

Chapitre 4

Etude d'un gaz de photons, rayonnement thermique du corps noir

4.1 Introduction

Tout corps porté à une certaine température émet un rayonnement électromagnétique, appelé *rayonnement thermique*. Il est dû à l'agitation thermique des constituants du corps et est présent de façon plus ou moins intense à toutes les longueurs d'onde. Les caractéristiques de ce rayonnement sont bien connues depuis la fin du 19^{ème} siècle. C'est leur analyse qui amena Planck à formuler en 1900 l'hypothèse des quanta qui devait révolutionner la Physique au début du 20^{ème} siècle.

Dans son interaction avec le rayonnement électromagnétique, un corps quelconque est susceptible non seulement d'émettre, mais aussi de réfléchir, de diffuser, de transmettre ou d'absorber ce rayonnement. L'émission de radiations d'un corps quelconque est caractérisée par une grandeur appelée *luminance énergétique* et notée e . C'est, pour une direction donnée \vec{u} , la puissance émise dans cette direction, rapportée à l'unité d'angle solide et à l'unité de surface du corps rayonnant, comptée perpendiculairement à la direction \vec{u} . Cette puissance peut être transportée par des radiations de fréquences différentes. Aux radiations dont la fréquence est comprise dans un intervalle $d\nu$ autour de la fréquence ν , correspond une partie $e_\nu d\nu$ de la luminance totale, et l'on a bien sûr

$$e = \int_0^\infty e_\nu d\nu \quad (4.1)$$

La grandeur e_ν est appelée *luminance spectrale*. A priori, elle dépend non seulement de la fréquence et de la température du corps émetteur, mais aussi de la nature et de la forme de sa surface.

Un corps parfaitement réfléchissant ou parfaitement diffusant a un facteur d'absorption égal à zéro. A l'inverse, un corps qui ne réfléchit, ne diffuse ou ne transmet pas l'énergie apportée par une onde a un facteur d'absorption égal à 1. Un corps ayant un coefficient d'absorption égal à 1 pour toute fréquence est appelé un *corps noir*. Cette appellation de "corps noir" vient du fait qu'à la température ordinaire, le corps noir n'émet quasiment pas dans le domaine visible. Comme de plus il ne diffuse ni ne réfléchit aucune lumière, il paraît effectivement noir. Ce n'est que pour des températures plus élevées qu'il commence à se colorer, passant alors du rouge vers 500° C au blanc vers 1200° C.

Certaines lois concernant le rayonnement du corps noir ont été établies vers la fin du 19^{ème} siècle, dans le cadre général de la thermodynamique. La plus importante peut-être est celle due à Kirchhoff. Elle permet de relier la luminance du corps noir à la densité volumique d'énergie électromagnétique du rayonnement en équilibre thermique. Pour faire ce lien, on imagine une enceinte fermée, vide de matière, portée à une température T . A l'équilibre, cette enceinte est alors parcourue en tous

sens par du rayonnement électromagnétique et l'énergie radiante reçue par ses parois internes est entièrement réémise sous forme de rayonnement. On sait qu'en fonction des champs \vec{E} (électrique) et \vec{B} (magnétique) la densité volumique d'énergie électromagnétique s'exprime comme

$$u(M, t, ?) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (4.2)$$

où la présence du point d'interrogation veut signifier que cette densité peut dépendre d'autres paramètres, comme la température ou la forme des parois du volume dans lequel est piégé le rayonnement. Si l'on effectue une analyse de Fourier de la dépendance temporelle des champs, on peut exprimer cette densité au moyen d'une *densité spectrale* $u(M, \nu, ?)$ par l'intégrale

$$u(M, t, ?) = \int_0^\infty u(M, \nu, ?) d\nu \quad (4.3)$$

On montre qu'en fait cette densité spectrale est :

- une grandeur spatialement uniforme ;
- indépendante de la nature des parois du corps émetteur ;
- une fonction universelle $u(\nu, T)$ de la fréquence et de la température uniquement.

