# CORRIGÉS DES PROBLÈMES DE RELATIVITÉ RESTREINTE (L2-L3)

**Christian Carimalo**

## I - La transformation de Lorentz

A/ **1°)** $t' = t,\ x' = x - u\,t,\ y' = y,\ z' = z.$

**2°)** $\overrightarrow{V_R} = \dfrac{dx}{dt}\ \overrightarrow{e_x} + \dfrac{dy}{dt}\ \overrightarrow{e_y} + \dfrac{dz}{dt}\ \overrightarrow{e_z},\ \overrightarrow{V_{R'}} = \dfrac{dx'}{dt'}\ \overrightarrow{e'_x} + \dfrac{dy'}{dt'}\ \overrightarrow{e'_y} + \dfrac{dz'}{dt'}\ \overrightarrow{e'_z}.$

$t' = t$, axes parallèles, d'où $V'_x = V_x - u,\ V'_y = V_y,\ V'_z = V_z$.

B/ **1°)** $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial x}$. Pour la transformation de Galilée envisagée, $\dfrac{\partial t'}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial y'}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial x'}{\partial x} = 1$, donc $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x'}$. Puis

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -u\,\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -u\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

$$= -u\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(-u\,\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) + \frac{\partial}{\partial t'}\left(-u\,\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) = u^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - 2u\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}$$

On obtient finalement

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} - \frac{u^2}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{2u}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}$$

L'équation obtenue dans le référentiel $R'$ via la transformation de Galilée n'a pas la même forme que celle dans le référentiel $R$, ce qui va à l'encontre du principe de relativité.

**2°)** a) On obtient

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = a\,\frac{\partial\psi}{\partial x'} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial x'_0},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = a\,\frac{\partial\psi}{\partial x'_0} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = a^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + 2a\,b\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial x'_0} + b^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2_0},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} = b^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + 2a\,b\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial x'_0} + a^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2_0}$$

d'où $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} = \left(a^2 - b^2\right)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x'^2_0}\right) = 0$, soit $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x'^2_0} = 0$ puisque $a^2 \neq b^2$.

Avec ladite transformation, les équations de propagations dans $R$ et dans $R'$ respectivement ont donc la même forme.

b) La vitesse de propagation du signal dans $R'$ comme dans $R$ est $c$.

C/ **1°)**

| événement | dans $R$ | | dans $R'$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| (1) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2) | $x = ut$ | t | 0 | $t'$ |

**2°)** $x'_2 = 0 = ax_2 + bx_{O_2}$. Or, $x_{O_2} = ct$, $x_2 = ut$, d'où $aut + bct = 0$, et comme $t \neq 0$, il vient $b = -a\dfrac{u}{c}$.

D/ **1°)**

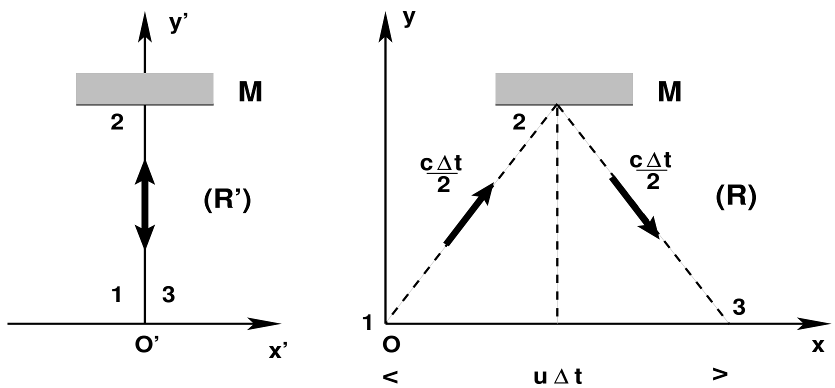


FIGURE 1 – Trajectoire du signal lumineux, vue dans $R'$ et dans $R$

**2°)** a) $\Delta t = D/c$, $\Delta t' = D'/c$ ; $D' = 2y' = 2y$.

b) $\dfrac{D}{2} = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{u\Delta t}{2}\right)^2}$, $D^2 = 4y^2 + u^2(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t)^2$ ; $2y = D' = c\Delta t' = c\Delta t\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$,

soit $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$ ; $\Delta t'$ est une durée propre et l'on a $\Delta t > \Delta t'$.

Pour l'événement (3), on a $(x'_0)_3 = c\Delta t' = (ax_0 + bx)_3 = ac\Delta t - a\dfrac{u}{c}u\Delta t = ac\Delta t(1 - \dfrac{u^2}{c^2})$,

d'où $a = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$. La transformation de $R$ vers $R'$ se récrit comme

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}\left(t - \frac{ux}{c^2}\right), \ y' = y, \ z' = z$$

## II - Interprétation géométrique de la transformation de Lorentz

**1°)** a) $-\infty < \chi < +\infty$.

b) $\cosh\chi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\chi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$, $\sinh\chi = \cosh\chi\tanh\chi = \dfrac{u/c}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$,

$x' = x\cosh\chi - x_0\sinh\chi$, $x'_0 = x_0\cosh\chi - x\sinh\chi$, $y' = y$, $z' = z$.

**2°)** $\cosh\chi = \cosh(-j\varphi) = \cos\varphi$, $\sinh\chi = \sinh(-j\varphi) = -j\sin\varphi$, d'où les relations

$$x' = x\cos\varphi + jx_0\sin\varphi,\ jx_0' = jx_0\cos\varphi - x\sin\varphi,\ y' = y,\ z' = z$$

Il s'agit d'une rotation "d'angle $\varphi$" dans le plan $(x, jct)$. I

**3°)** La transformation inverse de $R'$ vers $R$ est une rotation d'angle $-\varphi$ :

$$x = x'\cos\varphi - jx_0'\sin\varphi,\ jx_0 = jx_0'\cos\varphi + x'\sin\varphi, \quad \text{ou}$$

$$x = x'\cosh\chi + x_0'\sinh\chi,\ x_0 = x_0'\cosh\chi + x'\sinh\chi$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}},\ t = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right),\ y' = y,\ z' = z$$

**4°)** a) Dans une rotation, la norme des vecteurs reste inchangée : $(\Delta x)^2 + (\Delta(jct))^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta(jct'))^2$, soit $(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2$, et comme $\Delta y = \Delta y'$, $\Delta z = \Delta z'$, la pseudo-norme $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$ et la pseudo norme $\Delta s^2$ est donc un invariant relativiste.

b) Si les deux événements $E_1$ et $E_2$ correspondent au passage en deux points $M_1$ et $M_2$ dans $R$ d'un signal s'y propageant à la vitesse $\overrightarrow{V}$, on a $\Delta x_1 - V_x\Delta t_1$, etc, et $\Delta s^2 = (\Delta t_1)^2\left(c^2 - (\overrightarrow{V})^2\right)$. Si $\Delta s^2 < 0$, cela signifierait que le signal se propage dans $R$ à une vitesse supérieure à $c$, ce qui est impossible. Deux événements tels que $\Delta s^2 < 0$ ne peuvent être corrélés par un signal quelconque.

c) $\Delta s^2 = 0$.

d) Dans $R'$, soient deux événements ayant lieu au même point et séparés de $\Delta t'$ dans le temps ; $\Delta t'$ correspond alors à un temps propre. Dans $R$, les deux événements sont séparés de $\Delta t$ dans le temps et séparés dans l'espace de $\Delta x = u\Delta t$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ ; d'où $\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 = c^2(\Delta t)^2\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)$, et l'on a

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} > \Delta t'$$

## III - Ralentissement des horloges

A/ Cas non-relativiste

$$(\Delta t)_{\text{bio}}/(\Delta t)_{\text{gares}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{u^2}{2c^2}$$

Ici, $u^2/c^2 \simeq 10^{-13}$ et l'écart est insignifiant. Notons ici une difficulté : lorsque le voyageur s'arrête en gare, il doit subir une forte décélération et dès lors ne se trouve plus dans un référentiel galiléen. On peut alors se poser la question de l'applicabilité des formules de la relativité restreinte.

B/ Cas ultra-relativiste

a) $\tau = \gamma\tau_0 = 2,6\,10^{-5}$ s.

b) $u^2/c^2 = 1 - 1/\gamma^2$, $u/c \simeq 1 - 1/(2\gamma^2) \simeq 1$ ; d'où $\Delta t \simeq L_0/c \simeq 10^{-5}$ s.

c) $N(t)/N_0 = \exp[-t/\tau] = \exp[-1/2,6] \simeq 1 - 1/2,6 + 1/21/(2,6)^2 = 1 - 0,04 + 0,08 \simeq 0,7$.

d) Même proportion car le nombre est un invariant relativiste ! A noter aussi que

$(\Delta t)_{\text{propre}}/\tau_0 = (\Delta t)/(\gamma\tau_0) = (\Delta t)/\tau$.

**IV - Durée de vie des muons** a) par un calcul non relativiste : $n_2/n_1 = \exp[-\Delta t/\tau']$ avec $\Delta t \simeq h/c$. On obtient $\Delta t/\tau' = 19,07/(3 \times 2,2) \simeq 3$ et $n_2/n_1 \simeq 1/20 = 0,05$. On ne devrait observer au sol que 5% des muons détectés par $D_1$.

b) par un calcul relativiste : $n_2/n_1 = \exp[-(\Delta t)_{\text{propre}}/\tau']$ avec $(\Delta t)_{\text{propre}} = (\Delta t)_{\text{Terre}}/\gamma$ avec $1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq \sqrt{2(1 - v/c)} \simeq \sqrt{2 \times 0,005} \simeq 1/10$. Cette fois, $n_2/n_1 \simeq \exp[-0,3] \simeq 1 - 0,3 + (0,3)^2/2 \simeq 0,745$ et $n_2 \simeq 419$ muons/heure, en bon accord avec la valeur expérimentale.

