LES TENSEURS

Christian Carimalo

Chapitre 1

Les Tenseurs

1.1 Qu'est-ce qu'un vecteur, un tenseur, etc ?

Soit un ensemble de n variables à valeurs continues, notées x^α avec $\alpha = 1, 2, \cdots, n$, et que nous supposerons réelles pour simplifier, bien que le formalisme puisse s'adapter à des objets plus compliqués. Bien que cela ne soit pas indispensable, nous supposerons néanmoins, pour la simplicité, que toutes ces variables sont de même dimension. On peut éventuellement les considérer comme les coordonnées d'un point P dans un espace ponctuel à n dimensions [1].

La notion de *vecteur* apparaît dès lors qu'on envisage des transformations des variables, qui peuvent être considérées comme des applications de $\mathcal{R}^n$ dans $\mathcal{R}^n$:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

Il s'ensuit que les différentielles des variables subissent la transformation

$$dx^\alpha \to dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, dx^\beta \tag{1.1}$$

où la convention de sommation d'Einstein a été utilisée.

Nous dirons, par définition, que les différentielles dx^α sont les *composantes contravariantes* d'un vecteur. Le critère utilisé pour les qualifier ainsi est que dans ladite transformation elles se transforment selon la matrice nxn, que nous noterons à l'occasion M, dont les éléments sont les dérivées partielles $\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$.

Par extension, nous dirons que n grandeurs $V^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ sont les composantes contravariantes d'un champ de vecteur, si dans la même transformation, les nouvelles grandeurs $V'^\alpha(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n)$ sont liées aux anciennes par cette même matrice

$$V'^\alpha(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, V^\beta(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{1.2}$$

Un *scalaire* est une grandeur invariante sous les transformations considérées :

$$\Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n) \ \text{ scalaire } \ \Leftrightarrow \ \Phi'(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{1.3}$$

1. En outre, nous supposons dans la suite que toutes les grandeurs manipulées, hormis les matrices, commutent entre elles.

De même, des grandeurs à plusieurs indices $T^{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_p}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ seront qualifiées de composantes contravariantes d'un *champ de tenseur* de rang (ou d'ordre) p si et seulement si elles se transforment selon [2, 3]

$$T'^{\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_p}(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}}\,\frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{\beta_2}}\,\cdots\,\frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\beta_p}}\,T^{\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_p}(x^1, x^2, \cdots, x^n) \qquad (1.4)$$

On notera que ces définitions de vecteur, scalaire ou tenseur sont liées au type de transformations envisagées. Dès lors, on peut concevoir qu'un ensemble donné de certaines grandeurs puisse ne pas être catalogué de la même manière selon le groupe de transformations considéré [4, 5] . On généralise ainsi la notion commune de vecteur qui est attachée au groupe des rotations dans l'espace usuel à trois dimensions.

Si la transformation est *linéaire*, alors les variables x^α constituent elles-mêmes, par rapport à cette transformation, les composantes contravariantes d'un vecteur. En effet, puisque

$$x'^\alpha = \omega^\alpha_\beta\, x^\beta$$

où les éléments ω^α_β sont supposés indépendants des variables, on a

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \omega^\alpha_\beta\ , \quad \text{et} \quad x'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\, x^\gamma$$

Cependant, pour des transformations plus compliquées, les variables ne constituent pas a priori des composantes de vecteur [6].

Comme la différentielle d'un scalaire $\Phi(x) \equiv \Phi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ est aussi invariante, on obtient

$$d\Phi'(x') = dx'^\alpha\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha} = dx^\beta\, \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha} = d\Phi(x) = dx^\beta\, \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta}$$

d'où, par identification,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\, \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\alpha}$$

Bien entendu, il sera toujours supposé qu'une transformation possède une transformation inverse. La matrice $M : \left\{\partial x'^\alpha / \partial x^\beta\right\}$ aura ainsi pour inverse la matrice $M^{-1} : \left\{\partial x^\gamma / \partial x'^\lambda\right\}$. Il vient alors

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \qquad (1.5)$$

2. C'est-à-dire comme un produit de p composantes contravariantes d'un vecteur.

3. Un scalaire est donc un tenseur d'ordre 0 et un vecteur est un tenseur d'ordre 1.

4. A cet égard, nous conseillons vivement au lecteur de se poser la question de savoir comment on peut identifier expérimentalement un "vecteur" dans notre espace physique.

5. Ainsi, les objets que nous cataloguons comme vecteurs dans notre espace à trois dimensions, théatre d'application privilégié du groupe des rotations, ne le sont plus quand on les plongent dans l'espace-temps à quatre dimensions où les transformations (changements de référentiels) sont principalement régies par le groupe de Lorentz.

6. Considérer l'exemple des transformations homographiques dans l'espace euclidien à deux dimensions (ou dans l'ensemble des nombres complexes).

Autrement dit, le gradient de Φ se transforme *selon la matrice inverse* $\left\{\partial x^{\gamma}/\partial x'^{\lambda}\right\}$. On dit qu'il se transforme comme des composantes *covariantes* d'un vecteur. Plus généralement, des objets $T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_q}$ à q indices "en bas" constitueront, relativement aux transformations considérées, des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre q si et seulement si leur loi de transformation est

$$T'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_q}(x') = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}}\,\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\alpha_q}}\,T_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}(x) \tag{1.6}$$

Certaines grandeurs indexées peuvent posséder une partie de leurs indices "en haut" et l'autre partie "en bas". Si leurs lois de transformation sont conformes aux définitions de *contravariance* et de *covariance*, on parlera alors de tenseurs *mixtes*[7].

La présentation des tenseurs adoptée ici diffère, au moins dans la forme, de celle que l'on trouve habituellement dans les ouvrages d'algèbre linéaire, où ils sont définis comme éléments de produits tensoriels d'un espace vectoriel donné E avec lui-même, un tenseur contravariant de rang p étant considéré comme un élément de l'espace $E^{\otimes p}$ se transformant selon le produit tensoriel $M^{\otimes p}$, tandis qu'un tenseur covariant de rang p y est considéré comme un élément de l'espace dual $E^{\star\otimes p}$ se transformant selon $({}^tM^{-1})^{\otimes p}$[8], le groupe de transformations habituellement envisagé étant $GL(n,\mathbb{C})$. Nous pourrions qualifier cette dernière de "statique" par rapport à leur conception plus "dynamique" qui ressort des formules (1.4) et (1.6), mettant au premier plan leur rapport avec des transformations, et qui est mieux adaptée à la description des *champs de tenseurs*[9] et à des classes élargies de transformations. Cette conception est notamment incontournable en Relativité Générale[10] où les notions de "base de vecteurs" ou de "référentiel" ne sont pas globales pour tout un espace, mais propres à chaque observateur situé en un point donné de l'espace physique, avec sa propre chronologie, et où les changements de coordonnées correspondent à des transferts d'informations d'un référentiel à un autre, informations qui différent généralement d'un observateur à un autre (d'un point à un autre). Bien entendu, l'algèbre linéaire est d'ores et déjà omniprésente dans ces mêmes formules (1.4) et (1.6).

1.2 Opérations sur les tenseurs

Il est donc bien entendu que l'appellation de tenseur se réfère à une classe de transformations donnée.

1.2.1 Multiplication par un scalaire

Un scalaire, qui peut être un simple nombre complexe, est par définition invariant sous une transfomation quelconque. La multiplication d'un tenseur de type donné par un scalaire donne un tenseur de même type.

7. On prendra garde au fait que les grandeurs résultant des transformations envisagées ont pour arguments les nouvelles coordonnées ; et qu'en outre les éléments de matrice $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ peuvent dépendre des valeurs des coordonnées x. Dans la suite, ces dépendances seront omises dans les formules pour simplifier l'écriture.

8. Voir par ex. J. Bass, "Cours de Mathématiques" Tome I, Masson et C[ie] ed. Paris, 1968, Chap VI.

9. Et plus "physique", selon l'auteur.

10. Voir : L. Landau, E. Lifchitz, "Théorie des Champs", Ed. Mir, Moscou, 1970, Chap. X. ; voir aussi la présentation intermédiaire de R. Kerner "Méthodes classiques de physique théorique", ellipses, 2014, Chap. 5.

1.2.2 Addition de deux tenseurs

Cette opération n'a de sens que si l'on ajoute des tenseurs de *même type* et de mêmes rangs. Le résultat donne un tenseur de même type celui des tenseurs que l'on ajoute.

1.2.3 Espace vectoriel de tenseurs

Des tenseurs d'un type et d'un rang donnés et dont les composantes sont des nombres complexes a une structure d'espace vectoriel sur le corps des complexes. Si les tenseurs sont de rang p, la dimension de l'espace vectoriel est n^p.

1.2.4 Produits tensoriels

La multiplication de deux tenseurs de rangs p et q donne un tenseur de rang $p+q$ dont le type dépend de ceux des tenseurs constituants. Ainsi le produit $A^{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}\,B^{\beta_1\,\beta_2}$ est un tenseur contravariant de rang 5, le tenseur $A_{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}\,B_{\beta_1\,\beta_2}$ est un tenseur covariant de rang 5 et le tenseur $A_{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}\,B^{\beta_1\,\beta_2}$ est un tenseur mixte de rang 5, 3 fois covariant et 2 fois contravariant.

1.2.5 Contractions

L'opération de contraction a déjà été implicitement utilisée précédemment. Il peut s'agir d'une opération entre tenseurs contravariants et tenseurs covariants (multiplication contractée), ou d'une opération sur les composantes d'un unique tenseur *mixte*. Considérons le cas du produit tensoriel $A_{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}\,B^{\beta_1\,\beta_2}$. Posons $\alpha_2=\beta_1$ et faisons la somme des quantités ainsi obtenues[11] :

$$C^{\beta_2}_{\alpha_1\,\alpha_3}=A_{\alpha_1\,\gamma\,\alpha_3}\,B^{\gamma\,\beta_2}$$

On vérifie aisément que les grandeurs $C^{\beta_2}_{\alpha_1\,\alpha_3}$ sont bien les composantes d'un tenseur de rang 3, 2 fois covariant et 1 fois contravariant : la contraction est une opération *invariante*. La contraction sur deux indices, l'un contravariant, l'autre covariant, transforme un produit tensoriel mixte de rang p en un tenseur de rang $p-2$. Ainsi, la contraction d'un vecteur contravariant A^α et d'un vecteur covariant B_β donne le scalaire $S=A^\alpha\,B_\alpha$. Notons que la contraction peut fournir un *critère de tensorialité* de grandeurs indexées $C^{\alpha_1\,\alpha_2,\ldots}_{\beta_1,\beta_2,\ldots}$: si leur contraction avec des grandeurs $D^{\alpha_1\,\alpha_2,\ldots}_{\beta_1,\beta_2,\ldots}$, lesquelles sont reconnues comme de véritables composantes d'un tenseur, conduit à un véritable tenseur, alors lesdites grandeurs sont bien les composantes d'un tenseur. Par exemple, étant donné deux vecteurs contravariants V^α et W^β, si la contraction $A_{\alpha\,\beta}V^\alpha W^\beta$ est un scalaire, alors les grandeurs $A_{\alpha\,\beta}$ sont bien les composantes d'un tenseur deux fois covariant.

L'opération peut être effectuée aussi bien sur un tenseur mixte tel que $T^{\alpha\,\beta}_{\gamma\,\delta\,\epsilon}$ et de diverses façons :

$$V^{\beta}_{\gamma\,\delta}=T^{\alpha\,\beta}_{\gamma\,\delta\,\alpha},\quad W^{\beta}_{\delta\,\epsilon}=T^{\alpha\,\beta}_{\alpha\,\delta\,\epsilon},\quad Z^{\alpha}_{\gamma\,\epsilon}=T^{\alpha\,\beta}_{\gamma\,\beta\,\epsilon}$$

donnant à chaque fois des tenseurs, a priori tous différents, dont le rang est de 2 unités inférieur à celui du tenseur initial. Considérons le cas des tenseurs mixtes de rang 2, donc de

11. Ici encore, on utilise la convention de sommation d'Einstein.

la forme T^α_β. Ces tenseurs sont assimilables à des matrices $n\times n$. Appelons T la matrice dont les coefficients sont T^α_β, et M la matrice dont les éléments sont les grandeurs $M^\alpha_\beta = \dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$. La loi de transformation de ce tenseur peut être transcrite en termes de matrices comme

$$T' = M\,T\,M^{-1}$$

d'où l'on tire que $\mathrm{Tr}\,T' = T'^\alpha_\alpha = \mathrm{Tr}\,T = T^\alpha_\alpha$, c'est-à-dire que la trace de la matrice T, qui est aussi la *trace du tenseur* T^α_β est, comme attendu, un scalaire (invariant).

