nous le verrons, la contribution totale de P_0 dans le bilan des forces de pression subies par le corps est nul et il suffit donc de ne considérer que le terme $-\rho g z$. En outre, les composantes horizontales des forces donnent elles aussi une résultante nulle. Il ne reste donc à évaluer que les composantes verticales des forces. Dans le cas (a), on obtient

$$dF_z = \vec{e}_z \cdot (-) \left[-\rho g z \vec{N} dS \right] = -\rho g |z| dS \cos \alpha = -\rho g |z| d\Sigma$$

où $d\Sigma$ est la projection de dS sur la surface libre de l'eau. On en conclut que dans ce cas, dF_z est égal au poids de la colonne d'eau située au-dessus de dS . Il est évident que dans le cas (b), dF_z est l'opposé du poids de cette colonne d'eau. Lorsque le corps est complètement immergé, l'addition des divers éléments dF_z donne évidemment la poussée d'Archimède.

4.4.1 Obturateur

Envisageons le cas où le corps solide est un obturateur bouchant une ouverture ménagée au fond du récipient contenant l'eau pour permettre l'écoulement de celle-ci, figure 4.12. Le théorème d'Archimède ne peut être appliqué dans cette situation car en l'absence d'obturateur l'eau s'écoule par l'ouverture et ne peut donc être en équilibre.

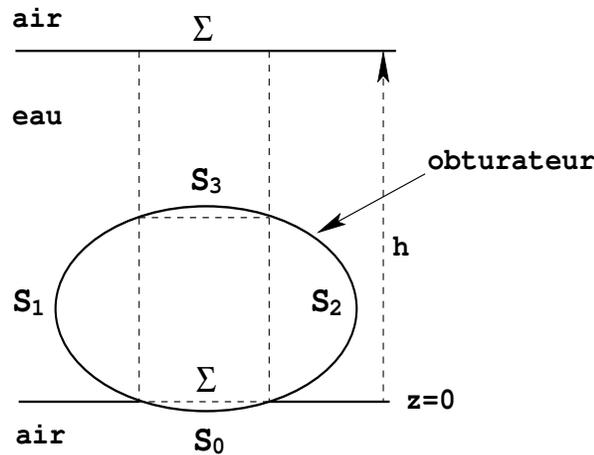


Figure 4.12

Nous supposons que l'obturateur est complètement immergé, sauf dans sa base de surface S_0 , en contact avec l'air ambiant. Une partie S_3 de la surface de l'obturateur se projette sur la surface libre de l'eau selon la surface Σ de l'ouverture. La pression de l'eau en un point à la cote z par rapport au fond du récipient est $P = P_0 + \rho g(h - z)$, où ρ est la masse volumique de l'eau, h sa profondeur dans le récipient, et P_0 la pression atmosphérique. Cette dernière agit sur toute la surface de l'obturateur et est d'ailleurs seule à agir sur S_0 . La surface totale de l'obturateur étant fermée, la contribution totale de P_0 est nulle car

$$\oiint_{S_{\text{tot}}} P_0 \vec{N} dS = \vec{0}$$

La seule force élémentaire effective agissant sur un élément de surface dS immergé est donc $d\vec{F} = -\rho g(h - z) \vec{N} dS$ où \vec{N} est la normale *sortante* de l'obturateur au point considéré de sa surface immergée.

D'après ce qui précède, la force résultante \vec{F}_ℓ qui s'exerce sur la surface "latérale" de l'obturateur, représentée par les surfaces S_1 et S_2 de la figure 4.13, est égale à l'opposé du poids de l'eau qui serait contenue dans le volume V_ℓ délimité en gras sur cette figure.