D'après un théorème dû à Kirchhoff, on peut en outre déduire le résultat important que si les parois de l'enceinte sont parfaitement absorbantes, et donc constituent un corps noir, leur luminance spectrale est une fonction universelle de la fréquence et de la température et est liée à la densité spectrale du rayonnement par la relation¹

$$e_\nu \equiv E(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) \quad (4.4)$$

c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Aucun corps dans la nature ne peut parfaitement réaliser les propriétés qu'on assigne au corps noir, le facteur d'absorption n'étant dans la pratique jamais égal à 1 pour toutes les fréquences. Cependant, la relation précédente a ouvert la voie à une réalisation expérimentale presque parfaite du corps noir qui a permis d'étudier les propriétés intrinsèques du rayonnement thermique. Le dispositif imaginé est une enceinte fermée opaque, maintenue à une température constante et présentant une ouverture dont les dimensions sont suffisamment petites pour assurer que sa présence ne perturbe pas la répartition du rayonnement à l'intérieur de l'enceinte. Dans ces conditions, un faisceau quelconque de radiations sortant de l'enceinte en traversant l'ouverture transporte la densité spectrale $u(\nu, T)$. Il en résulte que depuis l'extérieur de l'enceinte, l'ouverture est vue avec une luminance spectrale $E(\nu, T)$ et se comporte donc comme un élément de surface de corps noir. On peut ajouter que du fait de la petitesse de l'ouverture, une radiation venant de l'extérieur et pénétrant dans l'enceinte a très peu de chance d'en ressortir, ce qui montre que le facteur d'absorption de l'ouverture est pratiquement égal à 1. L'expérience courante vient confirmer la validité de ce dispositif imaginé pour réaliser le corps noir. Par exemple, une petite ouverture ménagée dans une boîte dont l'intérieur est blanc paraît noire de l'extérieur. De même, les fenêtres d'une pièce à l'intérieur de laquelle il fait clair par beau temps paraissent noires depuis l'extérieur.

Du point de vue de la Physique corpusculaire, le rayonnement confiné dans une enceinte à la température T doit être vu comme une assemblée de *photons* qui sont les particules associées au champ électromagnétique, ce dernier en définissant en quelque sorte la fonction d'onde quantique. L'étude thermodynamique de ce rayonnement s'identifie donc à celle d'un gaz de photons en équilibre thermique. Comme dans une très large mesure on peut négliger toute interaction entre les photons, le gaz de photons constitue un exemple de gaz parfait quantique.

Comme on sait, un photon associé à une onde plane monochromatique de fréquence ν et de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi\nu}{c} \vec{u}$ a pour énergie $E = h\nu$ et pour quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{E}{c} \vec{u}$

¹Pour une discussion détaillée de ce résultat, voir par exemple le cours de Thermodynamique de G. Bruhat - A. Kastler, Masson ed., 1962

($\|\vec{u}\| = 1$). Ce photon possède également deux états de spin possibles², correspondant à des ondes polarisées circulairement. Si l'on regarde l'évolution du champ électrique de l'onde dans un plan fixe perpendiculaire à la direction de propagation, ce champ tourne dans le sens trigonométrique pour une onde dite "droite" et dans le sens inverse pour une onde dite "gauche". Dans le premier cas le spin du photon est $s = +1$ et dans le second cas il vaut $s = -1$ (en unité \hbar). On notera que le spin du photon est entier : le photon est un boson et la statistique adaptée au gaz de photons est donc celle de Bose.

Dans le cadre de cette statistique, proposons-nous de déterminer la densité spectrale $u(\nu, T)$ qui représente en fait la grandeur caractéristique du rayonnement noir.

4.1.1 Application de la statistique de Bose au gaz de photons

Nous considérerons donc un gaz de photons enfermé dans une enceinte de volume V et en équilibre thermique avec elle, à la température T . Pour simplifier³, le volume sera pris de forme cubique, d'arête L .

4.1.2 Modes propres

Analysons la variation spatio-temporelle du champ électromagnétique dans l'enceinte par une transformation de Fourier. Ceci revient à envisager ce champ comme une superposition d'ondes planes monochromatiques de fréquence ν et de vecteur d'onde \vec{k} , de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k}, \nu) \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (4.5)$$

où $\omega = 2\pi\nu$ et où \vec{r} est le vecteur position. Chacune de ces ondes doit satisfaire l'équation de propagation dans le vide, ce qui impose la relation

$$k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c} \quad (4.6)$$

Pour le photon associé à cette onde plane, cette relation se traduit par une relation déjà mentionnée plus haut entre sa quantité de mouvement et son énergie

$$\|\vec{p}\| = \hbar \|\vec{k}\| = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c} \quad (4.7)$$

On notera en passant que cette relation impose que la masse du photon soit nulle.