**V - Contraction relativiste des longueurs**

**1°)** Pour mesurer la longueur de la règle au repos dans le référentiel $R$, l'observateur de $R'$ doit en pointer *simultanément* les extrémités. Dans $R'$ il s'agit donc de deux événements simultanés : $\Delta t' = 0$. Les formules de transformation de $R'$ vers $R$ donnent $\Delta x = \gamma\Delta x'$, $\Delta y = \Delta y'$, $\Delta z = \Delta z' = 0$. Comme $\Delta x = L\cos\theta$, $\Delta y = L\sin\theta$, $\Delta z = 0$, il vient

$$\Delta x' = L\cos\theta\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},\ \Delta y' = L\sin\theta$$

La longueur $L'$ de la règle mesurée dans $R'$ est donc $L' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$, soit

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta} < L$$

Il y a contraction de la longueur. Posant $\Delta x' = L'\cos\theta'$, $\Delta y' = L'\sin\theta'$, on trouve

$$\tan\theta' = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \theta' > \theta$$

**2°)** $\theta = 0$ ou $\pi$, la contraction est maximum ; il n'y a pas de contraction pour $\theta = \pi/2$.

**VI - Mesures de positions - Relativité de simultanéité**

a) Les deux événements sont simultanés dans $R$, $\Delta t = 0$, d'où $\Delta t' = \dfrac{-u\Delta x}{c^2}\gamma$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

b) $x'_A = \gamma\,(x_A - u\,t_A)$, avec $x_A = -c\,t_A = -\ell$, d'où $x'_A = -\ell\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{u}{c}}{1-\dfrac{u}{c}}}$ .

De même, $x'_B = \gamma\,(x_B - u\,t_B)$, avec $x_B = ct_B = c\,t_A = \ell$, soit $x'_B = \ell\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{u}{c}}{1+\dfrac{u}{c}}}$ . D'où

$$x'_B - x'_A = \gamma\,\ell\,\left(1 - \frac{u}{c} + 1 - \frac{u}{c}\right) = \frac{2\ell}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Cette expérience revient en fait à une mesure de longueur dans $R$. La longueur à mesurer est $L' = x'_B - x'_A$ dans $R'$, et l'on a $L = L'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} < L'$. Il y a bien contraction de longueur.

### VII - Loi de composition des vitesses en Relativité

Question de cours.

### VIII - Désintégration du méson $K^0$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1+\dfrac{uv'_x}{c^2}}\ ,\ v_y = v'_y\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{uv'_x}{c^2}}\ ,\ v'_x = v'\cos\theta'\ ,\ v'_y = v'\sin\theta'\ ,$$

$$v^2 = \frac{1}{\left(1+\dfrac{uv'}{c^2}\cos\theta'\right)^2}\left(v'^2(1-\frac{u^2}{c^2}) + u^2 + 2uv'\cos\theta' + \frac{u^2v'^2}{c^2}\cos^2\theta'\right)$$

$$= c^2 - c^2\frac{(1-\dfrac{u^2}{c^2})(1-\dfrac{v'^2}{c^2})}{\left(1+\dfrac{uv'}{c^2}\cos\theta'\right)^2}$$

La valeur maximum de $v$ correspond à $\theta' = 0$ et sa valeur minimum à $\theta' = \pi$.

$$v_{\max}/c = \frac{0,83+0,9}{1+0,83\times 0,9} = 0,99\ ,\ (v_{\min}/c)_x = \frac{0,83-0,9}{1-0,83\times 0,9} = -0,28$$

**IX -** Dans le référentiel $R$, deux particules $P_1$ et $P_2$ sont lancées l'une vers l'autre suivant $Ox$ à la vitesse $v = 0,9\,c$.

**1°)** $0,9c - (-0,9c) = 1,8c > c$. Cette vitesse relative est supérieure à $c$, mais cela n'a aucune importance car cette vitesse ne correspond en aucun cas à la propagation d'un signal physique.

**2°)** Il s'agit ici d'une véritable vitesse relative qui doit être inférieure à $c$. On a $v'_x/c = \dfrac{0,9-(-0,9)}{1-0,9\times(-0,9)} = \dfrac{1,8}{1,81} < 1$.

**X -** Un vaisseau spatial ...

$R_v$ : référentiel du vaisseau ; $R_m$ : référentiel du missile ; $R_T$ : référentiel de la Terre.

a) $L_v = L_{\text{propre}}$ dans $R_v$ ; $L_m = L_v\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ dans $R_m$ ; $L_T = L_v\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$ dans $R_T$.

b) $v_m = 0$, $v_v = v$, $v_T = \dfrac{v+u}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$.

c), d) $\Delta t_v = L_v/v$ ; $\Delta t_m = \Delta t_{\text{propre}} = \Delta t_v\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. L'avant du missile voit l'avant du vaisseau arriver vers lui avec la vitess $-v$ et la distance que doit parcourir l'avant du vaisseau dans $R_m$ à la vitesse $v$ est (contraction) $L_v\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, donc $\Delta t_m = \dfrac{L_v}{v}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

$\Delta t_T = \dfrac{\Delta t_v + \dfrac{u}{c^2}L_v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \Delta t_v\dfrac{1+\dfrac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$. On peut calculer $\Delta t_T$ de deux autres façons. Puisque $\Delta t_m$ est un temps propre,

$$\Delta t_T = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{1-\dfrac{(v+u)^2}{(c^2+uv)^2}}} = \Delta t_m\frac{1+\dfrac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{L_v}{v}\frac{1+\dfrac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

D'un autre côté, dans $R_T$, le missile rattrape l'avant du vaisseau à $\Delta t_T$ alors que ce dernier a parcouru la distance $u\Delta t_T$. Le missile aura parcouru la distance $D_T = v_T\Delta t_T = L_T + u\Delta t_T$, et l'on a

$\Delta t_T(v_T - u) = L_T = L_v\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$ , $v_T - u = \dfrac{v+u}{1+\dfrac{uv}{c^2}} - u = v\dfrac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$, d'où le même résultat que précédemment.

**XI -** Dans le référentiel $R_o$ lié à l'observateur, le corps se déplace le long de l'axe des $x$ à la vitesse $v' = \dfrac{v-u}{1-\dfrac{uv}{c^2}}$. Lors de la mesure de la dimension du corps (par pointages simultanés des extrémités), l'observateur obtient le résultat (contraction des longueurs) $\Delta x_o = \Delta x_{\text{corps}}\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}} = \Delta x_{\text{corps}}\sqrt{\dfrac{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-uv)^2}}$. Les dimensions transversales restant inchangées, on obtient bien le résultat demandé : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{\dfrac{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-uv)^2}}$.

**XII -** On considère deux référentiels galiléens...

**1°)** a) $x_2 = ut_2$.

b) $x_2 = v(t_2 - t_1)$ , d'où $t_2 = t_1/(1-u/v)$.

**2°)** a) Les deux événements : passage de $O'$ en $O$ (à $t=0$) et passage de $P$ en $O$ (à $t = t_1$) ont lieu au même endroit (en $O$) dans $R$ ; $t_1$ est une durée propre pour $O$. On a donc

$$t'_1 = \gamma t_1 = \frac{t_1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

b) Les deux événements : passage de $O$ en $O'$ (à $t' = 0$) et passage de $P$ en $O'$ (à $t' = t'_2$) ont lieu au même endroit (en $O'$) dans $R'$ ; $t'_2$ est une durée propre pour $O'$. On a donc

$$t_2 = \gamma t'_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

On peut aussi appliquer directement les formules de la transformation de Lorentz $R \to R'$ et de son inverse $R' \to R$.

**3°)** $L' = ut'_1 = v'(t'_2 - t'_1)$, d'où $v' = \dfrac{u}{\dfrac{t'_2}{t'_1} - 1}$.

**4°)** $t'_2/t'_1 = t'_2/(\gamma^2 t_1) = (1 - \dfrac{u^2}{c^2})/(1 - \dfrac{u}{c})$, d'où l'on déduit $v = \dfrac{v - u}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}$.

**5°)** Question de cours.

**XIII -** L'extrémité $A$ d'une règle $AB$...

**1°)** $E_0 : x_0 = 0$, $t_0 = 0$ ; $E_1 : x_1 = L$, $t_1 = L/v$. A la date $t_2$, $O'$ aura parcouru sur la règle la distance $x_2 = ut_2 < L$ et sera alors rejoint par la particule $P$ laquelle, pour ce faire, après avoir rebroussé chemin à l'extrémité $B$ de la règle à la date $t_1$, aura dû parcourir de $t_1$ à $t_2$ la distance $v(t_2 - t_1)$. On a donc $L = ut_2 + v(t_2 - t_1)$, soit

$$E_2 : t_2 = \frac{2L}{v+u},\ x_2 = \frac{2Lu}{v+u}$$

**2°)** Dans $R'$, les deux événements $E_2$ et $E_0$ ont lieu au même endroit (en $O'$). D'où $t_2 = t'_2/\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$, soit $t'_2 = \dfrac{2L}{v+u}\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$.

Numériquement : $t'_2 = \dfrac{2}{3 \times 1,6}\sqrt{1 - (0,36)} \times 10^{-8}$ s $= 3,33\,10^{-9}$ s.

**XIV -** Une fusée quitte la Terre...

**1°)** Dans la fusée, $\Delta t = 1$ h $= t'_1$ est un temps propre. Pour les horloges terrestres, le signal a été envoyé à $t_1 = \gamma t'_1$ où $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 5/4$. Donc $t_1 = 1,25$ h (une heure et quart).