1.3 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Les propiétés de symétrie ou d'antisymétrie de tenseurs n'ont évidemment de sens que vis-à-vis d'indices de même type, contravariant ou covariant.

Un tenseur avec des indices contravariants (resp. covariants) α et β est dit symétrique vis-à-vis de ces indices si leur échange ne change pas la composante du tenseur concernée :

$$A^{\dots\beta\dots\alpha\dots}_{\dots} = A^{\dots\alpha\dots\beta\dots}_{\dots}\,, \quad B^{\dots}_{\dots\beta\dots\alpha\dots} = B^{\dots}_{\dots\alpha\dots\beta\dots}$$

De même, un tenseur avec des indices contravariants (resp. covariants) α et β est dit antisymétrique vis-à-vis de ces indices si leur échange change le signe de la composante du tenseur concernée :

$$A^{\dots\beta\dots\alpha\dots}_{\dots} = -A^{\dots\alpha\dots\beta\dots}_{\dots}\,, \quad B^{\dots}_{\dots\beta\dots\alpha\dots} = -B^{\dots}_{\dots\alpha\dots\beta\dots}$$

Ces propriétés sont intrinsèques à ces tenseurs, car elles sont préservées par les transformations. A titre d'illustration, considérons des tenseurs à deux indices. Sous une transformation M^α_β, on a, pour un tenseur symétrique covariant,

$$\begin{aligned} A'_{\alpha'\beta'} &= (M^{-1})^\alpha_{\alpha'}\,(M^{-1})^\beta_{\beta'}\,A_{\alpha\beta} = (M^{-1})^\alpha_{\alpha'}\,(M^{-1})^\beta_{\beta'}\,A_{\beta\alpha} = (M^{-1})^\beta_{\beta'}(M^{-1})^\alpha_{\alpha'}\,A_{\beta\alpha} \\ &= (M^{-1})^\alpha_{\beta'}(M^{-1})^\beta_{\alpha'}\,A_{\alpha\beta} = A'_{\beta'\alpha'} \end{aligned}$$

Pour un tenseur antisymétrique, on obtiendrait de même $B'_{\beta'\alpha'} = -B_{\alpha'\beta'}$. La préservation de ces propriétés lors des transformations est liée au fait que le groupe de permutation S_p commute avec les produits tensoriels $M^{\otimes p}$ ou $(M^{-1})^{\otimes p}$ [12].

1.4 Symboles de Levi-Civita [13]

1.4.1 Définition

Le *symbole de Levi-Civita* d'ordre N, noté $\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}$, encore appelé *symbole indicateur de volume de Kronecker*, ou encore *tenseur dualiseur*, est donné par le déterminant

12. Voir H. Bacry, "Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Elémentaires", Gordon and Breach, 1967 (distribué par Dunod ed.), Chap. 4.

13. G. Ricci-Curbastro et T. Levi-Civita, " Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", Mathematische Annalen, Springer Verlag, vol. 54, no 1-2, mars 1900, p. 125-201.

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} = \begin{vmatrix} \delta_{r_1,1} & \delta_{r_1,2} & \cdots & \delta_{r_1,N-1} & \delta_{r_1,N} \\ \delta_{r_2,1} & \delta_{r_2,2} & \cdots & \delta_{r_2,N-1} & \delta_{r_2,N} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \delta_{r_{N-1},1} & \delta_{r_{N-1},2} & \cdots & \delta_{r_{N-1},N-1} & \delta_{r_{N-1},N} \\ \delta_{r_N,1} & \delta_{r_N,2} & \cdots & \delta_{r_N,N-1} & \delta_{r_N,N} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

$\delta_{a,b}$ étant le symbole de Kronecker. Ledit symbole est complètement antisymétrique suivant ses N indices $r_1, \cdots, r_N$, chacun courant de 1 à N, et tel que

$$\epsilon_{12\cdots N} = 1 \tag{1.8}$$

Il peut aussi s'écrire comme

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} \operatorname{sgn}(r_j - r_i) = \sigma(P) \tag{1.9}$$

où $\operatorname{sgn}(a-b)$ est le signe de la différence $a-b$, pris égal à 0 si $a = b$ et $\sigma(P)$ la signature de la permutation $[1, 2, \cdots, N] \longrightarrow [r_1, r_2, \cdots r_N]$ (soit $(-1)^p$ où p est la parité de la permutation). Par permutation de ses colonnes, le déterminant (1.7) se voit multiplié par la signature de cette permutation, et il est donc évident que l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \delta_{r_1,s_1} & \delta_{r_1,s_2} & \cdots & \delta_{r_1,s_{N-1}} & \delta_{r_1,s_N} \\ \delta_{r_2,s_1} & \delta_{r_2,s_2} & \cdots & \delta_{r_2,s_{N-1}} & \delta_{r_2,s_N} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \delta_{r_{N-1},s_1} & \delta_{r_{N-1},s_2} & \cdots & \delta_{r_{N-1},s_{N-1}} & \delta_{r_{N-1},s_N} \\ \delta_{r_N,s_1} & \delta_{r_N,s_2} & \cdots & \delta_{r_N,s_{N-1}} & \delta_{r_N,s_N} \end{vmatrix} = \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} \tag{1.10}$$

Le symbole de Levi-Civita intervient notamment dans l'expression du déterminant d'une matrice A $(N \times N)$. On a les formules suivantes, utilisant la convention de sommation d'Einstein avec des indices répétés courant chacun de 1 à N.

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; A_1^{r_1} \, A_2^{r_2} \cdots A_N^{r_N} \\ \det A &= \frac{1}{N!} \; \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} \; A_{s_1}^{r_1} \, A_{s_2}^{r_2} \cdots A_{s_N}^{r_N} \\ \det A \; \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} &= \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \; A_{s_1}^{r_1} \, A_{s_2}^{r_2} \cdots A_{s_N}^{r_N} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Du point de vue des transformations du groupe $GL(N, \mathbb{C})$ agissant sur un espace vectoriel complexe E_N de dimension N, le symbole de Levi-Civita représente un tenseur d'ordre N. La dernière formule dans (1.11) montre que sous l'effet d'une transformation de ce groupe représentée par la matrice A, ce tenseur est simplement multiplié par le déterminant de la matrice et reste même invariant si $\det A = 1$, c'est-à-dire, s'il s'agit d'une transformation du sous-groupe $SL(N, \mathbb{C})$. En fait, il est facile de montrer qu'à un facteur près, le tenseur de Levi-Civita est le seul tenseur d'ordre N complètement antisymétrique [14].

Développons le déterminant (1.10) suivant les éléments de sa première colonne, tout en exprimant le résultat à l'aide des symboles de Levi-Civita d'ordre $N-1$:

$$\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \ \epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N} = \left[\ \delta_{r_1 s_1} \ \epsilon_{r_2 r_3 \cdots r_N} - \delta_{r_2 s_1} \ \epsilon_{r_1 r_3 \cdots r_N} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{N-1} \, \delta_{r_N s_1} \, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_{N-1}} \right] \ \epsilon_{s_2 s_3 \cdots s_N}$$

Choisissons les indices s_k tous différents, auquel cas $\epsilon_{s_1 s_2 \cdots s_N}$ et $\epsilon_{s_2 s_3 \cdots s_N}$ sont différents de zéro, mais prenons tous les indices r_k dans une suite de $N-1$ valeurs différentes. Le symbole d'ordre N $\epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N}$ est alors nul car deux de ses indices sont certainement identiques. On en déduit la relation suivante entre symboles de Levi-Civita d'ordre $N-1$:

$$\boxed{\delta_{r_1 s_1} \ \epsilon_{r_2 r_3 \cdots r_N} - \delta_{r_2 s_1} \, \epsilon_{r_1 r_3 \cdots r_N} + \cdots + (-1)^{N-1} \, \delta_{r_N s_1} \, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_{N-1}} = 0} \tag{1.12}$$

Voici quelques autres formules générales :

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_N = 1}^{N} \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_N} \ = \ N\,! \tag{1.13}$$

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_k = 1}^{N} \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_k r_{k+1} \cdots r_N} \, \epsilon_{r_1 r_2 \cdots r_k s_{k+1} \cdots s_N} \ = \ k\,!\,(N-k)\,!\,\delta^{s_{k+1} \cdots s_N}_{r_{k+1} \cdots r_N} \tag{1.14}$$

où $\delta^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_q}$ est un symbole de Kronecker généralisé d'ordre q donné par [15]

$$\delta^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_q} = \sum_P \sigma(P) \ \delta^{j_{P(1)}}_{i_1} \ \delta^{j_{P(2)}}_{i_2} \cdots \delta^{j_{P(q)}}_{i_q} \ = \begin{vmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \delta^{j_1}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_1}_{i_{q-1}} & \delta^{j_1}_{i_q} \\ \delta^{j_2}_{i_1} & \delta^{j_2}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_2}_{i_{q-1}} & \delta^{j_2}_{i_q} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \delta^{j_{q-1}}_{i_1} & \delta^{j_{q-1}}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}} & \delta^{j_{q-1}}_{i_q} \\ \delta^{j_q}_{i_1} & \delta^{j_q}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_q}_{i_{q-1}} & \delta^{j_q}_{i_q} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

P étant une permutation de q éléments et $\sigma(P)$ sa signature. Ci-après, nous considérons plus particulièrement les cas $N=3$ et $N=4$.

14. Voir H. Bacry, loc. cit, §4.6.
15. Ici, on ne fait aucune distinction entre les symboles δ_{ab} et δ^b_a.

1.4.2 Cas de 3 dimensions euclidiennes

Comme on sait, le symbole de Levi-Civita d'ordre 3 peut s'exprimer simplement à partir d'un produit mixte. Dans une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{e_a}, \overrightarrow{e_b}, \overrightarrow{e_c}\right\}$, on a en effet

$$\epsilon_{abc} = \overrightarrow{e_a} \cdot \left(\overrightarrow{e_b} \wedge \overrightarrow{e_c}\right) = \pm 1 \tag{1.16}$$

Cette forme met clairement en évidence l'invariance du tenseur $\{\epsilon_{abc}\}$ vis-à-vis du groupe des rotations $SO(3)$: c'est une grandeur *scalaire* vis-à-vis de ce groupe. Comme on sait, le qualificatif de *pseudo-scalaire* qui lui est attribué vient de son comportement dans l'opération de parité. Sous celle-ci, un vecteur ordinaire se voit changer de sens [16]. Les vecteurs de base étant supposés se comporter de cette façon, leur produit mixte ϵ_{abc} change de signe dans l'opération, alors qu'un “vrai scalaire” (tel le produit scalaire de deux vrais vecteurs) ne change pas de signe.