De même, la force \vec{F}_3 s'exerçant sur la surface S_3 (figure 4.14) est égale au poids \vec{P}_3 de la masse d'eau se trouvant au-dessus de S_3 dans le volume V'_3 limité par S_3 et sa projection orthogonale Σ sur la surface libre de l'eau. Ce poids est évidemment égal à la différence entre, d'une part, le poids \vec{P}_Σ de l'eau contenue dans le volume V_Σ somme du volume précédent V'_3 et du volume V''_3 situé en-dessous de la surface S_3 et sa projection orthogonale Σ au fond du récipient ; et, d'autre part, le poids \vec{P}'_Σ de la masse d'eau qui serait contenue dans ce volume V''_3 :

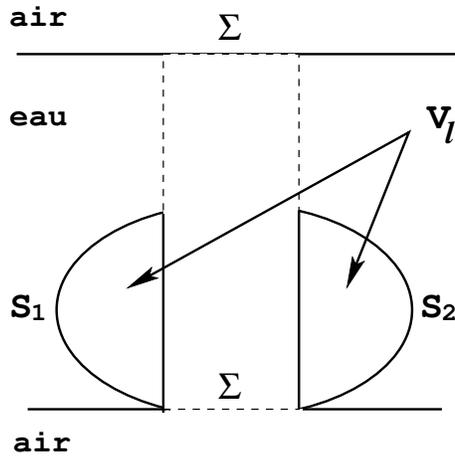


Figure 4.13

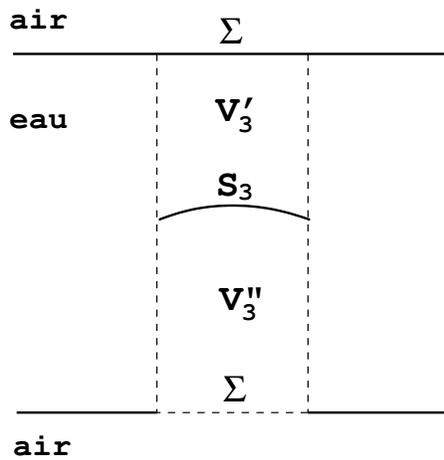


Figure 4.14

La force de pression totale agissant sur l'obturateur est donc

$$\vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_3 = -\vec{P}_\ell + \vec{P}_\Sigma - \vec{P}'_\Sigma = \vec{P}_\Sigma - \vec{P}_C \quad (4.16)$$

c'est-à-dire, égale à la différence entre le poids \vec{P}_Σ de la masse d'eau contenue dans V_Σ et le poids de la masse d'eau déplacée par l'obturateur.

Exercice : Si l'obturateur est une boule de rayon $R < h/2$ bouchant une ouverture circulaire de rayon $r = R \sin \alpha$ ($\alpha < \pi/2$), montrer par un calcul intégral direct que

$$\vec{F} = \vec{e}_z \pi \rho g R^2 \left[\frac{R}{3} (1 + \cos \alpha)^2 (2 - \cos \alpha) - h \sin^2 \alpha \right]$$

puis vérifier (4.16).

4.4.2 Forces de pression sur un barrage

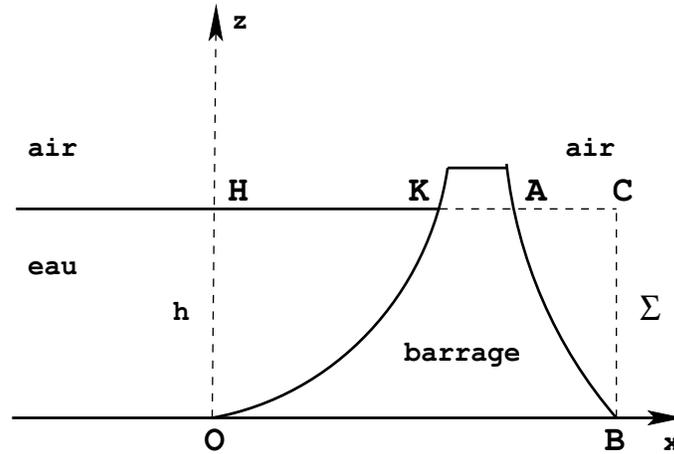


Figure 4.15

La figure 4.15 schématise un barrage dont les parements amont et aval ont des profils qu'il est inutile de préciser pour le moment. Il est possible de donner une expression générale simple de la force de pression \vec{F}_e que l'eau exerce sur le parement amont (OK) du barrage, en procédant comme suit. Considérons le volume d'eau V dont la surface S comprend les surfaces schématisées par OH , HK , KO , et deux surfaces de profil OHK , parallèles à xOz et distantes de L . Evaluons la force de pression totale s'exerçant sur S . Il est clair que les forces de pression sur les surfaces parallèles à xOz s'équilibrent. Il reste