Concernant l'analyse de Fourier de la dépendance spatiale du champ confiné dans le volume V , on sait que l'on peut choisir les ondes planes de telle sorte que chacune d'elles vérifie des conditions aux limites périodiques, à savoir

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (4.8)$$

n_x, n_y , et n_z étant des entiers relatifs quelconques. La donnée de ces trois nombres caractérise ce qu'on appelle un *mode propre*⁴ du champ localisé dans le volume V . Chaque mode correspond en fait à un état quantique discret du photon, pour lequel l'énergie prend l'une des valeurs de la suite définie par

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{hc}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (4.9)$$

A l'instar de ce qui a été fait dans le cas d'une particule enfermée dans une boîte, nous pouvons, dans l'espace des vecteurs d'onde \vec{k} , attribuer à chaque mode un volume élémentaire égal à

²Le spin du photon est aussi appelé couramment "hélicité".

³On admet ici que les propriétés d'un grand système ne dépendent pas des conditions aux limites et que de ce fait on peut sans inconvénient choisir les plus commodes...

⁴Voir "Théorie des Champs", L. Landau, E. Lifchitz, Ed. Mir, 1970, & 52.

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V} \quad (4.10)$$

Cependant, pour des valeurs données des entiers n_x , n_y , et n_z , on peut avoir deux états de polarisation différents. Aussi, chaque mode se verra plutôt attribuer le volume moitié du précédent, soit

$$\Delta'_k = \frac{4\pi^3}{V} \quad (4.11)$$

Dans l'espace des quantités de mouvement du photon, le volume correspondant est

$$\Delta'_p = \frac{h^3}{2V} \quad (4.12)$$

Les dimensions du volume V sont généralement très grandes, de sorte que l'écart entre deux niveaux d'énergie voisins est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la suite des modes propres comme étant quasiment continue. Cherchons alors, dans l'espace des vecteurs d'ondes, le nombre de modes propres dont l'extrémité du vecteur d'onde se trouve à l'intérieur d'une couronne sphérique élémentaire de volume $4\pi k^2 dk$. Ce nombre est

$$dg = \frac{4\pi k^2 dk}{\Delta'_k} = V \frac{k^2 dk}{\pi^2} \quad (4.13)$$

Comme $k = 2\pi\nu/c$, il peut être exprimé en termes de fréquence comme

$$dg = V \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \quad (4.14)$$

4.1.3 Potentiel chimique du gaz de photons

Le système étudié, constitué de l'enceinte et du rayonnement qu'elle referme, est supposé être isolé, l'enceinte elle-même pouvant être assimilée ici au thermostat avec lequel le gaz de photons est en équilibre thermique. L'énergie totale de ce système reste donc constante. Les seuls échanges énergétiques se font entre le rayonnement et les parois de l'enceinte, supposées par ailleurs constituer un corps noir. Cependant, du point de vue corpusculaire, ces échanges énergétiques présentent une particularité. En effet, lorsque les parois absorbent un certain nombre de photons d'une fréquence donnée, les photons qu'elles émettent en se désexcitant ne sont pas nécessairement ni en nombre égal au nombre de photons incidents, ni de même fréquence, la seule condition étant que l'énergie soit globalement conservée dans ces processus. Ceci confère au gaz de photons un caractère particulier : le nombre total de photons mis en jeu n'est pas fixé. Ici, il ne faut pas se méprendre. Il ne s'agit pas d'une possible fluctuation d'un hypothétique nombre de photons : ce nombre n'est pas une variable que l'on pourrait éventuellement déterminer pour un état thermodynamique particulier du gaz de photons⁵. La situation est donc ici radicalement différente de celle étudiée dans l'ensemble grand-canonique. Rappelons que pour cet ensemble, le système à l'étude est supposé en contact avec un immense réservoir avec lequel il peut échanger des particules et qui lui impose un potentiel chimique, mais que, d'une part, on peut définir un état du système possédant un nombre donné de particules et, d'autre part, que le nombre total de particules du système et du réservoir est supposé donné à l'avance. Cette dernière contrainte n'existe pas dans le cas présent.