La métrique euclidienne utilisée dans ce cas [17] permet d'identifier les composantes contravariantes aux composantes covariantes : $\epsilon^{abc} = \epsilon_{abc}$. Dans les formules suivantes on utilise la convention de sommation d'Einstein.

$$\begin{gathered}
\epsilon_{abc}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{a\alpha}\,\delta_{b\beta}\,\delta_{c\gamma} + \delta_{a\beta}\,\delta_{b\gamma}\,\delta_{c\alpha} + \delta_{a\gamma}\,\delta_{b\alpha}\,\delta_{c\beta} \\
-\delta_{a\alpha}\,\delta_{b\gamma}\,\delta_{c\beta} - \delta_{a\gamma}\,\delta_{b\beta}\,\delta_{c\alpha} - \delta_{a\beta}\,\delta_{b\alpha}\,\delta_{c\gamma} \\
\epsilon_{abs}\,\epsilon^{c\alpha s} + \epsilon_{bcs}\,\epsilon^{a\alpha s} + \epsilon_{cas}\,\epsilon^{b\alpha s} = 0 \\
\delta_{ra}\,\epsilon_{bcd} - \delta_{rb}\,\epsilon_{acd} + \delta_{rc}\,\epsilon_{abd} - \delta_{rd}\,\epsilon_{abc} = 0 \\
\epsilon_{abc}\,\epsilon^{a\beta\gamma} = \delta_b^\beta\,\delta_c^\gamma - \delta_b^\gamma\,\delta_c^\beta, \quad \epsilon_{abc}\,\epsilon^{ab\gamma} = 2\,\delta_c^\gamma, \quad \epsilon_{abc}\,\epsilon^{abc} = 6
\end{gathered} \tag{1.17}$$

1.4.3 Cas des 4 dimensions d'espace-temps

Dans ce cas, la métrique pseudo-euclidienne de signature $(+\,-\,-\,-)$ est utilisée pour passer des composantes contravariantes de tenseurs à leurs composantes covariantes (ex. : $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\beta}\,T^{\alpha\beta}$) et l'on a

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1 = -\,\epsilon^{0123}} \tag{1.18}$$

Des propriétés générales mentionnées plus haut, on déduit les formules suivantes

$$\begin{gathered}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\left[\delta_\mu^\alpha\,\delta_\nu^\beta\,\delta_\rho^\gamma + \delta_\nu^\alpha\,\delta_\rho^\beta\,\delta_\mu^\gamma + \delta_\rho^\alpha\,\delta_\mu^\beta\,\delta_\nu^\gamma - \delta_\mu^\alpha\,\delta_\rho^\beta\,\delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\alpha\,\delta_\mu^\beta\,\delta_\rho^\gamma - \delta_\rho^\alpha\,\delta_\nu^\beta\,\delta_\mu^\gamma\right] \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\left[\delta_\mu^\alpha\,\delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha\,\delta_\mu^\beta\right] \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\,\delta_\mu^\alpha\,, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24
\end{gathered} \tag{1.19}$$

16. Et pour cette raison est aussi appelé *vecteur vrai* ou encore *vecteur polaire*.
17. Nous reviendrons plus loin sur la notion de métrique.

$$\boxed{\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\, g_{\mu\omega} - \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}\, g_{\nu\omega} + \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}\, g_{\rho\omega} - \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\, g_{\sigma\omega} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{\lambda\omega} = 0} \tag{1.20}$$

Cette dernière relation (1.20), directement déduite de (1.12), se retrouve notamment dans le calcul de la trace d'un produit de matrices de Dirac [18].

1.5 Tenseurs invariants et groupes associés

1.5.1 Symbole de Kronecker mixte

Il s'agit du symbole δ_α^β, représenté en terme de matrice par la matrice unité. Il s'agit bien d'une composante d'un tenseur mixte d'ordre 2, et invariant, puisque

$$(\delta')_{\alpha'}^{\beta'} = M_\beta^{\beta'}\, (M^{-1})_{\alpha'}^{\alpha}\, \delta_\alpha^\beta = (M^{-1}M)_{\alpha'}^{\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\beta'}$$

1.5.2 Tenseur mixte de rang 2 invariant

Comme nous l'avons déjà indiqué, un tenseur mixte de rang 2 C_α^β peut être représenté par une matrice $n \times n$ notée C. Dans une transformation représentée par la matrice M, la matrice C doit satisfaire la relation

$$C = MCM^{-1}$$

si elle est invariante, et ce, quelle que soit la matrice M. L'espace vectoriel des vecteurs sur lequel agissent les matrices M est irréductible vis-à-vis du groupe formé par l'ensemble de ces matrices, groupe assimilable au groupe $GL(n, \mathbb{C})$. D'après le théorème de Schur, la matrice C est nécessairement proportionnelle à la matrice identité : les seuls tenseurs mixtes de rang 2 invariants ont pour composantes les symboles de Kronecker, à un facteur global près.

1.5.3 Symbole de Kronecker contravariant ou covariant

C'est par définition le symbole $\delta^{\alpha\beta}$ pour le cas contravariant, $\delta_{\alpha\beta}$ pour le cas covariant, qui est nul si $\alpha \neq \beta$ et égal à 1 si $\alpha = \beta$. L'un ou l'autre de ces symboles ne peut être considéré comme un vrai tenseur invariant que si, dans le cas contravariant,

$$\delta^{\alpha'\beta'} = M_\alpha^{\alpha'}\, M_\beta^{\beta'}\, \delta^{\alpha\beta} = \sum_\alpha M_\alpha^{\alpha'}\, M_\alpha^{\beta'} = M_\alpha^{\alpha'}\, ({}^tM)_{\beta'}^{\alpha} = \left(M\, {}^tM\right)_{\beta'}^{\alpha'} \quad \text{soit}$$

$$M\, {}^tM = 1 \tag{1.21}$$

c'est-à-dire, s'il s'agit de transformations linéaires, si celles-ci font partie d'un groupe linéaire orthogonal. La même conclusion vaut pour le symbole de Kronecker covariant. D'après (1.21), on a $(\det M)^2 = 1$. Si $\det M = +1$, le groupe est un groupe de rotations dans un espace de dimension n.

18. Voir notre cours "Introduction à la Théorie Lagrangienne" (ITL), Eq. 7.56.

1.5.4 Forme bilinéaire invariante

Cherchons la condition pour qu'un tenseur de rang 2 contravariant soit invariant. On doit avoir

$$C'^{\alpha'\beta'}(x') = C^{\alpha'\beta'}(x) = M_{\alpha}^{\alpha'}\, M_{\beta}^{\beta'}\, C^{\alpha\beta}(x) \tag{1.22}$$

Définissons une matrice Γ telle que $\Gamma_{\beta}^{\alpha} = C^{\alpha\beta}$. La relation (1.22) peut alors être transcrite comme

$$\Gamma = M\,\Gamma\,{}^{t}M \tag{1.23}$$

Supposons Γ inversible ($\det\Gamma \neq 0$). La relation (1.23) donne alors $(\det M)^2 = 1$. Choisissons $\det M = +1$, auquel cas les matrices à considérer sont du groupe $SL(n,\mathbb{C})$ (ou éventuellement du groupe $SL(n,\mathbb{R})$). La même relation conduit à

$${}^{t}M^{-1} = \Gamma^{-1}\, M\,\Gamma \tag{1.24}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Trace}\, M^{-1} = \mathrm{Trace}\, M \tag{1.25}$$

Voyons comment cette égalité des traces peut être réalisée. Pour ce faire, utilisons le développement

$$\det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\,\mathrm{Trace}\,A + \cdots + (-\lambda)\,a_1 + \det A$$

valable pour toute matrice $n\times n$ inversible, et écrivons

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (-\lambda)^n \det A\, \det(A^{-1} - 1/\lambda)\\ &= (-\lambda)^n \det A\,\left[(-1/\lambda)^n + (-1/\lambda)^{n-1}\,\mathrm{Trace}\,A^{-1} + \cdots + \det\, A^{-1}\right]\\ &= \det\, A + (-\lambda)\det\, A\,\mathrm{Trace}\,A^{-1} + \cdots + (-\lambda)^n\end{aligned}$$

Par identification, on voit que $a_1 = \det\, A\,\mathrm{Trace}\,A^{-1}$, et l'on réalise que la condition (1.25) avec $\det\, M = 1$ est satisfaite pour $n = 2$, c'est-à-dire, pour les matrices de $SL(2,\mathbb{C})$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

permet de réaliser (1.24). Elle correspond au tenseur antisymétrique $C^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}$ (symbole de Levi-civita pour la dimension 2). On trouverait de façon similaire que le tenseur de Levi-Civita covariant $\epsilon_{\alpha\beta}$ est invariant sous les transformation de $SL(2,\mathbb{C})$.

L'intérêt de disposer d'un tenseur de rang 2 covariant, ou forme bilinéaire, est qu'il permet de définir un lien entre composantes covariantes et composantes contravariantes pour un même tenseur. Ainsi, à partir des composantes contravariantes V^{β} d'un vecteur, les composantes covariantes de ce même vecteur seront définies comme $V_{\alpha} = C_{\alpha\beta}\,V^{\beta}$. Sous une transformation M laissant C invariant, on aura $V'_{\beta'}(x') = C_{\beta'\,\alpha}\,M_{\beta}^{\alpha}\,V^{\beta}(x)$, et comme $C_{\beta'\alpha}M_{\beta}^{\alpha} = (M^{-1})_{\beta'}^{\gamma}C_{\gamma\beta}$, il vient $V'_{\beta'}(x') = (M^{-1})_{\beta'}^{\gamma}\,V_{\gamma}(x)$, ce qui est bien conforme à la loi de transformation d'un vecteur covariant [19].

19. Voir une application au paragraphe 1.6.4.

1.6 Exemples de tenseurs

1.6.1 Tenseur d'inertie

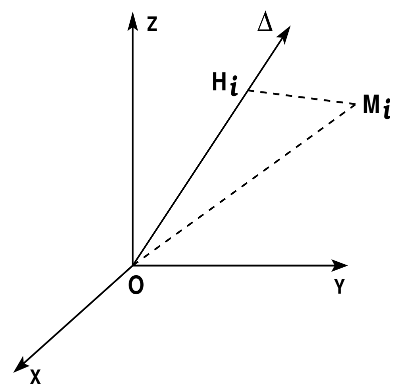

FIGURE 1.1 – Solide en rotation autour d'un axe Δ

Relativement à un repère catésien $R(O, x, y, z)$ considèrons un solide S constitué de N points matériels M_i dont les masses et coordonnées cartésiennes respectives sont notées m_i, x_i, y_i et z_i. Soit Δ une droite passant par O et dont l'orientation est caractérisée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de composantes u_x, u_y et u_z. On appelle *moment d'inertie* de S par rapport à Δ la grandeur

$$I = \sum_i m_i \; d_i^2$$

où d_i est la distance de M_i à Δ. Notons H_i le projeté orthogonal de M_i sur Δ. On a $d_i^2 = OM_i^2 - OH_i^2$ et $\overline{OH_i} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM_i} = u_x x_i + u_y y_i + u_z z_i$, d'où

$$\begin{aligned} d_i^2 &= x_i^2(u_y^2 + u_z^2) + y_i^2(u_z^2 + u_x^2) + z_i^2(x_i^2 + y_i^2) \\ &-2u_x u_y x_i y_i - 2u_y u_z y_i z_i - 2u_z u_x z_i x_i \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, exprimons I en fonction des coordonnées cartésiennes des points M_i et des composantes cartésiennes de $\overrightarrow{u}$ (qui vérifient $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$). On trouve

$$I = \sum_{k,\ell} I_{k\ell} \; u^k u^\ell, \qquad k, \; \ell \; = x, \; y, \; z$$

où les grandeurs $I_{k\ell}$ sont données par

$$I_{xx} = I_{11} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \; I_{yy} = I_{22} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2), \; I_{zz} = I_{33} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i \, x_i y_i = I_{12} = I_{21} \tag{1.27}$$

$$I_{yz} = I_{yx} = -\sum_i m_i \, y_i z_i = I_{23} = I_{32}, \; I_{zx} = I_{xz} = -\sum_i m_i \, z_i x_i = I_{31} = I_{13}$$

Ce sont les composantes du *tenseur d'inertie* du système, qui est un tenseur symétrique. Ici, l'appellation de tenseur se réfère bien sûr aux transformations du groupe de rotations de l'espace à 3 dimensions : par rotation, les composantes $I_{k\ell}$ se transforment comme un produit $u^k\, u^\ell$ de composantes d'un vecteur. En outre, on ne distingue plus les composantes covariantes et les composantes contravariantes car le passage des unes aux autres se fait ici au moyen du symbole de Kronecker $\delta_{k\ell}$, invariant par rotation comme nous l'avons vu précédemment. Rappelons que c'est au moyen de ce symbole qu'est défini le produit scalaire des vecteurs usuels de l'espace physique.

Supposons les N points M_i rigidement liés les uns aux autres, et mettons S en mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de Δ, dans le sens direct par rapport à $\overrightarrow{u}$. La vitesse de M_i est alors

$$\overrightarrow{v_i} = \omega \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM_i}$$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ de S par rapport à O s'écrit

$$\overrightarrow{L} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_i} = \omega \sum_i m_i \left(\overrightarrow{u}\, \overrightarrow{OM_i}^{\,2} - \overrightarrow{OM_i}\, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM_i} \right)$$

et, par exemple, sa composante L_x est

$$L_x = \omega \sum_i m_i \left(\alpha(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i) \right) = \omega \left[I_{xx}\alpha + I_{xy}\beta + \gamma I_{xz} \right]$$

et l'on constate qu'une composante quelconque du moment cinétique s'exprime sous la forme

$$L_k = \omega \sum_\ell I_{k\ell}\, u^\ell, \qquad k,\ \ell\ = x,\ y,\ z$$

c'est-à-dire, comme une contraction du tenseur $\omega\, I_{k\ell}$ et du vecteur u^ℓ, contraction qui donne bien un vecteur. Le moment d'inertie lui-même résulte d'une double contraction du tenseur d'inertie avec le tenseur $u^k\, u^\ell$, contraction donnant un scalaire.