$$\oiint_S -P \vec{N}_S dS = \iint_{OH} + \iint_{HK} + \iint_{OK} = - \iiint_V \text{grad } P dV = -\rho_e V \vec{g}, \text{ soit}$$

$$\vec{F}_e = - \iint_{OK} = \rho_e V \vec{g} + \iint_{OH} + \iint_{HK}$$

\vec{N}_S étant la normale à S orientée vers l'extérieur et ρ_e la masse volumique de l'eau ; et comme $P = P_0 + \rho_e g(h - z)$, où P_0 est la pression atmosphérique, il vient

$$\iint_{OH} = \vec{e}_x \left[P_0 \Sigma + \rho_e g L \frac{h^2}{2} \right], \quad \iint_{HK} = - \vec{e}_z P_0 L (HK), \quad \text{avec } \Sigma = Lh, \text{ d'où}$$

$$\vec{F}_e = \vec{e}_x \left[P_0 \Sigma + \rho_e g L \frac{h^2}{2} \right] - \vec{e}_z [P_0 L(HK) + \rho_e g V] \quad (4.17)$$

Il est intéressant de noter que, L étant fixé, seule la composante verticale de cette force dépend effectivement du profil du barrage, par l'intermédiaire de (HK) et V .

Le bilan des forces de pression agissant sur le barrage, doit aussi prendre en compte la force de pression de l'atmosphère sur son parement aval (AB) et sur sa partie haute (KA) . En négligeant l'effet de la pesanteur sur l'air⁷, celle agissant sur (AB) est

$$\vec{F}_{AB} = - \vec{e}_x P_0 \Sigma - \vec{e}_z P_0 L(AC) \quad (4.18)$$

en supposant que les bases des parements amont et aval sont au même niveau et que les bordures latérales du barrage sont distantes de L . Ceci fait que la contribution de P_0 est nulle dans la composante

$$\left(\vec{F}_e + \vec{F}_{AB} \right)_x = \rho_e g L \frac{h^2}{2} \quad (4.19)$$

et que, ρ_e étant supposé constant, celle-ci ne dépend en fait que de la hauteur d'eau en amont.

Le bilan de toutes les forces agissant sur le barrage inclut le poids du barrage lui-même et la force de réaction \vec{R} du sol sur lequel repose le barrage. Cette dernière doit équilibrer toutes les autres et possède en conséquence une composante verticale N et une composante horizontale T , cette dernière étant censée représenter des frottements s'opposant au glissement du barrage en compensant (4.19). L'équilibre du barrage n'est garanti que si le rapport $|T/N|$, appelé coefficient de frottement solide, reste inférieur à une certaine valeur. A cet égard, si de l'air ou de l'eau peuvent s'infiltrer sous le barrage, cela a pour effet de diminuer la composante N alors que la composante T ne change pas, et finalement de fragiliser l'équilibre du barrage. Ci-après suivent des exemples très schématisés.

• Barrage-poids

Ce type de barrage est modélisé comme dans la figure 4.16. Le parement amont est un mur vertical et le parement aval est dans un plan incliné d'un angle α par rapport au plan vertical ; L est la distance entre les deux rives.

On a ici $(HK) = 0$, $V = 0$, et les composantes de la réaction du sol sont

$$R_x = T = -\rho_e g L \frac{h^2}{2},$$

7. On considère donc que $\rho_{\text{air}} g(h - z)$ est négligeable devant P_0 .

$$R_z = N = P_0 L(HA + AC) + M_b g = \frac{L h_b^2 g \tan \alpha}{2} \left[\frac{2P_0}{g h_b} + \rho_b \right]$$

où ρ_b est le volume massique du matériau constituant le barrage.

