COMPTES RENDUS
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 OCTOBRE 1873.

PRÉSIDENCE DE M. DE QUATREFAGES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe;* par M. J. BERTRAND.

« Les orbites planétaires sont des courbes fermées; c'est la cause principale de la stabilité de notre système, et cette circonstance importante résulte de la loi d'attraction qui, quelles que soient les circonstances initiales, fait mouvoir chaque corps céleste qui n'est pas expulsé de notre système, suivant la circonférence d'une ellipse. On n'a pas remarqué jusqu'ici que la loi d'attraction newtonienne est la seule qui remplisse cette condition.

» Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d'attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.

» On démontre ce théorème de la manière suivante :

» Soit $\varphi(r)$ l'attraction exercée à la distance r sur la molécule considérée et dirigée vers le centre d'attraction que nous prendrons pour origine des coordonnées. r et θ désignant les deux coordonnées polaires du mobile, on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

et, en posant $\frac{1}{r} = z$,

$$r^2\varphi(r) = \psi(z), \tag{1}$$

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0.$$

Multiplions les deux membres par $2dz$ et intégrons en posant

$$2\int\psi(z)\,dz = \varpi(z), \tag{2}$$

nous aurons

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}\varpi(z) - h = 0,$$

h étant une constante.

» On en déduit

$$d\theta = \pm\frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}.$$

» Si la courbe représentée par l'équation qui lie z à θ est fermée, la valeur de z aura des maxima et des minima pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul, et les rayons vecteurs correspondants, normaux à la trajectoire, seront nécessairement pour elle des axes de symétrie. Or, quand une courbe admet deux axes de symétrie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fermée est que leur angle soit commensurable avec π. Si donc α et β représentent un minimum de z et le maximum qui le suit, la condition demandée est exprimée par l'équation

$$m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}, \tag{3}$$

où m désigne un nombre commensurable. Cette équation doit avoir lieu, quels que soient h et k et, par suite, les limites α et β qui en dépendent.

» On a

$$h+\frac{1}{k^2}\varpi(\alpha)-\alpha^2=0,$$

$$h+\frac{1}{k^2}\varpi(\beta)-\beta^2=0;$$

par conséquent

$$\frac{1}{k^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)},$$

$$h=\frac{\alpha^2\varpi(\beta)-\beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)},$$

et l'équation (3) devient

$$(4)\qquad m\pi=\int_\alpha^\beta\frac{dz\sqrt{\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta)-\beta^2\varpi(\alpha)+(\beta^2-\alpha^2)\varpi(z)-z^2[\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)]}}.$$

» La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de α et de β. Le nombre commensurable m doit d'ailleurs être constant, car, s'il changeait d'une orbite à l'autre, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans le nombre et la disposition des axes de symétrie de la trajectoire.

» Supposons α et β infiniment peu différents; soit

$$\beta=\alpha+u,$$

z restant compris entre α et β, nous pouvons poser

$$z=\alpha+y,$$

et y sera, comme u, infiniment petit. Nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\sqrt{\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)}=\sqrt{u\varpi'(\alpha)}.$$

Dans l'expression placée sous le radical au dénominateur de l'intégrale (4), les infiniment petits du premier ordre se réduisent à zéro, et il en est de même de ceux du second; ce sont ceux du troisième qu'il faut conserver, et l'on a, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\begin{aligned}&\alpha^2\varpi(\beta)-\beta^2\varpi(\alpha)+(\beta^2-\alpha^2)\varpi(z)-z^2[\varpi(\beta)-\varpi(\alpha)]\\&\quad=[\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)](u^2y-uy^2).\end{aligned}$$

L'équation (4) devient

$$m\pi=\int_0^u\frac{dy\sqrt{\varpi'(\alpha)}}{\sqrt{\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)}\sqrt{uy-y^2}},$$

c'est-à-dire, en effectuant l'intégration et supprimant les facteurs communs,

$$m=\sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha)-\alpha\varpi''(\alpha)}},$$

ou

$$(1-m^2)\varpi'(\alpha)+m^2\alpha\varpi''(\alpha)=0.$$

On en déduit

$$\varpi'(\alpha)=\frac{A}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varpi(\alpha)=A\frac{\alpha^{2-\frac{1}{m^2}}}{2-\frac{1}{m^2}}+B,$$

A et B désignant des constantes.

» D'après les relations supposées entre les fonctions ϖ, ψ et φ, il en résulte

$$\psi(z)=\frac{A}{2z^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varphi(r)=\frac{A}{2}r^{\frac{1}{m^2}-3}.$$

Telle est la seule loi d'attraction possible, m y désignant un nombre commensurable quelconque; mais il n'en résulte pas qu'elle remplisse, quel que soit m, toutes les conditions de l'énoncé. On doit avoir, en effet, pour toutes les valeurs de α et de β,

$$(6)\quad m\pi=\int_\alpha^\beta\frac{dz\sqrt{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}}-\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}}-\frac{\beta^2}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}+(\beta^2-\alpha^2)\frac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}}-z^2\left(\frac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}}-\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}\right)}}.$$

» Supposons d'abord $\frac{1}{m^2}-2$ négatif; posons $\alpha=0$, $\beta=1$, l'équation devient

$$m\pi=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}}-z^2}}=\int_0^1\frac{z^{\frac{1}{2m^2}-1}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{m^2}}}},$$

et l'équation (6) donne

$$m\pi=m^2\pi,$$

$$m=1.$$

La loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}.$$

» Si l'on suppose $\frac{1}{m^2} - 2$ positif, l'équation (6) devient, pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit $m = \frac{1}{2}$, et la loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = Ar.$$

» Deux lois seulement remplissent donc les conditions demandées, celle de la nature, par laquelle l'orbite fermée n'a qu'un axe de symétrie passant par le centre d'action, et l'attraction proportionnelle à la distance, pour laquelle il y en a deux.

» Notre illustre Correspondant M. Tchebychef, à qui j'ai communiqué la démonstration qui précède, m'a fait judicieusement observer que le théorème, inutile aujourd'hui pour la théorie si parfaite des planètes, pourra être utilement invoqué pour étendre aux étoiles doubles les lois de l'attraction newtonienne. »

MÉTÉOROLOGIE COSMIQUE. — *Sur les* Astronomische Mittheilungen *du D^r Rodolphe Wolf.* Note de M. FAYE.

« En présentant à l'Académie le numéro 33 de cette publication, je crois devoir insister sur la portée de plus en plus manifeste des recherches de son savant auteur. Si quelques personnes ont pu hésiter au commencement, lorsqu'il ne s'agissait que d'un petit nombre de concordances entre les époques du maximum de fréquence des taches solaires et celui du maximum de la variation diurne de l'aiguille aimantée, observée ici ou là, elles seront sans doute excusées, pour peu que l'on songe à la difficulté d'imaginer un lien quelconque entre deux ordres de phénomènes en apparence si étrangers l'un à l'autre; mais, aujourd'hui, il ne leur serait pas possible de résister aux concordances qui se révèlent, année par année et mois par mois, entre les taches du Soleil et le magnétisme terrestre. Grâce au concours de quelques collaborateurs dévoués en Suisse, en Allemagne, en Italie et même en Grèce, M. R. Wolf parvient maintenant à déterminer pour chaque jour de chaque année les nombres qui mesurent la fréquence des taches à la surface du Soleil. Pour l'année 1872, par exemple, il ne lui manque