Rappelons que la signification du potentiel chimique est celle d'une énergie que le monde extérieur à un système donné doit fournir pour augmenter d'une unité le nombre de particules de ce système. Ici, ce sont les processus d'échanges énergétiques eux-mêmes à l'intérieur du système qui font changer le nombre de photons de façon aléatoire et donc sans intervention du monde extérieur. Aucun travail

⁵On peut s'en convaincre en remarquant que ce gaz peut contenir un nombre aussi grand que l'on veut de photons d'énergie voisine de zéro.

venant du monde extérieur n'étant nécessaire pour faire varier le nombre de photons, on doit donc admettre que le potentiel chimique associé au gaz de photons est *nul*.

Ce fait peut être retrouvé en appliquant le second principe de la Thermodynamique sous la forme suivante. Le gaz de photons est un système en contact avec un thermostat et confiné dans un volume donné V . On sait que dans ces conditions, l'état d'équilibre macroscopique de ce système doit correspondre à un minimum de son énergie libre $F(T, V, \langle N \rangle)$, $\langle N \rangle$ étant le nombre moyen de photons présents. Dit autrement, le nombre moyen de photons doit s'ajuster de telle sorte que l'énergie libre soit minimum. On doit donc avoir

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \langle N \rangle} \right)_{T,V} = 0 \quad (4.15)$$

Or, la dérivée partielle ci-dessus est égale au potentiel chimique particulaire. On en déduit par ce procédé que le potentiel chimique particulaire du gaz de photons est nul⁶.

4.1.4 Loi de Planck (1900) et ses conséquences

Nous avons déjà signalé que les photons sont quasiment sans interaction⁷. Le gaz de photons constitue donc un gaz parfait quantique auquel nous pouvons appliquer la statistique de Bose. Le potentiel chimique des photons étant nul, il s'agit là d'un cas d'application très particulier de la distribution grand-canonique, que l'on peut cataloguer comme un gaz de Bose complètement dégénéré.

Posant $\mu = 0$ dans les formules données par la statistique de Bose-Einstein, on trouve ainsi pour ce gaz le nombre moyen de photons se trouvant dans un état individuel dont l'énergie est dans une bande d'énergie $d\epsilon$ au voisinage de la valeur $\epsilon = h\nu$ (formule 3.60) :

$$d \langle N(\epsilon) \rangle = \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{\exp \beta\epsilon - 1} \quad (4.16)$$

où $g(\epsilon)d\epsilon$ est le nombre d'états individuels se trouvant dans cette bande d'énergie. En termes de fréquence, ce nombre est le nombre de modes propres donné par la formule 4.14. Compte-tenu de cette formule et considérant plutôt des nombres moyens *par unité de volume* $d \langle N(\epsilon) \rangle / V = d \langle n(\epsilon) \rangle$, on obtient

$$d \langle n(\epsilon) \rangle = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \frac{1}{\exp \beta h\nu - 1} \quad (4.17)$$

Comme ces photons transportent toute l'énergie $h\nu$ (à $h d\nu$ près), leur contribution à l'énergie totale par unité de volume est

$$dU = h\nu d \langle n(\epsilon) \rangle = u(\nu, T) d\nu \quad (4.18)$$

On en déduit la densité spectrale

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp \beta h\nu - 1} \quad (4.19)$$

Telle est la célèbre formule que Planck établit en 1900 de façon plutôt empirique certes, mais qui vérifiait excellemment toutes les données expérimentales, alors que la théorie classique en était incapable. Il fut vite reconnu que le principe fondamental à la base de cette formule était la quantification des échanges énergétiques. Ainsi fut fondée la théorie des quantas, qui devait finalement aboutir dans les années 1925-1930 à l'élaboration de l'actuelle théorie quantique.

Certaines particularités de la répartition spectrale du rayonnement avaient été établies avant la découverte de Planck. Elles constituent des cas limites que nous allons maintenant examiner.

⁶Si l'on veut analyser les choses par analogie avec les réactions chimiques, on peut dire que dans les réactions absorption-émission de photons par les parois, l'équilibre est obtenu lorsque $a\mu_a = b\mu_b$, où μ_a et μ_b sont les potentiels chimiques des photons initiaux et finals respectivement, et a et b des coefficients stoechiométriques associés. Comme $a \neq b$ d'une façon générale et que $\mu_a = \mu_b$ on en conclut que $\mu_a = \mu_b = 0$.