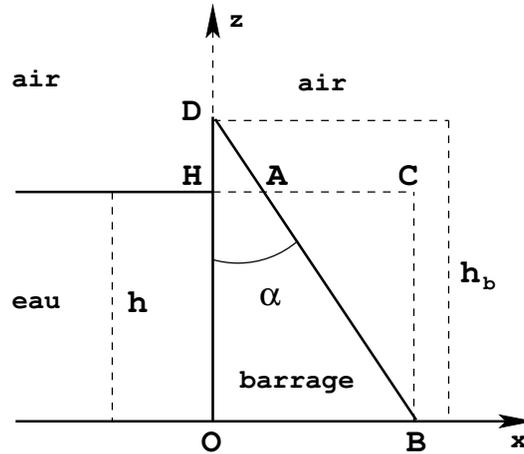


Figure 4.16

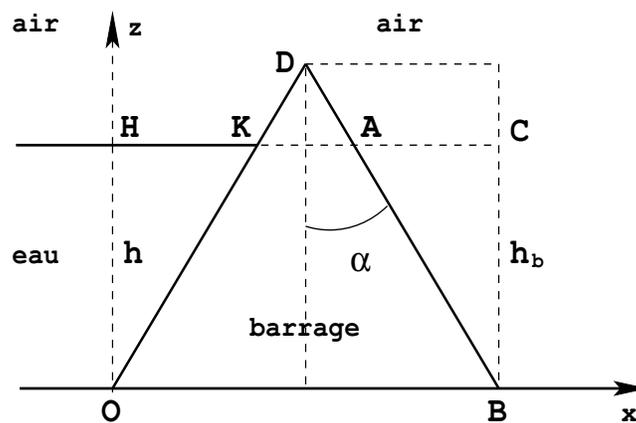


Figure 4.17

- Barrage en triangle (ou barrage-voûte simplifié)

Un barrage-voûte est modélisé, à l'extrême, selon le schéma de la figure 4.17, où le profil de coupe transversale ODB est un triangle isocèle. On a

$$T = -F_e \cos \alpha, \quad N = F_e \sin \alpha + F_a + M_b g, \quad \text{où}$$

$$F_e = \rho_e g \frac{h^2}{2}, \quad F_a = P_0 L(OB)$$

En comparant ce barrage au barrage-poifds, on remarquera que le fait de donner une pente au parement amont permet à la fois d'atténuer la poussée transversale T et de profiter du poids de la masse d'eau OHK pour mieux plaquer le barrage au sol et diminuer ainsi les infiltrations d'eau sous le barrage, susceptibles de le déstabiliser.

4.4.3 Centre de pression

S'il existe, le centre de pression, ou centre de poussée, des forces de pression est un point par rapport auquel le moment résultant de ces forces est nul. Lorsque le point d'application A d'une force \vec{F} est connu, son moment par rapport à un point O choisi arbitrairement est défini comme

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F} \quad (4.20)$$

et l'on a donc $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$. Pour cette raison, le centre de pression peut être considéré comme le point d'application de la résultante des forces de pression. S'agissant des forces agissant sur une surface S , elles ont pour résultante

$$\vec{F} = \iint_S \vec{dF}, \quad \text{avec} \quad \vec{dF} = -P \vec{N} dS$$

ici considérée comme non nulle, et pour moment résultant par rapport à un point O

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{dF}$$

Cette dernière grandeur vérifie

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

et prend effectivement la forme (4.20) si $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$. Cependant, plus généralement, on a ($\vec{F} \neq \vec{0}$)

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O)}{F^2} \vec{F} + \vec{OP} \wedge \vec{F}, \quad \text{avec} \quad F = \|\vec{F}\| \quad (4.21)$$

et où P est un point quelconque de l'axe central du système de forces⁸. Le produit scalaire $(\vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O)$ est en fait une grandeur indépendante de la position du point de référence :

$$\vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A = \text{constante} = K$$

et d'après (4.21), le moment prend la forme (4.20) si et seulement si elle est nulle. Dans ce cas, le moment est nul en tous les points de l'axe central. La résultante des forces de pression étant considérée comme une force de contact, son point d'application A sera alors pris à l'intersection de cet axe central avec la surface S . Si l'on choisit le point O sur cette même surface, A en est la projection orthogonale sur l'axe central et l'on a

$$\vec{OA} = \frac{1}{F^2} \vec{F} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O \quad (4.22)$$

Comme

$$C = \vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \iint_S \vec{OM} \cdot (\vec{dF} \wedge \vec{F}) \quad (4.23)$$

K est notamment nul si les forces de pression ont toutes la même direction.