**2°)** $t_2 = t_1 + L/c$ avec $L = vt_1$. Donc $t_2 = t_1(1 + \dfrac{v}{c}) = 2$ h.

**3°)** Pour les horloges de la fusée, combien de temps après le départ de la fusée le signal atteint-il la Terre ?

**4°)** Pour le détecteur terrestre, $t_2$ est un temps propre, donc $t'_2 = \gamma t_2 = 2,5$ h (deux heures et demie).

**XV -** Un vaisseau spatial passe au-dessus de la Terre...

**1°)** Entre son passage au-dessus de la Terre et son passage au niveau de la station, le vaisseau indique qu'il s'est écoulé $t'_1 = 30$ mn, ce qui est pour lui une durée propre. A cette durée correspond donc pour les horloges terrestres la durée $t_1 = \gamma\, t'_1$ avec $\gamma = 5/3$, soit $t_1 = 50$ mn. Sur Terre, il est alors 12 h 50 mn.

**2°)** A cette heure, le vaisseau, et donc la station interplanétaire, sont à la distance $L_s = vt_1$, soit $L_s = 0,8 \times 3\,10^8 \times 50 \times 60 = 7,2\,10^{11}$ m.

**3°)** Pour le référentiel terrestre, le signal lumineux arrive sur Terre après la durée $L_s/c$. Depuis le passage du vaisseau au-dessus de la Terre, il se sera donc écoulé sur Terre la durée $t_2 = t_1 + L_s/c = 90$ mn et les horloges terrestres indiquent qu'il est alors 13 h 30 mn.

**4°)** Notons $t'_2$ la durée, mesurée par le vaisseau, qui s'est écoulée entre son passage au niveau de la station interplanétaire et la réception par la Terre du signal qu'il lui a envoyé. On ne peut calculer $t'_2$ en disant que $t_2$ étant une durée propre terrestre on doit avoir $t'_2 = \gamma\, t_2$. En effet, le vaisseau ayant rebroussé chemin, il a changé de référentiel ! ! Dans ce nouveau référentiel, notons $L'_s$ la distance séparant la Terre du vaisseau lorsque celui-ci se trouve au niveau de la station interplanétaire, distance calculée bien sûr comme $L'_s = v\, t'_1$. Pour le vaisseau, entre l'émission du signal qu'il a envoyé et la reception de celui-ci par la Terre, il s'est écoulé la durée $t'_2 - t'_1$ pendant laquelle le signal aura parcouru la distance $c(t'_2 - t'_1)$, tandis que la Terre aura parcouru la distance $v(t'_2 - t'_1)$, et $L'_s$ est la somme de ces distances : $L'_s = vt'_1 = (t'_2 - t'_1)(v + c)$, d'où $t'_2 = t'_1 \left(1 + \dfrac{v}{c+v}\right) = 43$ mn 20 s.

Pour la Terre, à $t_1$, le vaisseau se trouve à la distance $L_s = vt_1$ ; à $t_2$, il se trouve à la distance $D = L_s - v(t_2 - t_1) = L_s \left(1 - \dfrac{v}{c}\right)$, alors que la Terre lui envoie son signal de réponse. Cette réponse est recue par le vaisseau après la durée $t_3 - t_2 = \dfrac{D}{c+v}$ On en déduit

$$t_3 = t_2 + L_s(1 - v/c)/(c + v) = t_1(1 + v/c) + t_1 \frac{v}{c}\frac{1 - v/c}{1 + v/c} =$$

$$t_1 \left(1 + \frac{2v/c}{1 + v/c}\right) = 1 \text{ h } 34 \text{ mn } 27 \text{ s.}$$

**XVI -** Une fusée, d'extrémités $A$...

**1°)** Dans $R$, les coordonnées de l'événement $A$ sont $x_A = L$, $t_A = L/v$. Dans $R'$, $t'_A$ est une durée propre pour l'extrémité $A$, donc $t_A = \gamma t'_A$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, soit $t'_A = \dfrac{L}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}$. On peut dire aussi que $L$ est une longueur propre de $R$, mesurée dans $R'$ comme $L' = L/\gamma$. Dans $R'$, $O$ se déplace à la vitesse $v$ et parcourt la distance $L'$ en une durée égale à $t'_A = L'/v = L/(v\gamma)$.

**2°)** $t'_B = t'_A + \dfrac{\ell'_0}{v}$.

**3°)** $t_A = \gamma \left(t'_A + \beta \dfrac{x'_A}{c}\right) = \gamma t'_A$ car $x'_A = 0$ ; $t_B = \gamma \left(t'_B + \beta \dfrac{x'_B}{c}\right)$, avec $x'_B = -\ell'_0$. Comme $t'_B = t'_A + \ell'_0/v$, il vient $t_B - t_A = \gamma(\ell'_0/v)(1 - v^2/c^2)$, soit $t_B - t_A = \dfrac{\ell'_0}{v}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$.

**4°), 5°)** $\ell_0 = v(t_B - t_A) = \ell'_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$.

**XVII -** Trois astronautes $A_1$, $O'$ et $A_2$...

**1°)** $x'_1 = L/2 = 48$ m ; $x'_2 = -L/2 = -48$ m ; $t'_1 = t'_2 = -L/(2c) = -1,6\,10^{-8}$ s ; $t'_1$ et $t'_2$ sont évidemment négatifs puisque les émissions par $A_1$ et par $A_2$ ont lieu avant la réception des signaux par $O'$ à $t'_0 = 0$.

**2°)** a) $\Delta t'_{12} = 0$ ; $\Delta t_{12} = t_1 - t_2 = \gamma\,(\Delta t'_{12} + \beta\Delta x'_{12}/c) = \gamma vL/c^2 = 4,27\,10^{-7}$ s.

b) $E_1$ et $E_2$ sont simultanés dans $R'$ mais pas dans $R$ (relativité du temps) ; on trouve $t_1 = -\gamma\dfrac{L}{2c}(1-\beta) < 0$, $t_2 = -\gamma\dfrac{L}{2c}(1+\beta) < 0$ et $t_2 < t_1$ : dans $R$, l'émission par $A_2$ est antérieure à l'émission par $A_1$.

**3°)** $\Delta X'_{12} = L$ ; Dans $R'$ tout se passe comme s'il s'agissait d'effectuer la mesure de la distance $\Delta X_{12}$ séparant les deux points au repos dans $R$ qui correspondent aux positions respectives de $A_1$ et $A_2$ à $t'_1 = t'_2$, qui représente une distance propre de $R$. On a donc (contraction des longueurs) $\Delta X_{12} = \gamma L = 160$ m.

**XVIII -** Une station interplanétaire...

Notons les événements : $E_0$ est le départ de la station de la Terre ; $E_1$ est l'expédition de la fusée par la station ; $E_3$ est l'arrivé de la fusée sur la Terre.

**1°)** $\Delta t_S = 4$ h étant un temps propre pour la station, on a $\Delta t_R = \gamma_u \Delta t_S$ avec $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 1/0,8 = 1,25$ ; d'où $\Delta t_R = 5$ h. Par rapport à la Terre, la station est alors à la distance $\Delta X_{01} = u\Delta t_R$.

**2°)** Le laps de temps que met la fusée pour parcourir la distance $\Delta X_{01}$ à la vitesse $v$ est $\Delta X_{01}/v$. Entre le départ de la station et l'arrivée de la fusée, il s'est écoulé $\Delta t_{12} = \Delta t_R + \Delta X_{01}/v = \Delta t_R\,(1 + u/v) = 5 \times (1 + 3/4)$ h $= 8,75$ h.

**3°)** Notons $\Delta t_F$ la durée du trajet de la fusée, entre la station et la Terre, pour ses occupants. Il s'agit d'un temps propre pour la fusée. La durée correspondante mesurée sur Terre est $\Delta t_{12} = \gamma_v \Delta t_F$ avec $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/0,6 = 5/3$. On en déduit $\Delta t_F = \Delta t_R\, u/(v\gamma_v) = 2,25$ h.

**4°)** $v_{F/S} = \dfrac{-v - u}{1 + \dfrac{uv}{c^2}} = -0,946\,c$.

**XIX -** Une fusée, de longueur propre...

**1°)** $D = c\Delta t$ avec $\Delta t = 100$ s (entre l'émission et le retour du signal, la lumière a parcouru deux fois la distance $OM_A$) ; donc $D = 3\,10^{10}$ m.

**2°)** $\Delta t'_{23} = L'_0/c = 2\,10^{-6}$ s ; $\Delta t_{23} = \gamma\,(\Delta t'_{23} + \beta L'_0/c) = \gamma(L'_0/c)(1+\beta) = \dfrac{L'_0}{c}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$, avec $\beta = u/c$, $1/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$.

$\Delta' t = 17,4\,\mu$s $= 2\Delta' t_{23}$ (facteur 2 du fait de l'aller et retour) ; on en déduit $\beta = \dfrac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$ avec $k = c\Delta' t/(2L'_0) = 4,35$, soit $\beta \simeq 1 - 2/k^2 \simeq 0,9$ et $v \simeq 2,7\,10^8$ m/s.

**3°)** $x_1 = 0$, $x_2 = D$, $x'_1 = 0$ ; $x_2 = vt_2 = D$, d'où $t_2 = \Delta t/\beta \simeq 111$ s ; $t_2 - t_1 = 100$ s, donc

$t_1 \simeq 11$ s ; $T_1$ est un temps propre de $O$, donc $t'_1 = \gamma\, t_1$ ; on a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{k^2+1}{2k}$, $k = 4,35$, $k^2 \simeq 19$ donc $\gamma \simeq 2,3$, d'où $t'_1 \simeq 25,5$ s.