Le tenseur d'inertie peut être représenté par une matrice $\mathcal{I}$ dont les éléments sont les composantes $I_{k\ell}$. Comme le tenseur d'inertie, cette matrice est symétrique et, en tant que telle, est diagonalisable. Les vecteurs propres de cette matrice définissent les *axes principaux* du tenseur.

1.6.2 Tenseur des déformations

Le système S est maintenant globalement au repos dans R, mais subit des déformations. Notons $\overrightarrow{R_i} = \overrightarrow{OM_i}$ les vecteurs positions des points M_i avant déformation et

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{R_i} + \overrightarrow{\xi}\, (\overrightarrow{R_i})$$

ces vecteurs positions après déformation, où $\overrightarrow{\xi}\, (\overrightarrow{R_i})$ représente un champ de vecteur de déplacement. Admettons que les points M_i soient suffisamment proches les uns des autres ; on peut alors considérer les écarts $\overrightarrow{M_iM_j} = \overrightarrow{R_j} - \overrightarrow{R_i}$ comme infinitésimaux et écrire par exemple

$$\xi^k(\overrightarrow{R_j}) - \xi^k(\overrightarrow{R_i}) \approx \sum_\ell \frac{\partial \xi^k}{\partial R^\ell}(\overrightarrow{R_i})\ \Delta R^\ell_{ji}$$

Les quantités $T^k_\ell(\overrightarrow{R_i}) = \dfrac{\partial \xi^k}{\partial R^\ell}(\overrightarrow{R_i})$ sont les composantes d'un champ tensoriel appelé *tenseur des déformations*. Ici aussi, l'appellation de tenseur se réfère au groupe des rotations.

Considérons plus particulièrement quatre points voisins non alignés M_1, M_2, M_3 et M_4 et écrivons pour simplifier $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{M_1M_4}=\overrightarrow{c}$. Le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ est le produit mixte $V = \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \epsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k$. Utilisant la première formule de (1.17), on obtient

$$\epsilon_{rst}\, \epsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k = a^r b^s c^t + a^s b^t c^r + a^t b^r c^s - a^r b^t c^s - a^t b^s c^r - a^s b^r c^t$$

et comme $\epsilon_{rst}\epsilon^{pst} = 2\,\delta^p_r$, on en tire l'identité

$$\epsilon_{pst}\ \left[a^r b^s c^t + a^t b^r c^s + a^s b^t c^r\right]\ =\ \delta^r_p\ V$$

Le volume après déformation est

$$\begin{aligned} V' = \epsilon_{rst}(a^r + \delta a^r)(b^s + \delta b^s)(c^t + \delta c^t) &\simeq V + \epsilon_{rst}\left(\delta a^r b^s c^t + a^r \delta b^s c^t + a^r b^s \delta c^t\right) \\ &= V + \epsilon_{rst}\left(T^r_p\, a^p b^s c^t + a^r T^s_p b^p c^t + a^r b^s T^t_p c^p\right) \\ &= V + T^r_p\, \epsilon_{rst}\left(a^p b^s c^t + a^t b^p c^r + a^s b^t c^p\right) = V + V \delta^p_r\, T^r_p = V\,(1 + T^r_r) \end{aligned}$$

où nous avons effectué des changements de notation d'indices et tenu compte de l'anti-symétrie complète du tenseur de Levi-Civita. La grandeur T^r_r est la trace du tenseur des déformation, égale à

$$T^r_r = \operatorname{div}\overrightarrow{\xi}$$

La divergence du champ de déplacement s'interprète donc comme une dilatation. Il est utile de noter qu'un tenseur quelconque T^j_i peut toujours être décomposé en une somme de trois termes :

$$T^j_i = S^j_i + V^j_i + D^j_i$$

où :

- $S^j_i = \dfrac{1}{3}\ \delta^j_i\ T$, T étant la *trace* du tenseur,
- $V^j_i = \dfrac{1}{2}\left(T^j_i - T^i_j\right)$ est la partie antisymétrique du tenseur,
- $D^j_i = \left(T^j_i + T^i_j - \dfrac{2}{3}\delta^j_i\, T\right)$ est sa partie symétrique telle que $D^k_k\ = 0$.

Il est facile de montrer que V^j_i n'a que trois composantes non nulles, pouvant servir à définir un vecteur par l'opération [20].

20. A noter ce fait exceptionnel que la représentation d'un tenseur antisymétrique par un vecteur ne peut se faire que dans un espace de dimension 3...

$$V_i = \epsilon_{ijk} V^{jk}$$

Il s'agit bien d'un vecteur, résultant de la contraction d'un tenseur de rang trois et d'un tenseur de rang 2. Pour le champ des déformations, ce vecteur est $\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\xi}$. On vérifie que dans le cas où $\mathrm{div}\ \overrightarrow{\xi} = 0$ et $\dfrac{\partial \xi^k}{\partial R^\ell}(\overrightarrow{R_i}) = -\dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial R^k}(\overrightarrow{R_i})$, la déformation du solide S est localement une rotation.

1.6.3 Tenseur d'Energie-Impulsion en Théorie des Champs

En théorie des champs, le Lagrangien dépend d'un certain nombre de fonctions $\phi_A(t, x, y, z,)$ $(A = 1, \cdots, q)$ des trois coordonnées d'espace x, y, z et du temps t, ainsi que de leurs dérivées partielles premières $\partial_\mu \phi_A = \dfrac{\partial \phi_A}{\partial x^\mu}$, l'indice μ prenant les valeurs $0, 1, 2, 3$, avec $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^0 = ct$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide. Les équations d'évolution de ce système décrit par lesdits champs s'obtiennent au moyen du principe variationnel

$$\delta \iiiint L\left(\phi_A, \partial_\mu \phi_B\right)\ d^4x\ = 0$$

où $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ et où l'intégration est étendue à tout l'espace à quatre dimensions, principe qui conduit aux équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_A} = \frac{\partial L}{\partial \phi_A}\ , \qquad A = 1, \cdots p$$

(avec une sommation implicite sur l'indice μ). Le tenseur d'Energie-Impulsion est défini comme

$$T^\mu_\nu = \sum_A \partial_\nu \phi_A \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_A}\ - \delta^\mu_\nu\ L$$

Il s'agit d'un tenseur vis-à-vis du groupe des transformations de Lorentz qui régissent les changements de référentiels galiléens en Relativité restreinte. Ces transformations laissent invariante la métrique d'espace-temps définie par le tenseur $g_{\mu\nu}$ tel que $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ pour $i = 1, 2, 3$. Les composantes covariantes d'un vecteur V (quadri-vecteur ou "4-vecteur") sont liées aux composantes contravariantes de ce vecteur via ce tenseur[21] de sorte que $V_0 = V^0$, $V_i = -V^i$ $(i = 1, 2, 3)$ et l'on a notamment $\partial^0 = \partial_0$, mais $\partial^i = -\partial_i$ pour $i = 1, 2, 3$ (il s'agit des dérivées partielles par rapport aux coordonnées *covariantes* $x_0 = x^0,\ x_i = -x^i$ pour $i = 1, 2, 3$). On a

$$\partial_\mu\ T^\mu_\nu = -\partial_\nu L + \sum_A \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_A}\, \partial_\mu\, \partial_\nu \phi_A + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_A} \right) \partial_\nu \phi_A \right]$$

$$\sum_A \left\{ \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_A} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_A} \right\} \partial_\nu \phi_A = 0$$

21. Voir le chapitre II.

où dans la dernière étape on a tenu compte des équations d'Euler-Lagrange. La relation obtenue s'apparente à l'équation de conservation d'un courant, et de fait il s'agit bien d'une équation de conservation traduisant à l'échelle locale la conservation globale de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système étudié, supposé être isolé.

1.6.4 Tenseurs spineurs

Considérons à nouveau l'exemple d'une forme bilinéaire invariante en dimension 2, donné au paragraphe 1.5.4. La matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

possède les propriétés suivantes :

$$\Gamma^* = \Gamma \quad , \quad \Gamma^{-1} = {}^t\Gamma = -\Gamma \tag{1.29}$$

et pour toute matrice 2x2 notée M, on a

$$M\ \Gamma\ {}^tM = (\mathrm{det}M)\ \Gamma \tag{1.30}$$

Les matrices du groupe $SL(2,C)$, défini par la relation : $\det\, M = 1$, et dont $SU(2)$ est un sous-groupe, vérifient donc donc

$$\Gamma M \Gamma^{-1} = {}^tM^{-1} \text{ ou } CM^*C^{-1} = M^{\dagger^{-1}} \tag{1.31}$$

ce qui montre notamment que la représentation M du groupe et sa "contragrédiente" ${}^tM^{-1}$ sont équivalentes, et que sa représentation conjuguée M^* est équivalente à $M^{\dagger^{-1}}$. L'espace vectoriel sur lequel agit la représentation fondamentale du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est l'espace complexe de dimension 2, dont les vecteurs sont appelés *spineurs*. Les composantes ξ^α $(\alpha = 1,2)$ d'un spineur de cet espace se transforment comme

$$\xi'^\alpha = M^\alpha_\beta\ \xi^\beta = (\Gamma^{-1}\, {}^tM^{-1}\Gamma)^\alpha_\beta\ \xi^\beta \qquad (\Gamma^{-1} = -\Gamma) \tag{1.32}$$

d'où il ressort que les combinaisons

$$\omega^\alpha = \Gamma^\alpha_\beta\ \xi^\beta \tag{1.33}$$

se transforment selon la représentation M^{-1}. Etant donné un spineur κ associé à la représentation M^{-1}, l'expression

$${}^t\xi\,\kappa = {}^t(\Gamma^{-1}\omega)\kappa = {}^t\omega\,\Gamma\kappa = (\omega,\kappa) = \omega^1\,\kappa^2 - \omega^2\,\kappa^1 \tag{1.34}$$

est donc invariante sous les transformations de $SL(2,C)$. Ceci suggère de définir un nouveau produit scalaire dans l'espace des spineurs à deux composantes, en se servant de la matrice Γ comme d'un "tenseur métrique" :

$$g_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\alpha_\beta = -g_{\beta\alpha} \quad (g_{12} = -g_{21} = 1), \quad \text{soit} \quad g_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \tag{1.35}$$

à partir duquel on définira les composantes covariantes d'un spineur comme

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\,\xi^\beta \quad \text{soit} \quad \xi_1 = \xi^2 \quad , \quad \xi_2 = -\xi^1 \tag{1.36}$$

Il est clair que ces composantes covariantes se transforment selon la matrice inverse M^{-1}. Exprimé avec celles-ci, le produit scalaire ainsi défini s'écrit sous la forme manifestement invariante $\omega_\alpha\,\kappa^\alpha = \omega^\beta\,\kappa_\beta$ (avec la convention de sommation d'Einstein). Le tenseur métrique étant antisymétrique, le produit scalaire d'un spineur par lui-même est *nul* : tout spineur est isotrope vis-à-vis de cette métrique.