C'est le cas lorsque la surface est la paroi verticale d'un réservoir solide séparant un liquide (eau) de l'atmosphère extérieur, voir figure 4.18. La surface S à considérer est définie par $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq h$. La pression dans l'eau à la cote z est $P = P_0 + \rho_e g(h - z)$, où P_0 est la pression atmosphérique. La paroi est soumise d'un autre côté à la pression atmosphérique P_0 . Un élément de surface $dS = dydz$ à la cote z est donc soumis à la force de pression effective $\vec{dF} = \vec{e}_x \rho_e g(h - z)dS$, conduisant à la résultante

$$\vec{F} = \rho_e g \vec{e}_x \int_0^L dy \int_0^h dz (h - z) = \rho_e g L \vec{e}_x \frac{h^2}{2} \quad (4.24)$$

Le moment de ces forces par rapport à O est

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \iint_S dydz (y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \wedge \rho_e g(h - z) \vec{e}_x \\ &= F \left[-\frac{L}{2} \vec{e}_z + \frac{h}{3} \vec{e}_y \right], \quad \left(F = \rho_e g L \frac{h^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

⁸. Axe unique, parallèle à \vec{F} , pour lequel le moment en chacun de ses points est aussi parallèle à \vec{F} , ou nul.

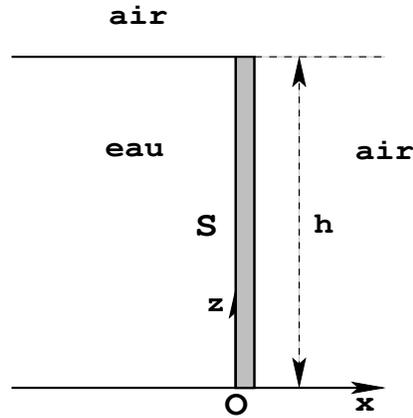


Figure 4.18

et l'on a bien $K = 0$. On en déduit la position du centre de pression A :

$$\vec{OA} = \vec{e}_x \wedge \left[-\frac{L}{2} \vec{e}_z + \frac{h}{3} \vec{e}_y \right] = \frac{L}{2} \vec{e}_y + \frac{h}{3} \vec{e}_z \quad (4.26)$$

qui se trouve donc aux deux tiers de la profondeur d'eau du réservoir.

☞ Exercice : Montrer que si la paroi a la forme du demi-disque de rayon R défini par $x = 0$, $-R \leq z \leq 0$, $z^2 + y^2 \leq R^2$, on a

$$\vec{OA} = -\frac{3\pi}{16} \vec{e}_z$$

☞ Exercice : Dans le cas du barrage-poids (figure 4.16), montrer que l'ensemble des forces de pression de l'eau et de l'atmosphère a pour résultante

$$\vec{F} = F_e \vec{e}_x - F_a \vec{e}_z, \quad \text{où } F_e = \rho_e g L \frac{h^2}{2}, \quad F_a = P_0 L(OB),$$

pour moment résultant

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -\frac{L}{2} \left[F_e \vec{e}_z + F_a \vec{e}_x \right] + \vec{e}_y \left[F_e \frac{h}{3} + F_a \frac{(OB)}{2} \right],$$

et qu'il existe un centre de pression A tel que

$$\vec{OA} = \frac{L}{2} \vec{e}_y + \frac{1}{F^2} \left[F_e \frac{h}{3} + F_a \frac{(OB)}{2} \right] \left[F_a \vec{e}_x + F_e \vec{e}_z \right], \quad \text{avec } F^2 = F_e^2 + F_a^2$$

☞ Exercice : Vérifier que le centre de gravité G défini par (4.14) est le centre de pression pour un corps flottant.