L'origine de $R'$ étant en $M_A$, $t'_2$ est donc un temps propre de $M_A$ et l'on a $t_2 = \gamma\, t'_2$ ; on en déduit $t'_2 \simeq 48,5$ s.

**XX -** Un référentiel $R'$ se déplace...

| événement | dans $R$ | | dans $R'$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| $E_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E_1$ | $x_1 = ?$ | $t_1 = 0$ | $x'_1 = L'$ | $t'_1 = ?$ |
| $E_2$ | $x_2 = ut_2$ | $t_2 = ?$ | $x'_2 = 0$ | $t'_2 = L'/u'$ |

**1°)** $x'_1 = L'$ est une longueur propre de $R'$, donc $x_1 = L'/\gamma_u$ avec $\gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2} = 2/\sqrt{3}$, d'où $x_1 = L'\sqrt{3}/2$. Comme $t_1 = \gamma_u\,(t'_1 + \beta_u x'_1/c) = 0$, on en déduit $t'_1 = -\beta_u L'/c = -L'/(2c)$.

**2°)** $D' = L'$ et $x'_2 = 0$ ; $\Delta t' = L'/v' = 4L'/c$ ; $t'_2 = t'_1 + \Delta t' = 7L'/(2c)$.

**3°)** $x_2 = \gamma_u\,(x'_2 + ut'_2) = \gamma_u\, u\, t'_2 = 7L'/(2\sqrt{3})$ ; $t_2 = \gamma_u t'_2 = 7L'/(c\sqrt{3})$ (on a bien $x_2 = ut_2$ !).

**4°)** $v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2} = \dfrac{u - v'}{1 - uv'/c^2} = 2c/7 > 0$ ; on a $x_2 = ut_2 = vt_2 + x_1$, soit $t_2 = x_1/(u-v) = 7L'/(c\sqrt{3})$, puis $x_2 = ut_2 = 7L'/(2\sqrt{3})$.

**XXI -** On veut évaluer le temps mis par un objet relativiste...

**1°)** Dans $R'$, chaque date d'émission $t'$ d'un signal lumineux correspond à un temps propre. La date correspondante dans $R$ est donc $t = \gamma_v\, t'$ avec $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \simeq 1,5$, et la date de réception du signal par la Terre est $T = t + x/c$ avec $x = vt$. On a donc $T = t'\sqrt{\dfrac{1+\beta_v}{1-\beta_v}}$ avec $\beta_v = v/c = 0,75$. Le laps de temps qui sépare la réception de deux signaux successifs par la Terre est donc $\Delta T = \Delta t'\sqrt{\dfrac{1+\beta_v}{1-\beta_v}}$, où $\Delta t' = 1$ année. On trouve $(\Delta T)_{\text{aller}} = 2,65$ année pour l'aller ; pour le retour, on change le signe de $\beta_v$ et l'on trouve $(\Delta T)_{\text{retour}} = 0,38$ année.

**2°)** $\Delta t = 7$ années.

| événement | dans $R$ | | dans $R'$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| $E_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E_2$ | $x_2 = L = 8,7\,$a.l. | $t_2 = L/v = 11,6\,$an. | $x'_2 = 0$ | $t'_2 = t_2/\gamma_v = 7,67\,$an. |
| $E_3$ | $x_3 = L$ | $t_3 = t_2 + \Delta t = 18,6\,$an. | $x'_3 = 0$ | $t'_3 = t'_2 + \Delta t = 14,7\,$an. |
| $E_4$ | $x_4 = 0$ | $t_4 = 2L/v + \Delta t = 30,2\,$a.l. | $x'_4 = 0$ | $t'_4 = \Delta t + 2t'_2 = 22,34\,$an. |

**3°)** $L$ vue depuis $R$, $L' = L/\gamma_v = 5,75\,$a.l. vue depuis $R'$.

**4°)** a) $\Delta t' = \Delta t/\gamma_v = 7,67\,$a.l.. b) cours.

**5°)** Pilote : 52,34 ans ; sédentaire : 60,2 ans.

**XXII -** On devra répondre aux questions de cet exercice...

| év. | $O$ | | $O'$ | | $O''$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ | $x''$ | $t''$ |
| $E_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $x''_1 =$ | $t''_1 =$ |
| $E_2$ | $x_2 =$ | $t_2 =$ | $x'_2 = 0$ | $t'_2 =$ | $x''_2 = 0$ | $t''_2 = t'_2$ |
| $E_3$ | $x_3 = 0$ | $t_3 =$ | $x'_3 = 0$ | $t'_3 =$ | $x''_3 = 0$ | $t''_3 =$ |

**1°)** La date $t'_2$ est une durée propre de $O'$, et l'on a $t'_2 = T/\gamma_v$ avec $1/\gamma_v = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. On peut retrouver ce résultat à l'aide de l'invariant $\Delta s_{12} = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2$. Comme $x_1 = x'_1 = x'_2 = 0$, $t_1 = t'_1 = 0$, $t_2 = T$, $x_2 = v\,T$, il vient $T^2(v^2 - c^2) = -c^2 t'^2_2$, soit $t'_2 = T/\gamma_v$.

**2°)** Entre $t_2$ et $t_3$, $O''$ a parcouru $x_3 - x_2 = -v(t_3 - t_2)$, d'où l'on tire $t_3 = t_2 + x_2/v = 2T$ ; $t''_3 - t''_2$ est une durée propre de $O''$, donc $t''_3 - t''_2 = T/\gamma_v$, et $t''_3 = 2T/\gamma_v$.

**3°)** $t_3$ étant une durée propre de $O$, on doit avoir $t''_3 - t''_{01} = t_3\gamma_v$, d'où $t''_{01} = 2T/\gamma_v - 2T\gamma_v = -2T\,\beta_v^2\gamma_v$.

**4°)** ....

**5°)** $t'_2 - t'_1 = t'_2$ est une durée propre de $O'$, donc $t''_2 - t''_{01} = t'_2\,\gamma_w$ avec $1/\gamma_w = \sqrt{1 - w'^2/c^2}$. Après un petit calcul, on en déduit $w' = \dfrac{2v}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}}$. On peut calculer plus simplement $w'$ comme suit : $w' = (x''_2 - x''_1)/(t''_2 - t''_1) = -x''_1/(t''_2 - t''_1) = v(t''_3 - t''_{01})/(t''_2 - t''_{01}) = 2vT\gamma_v/(T/\gamma_v + 2T\beta_v^2\gamma_v) = 2v/(2\beta_v^2 + 1/\gamma_v^2) = 2v/(1 + \beta_v^2)$

On calcule $w''$ de façon similaire : $w'' = (x'_3 - x'_2)/(t'_3 - t'_2) = -vt'_3/(t'_3 - t'_2) = -v/(1 - t'_2/t'_3) = -v/(1 - 1/(2\gamma_v^2)) = -2v/(1 + \beta_v^2) = -w'$.

**XXIII -** A la date $t = 0$ d'un référentiel $R$ un missile $B$...

| événement | dans $R$ | | dans $R'$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| $B$ : détection de $B$ | $x_B = x_0 = \ell$ | $t_B = t_0 = 0$ | $x'_B = ?$ | $t'_B = ?$ |
| $A$ : envoi de $A$ | $x_A = 0$ | $t_A = 0$ | $x'_A = 0$ | $t'_A = 0$ |

**1°)** Evénement $D$ : collision entre le missile et l'antimissile ; $x_D - x_A = v(t_D - t_A)$, soit $x_D = vt_D$ pour l'antimissile ; $x_D - \ell = -v(t_D - t_B)$, soit $x_D = \ell - vt_D$ pour le missile. On en déduit $x_D = \ell/2$, $t_D = \ell/(2v)$.

**2°)** $t'_D$ étant un temps propre pour $A$, $t_D = t'_D\gamma_v$ avec $1/\gamma_v = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, d'où $t'_D = t_D/\gamma_v$ ; $x'_D = 0$.

**3°)** $V = -\dfrac{2c\beta_v}{1 + \beta_v^2}$ où $\beta_v = v/c$.

**4°) 5°) 6°)** $\ell$ étant une longueur propre de $R$, $x'_0 = \ell\gamma_v$. Transformation de Lorentz : $t'_0 = -\ell\gamma_v\beta_v/c$.

Autre calcul : suivant le mouvement du missile dans $R'$, on a $0 - x'_0 = V(t'_D - t'_0)$, d'où $t'_0 = t'_D + x'_0/V = \ell/(2v\gamma_v) - \ell\gamma_v(1+\beta_v^2)/(2v)$, soit finalement $t'_0 = -\ell\gamma_v\beta_v/c$.

$x' - x'_0 = V(t' - t'_0) = x'$ ; à $t' = 0$, on a $x' = x'_B = x'_0 - Vt'_0 = -Vt'_D = \ell\dfrac{\sqrt{1+\beta_v^2}}{1+\beta_v^2}$

**XXIV - Référentiel du centre de masse**

Les 4-vecteurs énergie-impulsion des particules seront exprimés sous la forme $\underline{p} = (E, c\ \overrightarrow{p})$ où $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\overrightarrow{p} = \dfrac{m\ \overrightarrow{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. On a $E = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$ où $p = |\ \overrightarrow{p}\ |$.

**1°)** a) $\underline{p_1} = (m_0c^2, \overrightarrow{0})$ ; $\underline{p_2} = (E_2, c\ \overrightarrow{p_2})$, avec $E_2 = c\sqrt{m_0^2c^2+p_2^2}$.

b) $\overrightarrow{v_2} = c^2\ \overrightarrow{p_2}\ /E_2 = c\ \overrightarrow{p_2}\ /\sqrt{m_0^2c^2+p_2^2}$.