Les diverses représentations finies du groupe peuvent être construites par tensorialisation multiple de la représentation fondamentale. On obtient ainsi des tenseurs-spineurs $T^{\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_q} = a^{\alpha_1}\,b^{\alpha_2}\,\cdots c^{\alpha_q}$ à indices contravariants se transformant selon la matrice $M^{\alpha_1}_{\beta_1}\,M^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots M^{\alpha_q}_{\beta_q}$. Mais, à l'aide du tenseur métrique invariant, on peut faire "baisser" les indices et obtenir ainsi, par exemple, des tenseurs-spineurs $T_{\alpha_1\cdots\alpha_q} = a_{\alpha_1}\,b_{\alpha_2}\cdots c_{\alpha_q}$ à composantes complètement covariantes, lesquelles se transforment selon la matrice

$$({}^tM^{-1})^{\alpha_1}_{\beta_1}\,({}^tM^{-1})^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots({}^tM^{-1})^{\alpha_q}_{\beta_q} = (M^{-1})^{\beta_1}_{\alpha_1}\,(M^{-1})^{\beta_2}_{\alpha_2}\cdots(M^{-1})^{\beta_q}_{\alpha_q}$$

On peut de surcroît construire des tenseurs mixtes, dont les composantes contiennent à la fois des indices contravariants et des indices covariants (tenseurs mixtes). On montre qu'à partir de cette algèbre tensorielle, on peut retrouver toutes les représentations irréductibles du groupe $SU(2)$. En fait, il existe un lien évident entre les tenseurs de rang $N = 2j$ et les spineurs de base introduits précédemment. En effet, les spineurs de base attachés à une rotation

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad (\beta = -\gamma^* \quad , \quad \delta = \alpha^*)$$

sont

$$\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \kappa = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

et un spineur de base de spin j a pour composantes les éléments de matrice $\mathcal{D}_{nm}(R)$, combinaisons linéaires de produits $\alpha^p\,\beta^{j+m-p}\,\gamma^q\,\delta^{j-m-q}$ s'écrivant aussi sous la forme

$$\underbrace{\omega^1\,\omega^1\,\cdots\omega^1}_{p\ \text{fois}}\,\underbrace{\kappa^1\,\kappa^1\cdots\kappa^1}_{j+m-p\ \text{fois}}\,\underbrace{\omega^2\,\omega^2\cdots\omega^2}_{q\ \text{fois}}\,\underbrace{\kappa^2\,\kappa^2\cdots\kappa^2}_{j-m-q\ \text{fois}}$$

Il s'agit bien de produits tensoriels de composantes des deux spineurs ω et κ. Dans l'espace de Hilbert, considérons le ket

$$|\,c> = \sum_j \sum_{m=-j}^{j} \frac{(c^1)^{j+m}\,(c^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|\,j,m> \tag{1.37}$$

c^1 et c^2 étant les composantes d'un 2-spineur c. Les composantes

$$<\,j,m|\,c> = \frac{(c^1)^{j+m}\,(c^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} \tag{1.38}$$

définissent un spineur de spin j, et aussi bien un tenseur contravariant de rang $N = 2j$, soit

$$T^{\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_N} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,c^{\alpha_1}\,c^{\alpha_2}\cdots c^{\alpha_N} \tag{1.39}$$

qui est symétrique par rapport à tous ses indices α_i. La composante

$$\frac{1}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,\overbrace{c^1\,c^1\cdots c^1}^{j+m\ \text{fois}}\,\overbrace{c^2\,c^2\cdots c^2}^{j-m\ \text{fois}}$$

correspond à la valeur m de la composante du spin suivant l'axe des z. On montre qu'à l'aide de ces tenseurs symétriques on retrouve toute la classification des représentations irréductibles de $SU(2)$ [22].
Les composantes du tenseur relativement à la base spinorielle $\Psi^j_{m_1}(R)$ sont données par

$${}_R\!< jm_1|\,c >= \sum_{m_2=-j}^{j} \frac{(c^1)^{j+m_2}\,(c^2)^{j-m_2}}{\sqrt{(j+m_2)!\,(j-m_2)!}}\,\mathcal{D}^j_{m_1m_2}(R) = \frac{(c'^1)^{j+m_2}\,(c'^2)^{j-m_2}}{\sqrt{(j+m_2)!\,(j-m_2)!}}$$

avec

$$c'^1 = \alpha\,c^1 + \beta\,c^2 \quad , \quad c'^2 = \gamma\,c^1 + \delta\,c^2$$

ce qui établit le lien entre les composantes dudit tenseur symétrique et les composantes $\Psi^j_{m_1}(R)$.

22. Voir par exemple : L.Landau, E. Lifchitz, Mécanique Quantique, Théorie non Relativiste (Physique Théorique, Tome III), § 55 à 58, 2ème édition, Ed. Mir, Moscou, 1967 ; H. Bacry, loc. cit.

Chapitre 2

Conséquences de l'existence d'une métrique

2.1 Tenseur métrique

Supposons définie une forme quadratique réelle notée ds^2 (sans présager de son signe)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{2.1}$$

où les grandeurs à deux indices $g_{\alpha\beta}$ dépendent a priori des variables et vérifient $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Considérant ces grandeurs comme les éléments d'une matrice (symétrique), on suppose que cette dernière est inversible, son inverse ayant des éléments notés $g^{\gamma\lambda}$, tels que

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\gamma\beta} = \delta^\gamma_\alpha \ , \quad \text{et} \quad g^{\gamma\beta} = g^{\beta\gamma} \tag{2.2}$$

Effectuant une transformation des variables $x^\alpha \to x'^\alpha$, la forme quadratique est réexprimée comme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\, dx'^\gamma\, dx'^\lambda \tag{2.3}$$

On constate alors que la forme quadratique ne pourra être considérée comme invariante sous la transformation que si et seulement si les quantités

$$g'_{\gamma\lambda} = g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \tag{2.4}$$

représentent bien ce que doivent devenir les grandeurs $g_{\alpha\beta}$ sous l'effet de cette transformation, auquel cas elles représentent des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2, que l'on appelle couramment *tenseur métrique*. La forme ds^2 sert alors à définir des distances ou des intervalles. En fait, la classe de transformations envisagée est le plus souvent caractérisée comme celle qui laisse invariante une certaine forme quadratique du type de ds^2. Elles forment alors un groupe de transformations.

Inversement, on peut *définir* par (2.4) ce que doit être la loi de transformation de $g_{\alpha\beta}$, en en faisant ainsi un tenseur, ce qui permet d'introduire des éléments de géométrie propres au type de transformations considéré.

Supposons donc que soit défini un tenseur métrique de composantes covariantes $g_{\alpha\beta}$ et de composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$. Si certaines grandeurs indexées telles que $T^{\alpha_1\cdots}$ se sont révélées de nature contravariante, une contraction

$$T^{\alpha_1\cdots}\,g_{\alpha_1\beta_1} = T_{\beta_1}^{\cdot\ \cdots}$$

avec le tenseur $g_{\alpha_1\beta_1}$ permet de leur associer un tenseur $T_{\beta_1}^{\cdot\ \cdots}$ présentant une nature covariante relativement à l'indice β_1. Par des contractions de ce type, soit avec le tenseur $g_{\alpha\beta}$ soit avec son inverse $g^{\alpha\beta}$, il est ainsi possible d'associer des composantes covariantes à des composantes contravariantes et vice-versa. La contraction

$$V \cdot W = V^\alpha\,W_\alpha = V_\alpha\,W^\alpha = g_{\alpha\beta}\,V^\alpha\,W^\beta \tag{2.5}$$

des composantes contravariantes d'un vecteur avec les composantes covariantes d'un autre conduit à un invariant pouvant définir un produit scalaire, puis une norme ou une pseudo-norme. A cet égard, signalons que puisque le tenseur métrique est symétrique, il peut être *localement* diagonalisé. Comme il est inversible, il n'a aucune valeur propre nulle. Si toutes les valeurs propres sont positives, le produit scalaire prend la forme d'un produit scalaire euclidien. Si certaines valeurs propres sont négatives, il prendra une forme *pseudo-euclidienne*.

2.2 Dérivation covariante

Nous avons vu qu'en dérivant une fonction scalaire, on obtient des composantes covariantes d'un vecteur, son gradient. Par ce même procédé, est-il possible qu'à partir de composantes identifiées d'un tenseur on obtienne un nouveau tenseur ? Considérons tout d'abord la dérivation des composantes covariantes A_β d'un vecteur. Par transformation $x^\alpha \to x'^\alpha$ des variables, on a

$$A'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda(x)$$

d'où

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda(x)\right)$$

soit

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta}\,\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\,A_\lambda(x) \tag{2.6}$$

La présence du second terme de cette dernière expression montre que ces dérivées ne peuvent constituer des composantes de tenseur que si et seulement si la matrice de transformation $\partial x^\lambda/\partial x'^\alpha$ est une constante, autrement dit si les transformations sont purement *linéaires*. En revanche, on vérifie aisément que, *quelle que soit la transformation*, la combinaison *anti-symétrique*

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2.7}$$

se comporte toujours comme une composante de tenseur deux fois covariante. Ce tenseur est la généralisation de ce qui est le rotationnel à trois dimensions.

A part cette possibilité d'antisymétrisation, peut-on néanmoins construire à partir d'un tenseur un autre tenseur qui s'apparenterait à sa dérivée ? La réponse est positive et le procédé mis en oeuvre consiste à effectuer une *dérivation covariante*. Pour un vecteur, on cherche une sorte de différentielle DA_α se transformant comme un vecteur (covariant) :

$$DA'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\, DA_\lambda(x) \tag{2.8}$$

Cette "différentielle" doit bien sûr contenir la vraie différentielle dA_α et un second terme dont la fonction sera de compenser la contribution des dérivées des éléments de la matrice de transformation. D'après (2.6), cette contribution fait intervenir les composantes A_β. On tentera donc une expression de la forme

$$DA_\alpha = dA_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\, A_\lambda\, dx^\delta \tag{2.9}$$

On écrira de même

$$DA'_\alpha = dA'_\alpha - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, A'_\lambda\, dx'^\delta$$

Il vient alors

$$DA'_\alpha = d\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda\right) - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} dA_\lambda + A_\lambda\, \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta$$

$$= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \left(DA_\lambda + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, A_\mu\, dx^\nu\right) + A_\mu\, \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta$$

En tenant compte de la loi de transformation (2.8), il vient

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\, \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, A_\mu\, dx^\nu + A_\mu\, \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta}\, dx'^\delta - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A_\mu\, dx'^\delta = 0$$

Et comme cette identité doit être vraie pour tout vecteur et quelles que soient les variations des variables, on en déduit

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\, \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta} - \Gamma'^\lambda_{\alpha\delta}\, \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} = 0$$

soit encore

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\delta} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\, \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta}\, \Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\delta} \tag{2.10}$$

Cette relation est la condition pour que DA_α se comporte comme une composante covariante. Les grandeurs $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ introduites de façon ad hoc pour qu'il en soit ainsi s'appellent les *symboles de Christoffel*. Leur loi de transformation (2.10) montre que ce ne sont pas des composantes de tenseur. La grandeur DA_α quant à elle est la *différentielle covariante* du champ de vecteur A_α, et

$$\frac{DA_\alpha}{Dx^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, A_\lambda \tag{2.11}$$

est une *dérivée partielle covariante*.

Pour faire du symbole D une véritable différentiation, nous lui attribuerons la propriété de Leibnitz

$$D(AB) = (DA)B + A(DB) \tag{2.12}$$

pour toutes fonctions A et B des variables. En outre, pour toute fonction scalaire $\Phi(x)$, nous ferons l'identification

$$D\Phi \equiv d\Phi \tag{2.13}$$

D'après (2.11), on a

$$\frac{DA_\alpha}{Dx^\beta} - \frac{DA_\beta}{Dx^\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \left[\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\right] A_\lambda$$

Or, lorsque A_α est le gradient d'une fonction scalaire Φ, le premier terme de cette expression est nulle :

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$$

Afin de préserver cette propriété dans la dérivation covariante, on voit que l'on doit imposer aux symboles de Christoffel d'être *symétriques* selon leurs deux "indices en bas" :

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \tag{2.14}$$

Envisageons maintenant la dérivation covariante des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2. Un tel tenseur doit se comporter de la même manière qu'un produit $A_\alpha B_\beta$ des composantes covariantes de deux vecteurs. On doit avoir

$$D(A_\alpha B_\beta) = A_\alpha (DB_\beta) + (DA_\alpha) B_\beta =$$

$$d(A_\alpha B_\beta) - A_\alpha \, \Gamma^\lambda_{\beta\delta} \, B_\lambda \, dx^\delta - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta} \, A_\lambda \, B_\beta \, dx^\delta$$

Pour tout tenseur $T_{\alpha\beta}$, on imposera donc la définition

$$DT_{\alpha\beta} = dT_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta} \, T_{\alpha\lambda} \, dx^\delta - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta} \, T_{\lambda\beta} \, dx^\delta \tag{2.15}$$

et

$$\frac{DT_{\alpha\beta}}{Dx^\delta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta} \, T_{\alpha\lambda} \; - \Gamma^\lambda_{\alpha\delta} \, T_{\lambda\beta} \tag{2.16}$$

En considérant des produits tensoriels tels que $A_{\alpha_1} \, A_{\alpha_2} \cdots A_{\alpha_p}$ on déduit de la même manière ce que doit être l'expression de la différentielle covariante d'un tenseur plus général d'ordre p.