⁷Il existe bien des processus d'interaction photon-photon, mais leurs probabilités d'apparition étant extrêmement faibles, ils peuvent être ignorés dans la présente étude.

- Dans un domaine de basses fréquences pour lequel $h\nu \ll k_B T$, la loi de Planck devient

$$u(\nu, T) \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (4.20)$$

C'est la formule dite de Rayleigh-Jeans. On remarquera qu'elle ne contient pas la constante quantique h et qu'elle peut donc être obtenue classiquement, comme l'ont fait ces auteurs.

Dans le modèle de Rayleigh et Jeans, le corps noir est envisagé comme une assemblée d'oscillateurs, sans interaction entre eux et en équilibre thermique à la température T . Chaque mode propre du rayonnement s'y voit associer à un oscillateur harmonique à une dimension, dont la fréquence propre est celle du mode considéré. Comme on sait, selon le théorème d'équipartition de l'énergie, la thermodynamique classique de Maxwell-Boltzmann attribue à un tel oscillateur l'énergie moyenne $k_B T$. Pour obtenir la densité spectrale, il suffit alors de multiplier cette énergie par la densité de modes propres par unité de volume et par intervalle de fréquence, soit

$$u_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (4.21)$$

Cette formule rendait bien compte des résultats expérimentaux aux faibles fréquences, mais son extrapolation pour toutes les fréquences conduisait pour l'énergie totale (obtenue par intégration sur les fréquences) à un résultat infini absurde.

- Dans l'autre cas limite des fréquences élevées, $h\nu \gg k_B T$, on obtient

$$u(\nu, T) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp -\frac{h\nu}{k_B T} \quad (4.22)$$

Cette formule fut obtenue par Wien à partir d'une hypothèse empirique. Elle montre une décroissance exponentielle de la densité spectrale, ce qui est une conséquence directe de la quantification du rayonnement.

C'est en cherchant une formule d'interpolation entre ces deux cas limites que Planck découvrit la loi qui porte son nom.

En fonction de la variable $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ la densité spectrale s'exprime sous la forme

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi(k_B T)^3}{h^2 c^3} \frac{x^3}{\exp x - 1} \quad (4.23)$$

Le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{\exp x - 1} \quad (4.24)$$

est en forme de cloche et présente un maximum pour $e^{-x} = 1 - \frac{x}{3}$ ce qui est réalisé pour $x = x_m = 2,821$. On en conclut qu'il existe une corrélation entre la valeur ν_m de la fréquence qui, pour une température T rend maximum la densité spectrale, et cette température, à savoir,

$$\nu_m = 2,821 \frac{k_B T}{h} \quad (4.25)$$

Cette loi porte le nom de *loi du déplacement de Wien*. Elle montre que la position du maximum de la répartition spectrale, définie par ν_m , évolue proportionnellement à la température T . Exprimée plutôt en fonction de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$, elle s'écrit

$$\lambda_m T = \text{constante} = 2898 \mu\text{m K} \quad (4.26)$$

Ainsi, à 300 K, le maximum est obtenu pour $\lambda_m \approx 10 \mu\text{m}$, c'est-à-dire dans l'infrarouge. C'est parce que le corps noir n'émet pratiquement pas dans le visible à la température ordinaire qu'on lui a donné ce nom. D'après la loi de Wien, le maximum ne se déplace vers le domaine visible $\lambda_m \approx 0,6 \mu\text{m}$ que pour de très hautes températures. Ceci correspond au fait bien connu que lorsque la température

augmente, la couleur d'un corps chauffé passe du rouge sombre au rouge clair puis au rouge blanc. Ce résultat fournit en outre une méthode de mesure des hautes températures par l'analyse du rayonnement thermique des corps incandescents (pyrométrie optique)⁸.

L'application de la loi de Wien permet aussi d'évaluer la température de certains astres, dont le rayonnement est assimilé à celui d'un corps noir. Ainsi, puisque notre Soleil émet un maximum de lumière pour $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$, sa température de surface peut être évaluée à 5800 K.