**2°)** a) **3°)** a) Le 4-vecteur énergie-impulsion associé au centre de masse des deux protons est $\underline{P} = \underline{p_1} + \underline{p_2} = (E, c\ \overrightarrow{P})$ avec $E = E_1 + E_2$, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$. Le système des deux protons étant isolé dans un rérentiel galiléen, le référentiel $R_c$ associé à leur centre de masse est aussi un référentiel galiléen.

b) $\overrightarrow{V_c} = c^2\ \overrightarrow{P}\ /E = c^2\ \overrightarrow{p_2}\ /(E_1+E_2) = \dfrac{\overrightarrow{v_2}}{1+\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$ ;

$\beta = V_c/c = \dfrac{\beta_2}{1+\sqrt{1-\beta_2^2}} = \sqrt{\dfrac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}}$, avec $\beta_2 = v_2/c$, $1/\gamma_2 = \sqrt{1-\beta_2^2}$ ;

$1/\gamma^2 = 1 - \beta^2 = 2/(\gamma_2+1)$, d'où $\gamma = \sqrt{\dfrac{\gamma_2+1}{2}}$.

**3°)** b) c) $M = E/(\gamma c^2) = (E_1+E_2)/(\gamma c^2) = m_0(1+\gamma_2)/\gamma = m_0\sqrt{2(1+\gamma_2)}$ ;
$\gamma_2 = E_2/(m_0c^2) = 50$, $E_c = Mc^2 = m_0c^2\sqrt{2(1+\gamma_2)} = 10,1$ GeV.

**XXV -** Par rapport à un référentiel galiléen $R$, un second référentiel galiléen $R'$...

**1°)** On peut supposer ici que l'origine $O$ de $R$ coïncide avec $A$ à $t = t' = 0$.

| év. | dans $R$ | | dans $R'$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| $A$ | $x_A = 0$ | $t_A = 0$ | $x'_A = 0$ | $t'_A = 0$ |
| $B$ | $x_B = ?$ | $t_B = ?$ | $x'_B = x'_0$ | $t'_B = 0$ |

$x'_0$ est une longueur propre de $R'$ : $x_B = \gamma\, x'_0$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ ; en faisant attention au fait que la vitesse de $R'$ par rapport à $R$ est négative, $t_B = -\gamma u x'_0/c^2 < 0$ : dans $R$, $B$ est antérieur à $A$.

**2°)** A partir de l'événement $A$, la particule $P_A$, immobile dans $R$, voit la particule $P_B$, qui lui est initialement distante de $x_B$, arriver sur elle à la vitesse $-u$. La rencontre entre $P_B$ et $P_A$ aura donc lieu à la date $t_C = x_B/u = \gamma x'_0/u$. Dans le référentiel $R'$, la particule $P_B$ voit la particule $P_A$ qui lui était distant de $x'_0$ arriver sur elle à la vitesse $u$. Dans $R'$, la date de rencontre est donc $t'_C = x'_0/u$. On a $t_C = \gamma t'_C$. Ce résultat est conforme au fait que pour $P_B$, $t'_C$ est un temps propre.

**3°)** Dans $R$ et avant collision, la particule $P_A$ est au repos sur l'axe des $x$ tandis que $P_B$ est animée d'un mouvement rectiligne uniforme le long du même axe, à la vitesse $-u$. Le calcul se fait comme dans l'exercice XXIV, avec $\beta = u/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.
$\beta_1 = -\dfrac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} = -\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ ; $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma+1}{2}}$.

**4°)** Soit $\underline{P} = \underline{p_1} + \underline{p_2} = (m_0c^2 + E_B, c\,\overrightarrow{p_B})$ le 4-vecteur énergie-impulsion associé au centre de masse des deux particules. Dans le référentiel du centre de masse, il s'écrit $[\underline{P}]_{R_1} = (Mc^2, \overrightarrow{0})$ On peut calculer l'énergie de l'une ou l'autre des deux particules dans ce référentiel (elles sont identiques) en effectuant le produit scalaire $\underline{P}\cdot\underline{p_1}$ et en tenant compte de l'invariance de ce produit scalaire. Il donne en effet

$$\underline{P}\cdot\underline{p_1} = \underline{p_1}\cdot\underline{p_1} + \underline{p_1}\cdot\underline{p_2} = Mc^2E^\star, \text{ avec } Mc^2 = \sqrt{\underline{P}\cdot\underline{P}}$$

Or, $\underline{p_1}\cdot\underline{p_1} = \underline{p_2}\cdot\underline{p_2} = m_0^2c^4$, $\underline{p_1}\cdot\underline{p_2} = m_0c^2E_2$, ce dernier produit scalaire, invariant, étant exprimé dans le référentiel $R$ ; comme $\underline{P}\cdot\underline{P} = M^2c^4 = \underline{p_1}\cdot\underline{p_1} + \underline{p_2}\cdot\underline{p_2} + 2\underline{p_1}\cdot\underline{p_2} = 2(m_0^2c^4 + \underline{p_1}\cdot\underline{p_2}) = 2\underline{P}\cdot\underline{p_1}$, on en déduit $E^\star = Mc^2/2$. Puis $\underline{P}\cdot\underline{P} = M^2c^4 = 2m_0^2c^4\,(1+\gamma)$, soit $Mc^2 = m_0c^2\sqrt{2(1+\gamma)}$. Il vient finalement $E^\star = m_0c^2\sqrt{\dfrac{1+\gamma}{2}} = m_0c^2\gamma_1$.

Ce résultat peut tout aussi bien être obtenu en appliquant la transformation de Lorentz $R \to R_1$ aux 4-vecteurs énergie-impulsion :

$$E^\star = \gamma_1\,(E - c\beta_1 p_x)\ ,\ cp_x^\star = \gamma_1\,(cp_x - \beta_1 E)\ ,\ p_y^\star = p_y\ ,\ p_z^\star = p_z$$

On l'obtient immédiatement en appliquant cette transformation à la particule $P_1$ au repos dans $R$. D'une façon générale, l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule de masse $m_0$ ("masse au repos") ont pour expressions

$$E = m_0c^2\gamma_w \text{ et } \overrightarrow{p} = m_0\,\overrightarrow{w}\,\gamma_w\ ,\text{ avec } \gamma_w = 1/\sqrt{1-w^2/c^2}\ ,\ w = |\,\overrightarrow{w}\,|$$

$\overrightarrow{w}$ étant la vitesse de la particule dans le référentiel considéré. On voit ainsi que dans $R_1$, on a $\gamma_w = \gamma_1$ et donc $\beta_w = |\beta_1|$.

**5°)** ...

**6°)** Après diffusion, dans $R_1$, l'énergie de l'une ou l'autre particule est encore égale à $E^\star$, et la quantité de mouvement de chacune a encore même module $p^\star = (\sqrt{E^{\star 2} - m_0^2c^4})/c$. La vitesse réduite a donc encore la même valeur $\beta_w$. Elle tend vers 1 si $\beta$ tend vers 1.

## XXVI - Diffusion élastique $p + p \to p + p$

**1°)** Conservation de l'énergie : $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$, conservation de la quantité de mouvement : $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1'} + \overrightarrow{p_2'}$, résumées par la conservation du 4-vecteur "énergie-impulsion" total $\underline{P'} = \underline{p_1'} + \underline{p_2'} = \underline{P} = \underline{p_1} + \underline{p_2}$.

**2°)** a) $\underline{P}^2 = \underline{p_1}^2 + \underline{p_2}^2 + 2\underline{p_1}\cdot\underline{p_2} = 2\left(E_0^2 + E_1E_2 + c^2p_1p_2\right)$ ;

b) $\underline{P'}^2 = 2\left(E_0^2 + E_1'E_2'\right)$.

c) $\underline{P'}^2 = \underline{P}^2$, d'où $E_1'E_2' = E_1E_2 + c^2p_1p_2$.

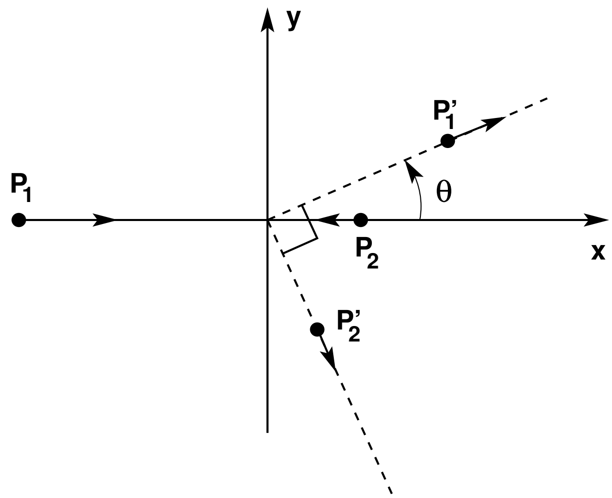


FIGURE 2 – Diffusion élastique $p + p \to p + p$

**3°)** $E_1' = E_1 + E_2 - E_2' = E_1 + E_2 - (E_1E_2 + c^2p_1p_2)/E_1'$, d'où l'on déduit que chacune des énergies finales doit satisfaire l'équation du second degré

$$E^2 - E(E_1 + E_2) + E_1E_2 + c^2p_1p_2 = 0$$

En tenant compte de $E_1' > E_2'$, on arrive au résultat :

$$E_1' = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2 + \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4c^2p_1p_2}\right)$$
$$E_2' = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2 - \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4c^2p_1p_2}\right)$$

**4°)** a) $\overrightarrow{u_c} = c^2\ \overrightarrow{P}\ /E = c^2\left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right)/(E_1 + E_2) = \overrightarrow{e_x}\ c^2(p_1 - p_2)/(E_1 + E_2)$, d'où $\beta_c = u_c/c = c(p_1 - p_2)/(E_1 + E_2) > 0$.

b) Les deux particules étant identiques, elles ont même énergie $E^\star$ dans $R_c$, que l'on calcule aisément en effectuant le produit scalaire $\underline{P} \cdot \underline{p_1} = E^\star E_c^\star = E_0^2 + \underline{p_1} \cdot \underline{p_2} = \underline{P}^2/2$, soit

$$E^\star = \frac{1}{2}\sqrt{\underline{P}^2} = \sqrt{\frac{E_0^2 + E_1E_2 + c^2p_1p_2}{2}}$$

puisque $E_c^\star = \sqrt{\underline{P}^2}$.