4.5 Fluide en équilibre dans un référentiel non galiléen

4.5.1 Conditions d'équilibre

Les équations fondamentales de la Mécanique des Fluides du chapitre I ont été établies en supposant implicitement que le référentiel d'étude est galiléen. Il en est de même pour les équations d'équilibre obtenues plus haut. Cependant, les référentiels n'étant pas tous galiléens, il est légitime de rechercher les conditions d'équilibre dans un référentiel quelconque. En théorie non-relativiste, le changement de référentiel

$$\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t) \rightarrow \mathcal{R}'(O', \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z, t'), \text{ avec } t' = t$$

est composé d'un mouvement de translation relative globale décrite par l'équation horaire $\vec{OO}'(t)$ et d'un mouvement de rotation relative globale des axes, décrite par un vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}(t)$ tel que

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}'_i$$

et l'on obtient les formules de transformation suivantes de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M

- vitesses : $\vec{v} = v_{\mathcal{R}} \rightarrow \vec{v}' = v_{\mathcal{R}'}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e, \text{ où } \vec{v}_e = \vec{v}(O')|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}$$

est la vitesse d'entraînement de M ,

- accélérations : $\vec{a} = a_{\mathcal{R}} \rightarrow \vec{a}' = a_{\mathcal{R}'}$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \text{ où } \vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

est l'accélération de Coriolis, et

$$\vec{a}_e = \vec{a}(O')|_{\mathcal{R}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M})$$

l'accélération d'entraînement de M . Les conditions d'équilibre de M dans \mathcal{R}' étant $\vec{v}' = \vec{0}$ et $\vec{a}' = \vec{0}$, on doit avoir $\vec{a} = \vec{a}_e$ et si \mathcal{R} est galiléen, l'équation de diffusion (1.55) devient

$$m a_{ek} = F_k - \frac{1}{n} \partial_\ell P_{k\ell}$$

Au regard des termes de \vec{a}_e qui peuvent dépendre explicitement du temps, il est clair que la réalisation de l'équilibre paraît généralement complexe. En particulier, la pression semble ne pouvoir être considérée comme une pression statique. Pour qu'elle le soit, il faudrait que

- $\vec{a}(O')|_{\mathcal{R}}$ soit un vecteur constant,
- $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$. En effet, si ce dernier vecteur n'était pas nul, le terme contenant $\vec{\omega}$ serait inmanquablement fonction du temps. Une autre raison pour que ce vecteur soit nul est la suivante. Si le champ des pressions est scalaire, l'équilibre dans \mathcal{R}' se traduit par l'équation

$$\vec{\text{grad}} P = \rho \left[\vec{f} - \vec{a}_e \right] \quad (4.27)$$

où \vec{f} est le champ de forces extérieur par unité de masse, a priori indépendant du référentiel. Mais cette équation n'a de sens que si son second membre est le gradient d'une fonction. Or,

$$\vec{\text{rot}}_M \left[\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'M} \right] = 2 \dot{\vec{\omega}}$$

qui ne peut être nul que si et seulement si $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$. En conclusion, l'équilibre d'un fluide se trouvant dans \mathcal{R}' et dont le champ des pressions est scalaire et indépendant du temps, ne peut être réalisé que si le mouvement de ce référentiel par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R} est une combinaison d'un mouvement uniformément accéléré de son origine et d'un mouvement de rotation uniforme de ses axes.

4.5.2 Equilibre d'un fluide en accélération constante

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Considérons le récipient de forme rectangulaire schématisé à gauche de la figure 4.19. Sa surface de base est $S = Ll$. Au repos, le récipient est rempli d'eau sur une hauteur h . Le récipient est ensuite soumis à une accélération constante $\vec{a} = a \vec{e}_x$. Après un régime transitoire, l'eau du récipient se stabilise et la pression y est indépendante du temps, figure 4.19. Cherchons la forme de sa surface libre. La masse volumique de l'eau, ρ_e , est supposée constante et les effets de tension superficielle sont ignorés.