La différentielle covariante DA_α d'une composante covariante A_α est donc elle-même une composante covariante d'un vecteur. Les composantes contravariantes associées doivent s'en déduire par contraction avec le tenseur métrique $g^{\alpha\beta}$. Imposons alors que ces composantes contravariantes se déduisent aussi par différentiation covariante des composantes contravariantes A^α. On aura ainsi

$$DA^{\alpha} = g^{\alpha\beta} DA_{\beta}$$

Mais

$$DA^{\alpha} = D(g^{\alpha\beta}\, A_{\beta}) = (Dg^{\alpha\beta})\, A_{\beta} + g^{\alpha\beta}\, DA_{\beta}$$

On en déduit

$$Dg^{\alpha\beta} = 0 \ , \quad \text{ainsi que} \quad Dg_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.17}$$

De la sorte, la différentielle covariante du tenseur métrique est *nulle*. Ce résultat impose bien sûr une corrélation étroite entre le tenseur métrique et les symboles de Christoffel. Comme

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{Dx^{\delta}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\delta}\, g_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta}\, g_{\lambda\beta} = 0 \tag{2.18}$$

Il vient

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\delta}\, g_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta}\, g_{\lambda\beta} \ , \quad \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\, g_{\delta\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta}\, g_{\lambda\alpha} \ ,$$

$$\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma^{\lambda}_{\delta\alpha}\, g_{\beta\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\, g_{\lambda\delta}$$

d'où

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}} = (\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta})\, g_{\lambda\alpha} + (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\alpha})\, g_{\lambda\beta} + (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})\, g_{\lambda\delta}$$

soit (du fait des symétries des symboles de Christoffel)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right) \tag{2.19}$$

Il vient ensuite

$$DA^{\alpha} = g^{\alpha\rho} DA_{\rho} = g^{\alpha\rho} \left[dA_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\delta}\, A_{\lambda}\, dx^{\delta} \right]$$

Or

$$dA_{\rho} = d(g_{\rho\gamma} A^{\gamma}) = g_{\rho\gamma} dA^{\gamma} + A^{\gamma} dg_{\rho\gamma} = g_{\rho\gamma} dA^{\gamma} + A^{\gamma} \left[\Gamma^{\lambda}_{\rho\delta}\, g_{\lambda\gamma} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda} \right] dx^{\delta} =$$

$$g_{\rho\gamma} dA^{\gamma} + \left[\Gamma^{\lambda}_{\rho\delta}\, A_{\lambda} + A^{\gamma}\, \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda} \right] dx^{\delta}$$

On trouve finalement

$$DA^{\alpha} = g^{\alpha\rho} \left[g_{\rho\gamma} dA^{\gamma} + A^{\gamma}\, \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta}\, g_{\rho\lambda}\, dx^{\delta} \right]$$

soit

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\, A^\gamma\, dx^\delta \quad \text{et} \quad \frac{DA^\alpha}{Dx^\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} A^\gamma \tag{2.20}$$

On peut expliquer de la manière suivante ce qui distingue la différentielle covariante de la différentielle usuelle. Imaginons que les variables soient les coordonnées d'un point dans un espace ponctuel à n dimensions. A tout point M est attaché un repère local dont chaque axe est partenaire de l'un des n indices α_i permettant d'indexer, notamment, les composantes d'un vecteur. Notons $e_\alpha(M)$ les vecteurs définissant ce repère local. Relativement à cette base, un champ de vecteur donné $\mathcal{A}(M)$ sera exprimé au moyen de ses composantes contravariantes comme

$$\mathcal{A}(M) = A^\alpha(M)\, e_\alpha(M)$$

Un changement infinitésimal des coordonnées s'interprète comme un déplacement $M \to M'$ du point dans l'espace ponctuel, à la suite duquel non seulement les coordonnées du point ont changé, mais également l'orientation du repère local qui lui est attaché [1]. Le champ de vecteur $\mathcal{A}(M)$ est devenu $\mathcal{A}(M')$. La différence entre ces deux valeurs du champ peut être exprimée dans la base initiale $e_\alpha(M)$, ce qui nécessite de ramener $\mathcal{A}(M')$ vers cette base, c'est-à-dire de le *transporter parallèlement à lui-même* de M' vers M. On écrira alors

$$\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = (DA^\alpha)\, e_\alpha(M)$$

Il est clair que les grandeurs DA^α introduites ici sont bien des composantes contravariantes d'un vecteur. Or, écrivant

$$\mathcal{A}(M') = A^\alpha(M')\, e_\alpha(M')$$

on voit explicitement que la différence des valeurs du champ rapportée à la base initiale fait intervenir non seulement les variations des composantes du champ mais aussi celle des vecteurs de base. Ces dernières seront exprimées comme

$$e_\alpha(M') - e_\alpha(M) = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, e_\beta(M)\, dx^\gamma \tag{2.21}$$

d'où

$$\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = [A^\alpha + dA^\alpha]\left[e_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, e_\beta\, dx^\gamma\right] - A^\alpha\, e_\alpha \approx \left[dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta\, dx^\gamma\right] e_\alpha$$

On retrouve ainsi la formule (2.20)

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta\, dx^\gamma$$

1. Ce point de vue permet de comprendre pourquoi le formalisme présenté ici constitue un outil de base en Relativité Générale qui vise à exprimer l'équivalence des référentiels.

2.3 Géodésiques

La notion de *géodésique* est liée à celle de *métrique* qui permet de définir une *distance* entre deux éléments d'un ensemble. Au sens de cette métrique, une géodésique est le *plus court*, ou, s'il y en a plusieurs, l'un des plus courts chemins joignant deux éléments donnés. Cette notion se rencontre surtout en géométrie (à 3 dimensions comme à n dimensions), en mécanique non relativiste et en mécanique relativiste (notoirement en relativité générale). Dans chaque cas, le *carré* de l'élément de longueur ds est exprimé comme en (2.1)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Dans le cas de la mécanique relativiste, on sait que cette quantité, appelée intervalle, peut être négative si elle se rapporte à deux événements pour lesquels il n'existe aucun moyen physique qui aurait pu les relier (intervalle du genre espace). La notion de géodésique perd alors son sens. C'est pourquoi on ne considèrera que des situations pour lesquelles ds^2 est positif, ce qui correspondra à des évolutions matériellement réalisables, par déplacement d'un objet matériel notamment.

Plaçons-nous donc dans le cas d'une géométrie dans un espace à n dimensions. L'élément ds est la distance séparant deux points infiniment proches. La distance finie entre deux points donnés M_1 et M_2 dépend bien sûr de la courbe $\mathcal{C}$ joignant ces deux points. Elle est donnée par l'intégrale

$$S_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds \tag{2.22}$$

effectuée le long de cette courbe $\mathcal{C}$. Le problème consiste alors à trouver l'équation de la courbe, ou des courbes, rendant cette distance extrémale. Ici encore, il s'agit d'effectuer un calcul des variations. La variation première de $S_{\mathcal{C}}$ est donnée par

$$\delta S_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} \delta(ds)$$

Pour calculer $\delta(ds)$ on procède de la façon suivante. On a

$$\delta ds^2 = 2ds\, \delta(ds) = 2g_{\rho\lambda} dx^\rho\, \delta(dx^\lambda) + \delta(g_{\rho\lambda})\, dx^\rho\, dx^\lambda$$

Or, d'une part,

$$\delta(g_{\rho\lambda}) = \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma}\, \delta x^\gamma$$

et, d'autre part,

$$g_{\rho\gamma} dx^\rho\, \delta(dx^\gamma) = ds\, g_{\rho\gamma}\, u^\rho\, \delta(dx^\gamma) = ds\, g_{\rho\gamma}\, u^\rho\, d(\delta x^\gamma) = ds\, d\left(g_{\rho\gamma}\, u^\rho\, \delta x^\gamma - ds\, \delta x^\gamma\, d(g_{\rho\gamma}\, u^\rho)\right)$$

$$= ds\, d\left(g_{\rho\gamma}\, u^\rho\, \delta x^\gamma\right) - ds\, \delta x^\gamma \left[u^\rho \frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + g_{\rho\gamma} du^\rho\right]$$

où les grandeurs

$$u^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} \tag{2.23}$$

sont les composantes contravariantes du vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$. Il s'agit bien de composantes de vecteur pour des transformations laissant ds invariant, car les variations infinitésimales dx^ρ sont toujours des composantes de vecteur. Comme par hypothèse $\delta x^\gamma = 0$ aux points extrêmes M_1 et M_2, il vient (après avoir divisé $\delta(ds^2)$ par $2ds$)

$$\delta S_\mathcal{C} = -\int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds\,\delta x^\gamma \left[g_{\rho\gamma}\frac{du^\rho}{ds} + u^\rho \frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} u^\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma} u^\rho\, u^\lambda \right]$$

Puisque

$$u^\rho \frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} u^\lambda = \frac{1}{2}\, u^\rho\, u^\lambda \left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} \right]$$

le terme entre crochets dans l'intégrale peut être récrit comme

$$g_{\rho\gamma}\frac{du^\rho}{ds} + \frac{1}{2}\, u^\rho\, u^\lambda \left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma} \right]$$

Or, on a

$$g_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\gamma} \right]$$

d'où

$$\delta S_\mathcal{C} = -\int_{\mathcal{C}(M_1,M_2)} ds\,\delta x^\gamma\, g_{\beta\gamma} \left[\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\, u^\rho u^\lambda \right] \tag{2.24}$$

D'après le lemme du calcul des variations, $\delta S_\mathcal{C}$ est nul, et donc la courbe $\mathcal{C}$ rend $S_\mathcal{C}$ extremum si et seulement si en tout point de cette courbe on a

$$\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\, u^\rho u^\lambda = 0 \tag{2.25}$$

C'est l'équation des *géodésiques*. Comme sur la courbe $dx^\mu = u^\mu ds$, on peut réexprimer cette équation comme

$$\frac{1}{ds}\left[du^\beta + \Gamma^\beta_{\rho\lambda}\, u^\rho\, dx^\lambda \right] = 0\ , \quad \text{soit} \quad \frac{Du^\beta}{Ds} = 0 \tag{2.26}$$

c'est-à-dire que, sur une courbe géodésique, la dérivée covariante du vecteur tangent doit être nulle.

2.4 Exemple d'application : géodésiques d'une sphère

Considérons une sphère de centre O et de rayon unité. En fonction des angles orbital θ et azimuthal φ et de leurs variations infinitésimales $d\theta$ et $d\varphi$, le carré de l'élément de longueur ds séparant deux points de la sphère infiniment proches s'exprime comme

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{2.27}$$

Considérant θ et φ comme les variables fondamentales, on a ici un tenseur métrique dont les composantes covariantes sont

$$g_{\theta\theta} = 1\ ,\quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0\ ,\quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \tag{2.28}$$

On en déduit les composantes contravariantes

$$g^{\theta\theta} = 1\ ,\quad g^{\theta\varphi} = g^{\varphi\theta} = 0\ ,\quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta} \tag{2.29}$$

puis les symboles de Christoffel

$$\begin{gathered}
\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0\ ,\quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta \\
\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = 0\ ,\quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{gathered} \tag{2.30}$$

D'où les équations des géodésiques

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0\ ,\quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = 0 \tag{2.31}$$

La seconde de ces équations conduit à

$$\sin^2\theta\,\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0$$

soit

$$\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{ds} = \text{constante} = K$$

Or, d'une part, M_1 étant le point de départ de la courbe, il est toujours possible de choisir l'axe $z'z$, qui est l'axe de référence des angles orbitaux, selon $\overrightarrow{OM_1}$. Autrement dit, avec cette construction, en M_1 on a $\theta = 0$. D'autre part, la relation (2.27) qui peut être récrite comme

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1$$

montre que $\sin\theta\,|\frac{d\varphi}{ds}|$ ne peut que rester fini lorsque θ tend vers zéro. On en déduit que la constante K ne peut qu'être nulle. Il en résulte que pour des valeurs non nulles de θ, $d\varphi/ds = 0$, d'où $\varphi =$ constante. Il n'existe donc qu'une seule courbe géodésique joignant M_1 à un point M_2 : étant située dans le demi-plan contenant les trois points O, M_1 et M_2, il s'agit de l'arc de grand cercle de la sphère ayant pour centre O et pour extrémités M_1 et M_2.