**5°)** Dans le référentiel où la particule $P_1'$ est au repos, son 4-vecteur énergie-impulsion est $(E_0,\ \overrightarrow{0})$ et l'on a donc $\underline{p_1'} \cdot \underline{p_2'} = E_0E_2'' = \frac{1}{2}\left(\underline{P}^2 - 2E_0^2\right) = E_1E_2 + c^2p_1p_2$, soit finalement

$$E_2'' = \frac{E_1E_2 + c^2p_1p_2}{E_0}$$

On notera que les quatre particules de la réaction étant identiques, on a $\underline{p_1'} \cdot \underline{p_2'} = \underline{p_1} \cdot \underline{p_2}$.

On remarquera aussi que ce procédé de calcul d'énergies au moyen de produits scalaires évite de plus longs calculs via les formules des transformations de Lorentz.

**XXVII -** Dans le référentiel galiléen $R$ du laboratoire, on considère le choc élastique de deux protons...

**1°)** a) $E_{tot} = E_0(1+\gamma)$ avec $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, $E_0 = mc^2$ ; $E_c^\star = \sqrt{s}$ avec $s = \left(\underline{p_1} + \underline{p_2}\right)^2 = 2(E_0^2 + E_0^2\gamma) = 2E_0^2(1+\gamma)$, soit $E_c^\star = E_0\sqrt{2(1+\gamma)}$.

b) En considérant la transformation de Lorentz $R_c \to R$, on a $E_{tot} = \gamma_c E_c^\star$, soit $E_0(1+\gamma) = \gamma_c E_0(\sqrt{2(1+\gamma)}$, d'où

$$\gamma_c = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$$

**2°)** Dans le référentiel $R_c$, les quatre particules de la réaction étant identiques ont même énergie $E^\star$, même module de quantité de mouvement $p^\star$ et l'on a $E^\star = E_c^\star/2 = E_0\sqrt{\dfrac{1+\gamma}{2}}$, $cp^\star = \sqrt{E^{\star 2} - E_0^2} = E_0\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2}}$. Leur vitesse réduite commune est $\beta^\star = cp^\star/E^\star = \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}}$. La vitesse réduite de $R_c$ est $\beta_c = \sqrt{1 - 1/\gamma_c^2} = \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}}$. On a donc $\beta^\star = \beta_c$.

Dans ce même référentiel, on a $\underline{p_1'} = (E^\star, cp_x^\star = cp^\star\cos\chi, p_z^\star = cp^\star\sin\chi)$, $\underline{p_2'} = (E^\star, cp_x^\star = -cp^\star\cos\chi, p_z^\star = -cp^\star\sin\chi)$, $\chi$ étant l'angle de diffusion des particules finales dans $R_c$.

Dans $R$, on a $p'_{1x} = p'_1\cos\theta,\ p'_{1z} = p'_1\sin\theta$ ; $p'_{2x} = p'_2\cos\phi,\ p'_{2z} = -p'_2\sin\phi = -p'_{1z}$ (car $P'_z = P_z = 0$)

Effectuant alors la transformation de Lorentz $R_c \to R$, il vient

$$p'_{1x} = \gamma_c\left(p^\star\cos\chi + \beta_c E^\star/c\right) = \gamma_c p^\star(1+\cos\chi),\ p'_2x = \gamma_c p^\star(1-\cos\chi)$$
$$p'_{1z} = p^\star\sin\chi,\ p'_{2z} = -p^\star\sin\chi$$

Ainsi, $\tan\theta\tan\phi = -\dfrac{p'_{1z}p'_{2z}}{p'_{1x}p'_{2x}} = 1/\gamma_c^2 = \dfrac{2}{1+\gamma}$.

**XXVIII - Effet Compton**

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, un photon de fréquence $\nu$ entre en collision avec un électron initialement au repos. Le choc est élastique et le photon est diffusé avec une fréquence $\nu'$ dans une direction faisant l'angle $\theta$ avec celle du photon incident. On notera $\underline{p}$, $\underline{k}$, resp. $\underline{p'}$, $\underline{k'}$, les quadrivecteurs énergie-impulsion initiaux, resp. finals, de l'électron et du photon, respectivement.

**1°)** a) $\underline{p} + \underline{k} = \underline{p'} + \underline{k'}$.

b) $\underline{p'} = \underline{p} + \underline{k} - \underline{k'}$.

**2°)** a) $\underline{k}^2 = \underline{k'}^2 = 0$ ; $\underline{p}^2 = \underline{p'}^2 = m_e^2c^4$.

b) $\underline{p}\cdot\underline{k} = h\nu E_0$ , $\underline{p}\cdot\underline{k'} = h\nu' E_0$ avec $E_0 = m_ec^2$ ; $\underline{k}\cdot\underline{k'} = h^2\nu\nu'(1-\cos\theta)$.

**3°)** $\underline{p'}^2 = E_0^2 = E_0^2 + 2E_0h(\nu - \nu') - 2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta)$, d'où

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \dfrac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}$$

**4°)** $\Delta\lambda = c(1/\nu' - 1/\nu) = \dfrac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$.

**XXIX - Rétro-diffusion Compton**

**1°)** On a $\underline{p'}^2 = (\underline{p}+\underline{k}-\underline{k'})^2 = \underline{p}^2 + 2\underline{p}\cdot(\underline{k}-\underline{k'}) - 2\underline{k}\cdot\underline{k'} + \underline{k}^2 + \underline{k'}^2$ ; comme $\underline{p'}^2 = \underline{p}^2 = m^2c^4$, $\underline{k}^2 = \underline{k'}^2 = 0$, on a bien $\underline{p}\cdot(\underline{k}-\underline{k'}) = \underline{k}\cdot\underline{k'}$.

**2°)** $\underline{p}\cdot\underline{k} = E_\gamma(E_e + cp_e)$ ; $\underline{p}\cdot\underline{k'} = E'_\gamma(E_e + cp_2\cos\theta)$ ; $\underline{k}\cdot\underline{k'} = E_\gamma E'_\gamma(1-\cos\theta)$ ; l'égalité $\underline{p}\cdot\underline{k} = E_\gamma(E_e+cp_e) = \underline{k'}\cdot(\underline{p}+\underline{k}) = E'_\gamma\left(E_e + cp_e\cos\theta + E_\gamma(1-\cos\theta)\right)$ conduit à

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E_e+cp_e)}{E_\gamma(1-\cos\theta) + E_e + cp_e\cos\theta}$$

**3°)** a) ...

b) $D = E_\gamma(1-\cos\theta) + E_e + cp_e\cos\theta = E_\gamma(1+\cos\alpha) + E_e - cp_e\cos\alpha$ avec $\cos\alpha \simeq 1-\alpha^2/2$, $E_e - cp_2 = \dfrac{E_e^2 - c^2p_e^2}{E_e + cp_e} \simeq m^2c^4/(2E_e)$ ; d'où $E'_\gamma \simeq 2E_eE_\gamma/\left(2E_\gamma + m^2c^4/(2E_e) + \alpha^2E_e/2\right)$ et $E'_\gamma \simeq E_e/\left(1 + x + \alpha^2E_e/(4E_\gamma)\right)$ soit finalement

$$E'_\gamma \simeq \frac{E_{\max}}{1+\left(\dfrac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad E_{\max} = \frac{E_e}{1+x}\,, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{4E_\gamma}{E_e}}\sqrt{1+x}\,, \quad x = \frac{m^2c^4}{4E_\gamma E_e}$$

**4°)** $E_\gamma = hc/\lambda = 1{,}24\,10^{-9}$ GeV ; $x \simeq 8\,10^{-3}$ ; $\alpha_0 \simeq 4{,}5\,10^{-6}$ rd ; $E_{\max}/E_e \simeq 1$ : au voisinage de $\theta = \pi$ (émission vers l'arrière, c'est-à-dire, dans la direction de l'électron incident, d'où le terme de rétro-diffusion), le photon émergent emporte quasiment toute l'énergie de l'electron incident. On peut ainsi convertir un faisceau d'électrons de haute énergie en un faisceau de photons de haute énergie.

**XXX - Désintégration du méson $\pi^0$**

**1°)** La conservation du 4-vecteur énergie-impulsion total et de sa pseudo-norme imposerait $\underline{P_{\pi_0}} = \underline{k_\gamma}$ et $\underline{P_{\pi_0}}^2 = \underline{k_\gamma}^2$ ; mais $\underline{P_{\pi_0}}^2 = m_0^2c^4 \neq 0$ et $\underline{k_\gamma}^2 = 0$, donc impossibilité, déjà du point de vue de la cinématique relativiste, qu'un $\pi_0$ se transforme en un seul photon !