Une autre application de la théorie du rayonnement du corps noir se trouve en astrophysique. De la même manière qu'une pièce de métal chauffée conserve longtemps l'énergie accumulée tout en continuant à en rayonner, on considère que si dans son passé l'univers a été suffisamment chaud, il doit continuer à émettre un rayonnement électromagnétique comme un corps noir. Cependant, du fait de l'expansion de l'univers, ce rayonnement, dit "fossile" doit maintenant se situer dans le domaine des micro-ondes, ce qui correspond à une température très faible, que G. Gamow avait estimée (en 1946) à 6 K. En 1965, A. Penzias et R. Wilson ont effectivement observé un rayonnement correspondant à une température moyenne de l'univers de 2,7 K. On estime que cette observation constitue la preuve la plus significative en faveur de la théorie de Big-Bang.

La loi de Planck permet également de retrouver la célèbre loi de Stefan-Boltzmann, trouvée expérimentalement par Stefan (1879) et justifiée théoriquement par Boltzmann (1884). Selon cette loi, *la densité d'énergie du rayonnement noir est proportionnelle à la quatrième puissance de la température*. D'après (4.23) on a en effet

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi(k_B T)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1} \quad (4.27)$$

et comme

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (4.28)$$

il vient

$$u(T) = aT^4, \quad \text{avec} \quad a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \quad (4.29)$$

On présente généralement ce résultat en terme de puissance $w(T)$ rayonnée par unité de surface de corps noir, qui est liée à la densité du rayonnement par la relation

$$w(T) = \frac{c}{4} u(T) \quad (4.30)$$

On a ainsi

$$w(T) = \sigma T^4, \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \quad (4.31)$$

La constante σ est appelée *constante de Stefan-Boltzmann*. Elle vaut

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad (4.32)$$

Cette loi montre que la puissance émise croît très rapidement avec la température.

4.2 Propriétés thermodynamiques du gaz de photons

Avant d'explicitier les diverses fonctions d'état relatives au gaz de photons, évaluons tout d'abord sa pression qui, du point de vue de l'électromagnétisme, représente aussi bien la pression de radiation du rayonnement. Comme on sait, l'évaluation de la pression passe par celle de la dérivée $\frac{d\epsilon_i}{dV}$, où ϵ_i est l'énergie d'un état individuel (i) (voir 3.13). Or, pour les photons, on a (voir 4.9)

⁸En toute rigueur, la loi de déplacement n'est applicable qu'au corps noir. Cependant, pour certains corps non noirs, les écarts sur le maximum par rapport à ce que donnerait le corps noir sont relativement faibles.

$$\frac{d\epsilon_i}{dV} = -\frac{\epsilon_i}{3V} \quad (4.33)$$

En reportant ce résultat dans l'expression générale de la pression donnée en (3.13), on trouve la relation

$$PV = \frac{1}{3} U \quad (4.34)$$

U étant l'énergie interne du gaz de photons. Il est intéressant de noter la différence d'un facteur 2 entre cette formule et celle d'un gaz de Bose de particules matérielles (formule 3.23), et d'en trouver l'origine à la lumière de la théorie cinétique des gaz. En effet, en théorie cinétique, la pression qu'un gaz exerce sur une paroi est évaluée à partir de la quantité de mouvement que les particules transfèrent à cette paroi avec laquelle elles entrent en collision. Un facteur 2 intervient alors dans cette évaluation parce qu'on considère que les particules matérielles sont réfléchies par la paroi (choc élastique). Par contre, dans le cas des photons, ceux-ci étant absorbés par la paroi du corps noir, le facteur 2 n'a plus lieu d'être.

Puisque

$$U = Vu(T) = aVT^4 \quad (4.35)$$

le grand potentiel Ω du gaz de photons est donc donné par

$$\Omega = -PV = -\frac{1}{3}U = -\frac{a}{3}VT^4 \quad (4.36)$$

D'où, successivement,

– l'entropie :

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_V = \frac{4a}{3}VT^3 = \frac{4U}{3T} \quad (4.37)$$

On notera en passant que, conformément au troisième principe de la Thermodynamique, l'entropie du gaz de photons tend bien vers zéro lorsque la température elle-même tend vers zéro.

– l'énergie libre

$$F = U - TS = U - \frac{4U}{3} = -\frac{U}{3} = \Omega \quad (4.38)$$

en accord avec le fait que le potentiel chimique des photons est nul.