Chapitre 3

Dérivées de Lie

3.1 Dérivée directionnelle d'un champ scalaire

Etant donné un champ scalaire $F(x) \equiv F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ ("fonction de n variables réelles à valeurs complexes"), on connait sa différentielle

$$dF = dx^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \cdots + dx^n \frac{\partial F}{\partial x^n} = dx^\alpha \, \partial_\alpha F$$

à partir de laquelle il n'est généralement pas possible de définir une dérivée simple de F avec le symbole usuel $d/d?$ comme on peut le faire avec une fonction d'une seule variable, si les différentielles dx^α sont indépendantes les unes des autres. Bien sûr, cette difficulté apparaît dès lors que le nombre de variables est supérieur à 1. En revanche, lorsque les différentielles dx^α sont liées, on peut donner un sens à une telle notation. Envisageons les choses dans un espace ponctuel réel de dimension n. Supposons en effet que le déplacement du point $M(x)$ vers $M'(x + dx)$ se fasse selon une direction définie par un vecteur $\overrightarrow{W}(x)$ de composantes $W^\alpha(x)$, de telle sorte que $dx^\alpha = W^\alpha(x)\, dt$, où dt est un paramètre infinitésimal, lequel, malgré la notation, peut n'avoir aucun rapport avec le temps [1]. En divisant dF par dt, on obtient la *dérivée directionnelle* de F suivant le vecteur W^α, au point M :

$$\frac{dF}{dt}(x) = (\mathcal{L}_W F)(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}_W = W^\alpha \partial_\alpha \tag{3.1}$$

est que l'on appelle aussi la *dérivée de Lie* du champ scalaire F relativement au champ de vecteurs W^α. Dans notre espace physique de dimension 3, envisageons par exemple le déplacement de M d'une distance $d\ell$ suivant une direction définie par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. La dérivée directionnelle de F suivant cette direction prend la forme

$$\frac{dF}{d\ell} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, F \tag{3.2}$$

Il est utile de rappeler ici que cette définition permet de retrouver aisément les expressions des composantes du gradient de F pour n'importe quel système de coordonnées choisi pour repérer M dans R. Par exemple, pour obtenir la composante azimutale du gradient en coordonnées sphériques, il suffit de prendre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_\varphi}$ et $d\ell = r \sin\theta d\varphi$ pour retrouver $(\overrightarrow{\text{grad}}\, F)_\varphi = \dfrac{1}{r \sin\theta} \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}$.

1. Ici, les différentielles des variables sont évidemment liées, puisque $dx^1/W^1 = \cdots = dx^n/W^n = dt$.

3.2 Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs

La définition de la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs est plus subtile et un petit préambule est nécessaire [2]. Plaçons-nous encore dans un espace ponctuel réel de dimension n. La représentation d'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ peut s'y faire au moyen de ses composantes $\mathcal{V}^1, \cdots, \mathcal{V}^n$ relativement à une base *globale* $\overrightarrow{\mathcal{E}_1}, \cdots, \overrightarrow{\mathcal{E}_n}$, fixe, c'est-à-dire, indépendante de la position de M,

$$\overrightarrow{V}(M) = \mathcal{V}^1(M)\ \overrightarrow{\mathcal{E}_1} + \cdots + \mathcal{V}^n(M)\ \overrightarrow{\mathcal{E}_n}$$

ou bien au moyen d'une base *locale* de vecteurs $\overrightarrow{e_\alpha}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ attachée à la position de M et dont l'orientation vis-à-vis de la base globale $\overrightarrow{\mathcal{E}_r}$ $(r = 1, \cdots, n)$, varie en fonction de cette position :

$$\overrightarrow{V}(M) = V^\alpha(M)\ \overrightarrow{e_\alpha}(M)$$

Comment définir cette base locale ? Prenons l'exemple de notre espace physique de dimension 3. La position d'un point M peut y être déterminée au moyen de ses coordonnées cartésiennes x, y, z, relativement à un repère cartésien global $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ en écrivant le *vecteur position* $\overrightarrow{OM}$ comme

$$\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{e_x} + y\ \overrightarrow{e_y} + z\ \overrightarrow{e_z}$$

ou bien par exemple au moyen des coordonnées sphériques (r, θ, φ) de M par rapport à R en l'écrivant comme

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{E_r}, \quad \text{où} \quad \overrightarrow{E_r} = \cos\theta\ \overrightarrow{e_z} + \sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{e_y}$$

On remarque que la base cartésienne locale $(\overrightarrow{E_r}, \overrightarrow{E_\theta}, \overrightarrow{E_\varphi})$ peut être définie par des dérivations partielles du *vecteur position* $\overrightarrow{OM}$:

$$\frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \overrightarrow{E_r} = \overrightarrow{e_r}, \quad \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \overrightarrow{e_\theta} = r\ \overrightarrow{E_\theta}, \quad \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \overrightarrow{e_\varphi} = r\sin\theta\ \overrightarrow{E_\varphi} \tag{3.3}$$

$$\text{où} \quad \overrightarrow{E_\theta} = -\sin\theta\ \overrightarrow{e_z} + \cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{e_y}, \quad \overrightarrow{E_\varphi} = -\sin\varphi\ \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\ \overrightarrow{e_y}$$

De même, la base globale du repère R peut être obtenu par dérivations partielles du vecteur position par rapport aux coordonnées cartésiennes de M dans ce repère.

$$\overrightarrow{e_x} = \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial x}, \quad \overrightarrow{e_y} = \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial y}, \quad \overrightarrow{e_z} = \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial x}$$

Nous définirons donc d'une façon la base locale attachée à un système de coordonnées particulier $(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ choisi pour paramétriser la position du point M par la formule

$$(\overrightarrow{e_\xi})_\alpha = \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial \xi^\alpha} \tag{3.4}$$

2. Voir aussi sec. (2.2).

Selon cette paramétrisation, la différentielle du vecteur position prend la forme

$$[d\,\overrightarrow{OM}]_\xi = d\xi^\alpha(\overrightarrow{e_\xi})_\alpha \tag{3.5}$$

Bien sûr, quel que soit le choix de coordonnées, la différentielle du vecteur position reste la même. Ainsi, ayant fait un premier choix de coordonnées $(\xi^1, \cdots, \xi^n)$ et décidant de changer de paramétrisation en prenant pour nouvelles coordonnées $(\eta^1, \cdots, \eta^n)$, de telle sorte que $[d\,\overrightarrow{OM}]_\eta = d\eta^\beta(\overrightarrow{e_\eta})_\beta$ où $(\overrightarrow{e_\eta})_\beta = \dfrac{\partial\,\overrightarrow{OM}}{\partial\eta^\beta}$, on *doit* avoir

$$[d\,\overrightarrow{OM}]_\eta = [d\,\overrightarrow{OM}]_\xi \tag{3.6}$$

La contrainte (3.6) fixe la relation entre bases locales dans un changement de coordonnées. En effet, écrivant $d\xi^\alpha = \dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^\beta}\,d\eta^\beta$, et tenant compte de l'indépendance a priori des différentielles $d\eta^\beta$, on déduit de (3.6) la relation

$$(\overrightarrow{e_\eta})_\beta = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^\beta}\,(\overrightarrow{e_\xi})_\alpha \tag{3.7}$$

En conclusion, lors d'un changement de coordonnées $(\xi) \to (\eta)$, les différentielles des coordonnées se transforment selon la matrice $M^\beta_\alpha = \dfrac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha}$ et conjointement, la base locale se transforme selon la matrice *inverse* $(M^{-1})^\alpha_\beta = \dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^\beta}$.

Faisons ici les remarques suivantes. Le choix de coordonnées doit bien sûr conduire à une base locale de vecteurs indépendants, mais il n'est pas assuré que ces vecteurs soient orthogonaux et unitaires. Par exemple, deux des vecteurs (3.3) obtenus pour les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ne pouvaient pas être unitaires, les coordonnées θ et φ étant sans dimension. Par ailleurs, les matrices $\{M^\alpha_\beta\}$ sont implicitement supposées inversibles, sauf peut-être en quelques points singuliers [3].

Supposons maintenant que nous ayons fait le choix de coordonnées $(x) = x^1, \cdots, x^n$, et, comme au paragraphe précédent, envisageons le déplacement infinitésimal du point M dans la direction du vecteur $\overrightarrow{W}\,(x)$: $dx^\alpha = dtW^\alpha$, W^α étant la composante dudit vecteur selon le vecteur $\overrightarrow{e_\alpha}\,(x)$ de la base locale attaché aux coordonnées (x). Dans ce déplacement, le point M se voit donc attribué les nouvelles coordonnées $x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha$. Cette opération peut être considérée comme un changement de coordonnées du point M, conduisant à la nouvelle base locale

$$\overrightarrow{e'_\beta}\,(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\,\overrightarrow{e_\alpha}\,(x)$$

et la matrice de transformation correspondante est ici

$$M^\beta_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha + dt\,\partial_\alpha W^\beta$$

Elle est voisine de la matrice unité et peut être écrite sous la forme $M = 1 + dt\,A$ où $dt\,A$ est la matrice dont les éléments $dt\,\partial_\alpha W^\beta$ sont infinitésimaux. Notant que $(1 - dt\,A)(1 +$

3. $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ pour les coordonnées sphériques en dimension 3.

$dt\,A) = 1 - (dt\,A)^2 \simeq 1$, en négligeant les termes en dt d'ordre supérieur à 1, on peut écrire $M^{-1} \simeq 1 - dtA$. On trouve ainsi que

$$\overrightarrow{e'_\beta}\,(x') \;\simeq \overrightarrow{e_\beta}\,(x) - dt\,\partial_\beta W^\alpha(x)\,\overrightarrow{e_\alpha}\,(x) \tag{3.8}$$

Considérons enfin un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\,(M)$. En M, il est défini par ses composantes relativement à la base locale :

$$\overrightarrow{V}\,(M) = V^\alpha(x)\,\overrightarrow{e_\alpha}\,(x)$$

et de même au point déplacé $M' = M + dM$, il s'écrit

$$\overrightarrow{V}\,(M') = V'^\beta(x')\,\overrightarrow{e'_\beta}\,(x')$$

L'écart entre ces deux expressions est

$$\delta\overrightarrow{V} = V'^\alpha(x')\,\overrightarrow{e'_\alpha}\,(x') - V^\alpha(x)\,\overrightarrow{e_\alpha}\,(x)$$

où l'on voit que les composantes de $\delta\overrightarrow{V}$ ne sont généralement pas les différences $V'^\alpha(x') - V^\alpha(x)$ car les indices des composantes ne se réfèrent pas aux mêmes bases de vecteurs : il faut tenir compte du changement de base lors du déplacement, c'est la justification du "prime" attribué aux composantes du vecteur transformé. Supprimant les notations superflues, on a

$$\begin{aligned}\delta\overrightarrow{V} &= \left[V^\alpha(x') - V^\alpha(x)\right]\,\overrightarrow{e_\alpha}\,+ V^\alpha(x')\left[\overrightarrow{e'_\alpha} - \overrightarrow{e_\alpha}\right]\\ &\simeq dt\,W^\beta\partial_\beta V^\alpha\,\overrightarrow{e_\alpha}\,- dt\,V^\beta\partial_\beta W^\alpha\,\overrightarrow{e_\alpha}\end{aligned}$$

Finalement, exprimée dans la base locale de départ, la variation relative du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dans ce déplacement est

$$\begin{aligned}\delta\overrightarrow{V}/dt &= [\mathcal{L}_W(V)]^\alpha\;\overrightarrow{e_\alpha}\quad \text{où}\\ [\mathcal{L}_W(V)]^\alpha &= W^\beta\partial_\beta V^\alpha - V^\beta\partial_\beta W^\alpha\end{aligned} \tag{3.9}$$

est la *dérivée de Lie* du champ de vecteurs V^α relativement au champ de vecteur W^α.

3.3 Propriétés de la dérivée de Lie

De part sa définition, la dérivée de Lie d'un champ de vecteur par rapport à un autre possède toutes les propriétés d'un *crochet de Lie*. C'est une opération *antisymétrique* suivant les deux champ de vecteurs impliqués :

$$\mathcal{L}_W(V) = -\mathcal{L}_V(W) \tag{3.10}$$

et elle satisfait *l'identité de Jacobi*

$$\mathcal{L}_U[\mathcal{L}_V(W)] + \mathcal{L}_V[\mathcal{L}_W(U)] + \mathcal{L}_W[\mathcal{L}_U(V)] = 0 \tag{3.11}$$

où U, V et W sont trois champs de vecteurs quelconques [4]. En utilisant la notation suggestive $\mathcal{L}_U(V) = [U, V]$, cette identité s'écrit aussi

4. Identité dont la vérification est laissée au lecteur.

$$\mathcal{L}_U([V,W]) = [\mathcal{L}_U(V),W] + [V,\mathcal{L}_U(W)] \tag{3.12}$$

ce qui montre que la dérivée de Lie satisfait la règle de dérivation usuelle de Leibniz : la dérivée de Lie par rapport à U du crochet de Lie $[V,W]$ est égale à la somme du crochet entre $\mathcal{L}_U(V)$ et W et du crochet entre V et $\mathcal{L}_U(W)$.