**2°)** a) b) Puisque le $\pi_0$ est la seule particule à l'état initial, son 4-vecteur énergie-impulsion représente le 4-vecteur énergie-impulsion total attaché à $R_c$ : $\underline{P_c} = \underline{P_{\pi_0}}$ ; $R_c$ est le référentiel propre du $\pi_0$.

$$E = \gamma m_0c^2\,;\ \overrightarrow{p} = m_0u\gamma\,\overrightarrow{e_x}\,;\ \beta = u/c = 0{,}974\,;\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 4{,}414\,;\ E = 559\,\mathrm{MeV}$$

**3°)** $\gamma = E/E_0$, $\beta = \sqrt{1-(E_0/E)^2}$.

**4°)** a) Opposées !

b) $E'_1 = E'_2 = E_0/2 = E'$ ; $\left|\overrightarrow{p'_1}\right| = \left|\overrightarrow{p'_2}\right| = E_0/(2c) = p'$.

c) $\theta'_2 = \pi - \theta'_1$.

**5°)** a) $E_1 = E'\gamma\,(1+\beta\cos\theta_1')$ ; $E_2 = E'\gamma\,(1-\beta\cos\theta_1')$ ; $E_1\cos\theta_1 = E'\gamma\,(\beta+\cos\theta_1')$ ; $E_2\cos\theta_2 = E'\gamma\,(\beta-\cos\theta_1')$ ; $E_1\sin\theta_1 = E'\sin\theta_1' = E_2\sin\theta_2$ ($p_1 = E_1/c$, $p_2 = E_2/c$).

b) $\sin\theta_1 = \dfrac{\sin\theta_1'}{\gamma(1+\beta\cos\theta_1')}$, $\sin\theta_2 = \dfrac{\sin\theta_1'}{\gamma(1-\beta\cos\theta_1')}$ ; $\cos\theta_1 = \dfrac{\beta+\cos\theta_1'}{1+\beta\cos\theta_1'}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{\beta-\cos\theta_1'}{1-\beta\cos\theta_1'}$ ; $\tan\theta_1 = \dfrac{\sin\theta_1'}{\gamma(\beta+\cos\theta_1')}$ ; $\tan\theta_2 = \dfrac{\sin\theta_1'}{\gamma(\beta-\cos\theta_1')}$.

**6°)** a) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\beta\gamma\sin\theta_1'}$.

**7°)** $\tan\dfrac{\alpha_m}{2} = 1/(\beta\gamma)$ pour $\theta_1' = \pi/2$ ; alors $\theta_1 = \theta_2 = \alpha_m/2$ ; $\sin\dfrac{\alpha_m}{2} = 1/\gamma$ ; $\alpha_m/2 \simeq 13°$.

## XXXI - Effet Doppler-1

**1°)** Cas des impulsions sonores

a) $v_{\text{son}} \simeq 340$ m/s $\ll c = 3\,10^8$ m/s ! !

| év. | émission par $S$ | | réception par $D$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $t$ | $x'$ | $t'$ |
| $n$ | $x_n = 0$ | $t_n = 0$ | $x'_n = X_0 + u(t'_n - t_n)$ | $t'_n$ |
| $(n+1)$ | $x_{n+1} = 0$ | $t_{n+1} = t_n + T_0$ | $x'_{n+1} = x'_n + u(t'_{n+1} - t'_n)$ | $t'_{n+1} = t'_n + T$ |

b) c) Pour simplifier, on prend la position de la source comme origine $O$ du référentiel. A $t = t_n$, le détecteur $D$ se trouve à la distance $x' = X_0$ de $O$ ; à la date de réception $t'_n$ de la $n$ème émission, il se trouve à $x'_n = x_0 + u(t'_n - t_n)$ ; c'est cette distance qu'aura parcouru le signal sonore pour le rejoindre : $x'_n = v(t'_n - t_n)$, d'où $t'_n - t_n = X_0/(v-u)$ ; à la $(n+1)$ème émission à $t = t_{n+1}$, $D$ se trouve à $X_1 = X_0 + u(t_{n+1} - t_n)$ et à la réception de ce nouveau signal à $t'_{n+1}$, il se trouve à $x'_{n+1} = X_1 + u(t'_{n+1} - t_{n+1}) = v(t'_{n+1} - t_{n+1})$, d'où $t'_{n+1} - t_{n+1} = X_1/(v-u)$. On en tire

$$(t'_{n+1} - t_n) - (t'_n - t_n) = (t'_{n+1} - t'_n) - (t_{n+1} - t_n) = T - T_0 = (X_1 - X_0)/(v-u) =$$
$$u(t_{n+1} - t_n)/(v-u) = T_0 u/(v-u), \quad \text{soit} \quad T = T_0\,\frac{1}{1-u/v}$$

La fréquence de réception enregistrée par le détecteur est donc $\nu = \nu_0(1 - u/v)$. Si la source s'éloigne du détecteur, $\nu < \nu_0$, si la source s'en rapproche ($u < 0$), $\nu' > \nu_0$.

**2°)** Cas des impulsions lumineuses

Le calcul précédent est encore valable (en prenant $v = c$) à condition de considérer $T$ comme la période que le référentiel $R$ assimile à la période perçue par le détecteur $D$, mais qui n'est pas celle véritablement enregistrée par $D$, du fait de la relativité du temps. En fait, la période $T'$ étant une durée propre pour $D$, on doit avoir $T' = T\sqrt{1 - u^2/c^2}$. On en déduit

$$T' = T_0\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

Cette formule peut être retrouvée comme suit. L'onde lumineuse accompagne un photon dont l'énergie dans le référentiel $R$ est $E = h\nu_0$ avec $\nu_0 = 1/T_0$. Dans le référentiel de $D$, le photon est vu avec l'énergie $h\nu' = h\nu_0\dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avec $\beta = u/c$, d'où $\nu' = \nu_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$.

**XXXII - Effet Doppler-2 - Aberration des étoiles**

Pour simplifier, on prend la direction de $\overrightarrow{u}$ comme axe des $x$ commun.

**1°)** Rappels :

$$v'_x = \frac{v_x - c\beta}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}} \ , \ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \dfrac{\beta v_x}{c})} \ , \ v'_z = v_z \ , \quad \beta = u/c \ , \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$E' = \frac{1}{\gamma}\left(E - \beta c p_x\right) , \quad cp'_x = \frac{1}{\gamma}\left(cp_x - \beta E\right) , \ p'_y = p_y \ , \ p'_z = p_z$$

a) Ici : $v_x = c\cos\theta$, $v_y = c\sin\theta$, $v_z = 0$, d'où, après simplifications,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \, , \, \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \ , \ \text{d'où} \quad \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

b) Pour le photon, on a $p = E/c$, $p' = E'/c$, $cp_x = E\cos\theta$, $cp_y = E\sin\theta$, d'où

$$E'/E = \frac{1 - \beta\cos\theta}{\gamma} \, , \, E'\cos\theta'/E = \frac{\cos\theta - \beta}{\gamma} \, , \, E'\sin\theta'/E = \sin\theta \, , \, \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

c) Si $\theta = \pi/2$, $\cos\theta' = -\beta$, $\sin\theta' = 1/\gamma$.

**2°)** $E'/E = \nu'/\nu = \dfrac{1 - \beta\cos\theta}{\gamma}$.

**3°)** Attention, ici on se place dans le référentiel du récepteur. Dans les formules précédentes, il faut changer à la fois $u$ en $-u$ et $\theta$ en $\theta_1 = \pi - \theta$, puis prendre $\theta_1 = 0$. Le rapport des fréquences reste inchangé, et l'on a

$$\nu_R/\nu_S = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \, , \, \lambda_R = \lambda_S\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \, , \, \beta = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad x = \lambda_R/\lambda_S$$

On trouve $\beta_G = 0,384$, $V_G = 414 \times 10^6$ km/h...

**XXXIII - Aberration de la lumière des étoiles**

**1°)** Dans $R$, la lumière émise par l'étoile se propage parallèlement à l'axe des $y$, et les composantes de sa vitesse sont donc $v_x = 0$, $v_y = -c$. Dans le réfféntiel terrestre, les composantes de sa vitesse sont $v'_x = -u$, $v'_y = -c/\gamma = -c\sqrt{1 - u^2/c^2}$, d'où $\tan\alpha = v'_x/v'_y = \beta\gamma$. Avec $\beta = 10^{-4}$, $\gamma \simeq 1$ On trouve $\alpha \simeq 10^{-4}$ rd.

**2°)** $u \to -u$.

**XXXIV -** Dans le référentiel galiléen $R$ du laboratoire un méson $K^+$...

**1°)** a) $\underline{p_{K^+}} = \underline{p_{\pi^+}} + \underline{p_{\pi^0}}$.

b) $\underline{p_{K^+}} \cdot \underline{p_{\pi^+}} = (m_{K^+})c^2 E_{\pi^+} = \underline{p_{\pi^+}} \cdot \left(\underline{p_{\pi^+}} + \underline{p_{\pi^0}}\right) = m_{\pi^+}^2 c^4 + \underline{p_{\pi^+}} \cdot \underline{p_{\pi^0}}$. Or, $\underline{p_{K^+}}^2 = m_{K^+}^2 c^4 = m_{\pi^+}^2 c^4 + m_{\pi^0}^2 c^4 + 2\underline{p_{\pi^+}} \cdot \underline{p_{\pi^0}}$ ; on en déduit immédiatement

$$E_{\pi^+} = c^2 \, \frac{m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_{K^+}}$$

c) $p_{\pi^+} = c\sqrt{\Lambda}/(2m_{K^+})$ avec $\Lambda = m_{K^+}^4 - 2m_{K^+}^2 \left(m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2\right) + \left(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2\right)^2$.

d) $E_{\pi^+} = 248$ MeV ; $p_{\pi^+} = 207$ MeV/c.

**2°)** On prend l'axe des $x$ commun selon cette vitesse. On a $\overrightarrow{u} = u \, \overrightarrow{e_x}$ avec $u = c\beta = c^2 p_{\pi^+}/E_{\pi^+}$ ; $\beta = 207/248 \simeq 0,83$.

**3°)** Le méson $\pi^+$ se désintègre à son tour pour donner un muon $\mu^+$ et un neutrino $\nu$. La masse du muon est $m_{\mu^+} = 207 \, m_e$ et la masse du neutrino est supposée nulle.

a) b)

$$E_{\mu^+} = c^2 \, \frac{m_{\pi^+}^2 + m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}} \; , \; E_\nu = c^2 \, \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}} \; , \; cp_{\mu^+} = cp_\nu = E_\nu$$

**XXXV -** On considère dans le référentiel galiléen $R$ du laboratoire la réaction de photoproduction

$$\gamma + p \to n + \pi^+$$

**1°)** $\underline{P} = \underline{p_p} + \underline{p_\gamma} = \underline{p_n} + \underline{p_{\pi^+}}$, $s = \underline{P}^2 = E_{CM}^2 = m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 E_\gamma \geq (m_n + m_{\pi^+})^2 c^4$.

D'où $E_0 = mc^2(1 + m/(2m_p)) \simeq 150$ MeV.

**2°)** a) $E_p^\star = \dfrac{s + m_p^2 c^4}{2\sqrt{s}}$, $E_\gamma^\star = \dfrac{s - m_p^2 c^4}{2\sqrt{s}} = cp^\star$ où $s = \underline{P}^2$, soit

$$E_p^\star = m_p c^2 \frac{1+x}{\sqrt{1+2x}} \quad \text{où} \quad x = E_\gamma/(m_p c^2)$$

Au seuil de la réaction, $E_\gamma = E_0$, $x = \dfrac{m}{m_p}\left(1 + \dfrac{m}{2m_p}\right) \simeq 0,16$, $E_p^\star \simeq 949$ MeV.

b) Le proton initial étant au repos dans $R$, son énergie dans $R_c$ est donnée par $E_p^\star = m_p c^2 \Gamma$. On en déduit $\Gamma = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+2x}}$ ; au seuil, $\Gamma \simeq 1,01$.

**3°)** Au seuil de production de l'état final, le neutron et le $\pi^+$ sont créés *au repos*. La durée de vie moyenne $\tau$ du $\pi^+$ dans le laboratoire est donc liée à $\tau_0$ par $\tau = \tau_0 \, \Gamma$. On trouve $\tau = 2,63 \times 10^{-8}$ s.

**XXXVI -** On considère dans le référentiel galiléen $R$ du laboratoire la réaction de photo-production d'une paire électron-positron sur un noyau $N$

$$\gamma + N \to N' + e^+ + e^-$$

**1°)** a) $\underline{p_\gamma} + \underline{p_N} = \underline{p'_N} + \underline{p_+} + \underline{p_-}$, Dans la configuration de l'état final envisagée dans $R$, les quantités de mouvement de l'electron et du positron sont dans un plan $\mathcal{P}$ contenant la direction de propagation du photon incident, choisie comme axe $x'x$ ; l'axe $y'y$ est pris dans ce même plan, orthogonalement à $x'x$, tandis que $z'z$ est orthogonal à $\mathcal{P}$. On a ainsi les relations

$$(1)\ :\ Mc^2 + E_\gamma = E'_N + E_+ + E_-\ ;\ (2)\ :\ p_\gamma = p'_{Nx} + p_{+x} + p_{-x}$$
$$(3)\ :\ 0 = p'_{Ny} + p_{+y} + p_{-y}\ ;\ (4)\ :\ p'_{Nz} = p_{+z} = p_{-z} = 0$$

b) La direction de recul du noyau est dans le plan $\mathcal{P}$, selon $\overrightarrow{p_\gamma} - \overrightarrow{p_+} - \overrightarrow{p_-}$.

c) Question alambiquée... On a $p_\gamma = E_\gamma/c$, donc la relation (2) peut être récrite comme $E_\gamma = cp'_{Nx} + cp_{+x} + cp_{-x}$. En soustrayant cette dernière relation à (1), on obtient finalement

$$cp'_{Nx} = E'_N - Mc^2 + E_+ - cp_{+x} + E_- - cp_{-x}$$

Comme $\underline{p_+}^2 = m^2c^4 = E_+^2 - c^2p_+^2 > 0$, et donc $E_+ > cp_+$, on a a fortiori $E_+ - p_{+x} > 0$. De même, $E_- - cp_{-x} > 0$. En outre, $E'_N = \sqrt{M^2c^4 + p'^2_N} > Mc^2$. On en déduit que $p'_{Nx}$ est positif et que le sens du recul du noyau est celui de la propagation du photon incident.

**2°) 3°)** $E_{\gamma m} = 2mc^2(1 + \dfrac{m}{M})$.

**XXXVII -** On considère dans le référentiel galiléen $R$ du laboratoire la réaction

$$p_1 + p_2 \to p + n + \pi^+$$

**1°)** Lorsque les trois particules finales sont au repos.

**2°)** Si les trois particules finales sont au repos, la quantité de mouvement totale est nulle, et ceci ne peut être réalisé que dans le référentiel du centre de masse de la réaction.

**3°)** $s = \underline{P_{\text{tot}}}^2 = m_p^2c^4 + 2m_pc^2E_1 \geq (m_p + m_n + m_{\pi^+})^2c^4$, d'où $T_m = E_{1\,\min} - mc^2 = [\,m_{\pi^+} + m_n - m_p + (m_n + m_{\pi^+})^2/(2m_p)\,]\,c^2$.

### XXXVIII - Détermination de la masse du méson $\pi^-$

**1°)** $m_p + m_{\pi^-} = E_n + E_\gamma$, $0 = cp_{nx} + cp_{\gamma x}$. Si l'on convient de prendre l'axe des $x$ suivant la direction de propagation du neutron, $cp_{nx} = cp_n > 0$ et $cp_{\gamma x} = -cp_\gamma = -E_\gamma = -cp_n$ ; d'où $(m_p + m_{\pi_-})c^2 = E_n + cp_n$, soit $m_{\pi_-}c^2 = E_n - m_pc^2 + cp_n$, avec $E_n = \sqrt{m_n^2c^4 + c^2p_n^2}$.

**2°)** $m_{\pi_-} = m_n\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} - m_p$

**3°)** $\beta \simeq 0,136$, $m_{\pi_-} \simeq 139,79$ Mev/c$^2$.

**XXXIX -** Expérience de Fizeau : dans un tube en U, on établit un courant permanent d'un liquide transparent non dispersif....

**1°)** a) $\Delta t_1 = L/V_1$, $\Delta t_2 = L/V_2$, $V_1$ et $V_2$ étant les vitesses de la lumière dans les branches $B_1$ et $B_2$, respectivement. La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice $n$ au repos est $c/n$. Appliquant les formules relativistes de transformation des vitesses, on obtient

$$V_1 = \frac{c - nV}{n - V/c} \ , \ V_2 = \frac{c + nV}{n + V/c}$$

b) $\delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \dfrac{2VD(n^2 - 1)}{c^2 - n^2V^2}$.

c) $\delta t \simeq 2VD(n^2 - 1)/c^2$.

**2°)** a) $\delta \simeq d\theta$ ; $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$.

b) $y \simeq f\theta$. $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{dy}{f}$.

**3°)** ...

**4°)** **5°)** $y_0 = \dfrac{fc\delta t}{d} = 1,8 \times 10^{-5}$ m $> 0$.

**XL - Mouvement d'un électron dans un champ électrique uniforme**

Dans un référentiel galiléen $R$, un électron initialement au repos au point origine $O$ est accéléré par un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_s} = -E_s\ \overrightarrow{e_x}$ $(E_s > 0)$ à partir de la date $t = 0$.

**1°)** $\dfrac{d\ \overrightarrow{p}}{dt} = (-e)(-E_s)\ \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{\text{constante}}$, d'où $v = 0$ à $t = 0)$ $\overrightarrow{p} = eE_st\ \overrightarrow{e_x}$.

**2°)** a) $\overrightarrow{p} = m\gamma\ \overrightarrow{v}$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

b) $\overrightarrow{v} = v\ \overrightarrow{e_x}$ avec $\dfrac{v}{c} = \dfrac{at}{\sqrt{1 + a^2t^2}}$ où $a = \dfrac{eE_s}{mc}$. A noter que $\gamma = \sqrt{1 + a^2t^2}$.

**3°)** $E - eE_sx = \text{constante} = mc^2$ ; $x = \dfrac{mc^2}{eE_s}\left(\sqrt{1 + a^2t^2} - 1\right)$. De $\gamma = 1 + \alpha$

**4°)** $E - mc^2 = eE_sx$, donc $W = eE_sL$, soit $eE_s = W/L$ et $x = LE_0/W(\sqrt{1 + a^2t^2} - 1)$. On a donc $\alpha = \sqrt{1 + a^2t^2} - 1$.

a) De $\gamma = 1 + \alpha$, on tire $\beta = v/c = \dfrac{\sqrt{\alpha(\alpha + 2)}}{1 + \alpha}$.

b) $\gamma = 7$, $\alpha = 6$ ; $x = 0,6$ m. L'electron acquiert très vite une vitesse proche de $c$. Le reste du trajet sert à augmenter de plus en plus son énergie.