4.3 Complément : Théorie d'Einstein de l'interaction du rayonnement et de la matière

Il est légitime de se poser la question du lien entre la loi de Planck décrivant un rayonnement à l'équilibre thermique et les mécanismes qui gouvernent les interactions entre ce rayonnement et la matière constituant le corps émetteur. Einstein s'est attaqué à ce problème⁹ et a montré que ce lien ne peut être établi qu'à la condition d'introduire dans ces interactions un processus supplémentaire : *l'émission induite, ou stimulée*.

Dans le modèle proposé par Einstein¹⁰ le corps noir est envisagé comme une assemblée d'atomes pouvant occuper seulement deux niveaux d'énergie : un niveau fondamental (1) d'énergie E_1 et un niveau excité (2) d'énergie plus élevée E_2 . Dans son analyse, Einstein a pris en compte à la fois des processus d'absorption et des processus d'émission de rayonnement par la matière.

L'absorption y est envisagée comme le résultat du passage d'un atome du niveau (1) vers le niveau (2), au cours duquel le rayonnement cède à la matière le quantum d'énergie $E_2 - E_1 = h\nu$. Au

⁹A. Einstein, *Physik. Zeitschri.* 18, 121 (1917)

¹⁰On peut trouver une étude exhaustive des interactions entre les photons et la matière dans l'ouvrage de C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg : "Processus d'interaction entre photons et atomes", *Savoirs Actuels, Intereditions/Editions du CNRS*, 1988.

niveau corpusculaire, on dira qu'en captant un photon d'énergie $h\nu$ un atome passe au niveau excité. On imagine aisément que cette possibilité d'absorber l'énergie électromagnétique est d'autant plus importante que sont grands et la densité d'énergie électromagnétique avoisinante (qui elle-même est proportionnelle au nombre moyen de photons présents) et le nombre d'atomes se trouvant à un moment donné au niveau fondamental. Soit alors dN_2^a le nombre (moyen) d'atomes passant du niveau (1) au niveau (2) pendant une durée infinitésimale dt comptée à partir d'une certaine date t . D'après ce qui vient d'être dit, ce nombre doit être proportionnel à $N_1(t)$ et à la densité spectrale d'énergie $u(\nu, T)$. Bien entendu, il doit aussi être proportionnel à la durée dt . On écrira ainsi

$$dN_2^a = A_b u(\nu, T) N_1(t) dt \quad (4.39)$$

où A_b est un "coefficient d'absorption" qui représente aussi la probabilité de passage d'un atome depuis le niveau (1) vers le niveau (2) et qui ne peut être calculé que si l'on connaît la dynamique de ce processus.

Pour ce qui concerne l'émission de rayonnement par ces atomes, Einstein a considéré deux processus. Le premier est une *émission spontanée* et concerne plus particulièrement les sources lumineuses courantes. Dans ce processus, les atomes se trouvant au niveau excité peuvent revenir au niveau fondamental, et ce, de façon aléatoire et indépendamment les uns des autres. Ce processus est qualifié de spontané en ce sens qu'aucune action extérieure n'a de prise sur lui. Il donne lieu à l'émission d'une radiation *incohérente* de fréquence ν .

Einstein a fait l'hypothèse que les atomes excités peuvent émettre spontanément suivant une loi de probabilité analogue à la loi de décroissance exponentielle d'une population radioactive. Appelant S_p la "probabilité d'émission spontanée" par unité de temps¹¹, le nombre d'atomes revenant par ce processus vers le niveau (1) pendant dt est écrit comme

$$dN_2^s = -S_p N_2(t) dt \quad (4.40)$$

Pour que son modèle reproduise la loi de Planck, Einstein a été amené à considérer un second mécanisme d'émission : l'*"émission induite"* provoquée par le rayonnement ambiant. Sous l'effet de ce rayonnement, des atomes du niveau (2) reviennent vers le niveau (1) en émettant un quantum d'énergie $h\nu$. Cependant, la radiation qui en résulte est tout à fait différente de celle provenant de l'émission spontanée. En effet, le fait remarquable est que la radiation produite possède la même structure (fréquence, direction de propagation, phase et polarisation) que la radiation incidente qui l'induit et ne s'en distingue donc pas. Par ce mécanisme, on obtient ainsi un rayonnement cohérent.