Dans le référentiel du récipient, on a

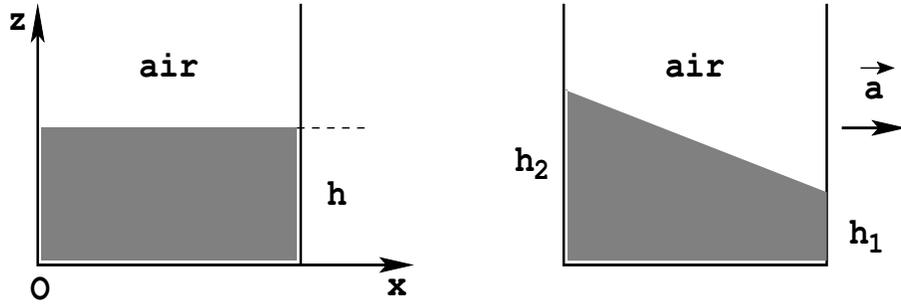


Figure 4.19

$$\begin{aligned}\vec{\text{grad}} P &= \rho_e (\vec{g} - \vec{a}) = -\vec{\text{grad}} (\rho_e gz + \rho_e ax), \text{ d'où} \\ P + \rho_e (gz + ax) &= \text{constante} = K\end{aligned}\quad (4.28)$$

Les surfaces isobares sont donc dans des plans orthogonaux au vecteur $(a, 0, g)$. La constante K peut être exprimée au moyen de h_2 ou de h_1 en notant que P est égal à la pression atmosphérique P_0 pour $x = 0, z = h_2$ ou pour $x = \ell, z = h_1$, soit

$$\begin{aligned}K &= P_0 + \rho_e gh_2 = P_0 + \rho_e (gh_1 + a\ell), \text{ d'où, d'une part} \\ h_2 - h_1 &= \frac{a}{g}\ell, \text{ et, d'autre part, l'équation} \\ P - P_0 &= \rho_e [g(h_2 - z) - ax]\end{aligned}\quad (4.29)$$

La surface libre de l'eau, définie par la condition $P = P_0$, a donc pour équation

$$h_2 - z = \frac{a}{g}x$$

Le volume V d'eau étant inchangé, on a $V = h\ell L = \frac{h_2 + h_1}{2}\ell L$, soit

$$h = \frac{h_2 + h_1}{2}, \text{ d'où } h_2 = h + \frac{a}{2g}\ell, \quad h_1 = h - \frac{a}{2g}\ell \quad (4.30)$$

4.5.3 Equilibre d'un fluide en rotation uniforme

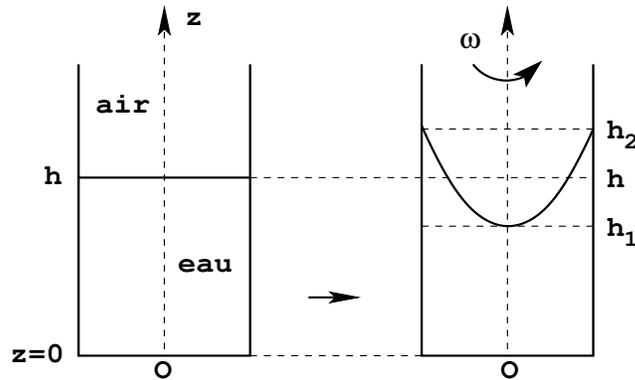


Figure 4.20

Dans le référentiel terrestre, ici encore considéré comme galiléen, un récipient de forme cylindrique, de base $S = \pi R^2$, initialement au repos, contient de l'eau sur une hauteur h , figure 4.20, à gauche. Le récipient est ensuite mis en rotation autour de son axe $z'z$, jusqu'à ce que ce mouvement acquiert la vitesse angulaire constante ω . Par le jeu des collisions à l'échelle microscopique, l'eau est entraînée par ce mouvement et se met en équilibre avec le récipient après un régime transitoire, figure 4.20, à droite. Montrons que sa surface libre a alors la forme d'un paraboloïde de révolution. De façon évidente, il est plus approprié d'utiliser des coordonnées cylindriques (r, θ, z) axées sur $z'z$ et dont l'origine est au centre (fixe) de la base circulaire du récipient. Notant H le projeté orthogonal d'un point M sur $z'z$, on a

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM} = -\omega^2 r \vec{e}_r$$

et, dans le référentiel du récipient en mouvement et à l'intérieur de l'eau,

$$\vec{\text{grad}} P = \rho_e \left(\vec{g} + \omega^2 \vec{e}_r \right) = \vec{\text{grad}} \left(-gz + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

où ρ_e est la masse volumique de l'eau, supposée constante. On en déduit l'équation

$$P + \rho_e \left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = \text{constante} = K \quad (4.31)$$

et l'équation générale des isobares

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constante}' \quad (4.32)$$

qui représente effectivement des paraboloides de révolution d'axe $z'z$. Sur la surface libre, on a $P =$ pression atmosphérique $= P_0$, aussi bien pour $r = 0, z = h_1$ que pour $r = R, z = h_2$. D'où

$$K = P_0 + \rho_e g h_1 = P_0 + \rho_2 \left(g h_2 - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right), \text{ soit}$$

$$h_2 - h_1 = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

et l'équation de la surface libre

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_1 = z_L$$

Le volume d'eau $V = \pi R^2 h$ n'ayant pas changé, on doit avoir

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^{z_L} dz = \pi R^2 \left[\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_1 \right], \text{ d'où}$$

$$h_1 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \text{ puis } h_2 = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Il est intéressant de noter que les points à la cote $z = h$ de la surface libre sont sur un cercle dont le rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$ est *indépendant* de ω , tandis que l'écart entre h_1 et h_2 augmente avec ω .

A l'intérieur de l'eau, un domaine \mathcal{D} , de volume V et délimité par une surface Σ est soumis à la force de pression

$$\vec{F} = - \oiint_{\Sigma} P \vec{N} d\Sigma = - \iiint_V \text{grad } P dV = -\rho_e V \vec{g} - \rho_e \omega^2 \iiint_V \vec{HM} dV, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\rho_e V \vec{g} - \rho_e \omega^2 V \vec{r}(G)} \quad (4.33)$$

où G est le centre de gravité du domaine \mathcal{D} . Si ce domaine est ensuite remplacé par un corps solide \mathcal{S} de même forme, ce dernier sera, dans le référentiel tournant, soumis à la force (4.33) comprenant une force d'entraînement en plus de la force de poussée. Ce résultat constitue une extension du théorème d'Archimède.

En outre, la résultante des forces de pesanteur et d'inertie d'entraînement qui s'exercent sur le solide dans ce même référentiel sont

$$\vec{F}' = \rho_S V \vec{g} + \rho_S V \vec{r}(G_S)$$

où ρ_S est la masse volumique du solide supposé homogène⁹ et G_S son centre de gravité. La force totale qui s'exerce sur S , telle que perçue dans le référentiel tournant, est donc

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot}} = [\rho_S - \rho_e] V \left(\vec{g} + \omega^2 \vec{r}(G) \right)} \quad (4.34)$$

car G_s et G sont identiques dans le cas d'un solide homogène. On observe ainsi que si $\rho_S > \rho_e$, le solide a tendance à s'éloigner de l'axe de rotation tout en allant vers le fond du récipient, tandis que l'effet inverse est observé si $\rho_S < \rho_e$. Ce résultat constitue le principe de base de la *centrifugation*¹⁰.

Lorsque le corps solide flotte à la surface de l'eau, la force totale qui s'exerce sur lui prend cette autre forme :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \rho_S V \left(\vec{g} + \omega^2 \vec{r}(G_S) \right) - \rho_e V' \left(\vec{g} + \omega^2 \vec{r}(G') \right)$$

où V' et G' sont respectivement le volume et le centre de masse de la quantité d'eau déplacée (on néglige la contribution de l'air déplacé). On a alors $V' < V$ et G_s et G' sont distincts. Le corps ne pourrait être à l'équilibre que si

$$\rho_S V = \rho_e V' \quad \text{et} \quad \rho_S V \vec{r}(G_S) = \rho_e V' \vec{r}(G') \quad \text{ou} \quad \vec{r}(G_S) = \vec{r}(G')$$

et la dernière condition ne peut être réalisée pour un corps homogène que si G_S et G' se trouvent tous les deux sur l'axe de rotation.

9. Bien que ρ_S pourrait ici représenter la densité moyenne M_S/V où M_S est la masse de S .

10. Voir : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Centrifugation>.