La preuve par 9 et la preuve par 11

Avertissement : cette note est plutôt destinée aux personnes encore férues de calcul mental ou de calcul "à la main". Celles qui ne peuvent se passer de calculatrice peuvent l'ignorer.

Sous forme décimale, un nombre entier positif quelconque N s'écrit

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k \, 10^k \tag{1}$$

où les nombres a_k sont des entiers tels que $0 \leq a_k \leq 9$. Considérant que $10 = 9 + 1$ et tenant compte des développements

$$10^p = \sum_{\ell=0}^{p} C_\ell^p \, 9^\ell \, 1^{p-\ell} = 1 + \sum_{\ell=1}^{p} C_\ell^p \, 9^\ell, \quad \text{où} \quad C_\ell^p = \left(\begin{array}{c} p \\ \ell \end{array} \right) = \frac{p!}{\ell!(p-\ell)!}$$

on voit que N s'écrit aussi comme

$$N = A_n \, 9^n + A_{n-1} \, 9^{n-1} + \cdots + A_1 \, 9 + R, \quad \text{avec} \quad R = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{2}$$

ce qui est un commencement de mise en forme de N en base 9. Si le reste R est supérieur ou égal à 10, il s'écrit

$$R = r_r \, 10^r + \cdots r_1 \, 10 + r_0$$

et l'on recommence alors l'opération sur R :

$$R = R_r \, 9^r + \ldots + R_1 \, 9 + R'$$

avec un nouveau reste

$$R' = \sum_{q=0}^{r} r_q$$

On répète l'opération autant de fois que nécessaire jusqu'à trouver un reste $\mathcal{R}$ strictement inférieur à 9, ce qui correspond finalement à la véritable décomposition de N en base 9 :

$$N = \sum_{0}^{s} n_k \, 9^k, \quad \text{avec} \quad 0 \leq n_k \leq 8, \; 0 \leq k \leq s, \quad n_0 = \mathcal{R} \tag{3}$$

Il devient alors évident que N est divisible par 9 si et seulement si $\mathcal{R}$ =0[1]. Considérons l'exemple $N = 5283$:

$$5 + 2 + 8 + 3 = 18, \quad 1 + 8 = 9, \quad \text{d'où} \;\; \mathcal{R} = 0$$

et 5283 est divisible par 9. On peut profiter de ces décompositions pour établir ce qu'on appelle la "preuve par 9" d'une multiplication de deux entiers (positifs) M et N dont le résultat présumé est l'entier P, recette qui était bien connue à l'époque antérieure à l'explosion du tout informatique dans les calculs numériques. Soit R_m et R_n les restes résultant des décompositions en base 9 de M et N, respectivement, et posons $Q = R_m \times R_n$. La décomposition en base 9 de Q donne un reste R_q lequel, si la multiplication a été faite correctement, doit être égal au reste R_p de la décomposition de P en base 9. Illustrons cette preuve avec l'opération suivante

$$39671 \times 5837 = 231559627$$

On a 3+9+6+7+1= 26, 2+6= 8 ; 5+8+3+7= 23, 2+3= 5 ; 8 × 5 = 40, 4+0 = 4, tandis que 2+3+1+5+5+9+6+2+7= 40, 4+0= 4. Les deux restes étant égaux, l'opération est donc exacte selon cette règle. La vérification peut être faite plus rapidement en effectuant progressivement les additions en écartant systématiquement tout résultat conduisant à 9, puisque celui-ci ne doit pas rentrer dans la composition du reste final. Par exemple, dans l'addition $3 + 9 + 6 + 7 + 1$, on peut ignorer d'emblée 9 et $3 + 6 = 9$ pour ne rester qu'avec l'addition $1 + 7 = 8$. De même, dans l'addition $2+3+1+5+5+9+6+2+7$, on peut écarter 9, $3+6 = 9$, $2 + 7 = 9$ et ne considérer que l'addition $1 + 5 + 5 + 2 = 13$, puis $1 + 3 = 4$.

Cependant, cette "preuve" n'est pas une preuve absolue de la justesse d'une multiplication $M \times N$, car elle conduit aux mêmes restes si des chiffres ont été malencontreusement permutés dans M, N ou dans le résultat P. De ce point de vue, la "preuve par 11" est meilleure. Elle consiste à exprimer les nombres en base 11. Comme $10 = 11 - 1$, les restes se présentent maintenant sous la forme de sommes alternées :

$$R = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \tag{4}$$

et c'est cette succession de signes qui pallie en principe ledit défaut de la preuve par 9. Considérons l'exemple précédent. On procède de *droite à gauche* comme suit

$$1 - 7 + 6 - 9 + 3 = -6\,; \;\; 7 - 3 + 8 - 5 = 7$$

$$-6 \times 7 = -42, \quad -(2-4) = 2$$

$$7 - 2 + 6 - 9 + 5 - 5 + 1 - 3 + 2 = 2$$

[1]Et que ledit nombre est divisible par 3 si et seulement si $\mathcal{R}$ est égal à 0, 3 ou 6.

On notera que si dans cette procédure on trouve un reste négatif, celui-ci doit être compensé par 11 si l'on veut obtenir le bon reste :

$$1-7+6-9+3=-6,\ \text{11-6=5}\ ;\ 7-3+8-5=7$$

$$5\times 7=35,\quad 5-3=2$$

$$7-2+6-9+5-5+1-3+2=2$$

De fait, on a

$$39671=2\times 11^4+7\times 11^3+8\times 11^2+9\times 11+5$$

avec un reste qui est bien égal à 5.

Les "preuves" décrites ci-dessus sont bien entendu applicables aux multiplications de nombres décimaux, en tenant compte de puissances de 10 appropriées. Ainsi, pour l'opération 3,17 $\times$ 0,23 = 317$\times$ 23 $\times 10^{-4}$ = 7291 $\times 10^{-4}$ = 0,7291 :

• preuve par 9

$3+1+7=11,\ 1+1=2\,;\ 2+3=5\,;\ \ 2\times 5=10,\ 1+0=\boxed{1}\,;\ \ (7+2)+9+1\equiv\boxed{1}$

• preuve par 11

$7-1+3=9\,;\ 3-2=1\,;\ 9\times 1=\boxed{9}\,;\ 1-9+2-7=-13\,,-(3-1)=-2\equiv\boxed{9}$

On peut aussi appliquer ces tests aux divisions. Considérons la division de 8751 par 73. Elle donne 8751 = 73 $\times$ 119 + 64.

• preuve par 9

$$8+7+5+1\equiv\boxed{3}\,;7+3\equiv 1\,;1+1+9\equiv 2\,;6+4\equiv 1$$

$$1\times 2+1=\boxed{3}$$

• preuve par 11

$$1-5+7-8=-5\equiv\boxed{6}\,;3-7=-4\equiv 7\,;9-1+1=9\,;4-6\equiv 9$$

$$7\times 9+9=72\,,2-7=-5\equiv\boxed{6}$$