On adoptera donc pour principe de base que la dérivée de Lie satisfait ladite règle de Leibniz quelle que soit la nature de l'objet auquel elle s'applique, Comme exposé ci-après, ce principe permet de déterminer la dérivée de Lie d'un tenseur quelconque.

Notons enfin que (3.11) peut aussi être récrit comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U[\mathcal{L}_V(W)] - \mathcal{L}_V[\mathcal{L}_U(W)] - \mathcal{L}_{\mathcal{L}_U(V)}(W) = 0 \quad \text{soit} \\ [\mathcal{L}_U,\mathcal{L}_V](W) = \mathcal{L}_{[u,v]}(W) \end{aligned} \tag{3.13}$$

c'est-à-dire, l'application à un vecteur W du commutateur de deux dérivées de Lie relatives à deux vecteurs U et V équivaut à l'application sur W de la dérivée de Lie relative au commutateur de U et V. On vérifie aisément que cette propriété est aussi vraie si l'on remplace W par un champ scalaire. Elle est en fait valable quel que soit le tenseur auquel on applique les dérivées de Lie.

3.4 Dérivées de Lie des tenseurs

Commençons par trouver la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs présenté sous forme covariante. Pour cela, on considère la contraction $F = V^\alpha W_\alpha$ laquelle, étant un scalaire (invariant par transformation), a pour dérivée de Lie relativement au champ de vecteurs U :

$$\mathcal{L}_U(F) = U^\gamma \partial_\gamma (V^\alpha W_\alpha) = U^\gamma[(\partial_\gamma V^\alpha)W_\alpha + V^\alpha(\partial_\gamma W_\alpha)]$$

En appliquant la règle de Leibniz, cette expression doit s'identifier à

$$\mathcal{L}_U(V^\alpha W_\alpha) = [\mathcal{L}_U(V)]^\alpha W_\alpha + V^\alpha[\mathcal{L}_U(W)]_\alpha = [U^\gamma\partial_\gamma V^\alpha - (\partial_\gamma U^\alpha)V^\gamma]W_\alpha + V^\alpha[\mathcal{L}_U(W)]_\alpha$$

Par comparaison, et compte tenu du fait que le vecteur V est quelconque, on en tire

$$[\mathcal{L}_U(W)]_\alpha = U^\gamma\partial_\gamma W_\alpha + (\partial_\alpha U^\gamma)W_\gamma \tag{3.14}$$

On notera la différence entre (3.9) et (3.14). De façon similaire, la dérivée de Lie s'appliquant sur le tenseur contravariant de rang 2 $T^{\alpha\beta} = V^\alpha W^\beta$ est

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_U(U\otimes W)]^{\alpha\beta} &= [\mathcal{L}_U(V)]^\alpha W^\beta + V^\alpha[\mathcal{L}_U(W)]^\beta \\ &= (U^\gamma\partial_\gamma V^\alpha - V^\gamma\partial_\gamma U^\alpha)\,W^\beta + V^\alpha(U^\gamma\partial_\gamma W^\beta - W^\gamma\partial_\gamma U^\beta), \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_U(T)]^{\alpha\beta} = U^\gamma\partial_\gamma T^{\alpha\beta} - \partial_\gamma U^\alpha T^{\gamma\beta} - T^{\alpha\gamma}\partial_\gamma U^\alpha \tag{3.15}$$

cette dernière formule étant valable pour tout autre tenseur de même type. En utilisant la même technique, le lecteur vérifiera les formules analogues concernant les tenseurs de rang 2, soit covariants, soit mixtes :

$$[\mathcal{L}_U(T)]_{\alpha\beta} = U^\gamma \partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha U^\gamma T_{\gamma\beta} + T_{\alpha\gamma}\partial_\beta U^\gamma \tag{3.16}$$
$$[\mathcal{L}_U(T)]^\alpha_\beta = U^\gamma \partial_\gamma T^\alpha_\beta - \partial_\gamma U^\alpha T^\gamma_\beta + \partial_\beta U^\gamma T^\alpha_\gamma$$

Supposons l'existence d'un tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ et appliquons-lui une dérivée de Lie. D'après (3.16), on a

$$[\mathcal{L}_U(g)]_{\alpha\beta} = U^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha U^\gamma g_{\gamma\beta} + g_{\alpha\gamma}\partial_\beta U^\gamma$$

Or, d'après (2.20), les dérivées partielles covariantes des composantes contravariantes U^γ sont alors données par

$$\nabla_\alpha U^\gamma = \frac{DU^\gamma}{Dx^\alpha} = \partial_\alpha U^\gamma + \Gamma^\gamma_{\lambda\alpha} U^\lambda \tag{3.17}$$

On en déduit

$$[\mathcal{L}_U(g)]_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\nabla_\alpha U^\gamma + g_{\alpha\gamma}\nabla_\beta U^\gamma + U^\delta \left[\partial_\delta g_{\alpha\beta} - g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\delta\alpha} - g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\delta\beta}\right]$$

soit, compte tenu du fait que les dérivées partielles covariantes du tenseur métrique sont nulles et compte tenu de (2.18), la formule remarquable

$$[\mathcal{L}_U(g)]_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha U_\beta + \nabla_\beta U_\alpha \tag{3.18}$$

3.5 Champs de Killing et isométries

Un *vecteur de Killing*[5] ou *champ de Killing* est un champ de vecteurs qui conserve la métrique de l'espace considéré. D'après (2.18), un tel vecteur vérifie donc *l'équation de Killing*

$$\nabla_\alpha U_\beta + \nabla_\beta U_\alpha = 0 \tag{3.19}$$

Considérant tous les champs de vecteurs possibles, lesquels constituent un espace vectoriel, l'ensemble des champs de Killing pour la métrique considérée forment un sous-espace vectoriel : il est en effet facile de vérifier que toute combinaison linéaire (avec des nombres complexes) de deux champs de Killing est aussi un champ de Killing. Ils forment de surcroît une algèbre de Lie car, comme il a été remarqué plus haut, le commutateur des dérivées de Lie de deux vecteurs U et V étant la dérivée de Lie du commutateur de U et V, si U et V sont des champs de Killing, alors leur commutateur $[U, V]$ l'est aussi :

$$\mathcal{L}_U(\mathcal{L}_V(g)) - \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_U(g)) = 0 - 0 = 0 = \mathcal{L}_{[U,V]}(g)$$

Par la dérivation de Lie, les champs de Killing engendre des transformations préservant le tenseur métrique, et donc ce qu'on appelle la *métrique*, c'est-à-dire, ce qui permet de définir des "distances", transformations que l'on appelle *isométries* pour cette raison. Ci-après, est considéré le cas d'un espace réel de dimension 2 pour lequel seront envisagées deux métriques différentes.

5. W. Killing, "Über die Grundlagen der Geometrie", J. reine angew. Math., vol.109, déc. 1892, p. 121-186.

① **Métrique euclidienne classique**

Le tenseur métrique correspondant est constant et a pour composantes $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, d'où $U_1 = U^1$, $U_2 = U^2$ pour tout vecteur U. Les symboles de Christoffel étant nuls, l'équation de Killing (3.19) conduit aux équations

$$\partial_1 U^1 = 0, \quad \partial_2 U^2 = 0, \quad \partial_2 U^1 = -\partial_1 U^2$$

L'intégration des deux premières donne $U^1 = U_x = f_1(y)$, $U^2 = U_y = f_2(x)$ où pour simplifier l'écriture nous avons posé $x^1 = x$, $x^2 = y$ et remplacé les indices 1 et 2 par x et y, respectivement. La troisième équation donne $f_1'(y) = -f_2'(x)$. Les variables x et y étant indépendantes, on en conclut que $f_1'(y) = -f_2'(x) = \text{constante} = a$, puis, par une nouvelle intégration, $f_1(y) = ay + b_1$, $f_2(x) = -ax + b_2$. Le champ de Killing obtenu dépend donc de trois paramètres arbitraires, conduisant à trois isométries élémentaires. Pour les identifier, examinons l'action de la dérivée de Lie d'un champ de Killing sur une fonction scalaire. Cela donne

$$\mathcal{L}_U(F) = a\left(y\partial_x - x\partial_y\right)F + b_1\partial_x F + b_2\partial_y F \tag{3.20}$$

où l'on voit trois opérateurs différentiels à l'oeuvre : l'opérateur ∂_x qui génère des translations parallèlement à l'axe des x, l'opérateur ∂_y qui génère des translations parallèlement à l'axe des y, le dernier $y\partial_x - x\partial_y$ générant quant à lui des rotations autour de l'origine $x = 0, y = 0$. Pour s'en convaincre, il suffit d'exprimer x et y en coordonnées polaires, soit $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ pour trouver

$$y\partial_x - x\partial_y = \partial_\varphi$$

Les trois op'erateurs $P_x = \partial_x$, $P_y = \partial_y$, $P_z = y\partial_x - x\partial_y$ engendrent le groupe des déplacements dans l'espace réel à 2 dimensions, muni de la métrique euclidienne, et forment l'algèbre de Lie de ce groupe. Ils satisfont les relations de commutation

$$[P_x, P_y] = 0, \quad [P_y, P_z] = P_x, \quad [P_z, P_x] = P_y \tag{3.21}$$

② **Métrique pseudo-euclidienne**

Cette métrique est telle que $g_{11} = -g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $U_1 = U^1$, $U_2 = -U^2$, et avec elle l'espace est dit *pseudo-euclidien*, de signature $(1,1)$. L'équation de Killing correspondante donne

$$\partial_1 U^1 = \partial_2 U^2 = 0, \quad \partial_1 U^2 = \partial_2 U^1$$

En procédant comme précédemment, on trouve maintenant $U^1 = U_x = ay + B_1$, $U^2 = U_y = ax + b_2$. Ici encore, le vecteur de Killing dépend de trois paramètres arbitraires et implique trois transformations de base : une translation parallèlement à l'axe des x, générée par $P_x = \partial_x$; une translation parallèlement à l'axe des y, générée par $P_y = \partial_y$; pour identifier la troisième, générée par $L = y\partial_x + x\partial_y$, procédons comme suit.

Tout d'abord, on vérifie facilement que l'opérateur L laisse invariant le carré de la *pseudo-distance* entre l'origine $O(0,0)$ et $M(x,y)$, à savoir, $s = x^2 - y^2$. Le plan se divise en deux régions, une région (1) pour laquelle $|x| > |y|$, et $s > 0$, et une région (2) pour laquelle $|x| < |y|$ et $s < 0$, les deux régions étant séparées par les bissectrices $x = \pm y$. Dans chacune des régions, les courbes pour lesquelles s garde une valeur constante sont des hyperboles équilatères. On est donc amené à utiliser les paramétrisations suivantes

$$x = u\cosh\xi, \quad y = u\sinh\xi \quad \text{pour la région (1)}$$
$$x = u\sinh\xi, \quad y = u\cosh\xi \quad \text{pour la région (2)}$$

où, dans un cas comme dans l'autre, u et ξ sont supposés varier entre $-\infty$ et $+\infty$. Avec ces paramétrisations, on trouve

$$y\partial_x + x\partial_y = \partial_\xi$$

et L endendre donc des translations suivant la variable ξ. Or, dans la région (1) par exemple, pour u fixé, $M(x, y)$ se trouve sur l'hyperbole x et y définie par $x^2 - y^2 = u^2 = \text{constante}$, et pour passer de $M(x, y)$ à un autre point $M'(x', y')$ sur cette même hyperbole, il faut changer ξ en $\xi + \xi_0$, ce qui donne

$$x' = u\cosh(\xi + \xi_0) = u\,(\cosh\xi\cosh\xi_0 + \sinh\xi\sinh\xi_0) = \cosh\xi_0\,x + \sinh\xi_0\,y$$

$$y' = u\sinh(\xi + \xi_0) = u\,(\sinh\xi\cosh\xi_0 + \sinh\xi\cosh\xi_0) = \sinh\xi_0\,x + \cosh\xi_0\,y$$

Le passage de M à M' est donc une *transformation de Lorentz*[6] de paramètre ξ_0. Les trois opérateurs P_x, P_y et L, s'identifient donc comme les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré restreint agissant dans un espace réel de dimension 2, et dont ils constituent l'algèbre de Lie. Ils vérifient les relations de commutation

$$[P_x, P_y] = 0, \quad [[P_x, L] = P_y, \quad [P_y, L] = P_x \tag{3.22}$$

6. Plus précisément, un *boost*.