Comme pour l'absorption, on s'attend à ce que l'émission induite soit d'autant plus importante que sont grands et le nombre d'atomes $N_2(t)$ présents au niveau (2) à la date considérée et la densité spectrale $u(\nu, T)$. On écrira donc que le nombre dN_2^i d'atomes passant par émission induite du niveau (2) au niveau (1) pendant la durée dt est proportionnel à $N_2(t)$, $u(\nu, T)$ et dt , soit

$$dN_2^i = -I_n u(\nu, T) N_2(t) dt \quad (4.41)$$

où I_n représente, au niveau élémentaire, la probabilité de passage d'un atome du niveau (2) vers le niveau (1). Einstein trouva naturel d'admettre, et ceci fut confirmé par la théorie quantique, que cette probabilité doit être la même que celle du processus inverse de passage du niveau (1) vers le niveau (2), et que les deux coefficients A_b et I_n doivent donc être égaux :

$$I_n = A_b \quad (4.42)$$

De la sorte, l'émission induite peut être considérée comme le processus réciproque de l'absorption¹².

¹¹Dont l'inverse est la durée de vie moyenne de l'état excité.

¹²On peut justifier cette conception en remarquant que selon la théorie électromagnétique classique, un oscillateur harmonique excité peut aussi bien, suivant sa phase, céder ou absorber de l'énergie au champ d'une onde de même fréquence. En théorie quantique, cette possibilité s'exprime soit par l'émission, soit par l'absorption d'un quantum $h\nu$.

Pour le corps noir à l'équilibre thermique, les processus d'émission et le processus d'absorption doivent se compenser, d'où l'équation bilan :

$$dN_2^a + dN_2^i + dN_2^s = 0 \quad (4.43)$$

On en déduit

$$I_n u(\nu, T) [N_1(t) - N_2(t)] = S_p N_2(t) \quad (4.44)$$

A l'équilibre thermique, le rapport des populations respectives N_1 et N_2 des deux niveaux d'énergie est supposé résulter de la loi de Boltzmann. Ainsi

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp -\beta(E_2 - E_1) = \exp -\beta h\nu \quad (4.45)$$

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Il vient alors

$$u(\nu, T) = \frac{S_p}{I_n} \frac{1}{\exp \beta h\nu - 1} \quad (4.46)$$

Ce bilan aboutit donc à l'obtention d'une formule pour la densité spectrale $u(\nu, T)$, donnant cette dernière comme fonction de la fréquence ν et de la température T . Sous réserve de l'identification du facteur $\frac{S_p}{I_n}$ au facteur $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ de la loi de Planck, cette formule coïncide avec ladite loi, qui, comme nous l'avons dit, reproduit parfaitement les données expérimentales, ce qui valide l'analyse d'Einstein.

Outre qu'il permet de retrouver simplement la loi de Planck, le modèle d'Einstein présente l'immense avantage de mettre en évidence les processus intervenant au niveau élémentaire dans les phénomènes d'absorption et d'émission d'ondes électromagnétiques, et de façon notoire, celui d'émission induite. Ce point mérite d'être éclairci. En effet, dans la gamme des ondes radio, l'émission stimulée est le mécanisme d'émission dominant, l'émission spontanée ne se manifestant alors que sous la forme de bruit. C'est ce que montre le rapport

$$r = dN_2^s / dN_2^i = \frac{S_p}{I_n u(\nu, T)} = \exp \beta h\nu - 1 \quad (4.47)$$

qui donne une mesure du poids relatif de l'émission spontanée par rapport à l'émission induite et qui, à température ordinaire $T = 300$ K et pour $\nu \approx 10^8$ Hz ($\lambda \approx 3$ m) est de l'ordre de 10^{-5} .

Par contre, dans la gamme optique, l'émission induite est complètement masquée par l'émission spontanée ($r \approx 6 \cdot 10^{34}$). Il faut alors des conditions expérimentales très particulières pour la déceler ou faire en sorte qu'elle devienne le processus dominant. Ceci est réalisable par le mécanisme astucieux d'*inversion de population* des niveaux d'énergie, mécanisme à la base du fonctionnement des masers et des lasers¹³. Les progrès technologiques aidant, les masers et surtout les lasers, longtemps restés des instruments de laboratoire, trouvent de nos jours d'innombrables applications pratiques.

¹³Acronymes respectifs de "Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation" et de "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation".