

Chapitre 10

Conception et réalisation de filtres analogiques¹

10.1 Introduction

Comment concevoir un filtre (analogique) afin qu'il accomplisse au mieux la fonction qu'on souhaite le voir réaliser ? Bien sûr, ce souhait fait implicitement référence à une idéalisation de cette fonction. Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas. Le filtre idéal serait celui dont le module de la fonction de transfert serait constant dans le domaine des pulsations inférieures à une certaine pulsation de coupure ω_c , et nul au-delà (figure 10.1 (a)). Le filtre idéal est évidemment irréalisable, mais diverses structures peuvent être envisagées avec pour objectif de l'approcher². Pour un filtre passe-bas, on conçoit que l'approche sera d'autant meilleure que l'ordre n du filtre est grand. En effet, pour $\omega \gg \omega_c$, le gain décroît à raison de $-20n$ dB/dec.

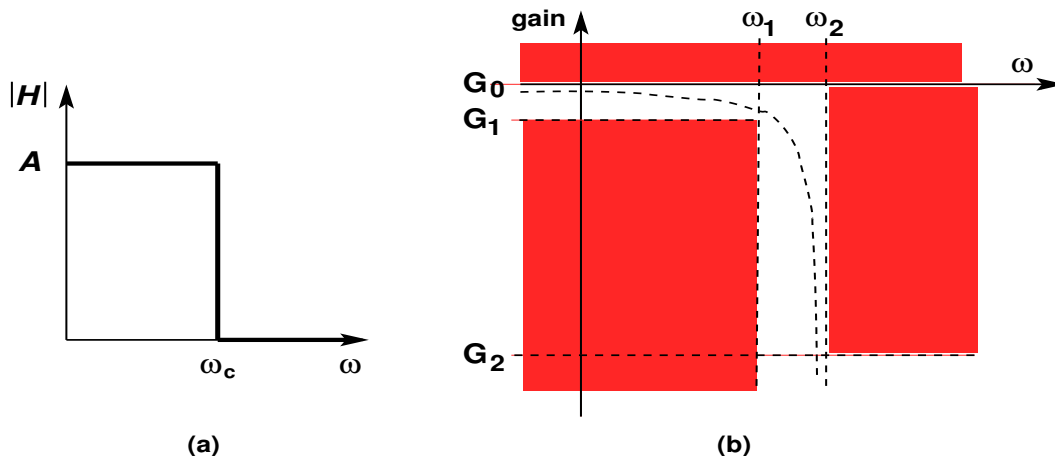


FIGURE 10.1 – Conception d'un filtre passe-bas : (a) filtre idéal (b) gabarit avec ses limites

Dans la pratique viennent s'ajouter des contraintes à partir desquelles on définit des limites acceptables pour ce filtre, notées dans un *cahier des charges* qui permet de définir un *gabarit* du filtre souhaité. Dans le plan de Bode du gain, ces limites obligent la courbe du gain du passe-bas

1. Bibliographie conseillée : G. L. Matthaei, L. Young, E.M.T. Jones, "Microwave filters, impedance matching networks and coupling structures" Artech House, 1980 ; R.W. Daniels, "Approximation methods for electronic filter design", McGraw-Hill, 1974 ; P. Bildstein, "Filtres actifs", Ed. Radio, Paris, 1980 ; E. Christian and E. Eisenman, "Filter Design Tables and Graphs", New York, 1966, John Wiley & Sons.

2. C'est pourquoi les modèles de filtres présentés plus loin sont qualifiés "d'approximations" (sous-entendu, du filtre idéal).

cherché à s'inscrire dans une sorte de canal, comme le montre très schématiquement la figure (10.1 (b)) où sont indiquées deux limites caractéristiques du gabarit : ω_1 est la pulsation de coupure à G_1 dB, ω_2 est la pulsation au-delà de laquelle le gain doit être inférieur à G_2 dB ; la courbe espérée doit passer en dehors des zones rouges. Dans la nomenclature usuelle, le domaine $\omega \leq \omega_1$ est la *bande passante*, le domaine $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ est la *bande de transition* et le domaine $\omega \geq \omega_2$ est la *bande d'arrêt* ou aussi *bande coupée*. Des gabarits appropriés existent aussi bien pour des filtres passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.

Il s'agira ensuite de choisir quelle courbe satisfait le mieux aux contraintes du cahier des charges. Le problème devient alors mathématique, comme expliqué ci-après.

Qu'il soit passif ou actif en régime linéaire, la fonction de transfert d'un filtre se présente comme le rapport $N(p)/D(p)$ de deux polynômes en p ($= j\omega$ en régime harmonique), le degré n de D étant l'ordre du filtre. Pour un filtre passe-bas, le numérateur est généralement constant. Il s'agira alors de trouver un polynôme $D(p)$ de degré n en ω , s'écartant le moins possible d'une constante pour $\omega < \omega_1$ et ayant au-delà une croissance suffisamment rapide pour satisfaire au gabarit. Concernant la réalisation pratique de ce polynôme, l'utilisateur peut espérer qu'en utilisant autant de composants passifs qu'il est nécessaire, il disposera de suffisamment de paramètres (résistances, capacités) qu'il pourra ajuster à cette fin.

Pour illustrer cette démarche, considérons un passe-bas d'ordre 2 ayant pour fonction de transfert $H(p) = H_0/D(p)$, H_0 étant une constante et $D(p) = (p-p_r)(p-p_r^*)$. Ici, nous avons admis comme précédemment que les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ des fonctions de transfert considérées ont tous des coefficients réels et que par suite si $p_r = \alpha + j\beta$ est un pôle ($\alpha < 0$), son conjugué complexe p_r^* est aussi un pôle. On a donc $D(j\omega) = -\omega^2 - 2j\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2$, et $|D(j\omega)|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$.

Si l'on veut que $|D(j\omega)|^2$ évolue peu pour les basses pulsations, on a intérêt à ce que $\omega = 0$ soit un zéro de sa dérivée, avec le degré maximum. Or

$$\frac{d}{d\omega^2} [|D(j\omega)|^2] = 4\alpha^2 + 2(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) = 0 \quad \text{pour } \omega = 0 \quad \text{si } \alpha^2 = \beta^2, \quad \text{soit}$$

$$\beta = \pm\alpha \quad (10.1)$$

auquel cas $p_r = \alpha(1 + j)$, $p_r^* = \alpha(1 - j)$, et $\omega = 0$ devient un zéro triple de ladite dérivée. On a alors

$$|D(j\omega)|^2 = \omega^4 + 4\alpha^4, \quad |H| = \frac{|H_0|}{2\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}, \quad \text{où } u = \frac{\omega}{|\alpha|\sqrt{2}} \quad (10.2)$$

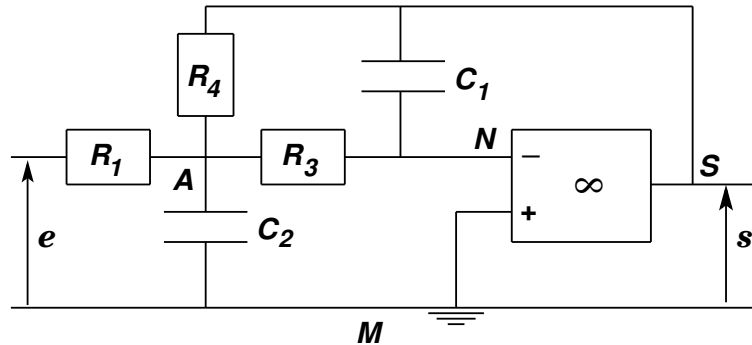


FIGURE 10.2 – Filtre de Rauch passe-bas

Voyons maintenant de quelle manière on peut réaliser un tel filtre. Considérons le filtre passe-bas de Rauch de la figure (10.2) dont la fonction de transfert s'écrit

$$H_R(p) = -\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2} \frac{1}{p^2 + p \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}}$$

Par identification, on trouve

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right), \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}$$

et la condition $\alpha^2 = \beta^2$ conduit à la suivante :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{R_3 R_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^2},$$

Cette dernière est facilement réalisable, tant sont nombreux les paramètres ajustables : en prenant par exemple $R_1 = R_3 = R_4 = R$, la condition se réduit à $C_1 = 2C_2/9$.

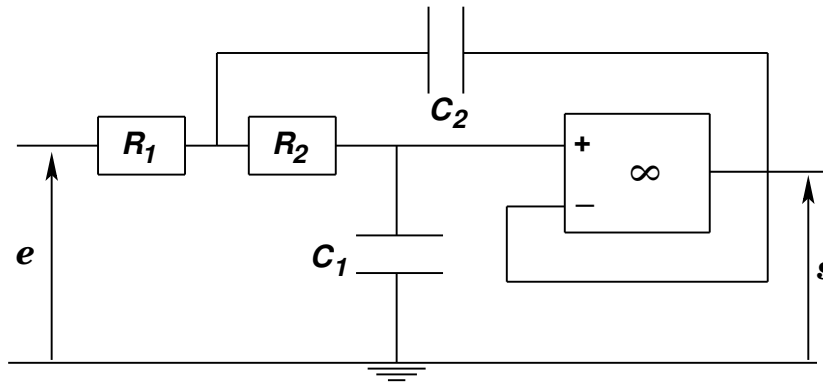


FIGURE 10.3 – Passe-bas du second ordre de Sallen-Key

Le même type de filtre peut être obtenu au moyen de la structure de Sallen-Key représentée à la figure (10.3) pour laquelle on prend $k = 0$, ce qui correspond à la fonction de transfert

$$H_{SK}(p) = \frac{H_0}{p^2 + p \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad \text{avec } H_0 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (10.3)$$

Cette fonction répond aussi au but recherché si³

$$2 \frac{C_2}{C_1} = R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 \quad (10.4)$$

10.2 Filtres de Butterworth⁴

Un filtre passe-bas d'ordre n de Butterworth est tel que le module de sa fonction de transfert a pour expression

$$|H_B(j\omega)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + u^{2n}}} \quad (10.5)$$

où $u = \omega/\omega_0$ est la pulsation normalisée par une pulsation ω_0 , caractéristique du filtre, et H_0 une constante. Ecrivant $H(j\omega) = H_0/D(ju)$, on a donc

3. Au lecteur de vérifier.

4. S. Butterworth : "On the Theory of Filter Amplifiers", Wireless Engineer, vol.7, 1930, p. 536-541.

$$|D(ju)|^2 = 1 + u^{2n} \quad (10.6)$$

Les dérivées de cette expression jusqu'à l'ordre $2n - 1$ par rapport à ω sont nulles pour $\omega = 0$, ce qui fait que la réponse en gain de ce filtre est *plate* de façon *maximale*⁵. Quelles propriétés du polynôme $D(ju)$ permettent d'aboutir à (10.6) ? Rappelons tout d'abord que les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ entrant dans la composition des fonctions de transfert considérées ont des coefficients réels. Par conséquent, si z est une variable complexe, $D(z)$ est tel que $[D(z)]^* = D(z^*)$, et l'on a notamment $[D(ju)]^* = D(-ju)$, u étant ici réel. On peut donc écrire (10.6) sous la forme

$$D(ju)D(-ju) = 1 + u^{2n} \quad (10.7)$$

D'un autre côté, notant r_k les n zéros de $D(z)$ (multiples ou non, réels ou complexes), ce polynôme s'écrit

$$D(z) = \prod_{k=1}^n (z - r_k) \quad (10.8)$$

et par suite (10.7) prend la nouvelle forme

$$D(ju)D(-ju) = 1 + u^{2n} = \prod_{k=1}^n (ju - r_k)(-ju - r_k) \quad (10.9)$$

L'idée qu'inspire la formule (10.9) est qu'elle ne semble pas être due au fait que la variable u est ici réelle, mais qu'elle doit plutôt résulter d'une propriété toute particulière des racines r_k , et donc être valable quelle que soit la valeur complexe de $z = ju$. Puisque les valeurs $ju = \pm r_k$ annulent le dernier membre de (10.9), elles doivent donc vérifier

$$1 + (\mp jr_k)^2 = 0 = 1 + (-r_k^2)^n, \text{ soit } r_k^{2n} = (-1)^{n+1} \quad (10.10)$$

On trouve ainsi que :

- si n est pair, les r_k sont les racines $2n$ ième de -1 ;
- si n est impair, les r_k sont les racines $2n$ ième de 1 .

Bien entendu, parmi ces solutions, seules sont à retenir celles qui ont une partie réelle négative, afin de préserver la stabilité de la fonction de transfert. Les r_k sont tous de module unité. Dans le plan complexe, ils se situent sur le cercle de centre O et de rayon 1 , mais strictement dans le demi-plan de gauche. Ecrivant $r_k = \exp(j\theta_k)$, on a

- pour n est pair, $\theta_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$, avec pour restriction $\frac{\pi}{2} \leq \theta_k \leq \frac{3\pi}{2}$, donc $\frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{3n-1}{2}$;
- pour n impair, $\theta_k = \frac{\pi}{2n}(2k)$, avec pour restriction $\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{3n}{2}$.

Les polynômes ayant ces r_k pour zéros portent le nom de *polynômes de Butterworth*, $B_n(z)$ étant celui d'ordre n . Donnons des exemples.

★ Pour $n = 1$, le seul zéro est $r_1 = -1$, d'où $B_1(z) = z + 1$, puis $B_1(-z) = 1 - z$, et l'on vérifie que $B_1(z)B_1(-z) = 1 - z^2 = 1 + u^2$ si $z = ju$.

★ Pour $n = 2$, les deux zéros acceptables sont $r_1 = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$, $r_2 = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$, d'où $B_2(z) = z^2 - z\sqrt{2} + 1$, $B_2(-z) = z^2 + z\sqrt{2} + 1$, et on vérifie aussi que $B_2(z)B_2(-z) = 1 + z^4 = 1 + u^2$ pour $z = ju$.

5. C'est pourquoi, en anglais, ce filtre est appelé "maximally flat magnitude filter".

★ Pour $n = 3$, les trois zéros acceptables sont $r_1 = -1$, $r_2 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$, d'où $B_3(z) = (1+z)(1+z+z^2) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1$, $B_2(-z) = 2z^2 + 1 - z^3 - 2z$ et l'on vérifie encore que $B_3(z)B_3(-z) = 1 - z^6 = 1 + u^6$ si $z = ju$.

Le tableau I donne les coefficients des dix premiers polynômes de Butterworth et le tableau II en donne les formes factorisées.

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1									
2	1	$\sqrt{2}$								
3	1	2	2							
4	1	2.613	3.414	2.613						
5	1	3.236	5.236	5.236	3.236					
6	1	3.863	7.464	9.141	7.464	3.863				
7	1	4.494	10.10	14.591	14.591	10.10	4.494			
8	1	5.126	13.137	21.846	25.688	21.846	13.137	5.126		
9	1	5.758	16.581	31.846	41.986	41.986	31.163	16.582	5.758	
10	1	6.392	20.432	42.80	64.882	74.233	64.882	42.80	20.431	6.392

◇ **Tableau I** : Coefficients des polynômes de Butterworth $B_n(z) = z^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell z^\ell$,
pour $1 \leq n \leq 10$ ◇

On notera les faits suivants.

- Pour tout n , le produit des zéros vaut $(-1)^n$, ce que l'on vérifie aisément, de sorte que $a_0 = 1$.
- Seuls les polynômes d'ordre n impair ont un unique zéro réel $p = -1$, et par conséquent $B_{2\ell+1}(p) \propto 1+p$. On en déduit qu'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre impair est constitué par une cascade de filtres comportant un seul filtre passe-bas du premier ordre et des filtres passe-bas du second ordre.
- Ecrivant les zéros complexes sous la forme $r_k = \cos \theta_k + j \sin \theta_k$, les polynômes élémentaires de degré 2 constituant les B_n s'écrivent $p^2 - 2 \cos \theta_k p + 1$, et l'on a, par exemple,

n	
1	$p + 1$
2	$p^2 + 1.4142p + 1$
3	$(p + 1)(p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 + 0.7653p + 1)(p^2 + 1.8478p + 1)$
5	$(p + 1)(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + 1.4142p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$
7	$(p + 1)(p^2 + 1.8019p + 1)(p^2 + 1.2469p + 1)(p^2 + 0.4450p + 1)$
8	$(p^2 + 1.9615p + 1)(p^2 + 1.6629p + 1)(p^2 + 1.1111p + 1)(p^2 + 0.3901p + 1)$
9	$(p + 1)(p^2 + 1.8793p + 1)(p^2 + 1.5320p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 + 0.3472p + 1)$
10	$(p^2 + 1.975p + 1)(p^2 + 1.782p + 1)(p^2 + 1.414p + 1)(p^2 + 0.908p + 1)(p^2 + 0.313p + 1)$

◇ **Tableau II** : Formes factorisées des dix premiers polynômes de Butterworth ◇

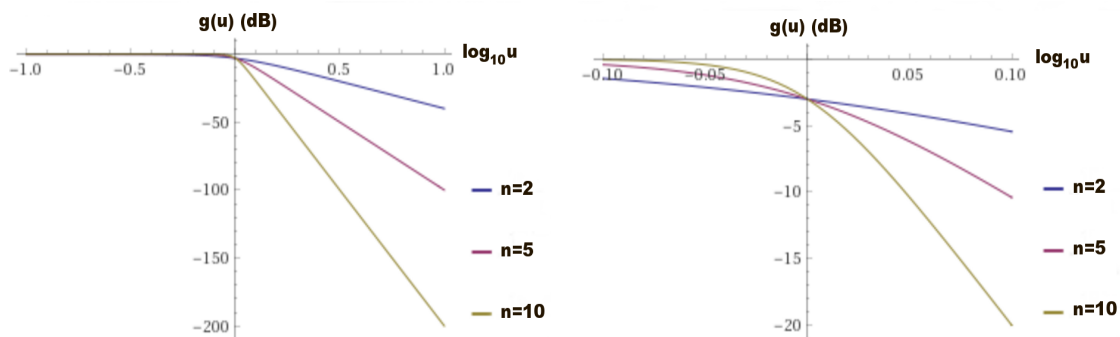


FIGURE 10.4 – Gain $g(u) = -10 \log_{10} [1 + u^{2n}]$ d'un filtre de Butterworth d'indice $n = 2, 5, 10$, pour $-1 \leq \log_{10} u \leq 1$ et pour $-0.1 \leq \log_{10} u \leq 0.1$

$$\begin{aligned}
 B_5(p) &= (p+1)(p^2 - 2p \cos \frac{3\pi}{5} + 1)(p^2 - 2p \cos \frac{4\pi}{5} + 1), \\
 B_6(p) &= (p^2 - 2p \cos \frac{7\pi}{12} + 1)(p^2 - 2p \cos \frac{3\pi}{4} + 1)(p^2 - 2p \cos \frac{11\pi}{12} + 1)
 \end{aligned}
 \tag{10.11}$$

La figure (10.4) représente, en fonction de $\log_{10} u$, le gain d'un filtre de Butterworth d'ordre n pour $n = 2, 5, 10$. On notera que, *indépendamment* de n , la courbe de gain passe par le point ($u = 1, g = -3$ dB). En deçà de ce point de cassure, la valeur absolue de la pente $dg/d\log_{10} u$ est inférieure à 1% si $u < 1/2000^{1/2n}$, ce qui donne, pour $n = 2, u < 0.126, \log_{10} u < -0.9$; pour $n = 5, u < 0.4, \log_{10} u < -0.4$; pour $n = 10, u < 0.6, \log_{10} u < -0.22$. Au-delà dudit point, la pente diffère de moins de 1% de $-20 n$ dB/dec dès lors que $\log_{10} u > 1/n$, ce qui donne, $\log_{10} u > 0.5, u > 3$ pour $n = 2, \log_{10} u > 0.2, u > 1.6$ pour $n = 5, \log_{10} u > 0.1, u > 1.26$ pour $n = 10$. Ces données donnent un aperçu de l'évolution de la courbe de gain au voisinage de sa cassure, selon la valeur de son ordre n .

10.3 Réalisation d'un filtre passe-bas de Butterworth

Afin de ne manipuler que des quantités positives, définissons tout d'abord *l'atténuation* d'un filtre comme l'opposé du gain :

$$A = -G = -20 \log_{10} |H| \tag{10.12}$$

Pour un filtre de Butterworth, on a donc

$$A = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} \right] \tag{10.13}$$

10.3.1 Détermination des paramètres n et ω_0

L'expression (10.13) comporte les deux paramètres n et ω_0 qu'il s'agit d'ajuster au mieux, compte tenu d'un gabarit tel que celui de la figure (10.5), montrant que l'on veut $A < A_1$ pour $\omega < \omega_1$ et $A > A_2$ pour $\omega > \omega_2$.

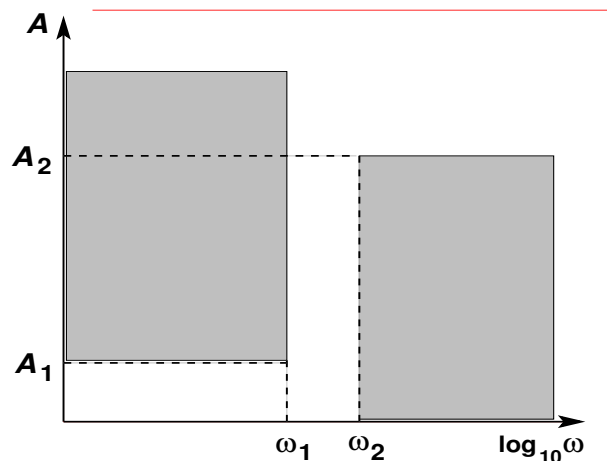


FIGURE 10.5 – Gabarit en atténuation d'un filtre passe-bas

La détermination de n et ω_0 nécessitant la donnée de deux points de la courbe d'atténuation, on peut par exemple faire en sorte que $A(\omega_1) = A_1$ et $A(\omega_2) = A_2$, ce qui conduit aux deux équations

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{2n} = 10^{A_1/10} - 1, \quad \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^{2n} = 10^{A_2/10} - 1 \quad (10.14)$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{1}{2 \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1}} \log_{10} \left[\frac{10^{A_2/10} - 1}{10^{A_1/10} - 1} \right] \quad (10.15)$$

La valeur de n trouvée au moyen de (10.15) n'est généralement pas un entier. On convient alors de choisir pour ordre l'entier N immédiatement supérieur à cette valeur. Ce faisant, les deux équations de (10.14) ne peuvent être satisfaites simultanément si l'on pose $n = N$. On dispose donc de deux choix pour ω_0 : de la première équation on tire

$$\omega_0 = \Omega_1 = \frac{\omega_1}{[10^{A_1/10} - 1]^{1/(2N)}} \quad (10.16)$$

tandis que la seconde donne

$$\omega_0 = \Omega_2 = \frac{\omega_2}{[10^{A_2/10} - 1]^{1/(2N)}} \quad (10.17)$$

et l'on a

$$\log_{10} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{1}{2N} \log_{10} \left[\frac{10^{A_2/10} - 1}{10^{A_1/10} - 1} \right] = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, \quad \text{soit } \Omega_2 > \Omega_1 \quad (10.18)$$

Il en résulte que

- si l'on choisit $\omega_0 = \Omega_1$, soit

$$A(\omega) = \mathcal{A}_1(\omega) = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^{2N} \right] \quad (10.19)$$

on trouve bien $\mathcal{A}_1(\omega_1) = A_1$, mais pour $\omega = \omega_2$ l'atténuation est

$$\mathcal{A}_1(\omega_2) = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\Omega_1}\right)^{2N} \right] > 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\Omega_2}\right)^{2N} \right] = A_2$$

puisque $\Omega_2 > \Omega_1$: pour cette valeur ω_2 , l'atténuation ainsi définie est plus grande que A_2 ;

- si l'on choisit $\omega_0 = \Omega_2$, auquel cas

$$A(\omega) = \mathcal{A}_2(\omega) = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_2}\right)^{2N} \right] \quad (10.20)$$

on a bien cette fois $\mathcal{A}_2(\omega_2) = A_2$, mais alors

$$\mathcal{A}_2(\omega_1) = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_1}{\Omega_2}\right)^{2N} \right] < 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_1}{\Omega_1}\right)^{2N} \right] = A_1$$

Pour cette valeur ω_1 , l'atténuation de ce second choix est inférieure à A_1 , d'où une moindre atténuation dans la bande de transition.

Il reviendra au concepteur du filtre de décider quel choix est le plus adapté à son cahier des charges.

Notons enfin qu'on a en principe $A_1 < 3 \text{ dB} < A_2$, et que par conséquent $\omega_1 < \Omega_1 < \Omega_2 < \omega_2$.

10.3.2 Réalisation pratique (synthèse) d'un filtre de Butterworth

Considérons le cas où $\omega_1 = 1000$ rd/s, $\omega_2 = 2000$ rd/s, $A_1 = 0.5$ dB, $A_2 = 20$ dB. L'équation (10.15) donne $n = 4.83$. On prendra donc $N = 5$. Des équations (10.16) et (10.17) on tire ensuite $\Omega_1 = 1234.1$ rd/s et $\Omega_2 = 1263.2$ rd/s.

Choisissons $\omega_0 = \Omega_2$. On trouve alors $\mathcal{A}_2(\omega_1) = 0.4$ dB, en-dessous de la valeur 0.5 dB préconisée.

Rappelons ici l'expression du polynôme de Butterworth d'ordre 5 (voir le tableau II) :

$$B_5(p) = (p + 1)(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)$$

où p devra être pris égal à $j\omega/\Omega_2$. D'après cette expression, la fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre cherché doit s'exprimer comme le produit de trois fonctions de transfert ayant même variable réduite :

- une fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 1 :

$$H_1 = \frac{1}{p + 1}$$

- deux fonctions de transfert de passe-bas d'ordre 2 ayant pour forme générique

$$H_\ell = \frac{1}{p^2 + 2m_\ell p + 1}$$

avec $2m_1 = 1.618$ et $2m_2 = 0.618$ ⁶.

La mise en série de ces trois passe-bas devrait donc permettre de constituer ledit filtre. Cependant, comme on sait, la multiplication des fonctions de transfert de filtres mis en cascade ne peut être réalisée au mieux qu'avec des filtres actifs. Ainsi, les cellules-filtres considérées dans la suite comporteront comme élément actif un AO, lequel, pour simplifier, sera supposé idéal. Leurs éléments passifs seront exclusivement des résistances et des capacités. Le premier filtre passe-bas d'ordre un de la chaîne sera celui de la figure (10.6)

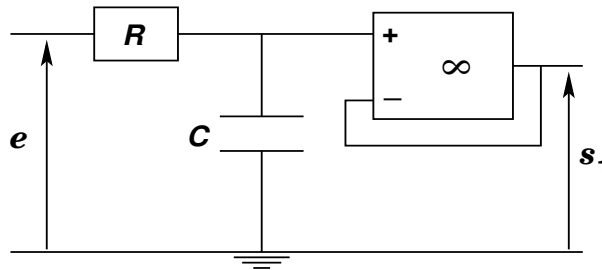


FIGURE 10.6 – Première cellule d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

constitué d'un diviseur de tension RC et d'un suiveur de tension. Sa fonction de transfert est (voir 9.5.1)

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

où R et C seront liés par la relation $RC = 1/\Omega_2$. Faisons le choix $R = 10$ k Ω . On obtient ainsi $C = 79.16$ nF.

6. Remarquons en passant que $4m_1m_2 = 4 \cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} = 1$.

Les deux filtres suivants de la chaîne seront des filtres passe-bas d'ordre deux de Sallen-Key comme celui de la figure (10.3), pour lesquels nous prendrons $R_1 = R_2 = R^7$. Pour ceux-ci, on devra poser

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{R^2 C_1 C_2}, \text{ soit } C_1 C_2 = C^2, \text{ et } m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

On en déduit

$$C_1 = m C = \frac{C}{2Q}, \quad C_2 = \frac{C}{m} = 2Q C \quad (10.21)$$

où $Q = 1/(2m)$ est le coefficient de qualité associé au filtre considéré. On obtient ainsi :

- pour le deuxième filtre de la chaîne, pour lequel $m = m_1 = 0.809$, soit $Q_1 = 0.618$,

$$C_1^{(1)} = 64.05 \text{ nF}, \quad C_2^{(1)} = 97.84 \text{ nF}$$

- pour le troisième filtre de la chaîne, pour lequel $m = m_2 = 0.309$, soit $Q_2 = 1.618$,

$$C_1^{(2)} = 24.46 \text{ nF}, \quad C_2^{(2)} = 256.17 \text{ nF}$$

A noter que dans la pratique, les cellules passe-bas du second ordre sont placées dans le sens décroissant des amortissements, donc dans le sens croissant des coefficients de qualité, ce qui permet d'éviter des saturations intempestives des étages. En effet, pour une telle cellule, une surtension maximum est effective au voisinage de Ω_2 si $Q > 1/\sqrt{2}$ et est donnée en dB par

$$G_{\max} = 20 \log_{10} \left[\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right] \quad (10.22)$$

Avec les données précédentes, on obtient $G_{\max}^{(1)} = 0 \text{ dB}$, $G_{\max}^{(2)} = 4.6 \text{ dB}$.

10.3.3 Méthode alternative de synthèse d'un filtre de Butterworth

Imaginons que l'on souhaite fixer librement l'atténuation dans la bande passante. On définira alors l'atténuation du filtre de Butterworth comme

$$A(\omega) = 10 \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{2n} \right] \quad (10.23)$$

où ε est un nombre réel, compris entre 0 et 1. Ainsi, l'atténuation voulue en limite de bande passante, $A'_1 = A(\omega_1)$, est inférieure à 3 dB et le paramètre ε est déduit de

$$\varepsilon^2 = 10^{A'_1/10} - 1 \quad (10.24)$$

L'ordre du filtre est ensuite calculé à partir de l'atténuation souhaitée A'_2 en limite supérieure de la bande de transition :

$$n = \frac{\log_{10} \left[\frac{10^{A'_2/10} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (10.25)$$

en convenant encore de prendre pour ordre réel du filtre l'entier N immédiatement supérieur à la valeur trouvée.

7. A noter que le choix $C_1 = C_2 = C$ ne conduit pas à des solutions réelles pour R_1 et R_2 .

Enfin, la pulsation de référence ω_0 servant à normaliser le paramètre p est calculée de telle sorte que

$$\frac{\varepsilon^2}{\omega_1^{2N}} = \frac{1}{\omega_0^{2N}}, \quad \text{d'où } \omega_0 = \frac{\omega_1}{\varepsilon^{1/N}} \quad (10.26)$$

Avec les données de l'exemple précédent ($A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2$), on trouve $\varepsilon = 0.349$, $N = 5$, $\omega_0 = 1234.1$ rd/s. On note qu'ici $\omega_0 = \Omega_1$, ce qui est normal. En effet, le premier ajustement se fait à $\omega = \omega_1$, avec $n \equiv N$, d'où $A(\omega) = 10 \log_{10} [1 + (\omega/\omega_0)^{2N}]$, et en prenant $A(\omega_1) = A_1$ on trouve inmanquablement $\omega_0 = \Omega_1$ (voir eq. (10.19)). Pour $\omega = \omega_2$ (et $n \equiv N$), on trouve alors, comme indiqué précédemment, $A(\omega_2) = 10 \log_{10} [1 + (\omega_2/\omega_0)^{2N}] > A_2$, soit ici $A(\omega_2) = 21$ dB au lieu de $A_2 = 20$ dB.

10.4 Autres filtres passe-bas “polynomiaux”

10.4.1 Filtres de Tchebychev de type I

Les filtres de Tchebychev de type I (TI) ont pour atténuation

$$A(\omega) = 10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_1)] \quad (10.27)$$

où $T_n(u)$ est le polynôme de Tchebychev⁸ d'ordre n ⁹. Ils ont pour particularité d'améliorer la décroissance du gain dans la bande de transition, immédiatement après la pulsation de coupure ω_1 . Cependant, cette accentuation de la cassure a pour contrepartie des ondulations¹⁰ dans la bande passante, que l'on peut modérer à l'aide du paramètre ε . Les polynômes $T_n(z)$ de la variable complexe z sont définis par¹¹

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \frac{1}{2} \left[\left(z + j\sqrt{1-z^2} \right)^n + \left(z - j\sqrt{1-z^2} \right)^n \right] \quad (10.28)$$

et vérifient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z) \quad (10.29)$$

Ils possèdent aussi les propriétés suivantes

$$T_n(1) = 1 \quad \text{pour tout } n, \quad T_n(-z) = (-1)^n T_n(z), \quad T_{2n}(0) = 1, \quad T_{2n+1}(0) = 0 \quad (10.30)$$

A l'intérieur de la bande passante, où $u = \omega/\omega_1 \leq 1$, on peut poser $u = \cos\theta$. On a alors $T_n(u) = \cos(n\theta)$, et c'est cette fonction trigonométrique qui fait apparaître des ondulations : dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\cos(n\theta)$ s'annule $n/2$ fois si n est pair, et $(n+1)/2$ fois si n est impair. En dehors de la bande passante où $u \geq 1$, on peut poser $u = \cosh\chi$ ¹². Dans ce cas, $T_n(u) = \cosh(n\chi)$, et l'on observe alors une croissance de l'atténuation en loi de puissance u^n pour $u \gg 1$, d'autant plus rapide que n est grand. A ce propos, comparons, pour une même valeur de ε , les pentes d'atténuation données respectivement par (10.23) et (10.27) dans un diagramme de Bode pour $\omega = \omega_1$ (soit $u = 1$). Pour le filtre de Butterworth on a

$$\frac{dA}{d \log_{10} u} (u = 1) = \frac{20\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \times n$$

tandis que pour le filtre TI, on a ($T_n(1) = 1$) :

8. Mathématicien russe (1821-1894).

9. En fait, il s'agit ici des polynômes de Tchebychev *de première espèce*.

10. “Ripples”, en anglais.

11. Voir Jahnke-Emde-Lösch : “Table of higher functions”, 6ème édition, Mc Graw-Hill Comp. (1960) p. 96.

12. Inversement, $\chi = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$.

$$\frac{dA}{d \log_{10} u}(u=1) = \frac{20\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)} \times T'_n(1)$$

Or, il est facile de montrer que $T'_n(1) = n^2$. Ainsi, en ce point, la pente pour un filtre TI est n fois plus grande que celle correspondant au filtre de Butterworth, toutes choses étant égales par ailleurs.

Pour $u \gg 1$, on a $T_n(u) \simeq 2^{n-1}u^n$, soit $A \simeq 20n \log_{10} \omega/\omega'_1$, où

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{1/n} \quad (10.31)$$

Dans le diagramme de Bode, pour $\omega \gg \omega_1$, la courbe d'atténuation a pour asymptote la droite de pente $20n$ coupant l'axe 0 dB au point où $\omega = \omega'_1$.

Le tableau III donne les expressions des six premiers polynômes $T_n(u)$.

n	0	1	2	3	4	5	6
T_n	1	u	$2u^2 - 1$	$4u^3 - 3u$	$8u^4 - 8u^2 + 1$	$16u^5 - 20u^3 + 5u$	$32u^6 - 48u^4 + 18u^2 - 1$

◇ **Tableau III** : Les six premiers polynômes de Tchebychev $T_n(u)$ ◇

Pour $u \leq 1$, on a $|T_n(u)| \leq 1$ et dans ce domaine, l'atténuation peut "onduler" entre 0 et $\Delta A = 10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2]$. On peut choisir une valeur de ε correspondant à une limite d'ondulation ΔA tolérée et poser

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\Delta A/10} - 1} \quad (10.32)$$

Les valeurs de ε correspondant à divers choix de ΔA sont données dans le tableau IV.

ΔA (dB)	ε
0.1	0.1526204
0.5	0.3493114
1	0.5088471
2	0.7647831
3	0.9976283

◇ **Tableau IV** : Valeurs du paramètre ε en fonction de l'ondulation ΔA ◇

La grandeur ΔA peut être assimilée à la valeur A_1 préconisée par le gabarit. On cherche alors l'ordre du filtre en imposant $A(\omega_2) = A_2$, soit

$$10^{A_2/10} - 1 = \varepsilon^2 \left[\cosh \left[n \arg \cosh \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \right]^2, \quad \text{d'où } n = \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{A_2/10} - 1}{10^{A_1/10} - 1}}}{\arg \cosh \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (10.33)$$

Posons $a = \sqrt{\frac{10^{A_2/10} - 1}{10^{A_1/10} - 1}} > 1$, $b = \omega_2/\omega_1 > 1$. La formule (10.33) donnant usuellement $n > 1$, on a donc $a > b$. Or (10.33) se réécrit comme¹³

$$n \equiv n_T = \frac{\log(a + \sqrt{a^2 - 1})}{\log(b + \sqrt{b^2 - 1})}$$

Il est intéressant de comparer cette expression à celle donnée par (10.15) dans le cas du filtre de Butterworth :

$$n \equiv n_B = \frac{\log a}{\log b}$$

Or, la fonction $f(x) = \frac{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\log x}$, définie pour $x > 1$ est *strictement décroissante*¹⁴. On en déduit

$$n_T/n_B = f(a)/f(b) < 1 \quad (10.34)$$

☞ On en conclut que, pour un même gabarit, un filtre TI est d'un ordre inférieur à celui d'un filtre de Butterworth, d'où une possible économie d'étage dans sa réalisation pratique.

Celle-ci requiert en premier lieu la connaissance de la fonction de transfert, que l'on exprime sous la forme usuelle $H_N(p) = 1/\mathcal{T}_N(\varepsilon, p)$, où $\mathcal{T}_N(\varepsilon, p)$ est un polynôme de degré N en p (variable p normalisée), dépendant du paramètre ε et tel que

$$|\mathcal{T}_N(\varepsilon, ju)|^2 = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(u) \quad (10.35)$$

Considérant ici encore que les polynômes \mathcal{T}_N sont à coefficients réels et procédant comme il a été fait pour le filtre de Butterworth, on trouve que leurs zéros s_k doivent satisfaire l'équation

$$\varepsilon^2 T_N^2(\mp js_k) = -1, \text{ soit } T_N(\mp js_k) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \quad (10.36)$$

où les deux symboles \pm sont indépendants. Dans (10.28), posons $z = \cos \xi$ ($= \mp js_k$), avec $\xi = \theta + j\chi$, θ et χ étant réels. On a alors $T_N(z) = \cos N\xi$, et (10.36) devient

$$\cos Nz = \cos N\theta \cosh N\chi - j \sin N\theta \sinh N\chi = \pm \frac{j}{\varepsilon} \quad (10.37)$$

d'où l'on déduit $\cos N\theta = 0$, et $\sinh N\chi = \frac{1}{\varepsilon}$, en choisissant $\chi > 0$. On trouve ainsi que les zéros de $\mathcal{T}_N(\varepsilon, p)$ sont

$$s_k^{(N)} = -\sinh \chi_N \sin \theta_k^{(N)} \pm j \cosh \chi_N \cos \theta_k^{(N)}, \quad \text{où} \\ \chi_N = \frac{1}{N} \arg \sinh \frac{1}{\varepsilon}, \quad \theta_k^{(N)} = \frac{\pi}{2N} + k \frac{\pi}{N} \quad (10.38)$$

et où l'on a pris garde de ne retenir que les zéros dont la partie réelle est négative, ce qui implique que l'entier k doit vérifier $0 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$ (avec $N \geq 1$). Le signe \pm dans (10.38) rend compte du fait que si s_k est un zéro complexe, son conjugué s_k^* l'est aussi. Faisons les remarques suivantes.

- Posant $x = \Re(s_k^{(N)})$, $y = \Im(s_k^{(N)})$, on observe que ces deux grandeurs sont liées par la relation

$$\frac{x^2}{\sinh^2 \chi_N} + \frac{y^2}{\cosh^2 \chi_N} = 1 \quad (10.39)$$

13. Ici, on peut exprimer les logarithmes dans une base quelconque.

14. Nous laissons le lecteur vérifier cette assertion.

qui exprime que, dans le plan complexe, les zéros se placent sur une ellipse (laquelle est centrée sur l'origine et a pour demi-axes $\sinh \chi_N$ et $\cosh \chi_N$ respectivement orientés selon l'axe réel et selon l'axe imaginaire), dans le secteur $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ($x \leq 0$).

• Posons $\chi_0 = \arg \sinh \frac{1}{\varepsilon}$ (donc $\sinh \chi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, $\cosh \chi_0 = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}$). Lorsque N est impair, $(N-1)/2$ est entier et l'on a $\theta_{(N-1)/2}^{(N)} = \pi/2$, d'où $s_{(N-1)/2}^{(N)} = -\sinh \frac{\chi_0}{N}$. Ce zéro est le seul zéro réel du polynôme \mathcal{T}_N de degré N impair¹⁵.

• $\mathcal{T}_N(\varepsilon, p)$ doit être écrit sous la forme

$$\mathcal{T}_N(\varepsilon, p) = K_N \prod_{\ell=0}^{N-1} (p - s_\ell) \quad (10.40)$$

impliquant une constante K_N , admise réelle et positive, que l'on peut fixer comme suit. Pour $p = ju$ avec $u \gg 1$, on a $|\mathcal{T}_N(\varepsilon, ju)|^2 \simeq K_N^2 u^{2N}$, tandis que $T_N^2(u) \simeq 4^{N-1} u^{2N}$. Utilisant la relation (10.35), on trouve

$$K_N = 2^{N-1} \varepsilon \quad (10.41)$$

On trouvera dans le tableau V les zéros de \mathcal{T}_N pour N allant de 1 à 4¹⁶.

N	$s_k^{(N)}$
1	$-\sinh \chi_0$
2	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sinh \frac{\chi_0}{2} + j \cosh \frac{\chi_0}{2} \right], -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sinh \frac{\chi_0}{2} - j \cosh \frac{\chi_0}{2} \right]$
3	$-\sinh \frac{\chi_0}{3}, -\frac{1}{2} \left[\sinh \frac{\chi_0}{3} \pm j\sqrt{3} \cosh \frac{\chi_0}{3} \right],$
4	$-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \sinh \frac{\chi_0}{4} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \cosh \frac{\chi_0}{4}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \sinh \frac{\chi_0}{4} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \cosh \frac{\chi_0}{4}$

◇ **Tableau V** : Zéros de \mathcal{T}_N pour $1 \leq N \leq 4$ ◇

☞ On doit prendre garde au fait que les polynômes \mathcal{T}_N ne peuvent être utilisés tels quels car ils conduisent à des fonctions de transfert n'ayant pas la normalisation requise, à savoir, $H_N(0) = 1$. Nous définirons donc de nouveaux polynômes $\tilde{\mathcal{T}}_N = \frac{1}{\mu_N} \mathcal{T}_N$, tels que $\tilde{\mathcal{T}}_N(\varepsilon, 0) = 1$, et poserons

15. Ce résultat peut être directement déduit de (10.28). En effet, pour $z = -js$ avec $s = -\sinh(\chi_0/N)$, cette formule donne $T_N(z) = \frac{j^N}{2} [e^{\chi_0} + (-1)^N e^{-\chi_0}] = j^N \sinh \chi_0$ si N est impair ; d'où, pour N impair, $T_N^2(s) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ et, d'après (10.35), $|\mathcal{T}_N(\varepsilon, s)|^2 = 0$.

16. Sur la base de ce tableau et de (10.40), le lecteur courageux pourra vérifier (10.35) pour les degrés N considérés.

$$H_N(p) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{T}}_N(\varepsilon, p)} \quad (10.42)$$

Pour déterminer μ_N , utilisons tout d'abord (10.27). Il vient

$$|\mu_N|^2 |\tilde{\mathcal{T}}_N(\varepsilon, 0)|^2 = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(0) = |\mu_N|^2, \quad \text{d'où}$$

$$|\mu_N|^2 = 1 + \varepsilon^2 = \coth^2 \chi_0 \quad \text{pour } N \text{ pair, } |\mu_N|^2 = 1 \quad \text{pour } N \text{ impair}$$

Ensuite, μ_N doit vérifier $\mu_N = \mathcal{T}_N(\varepsilon, 0)$. Or,

$$\mathcal{T}_N(\varepsilon, 0) = K_N \mathcal{P}_N, \quad \text{où } \mathcal{P}_N = \prod_r (-s_r^{(N)}) = (-1)^N \prod_r s_r^{(N)}$$

Montrons que le produit \mathcal{P}_N est toujours positif. Si N est pair, les zéros sont strictement complexes et conjugués deux à deux. On a alors $\mathcal{P}_N = \prod_{r'} |s_{r'}^{(N)}|^2$ où le produit ne porte que sur la moitié des zéros, et l'on a donc $\mathcal{P}_N > 0$. Si N est impair, un zéro, $s_{(N-1)/2}^{(N)}$, est réel *négatif* et les autres sont strictement complexes et conjugués deux à deux. Dans ce cas, $\mathcal{P}_N = \left[-s_{(N-1)/2}^{(N)} \right] \prod_{r''} |s_{r''}^{(N)}|^2$ et l'on a encore $\mathcal{P}_N > 0$. En conclusion, μ_N est réel positif et

$$\mu_N = \coth \chi_0, \quad \text{pour } N \text{ pair, } \mu_N = 1 \quad \text{pour } N \text{ impair} \quad (10.43)$$

On notera en passant que $\mathcal{P}_N = \mu_N / K_N$ et par conséquent

$$\mathcal{P}_N = \frac{\cosh \chi_0}{2^{N-1}} \quad \text{pour } N \text{ pair, } \mathcal{P}_N = \frac{\sinh \chi_0}{2^{N-1}} \quad \text{pour } N \text{ impair} \quad (10.44)$$

A mesure que N augmente, les expressions analytiques des polynômes $\tilde{\mathcal{T}}_N$ deviennent compliquées et, en vue de leur exploitation pratique immédiate, des tables ont été établies. On y trouve, selon les valeurs de ΔA et de N , lesdits polynômes sous forme factorisée avec des coefficients préalablement calculés numériquement. Le tableau VI en est un exemple. A l'aide ces tables, on constitue enfin le schéma théorique du filtre TI souhaité comme il a été fait pour le filtre de Butterworth, en considérant des cellules de Sallen-key ou de Rauch. Dans la figure (10.7) sont comparés, pour $\varepsilon = 1$, les gains théoriques obtenus avec des filtres de Butterworth et avec des filtres TI. On note qu'un filtres TI donne une coupure plus raide que celle d'un filtre de Butterworth de même ordre, mais donne des ondulations dans la bande passante.

10.4.2 Filtres de Tchebychev de type II¹⁷

Ces filtres (TII) produisent l'atténuation

$$A(\omega) = 10 \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \frac{T_n^2(\omega_2/\omega_1)}{T_n^2(\omega_2/\omega)} \right] \quad (10.45)$$

Au vu de la dépendance de (10.45) vis-à-vis de ω , on conçoit bien que ces filtres présentent une réponse fréquentielle symétrique de celle des filtres TI, et pour cette raison, ils sont aussi appelés *filtres de Tchebychev inverses*. Ils ont en effet un comportement monotone dans la bande passante et donnent des ondulations dans la bande d'arrêt. Dans la bande de transition, la hausse d'atténuation est moins rapide que celle des filtres TI. La fonction de transfert correspondante possède à la fois des pôles et des zéros.

17. Une étude comparative intéressante des filtres de Tchebychev de type I et de type II a été faite par Mahesh S. Chavan et al., International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, Issue 1, Vol. 2 (2008), vers laquelle nous renvoyons le lecteur.

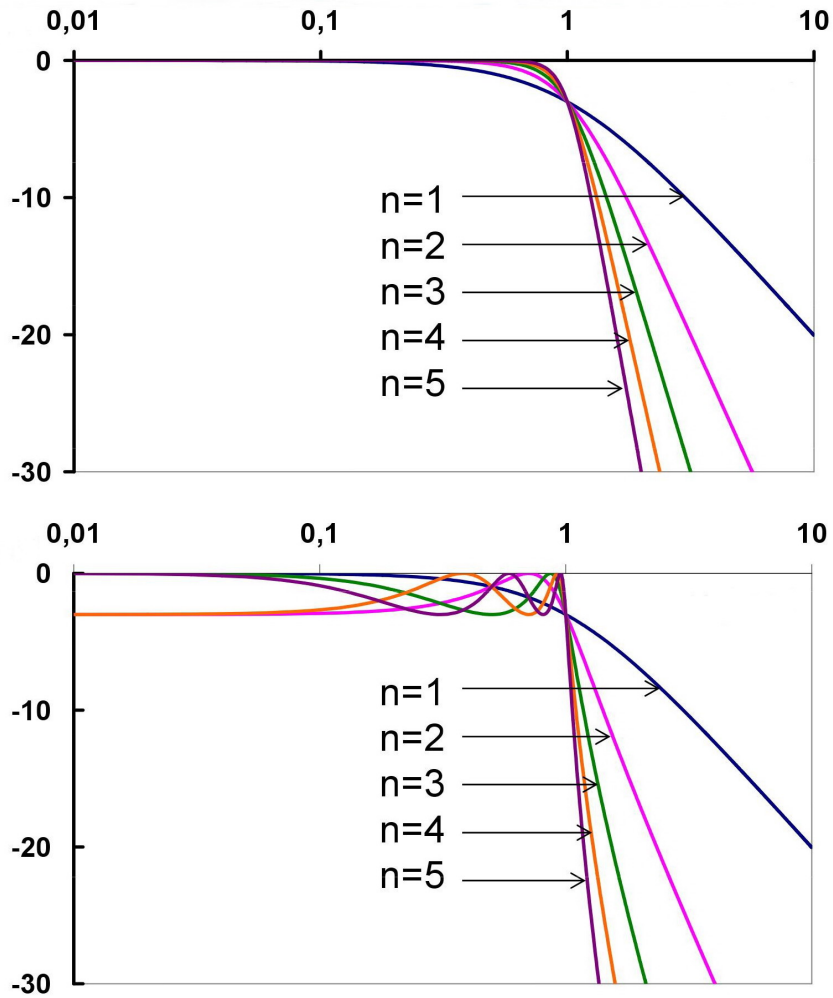


FIGURE 10.7 – Courbes du gain(dB) en fonction de $\log_{10} u$ pour $\varepsilon = 1$, $1 \leq n \leq 5$:
 filtres de Butterworth (courbes du haut) ; filtres TI (courbes du bas)

$\Delta A = 0.5 \text{ dB}, \varepsilon = 0.3493114$	
N	\tilde{T}_N
1	$1 + 0.349p$
2	$1 + 0.940p + 0.659p^2$
3	$(1 + 1.596p)(1 + 0.548p + 0.875p^2)$
4	$(1 + 2.376p + 2.806p^2)(1 + 0.33p + 0.940p^2)$
5	$(1 + 2.760p)(1 + 1.230p + 2.097p^2)(1 + 0.216p + 0.965p^2)$
6	$(1 + 3.692p + 6.370p^2)(1 + 0.719p + 1.695p^2)(1 + 0.152p + 0.977p^2)$
7	$(1 + 3.904p)(1 + 1.818p + 3.939p^2)(1 + 0.472p + 1.477p^2)(1 + 0.112p + 0.984p^2)$
$\Delta A = 1 \text{ dB}, \varepsilon = 0.5088471$	
N	\tilde{T}_N
1	$1 + 0.509p$
2	$1 + 0.996p + 0.907p^2$
3	$(1 + 2.024p)(1 + 0.497p + 1.006p^2)$
4	$(1 + 2.411p + 3.579p^2)(1 + 0.283p + 1.014p^2)$
5	$(1 + 3.454p)(1 + 1.091p + 2.329p^2)(1 + 0.181p + 1.012p^2)$
6	$(1 + 3.722p + 8.019p^2)(1 + 0.609p + 1.793p^2)(1 + 0.126p + 1.009p^2)$
7	$(1 + 4.868p)(1 + 1.606p + 4.339p^2)(1 + 0.392p + 1.530p^2)(1 + 0.092p + 1.007p^2)$

◇ **Tableau VI** : Polynômes \tilde{T}_N sous formes factorisées, pour $\Delta A = 0.5, 1 \text{ dB}$ et $1 \leq N \leq 7$ ◇

Connaissant les paramètres du gabarit $(A_1, A_2, \omega_1, \omega_2)$, le paramètre ε et l'ordre N du filtre sont déterminés comme suit. Pour $\omega = \omega_1$, on a $A(\omega_1) = 10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2] = A_1$, d'où

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_1/10} - 1}$$

Puis, pour $\omega = \omega_2$, on pose $A(\omega_2) = A_2$. Puisque $\omega_2/\omega_1 > 1$, $T_n(\omega_2/\omega_1)$ a pour expression $\cosh(n \arg \cosh \omega_2/\omega_1)$ et l'on a ainsi

$$\varepsilon^2 T_n^2(\omega_2/\omega_1) = 10^{A_2/10} - 1, \quad \text{soit} \quad n = \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{A_2/10} - 1}{10^{A_1/10} - 1}}}{\arg \cosh \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (10.46)$$

et le degré N est l'entier immédiatement supérieur à la valeur trouvée pour n . Remarquons à cet égard que si dans (10.46) on augmente n tout en fixant A_2 , ω_1 et ω_2 (comme cela est fait dans certains programmes), la valeur de A_1 et celle de ε s'en trouvent diminuées. La valeur effective de ε est alors :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{10^{A_2/10} - 1}}{\cosh(N \arg \cosh \omega_2/\omega_1)} \quad (10.47)$$

Utilisant la variable complexe p , égale à $j\omega/\omega_2$ en régime harmonique, les pôles de la fonction de transfert sont tels que $H^{-1}(p)H^{-1}(-p) = 1 + \varepsilon'^2 T_N^{-2}(1/(-jp)) = 0$, où

$$\varepsilon' = \varepsilon T_N(\omega_2/\omega_1) = \sqrt{10^{A_2/10} - 1} \quad (10.48)$$

Ils satisfont donc l'équation

$$T_N(j/p) = \pm j\varepsilon' \quad (10.49)$$

Comparant celle-ci à (10.36), on en déduit que p doit être égal à l'inverse de l'un des zéros définis en (10.38), compte tenu de la contrainte $\Re(p) < 0$. On obtient donc les N pôles

$$\tilde{s}_k^{(N)} = \frac{1}{-\sinh \chi_N \sin \theta_k^{(N)} \pm j \cosh \chi_N \cos \theta_k^{(N)}}, \quad \text{où} \quad \theta_k^{(N)} = \frac{\pi}{2N} + k \frac{\pi}{N} \quad \text{et} \\ \chi_N = \frac{\chi_0}{N}, \quad \text{avec cette fois} \quad \sinh \chi_0 = \varepsilon' \quad (10.50)$$

Les zéros de la fonction de transfert sont ceux de $T_N(\omega_2/\omega)$ et ne sont effectifs que pour $\omega > \omega_2$.

L'équation

$$T_N(\omega_2/\omega) = \cos(N\theta) = 0 \quad \text{où} \quad \theta = \arccos(\omega_2/\omega)$$

conduit aux solutions

$$\theta_\ell = \frac{\pi}{2N} + \frac{\ell\pi}{N}, \quad \text{soit} \quad \frac{\omega_\ell}{\omega_2} = \frac{p_\ell}{j} = \frac{1}{\cos \theta_\ell} \quad (10.51)$$

Admettant que le polynôme, de degré N en p , qui constitue le numérateur de la fonction de transfert est lui aussi à coefficients réels, il faudra adjoindre à ces solutions (en p) leurs conjuguées complexes. On peut alors ne considérer que le cas où $\cos \theta_\ell \geq 0$, ce qui impose $0 \leq \ell \leq \frac{N-1}{2}$. La limite supérieure $\ell = (N-1)/2$ ne peut être atteinte que pour des ordres impairs. Or, cette valeur de ℓ conduit à $\theta = \pi/2$ et à un zéro à l'infini, ce que l'on doit exclure. Par suite, si N est pair, ℓ varie entre 0 et $(N-2)/2$, ce qui donne au total N zéros, imaginaires purs et conjugués deux à deux. Si N est impair, ℓ varie entre 0 et $(N-3)/2$, ce qui donne au total $N-1$ zéros, imaginaires purs et conjugués deux à deux. Dans le premier cas, le numérateur et le dénominateur de la

fonction de transfert sont de même degré. Dans le second, le degré du numérateur est inférieur d'une unité à celui du dénominateur.

La fonction de transfert s'écrit ainsi sous la forme $H(p) = KN(p)/D(p)$ où

$$N(p) = \prod_{\ell} (p - p_{\ell}), \quad D(p) = \prod_k (p - \tilde{s}_k)$$

K étant une constante de normalisation. On détermine celle-ci en imposant $H(0) = 1$, soit

$$K = \frac{\prod_{\ell} (-1/p_{\ell})}{\prod_k (-1/\tilde{s}_k)} = \frac{\prod_{\ell} (-\cos \theta_{\ell})}{\prod_k (-s_k)}$$

où les $\cos \theta_{\ell}$ sont les zéros de $T_N(\cos \theta)$ (cas $\theta = \pi/2$ exclu), et les s_k sont les zéros de T_N pour $\sinh \chi_0 = \varepsilon'$.

Ecrivons alors¹⁸ $T_N(u) = 2^{N-1} \prod_{\ell} (u - \cos \theta_{\ell})$. Or, pour N pair, $T_N(0) = 1$. On en déduit

$$\prod_{\ell} (-\cos \theta_{\ell}) = \frac{1}{2^{N-1}} \quad \text{pour } N \text{ pair} \quad (10.52)$$

Pour N impair, $u = 0$ est un zéro. Calculons alors la limite de $T_N(u)/u$ lorsque $u \rightarrow 0$. D'une part, celle-ci égale au produit $\prod_{\ell} (-\cos \theta_{\ell})$ avec $\theta_{\ell} \neq \pi/2$. D'autre part, elle est égale à $T'_N(0)$. Or

$$T'(\cos \theta) = N \frac{\sin(N\theta)}{\sin \theta}, \quad \text{d'où } T'_N(0) = N \quad \text{et}$$

$$\prod_{\ell'} (-\cos \theta_{\ell'}) = \frac{N}{2^{N-1}} \quad \text{pour } N \text{ impair} \quad (10.53)$$

où l'indice ℓ' exclut le cas $\theta_{(N-1)/2} = \pi/2$. Utilisant ensuite (10.44), on en déduit

$$K = \frac{1}{\cosh \chi_0} \quad \text{pour } N \text{ pair}; \quad K = \frac{N}{\sinh \chi_0} \quad \text{pour } N \text{ impair} \quad (10.54)$$

avec $\sinh \chi_0 = \varepsilon'$.

Considérons à nouveau le cas où $\omega_1 = 1000$ rd/s, $\omega_2 = 2000$ rd/s, $A_1 = 0.5$ dB, $A_2 = 20$ dB. On trouve ici $n = 4, 74$ et l'on prendra donc $N = 5$. Les pôles sont

$$s_0 = -1.575, \quad s_{1,2} = -0.150 \pm j0.861, \quad s_{3,4} = -0.686 \pm j0.930,$$

les zéros sont

$$z_{1,2} = \pm j1.051, \quad z_{3,4} = \pm j1.701,$$

et la constante de normalisation est

$$K = 0.5025$$

D'où

$$H(p) = \frac{0.5025(p^2 + 1.105)(p^2 + 2.89)}{(p + 1.575)(p^2 + 0.3p + 0.764)(p^2 + 1.372p + 1.33)}$$

18. Nous avons vu précédemment que 2^{N-1} est le coefficient en facteur du terme de plus haut degré de T_N .

10.4.3 Filtres de Bessel (ou de Thomson)

Un bon filtre passe-bas doit non seulement rejeter efficacement les signaux de hautes fréquences, considérés comme indésirables dans ce contexte, mais aussi transmettre un signal dont les composantes harmoniques sont principalement dans le domaine de la bande passante, en préservant du mieux possible son intégrité. Revenons à la formule de Fourier

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)E(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (10.55)$$

où $E(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal d'entrée, dont les valeurs sont supposées relever du domaine de la bande passante du filtre, et écrivons

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\psi(\omega)} \quad (10.56)$$

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu comment on peut réaliser des filtres tels que $|H(j\omega)|$ reste voisin de 1 dans la bande passante. Mais qu'en est-il du déphasage $\psi(\omega)$, dont la dépendance vis-à-vis de ω représente, on ne doit pas l'oublier, un élément important dans l'opération de filtrage ? En effet, si le déphasage est une fonction compliquée de ω , d'après (10.56), le signal d'entrée sera profondément modifié dans son passage dans le filtre, même si les amplitudes $|E(\omega)|$ sont peu affectées. Pour que le signal ne subisse aucune distorsion, le déphasage dans ce domaine doit être de la forme $\psi(\omega) = \omega\tau$ où τ est une constante, caractéristique du filtre, car si cette condition est remplie et si $|H(j\omega)| = 1$, alors¹⁹

$$s(t) \simeq e(t - \tau) \quad (10.57)$$

et le filtre ne fait subir qu'un retard au signal d'entrée, sans le déformer. La grandeur

$$\frac{d\psi}{d\omega}(\omega) = \tau(\omega) \quad (10.58)$$

représente la *durée de propagation* d'un harmonique de pulsation ω à travers le filtre²⁰. On conçoit bien que s'il varie avec ω , les composantes harmoniques d'un signal ne se propagent pas à la même vitesse à travers le filtre et ne peuvent donc pas, en se recombinant, reconstituer le même signal à la sortie du filtre.

Existe-t-il un filtre polynomial répondant à l'exigence d'une durée de propagation constante, ou au moins pouvant la satisfaire du mieux possible ? Nous le rechercherons comme suit²¹. La fonction de transfert $H(j\omega)$ s'écrit comme l'inverse d'un polynôme $\mathcal{P}_n(j\omega)$ de degré n suivant la variable $p = j\omega$, que nous décomposerons en partie réelle et partie imaginaire :

$$\mathcal{P}_n(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

Supposant comme d'habitude que ce polynôme est à coefficients réels, on doit avoir

$$[\mathcal{P}_n(j\omega)]^* = \mathcal{P}_n(-j\omega) = U(-\omega) + jV(-\omega) = U(\omega) - jV(\omega)$$

On en conclut que la partie réelle $U(\omega)$ est une fonction paire de ω , tandis que la partie imaginaire $V(\omega)$ est une fonction impaire de ω , et que, selon que n est pair ou impair, le polynôme $U(\omega)$ est d'un degré de plus ou de moins que celui du polynôme $V(\omega)$.

Pour obtenir $\tau(\omega)$, procédons de la manière suivante. La tangente du déphasage étant donnée par le rapport V/U , on a

19. Voir eq. 8.89.

20. On l'appelle aussi *temps de groupe*, ou encore *retard de groupe*.

21. C. Carimalo, *Circuits Syst Signal Process* (2018) 37 :5174-5177 ; <https://doi.org/10.1007/s00034-018-0812-x>.

$$\frac{d \tan \psi}{d\omega} = [1 + \tan^2 \psi] \frac{d\psi}{d\omega} = \frac{1}{U^2} \left[U \frac{dV}{d\omega} - V \frac{dU}{d\omega} \right], \text{ d'où}$$

$$\tau(\omega) = \frac{1}{U^2 + V^2} \left[U \frac{dV}{d\omega} - V \frac{dU}{d\omega} \right] \quad (10.59)$$

Quelle que soit la parité de l'entier n , le numérateur de cette expression est de degré $2n - 2$, alors que celui du dénominateur est de degré $2n$. Il est donc impossible d'obtenir avec un polynôme une valeur constante de τ pour toutes les valeurs de ω . Cependant, on peut approcher au mieux une valeur quasi constante de τ dans la bande passante, où les pulsations sont inférieures à la pulsation de coupure ω_c , si, dans le second membre de (10.59), le numérateur est proportionnel au dénominateur, à un terme près proportionnel à $(\omega/\omega_c)^{2n}$, lequel, dans ce domaine, est d'autant plus petit que n est grand.

Cherchons alors un polynôme pour lequel on aurait

$$\left[U \frac{dV}{d\omega} - V \frac{dU}{d\omega} \right] = K_1 [U^2 + V^2] + K_2 (\omega/\omega_c)^{2n}$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes réelles. On peut normaliser les pulsations et définir une pulsation réduite u de telle sorte à obtenir

$$UV' - VU' = U^2 + V^2 + Ku^{2n} \quad (10.60)$$

où K est une nouvelle constante réelle, et U' et V' sont ici les dérivées respectives de U et V par rapport à u . Effectuons la dérivation

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{u^{2n}} [UV' - VU' - U^2 - V^2] \right\} = \frac{dK}{du} = 0$$

$$= -\frac{2n}{u^{2n+1}} [UV' - VU' - U^2 - V^2] + \frac{1}{u^{2n}} [UV'' - VU'' - 2UU' - 2VV'], \text{ soit}$$

$$U [uV'' - 2nV' - 2uU' + 2nU] + V [-uU'' + 2nU' - 2uV' + 2nV] = 0$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme

$$\Re[\mathcal{P}_n^* \mathcal{E}] = 0 \quad (10.61)$$

où \mathcal{E} est le nombre complexe tel que

$$\Re(\mathcal{E}) = uV'' - 2nV' - 2uU' + 2nU, \quad \Im(\mathcal{E}) = -uU'' + 2nU' - 2uV' + 2nV, \text{ soit}$$

$$\mathcal{E} = ju(-U'' - jV'') - 2ju(V' - jU') - 2n(V' - jU') + 2n(U + jV)$$

Posons maintenant $z = ju$ et exprimons les parties réelles et imaginaires des dérivées première et seconde de \mathcal{P}_n par rapport à z . On a

$$\frac{d\mathcal{P}_n}{dz} = -jU' + V', \quad \frac{d^2\mathcal{P}_n}{dz^2} = -U'' - jV''$$

et l'on voit que \mathcal{E} peut être réécrit comme

$$\mathcal{E} = z \frac{d^2\mathcal{P}_n}{dz^2} - 2(z+n) \frac{d\mathcal{P}_n}{dz} + 2n\mathcal{P}_n \quad (10.62)$$

L'équation (10.60) incite alors à poser $\mathcal{E} = 0$ pour obtenir l'équation

$$z \frac{d^2\mathcal{P}_n}{dz^2} - 2(z+n) \frac{d\mathcal{P}_n}{dz} + 2n\mathcal{P}_n = 0 \quad (10.63)$$

Celle-ci est bien connue et a pour solution polynomiale le polynôme de Bessel $\theta_n(z)$ ²², dont l'expression générale est

$$\theta_n(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} (2z)^k \quad (10.64)$$

Prenant $\mathcal{P}_n(ju) \equiv \theta_n(ju)$, on voit que le terme de plus haut degré $(ju)^n$ de ce polynôme a pour coefficient 1. Le terme *manquant* dans le numérateur de $d\psi/du$ pour égaler son dénominateur est donc simplement u^{2n} , d'où l'on déduit que $K = -1$ dans (10.60). Ainsi, pour les polynômes de Bessel, on aboutit à l'équation remarquable

$$\frac{d\psi_n}{du} = 1 - \frac{u^{2n}}{|\theta_n(ju)|^2} \quad (10.65)$$

montrant que leur utilisation permet d'obtenir, dans le cadre de filtres polynomiaux, des filtres présentant de façon optimale un temps de propagation constant dans la plus grande partie de la bande passante souhaitée, où $u \leq 1$. Le tableau VIII donne les huit premiers polynômes de Bessel.

n	
1	$p + 1$
2	$p^2 + 3p + 3$
3	$p^3 + 6p^2 + 15p + 15$
4	$p^4 + 10p^3 + 45p^2 + 105p + 105$
5	$p^5 + 15p^4 + 105p^3 + 420p^2 + 945p + 945$
6	$p^6 + 21p^5 + 210p^4 + 1260p^3 + 4725p^2 + 10395p + 10395$
7	$p^7 + 28p^6 + 378p^5 + 3150p^4 + 17325p^3 + 62370p^2 + 135135p + 135135$
8	$p^8 + 441p^7 + 630p^6 + 6930p^5 + 51975p^4 + 270270p^3 + 945945p^2 + 2027025p + 2027025$

◇ **Tableau VIII** : Les huit premiers polynômes de Bessel $\theta_n(p)$ ◇

22. Voir : H.L. Krall, Orrin Frink, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) pp 100-115 ; les polynômes y_n définis dans cet article, appelés "polynômes de Bessel" par ses auteurs, sont liés à ceux présentés ici par la relation $\theta_n(z) = z^n y_n(1/z)$. En fait, les polynômes y_n avaient été déjà utilisés par C. Hermite : "Sur la fonction exponentielle", C. R. Acad. Sc. Paris, T. 17, pp. 18-24, 74-79, 226-233, 285-293 (1875) ; Oeuvres, T. 3, pp 150-181, Gauthier-Villars, Paris (1912). Voir aussi : Kiyasu Z., "On A Design Method of Delay Networks", J. Inst. Electr. Commun. Eng. Japan, 26, pp. 598-610 (August 1943) ; W.E. Thomson, "Delay Networks having Maximally Flat Frequency Characteristics", Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Part III, November 1949, Vol. 96, n°44, pp. 487-490.

A l'aide de ce tableau, on peut estimer l'écart par rapport à 1 du second membre de (10.65) pour le point de référence $u = 1$. Sa valeur, égale à $1/|\theta_n(j)|^2$, est donnée en fonction de n dans le tableau IX, pour $n \leq 6$.

n	1	2	3	4	5	6
$1/ \theta_n(j) ^2$	0.5	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}	$8.4 \cdot 10^{-9}$

◇ **Tableau IX** : Ecart de (10.65) par rapport à 1 pour $u = 1$ ◇

On peut ainsi se rendre compte de la décroissance extrêmement rapide de cet écart à mesure que n augmente. A cet égard, on montre que pour $n \gg 1$, on a²³

$$|\theta_n(j)| \simeq \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (10.66)$$

Enfin, notons qu'à l'autre extrémité du spectre, où $u \gg 1$, (10.65) tend vers zéro selon la formule

$$\frac{d\psi_n}{du} \simeq \frac{n(n+1)}{2u^2} \quad (10.67)$$

n	
1	$p + 1$
2	$0.618p^2 + 1.361p + 1$
3	$(0.756p + 1)(0.4772p^2 + 0.9996p + 1)$
4	$(0.4883p^2 + 1.3389p + 1)(0.3885p^2 + 0.7738p + 1)$
5	$(0.6656p + 1)(0.4128p^2 + 1.1401p + 1)(0.3245p^2 + 0.621p + 1)$
6	$(0.3891p^2 + 1.2224p + 1)(0.3509p^2 + 0.9691p + 1)(0.2759p^2 + 0.5133p + 1)$
7	$(0.594p + 1)(0.3396p^2 + 1.0946p + 1)(0.3012p^2 + 0.8305p + 1)(0.2382p^2 + 0.4333p + 1)$
8	$(0.3166p^2 + 1, 112p + 1)(0.2984p^2 + 0.976p + 1)(0.2625p^2 + 0.721p + 1)(0.209p^2 + 0.373p + 1)$

◇ **Tableau X** : Formes factorisées et normalisées des huit premiers polynômes de Bessel ◇

23. Voir par exemple E. Groswald, "Bessel Polynomials", Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag (1978).

Le lecteur intéressé pourra trouver dans un article de I.M. Filanovsky²⁴ une autre méthode, basée sur des développements limités de $\tan \psi$, montrant l'optimalité des polynômes de Bessel pour le problème en question.

Il n'existe pas de formule analytique donnant les zéros des polynômes de Bessel pour tous les ordres. On doit donc se contenter de leur évaluation numérique²⁵. Le tableau X donne les formes factorisées et normalisées des huit premiers polynômes de Bessel.

Le filtre de Bessel est celui qui déforme le moins les signaux dans la bande passante. Par contre, pour un n donné et au-delà de la fréquence de coupure, son atténuation est moindre que celle d'un filtre de Butterworth et que celle d'un filtre de Tchebycheff, avec une faible raideur de transition donnant une plus large bande de transition. Nécessitant des ordres élevés pour une meilleure atténuation, les filtres de Bessel sont donc peu utilisés, sauf lorsque la linéarité de la phase avec la fréquence (durée de propagation quasi-constante) est essentielle dans le cahier des charges (forme du signal à respecter).

10.4.4 Le filtre de Legendre²⁶

n	$P_n(z)$	$\mathcal{L}_n(u^2)$
1	z	$2u^2$
2	$\frac{1}{2}(3z^2 - 1)$	u^4
3	$\frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$	$3u^6 - 3u^4 + u^2$
4	$\frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$	$6u^8 - 8u^6 + 3u^4$
5	$\frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$	$20u^{10} - 40u^8 + 28u^6 - 8u^4 + u^2$
6	$\frac{1}{16}(231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5)$	$50u^{12} - 120u^{10} + 105u^8 - 40u^6 + 6u^4$
7	$\frac{1}{16}(429z^7 - 693z^5 + 315z^3 - 35z)$	$175u^{14} - 525u^{12} + 165u^{10} - 355u^8 + 105u^6 - 15u^4 + u^2 + 1$

◇ **Tableau XI** : Polynômes de Legendre et polynômes $\mathcal{L}_n(u^2)$ pour $1 \leq n \leq 7$ ◇

24. I.M. Filanovsky, "One simple method for the derivation of Bessel (Thomson) filter transfer functions", Int. Journ. Electr. Eng. Education, vol. 18, No.2, pp. 90-92, et autres références données dans cet article pour des dérivations antérieures.

25. Voir H.J. Orchard, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-12, pp 452-454, Sept. 1965.

26. A-M Legendre, mathématicien français (1752-1833).

Ce filtre, plus complexe, a été conçu en 1958 par A. Papoulis²⁷. Sa réponse fréquentielle est dite optimale car sa courbe de gain est assez plate dans la bande passante et chute assez brutalement en bande de transition avec une raideur maximale au voisinage de la pulsation de coupure. Son atténuation est définie par

$$A(u) = 10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_n(u^2)] \quad (10.68)$$

où $\mathcal{L}_n(u^2)$ est un polynôme en u^2 qui se construit à partir des polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ au moyen des formules :

$$\mathcal{L}_n(u^2) = \int_{-1}^{2u^2-1} dx (1 + \lambda x) \left\{ \sum_{\ell=0}^k a_\ell P_\ell(x) \right\}^2, \quad \text{où } a_\ell = \frac{2\ell + 1}{\sqrt{2k + 1}} \quad \text{et}$$

$$k = \frac{n-1}{2}, \lambda = 0, \quad \text{pour } n \text{ impair}, \quad k = \frac{n-2}{2}, \lambda = 1, \quad \text{pour } n \text{ pair} \quad (10.69)$$

les polynômes de Legendre étant eux-mêmes définis par

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (10.70)$$

ou par la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad \text{avec } P_0(x) = 1 \quad (10.71)$$

Les sept premiers polynômes “L” sont donnés dans le tableau XI. Nous n’irons pas plus loin dans la description d’un filtre de Legendre, renvoyant le lecteur intéressé à la littérature spécialisée, et insisterons simplement sur le fait qu’il donne, pour un ordre donné, une réponse intermédiaire entre celle d’un filtre de Butterworth et celle d’un filtre de Tchebychev, à savoir, qu’il ne donne pas d’ondulation dans la bande passante, que la coupure est plus raide que celle d’un Butterworth, mais moins raide que celle d’un Tchebychev.

10.5 Transformations d’une espèce de filtre à une autre et réalisation de filtres passe-bande ou coupe-bande

Ces transformations, agissant sur la fréquence, ont été décrites dans les sections 9.6.2 et 9.6.3 du chapitre 9 sous l’appellation “transpositions”. Leurs actions à partir de la fonction de transfert d’un filtre passe-bas du premier ordre sont résumées dans le tableau XII, où p est la variable de Laplace *normalisée*.

passe-bas	→ passe-haut	→ passe-bande	→ coupe-bande
p	$p \rightarrow \frac{1}{p}$	$p \rightarrow \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{p} \right)$	$p \rightarrow \frac{2m}{\left(p + \frac{1}{p} \right)}$
$\frac{1}{1+p}$	$\rightarrow \frac{p}{1+p}$	$\rightarrow \frac{2mp}{1+2mp+p^2}$	$\rightarrow \frac{1+p^2}{1+2mp+p^2}$

◇ **Tableau XII** : Transpositions à partir d’un filtre passe-bas du premier ordre ◇

27. A. Papoulis, Optimum filters with monotonic response, Proc. IRE 46, 3, mars 1958.

Ces transpositions sont généralisables aux filtres polynomiaux d'ordres supérieurs. Ainsi, à partir d'un filtre passe-bas dont la fonction de transfert s'écrit $H(p) = 1/P(p)$ où $P(p)$ est un polynôme d'ordre n , la transposition $p \rightarrow 1/p$ permet d'obtenir la fonction de transfert $H'(p) = 1/P(1/p)$ d'un filtre passe-haut polynomial du même ordre. Mais l'inverse est également possible, c'est-à-dire, à partir de la fonction de transfert $H'(p)$ d'un filtre passe-haut polynomial, la même transposition $p \rightarrow 1/p$ permet d'obtenir celle d'un filtre passe-bas polynomial du même ordre. Cette observation suggère une méthode très simple, décrite ci-après, pour réaliser concrètement un filtre passe-haut polynomial.

Tout d'abord se pose la question pratique suivante. Soit à réaliser un filtre passe-haut dont le gabarit en atténuation est donné par la figure 10.8. Comment procéder en utilisant la transposition inverse passe-haut \rightarrow passe-bas ?

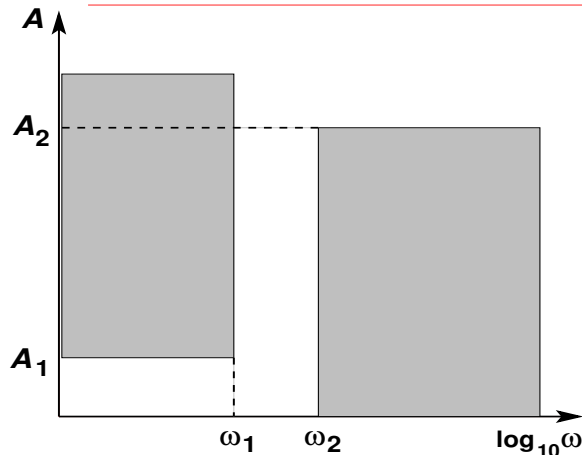


FIGURE 10.8 – Gabarit en atténuation d'un filtre passe-haut

Commençons par normaliser les fréquences. Posons $x = \omega/\omega_1$, $k = \omega_2/\omega_1$. On obtient ainsi le gabarit en atténuation (a) de la figure 10.9.

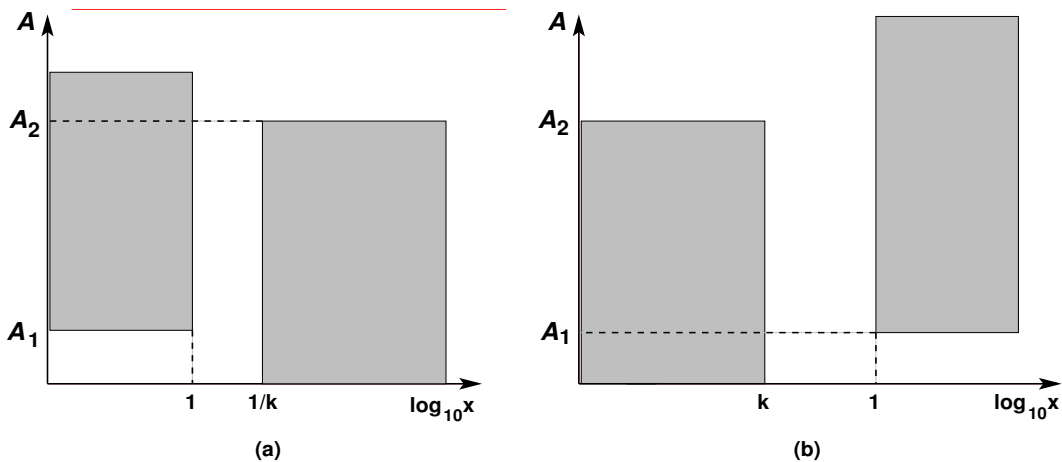


FIGURE 10.9 – (a) : gabarit normalisé du filtre passe-haut ; (b) gabarit du passe-bas transposé

Le gabarit (b) de la même figure est alors celui du filtre passe-bas obtenu par transposition du gabarit (a) du filtre passe-haut à réaliser, transposition qui revient à changer x en $1/x$. Les conditions a priori à imposer au filtre passe-bas seront donc $A(k) = A_2$, $A(1) = A_1$. Envisageons de réaliser les filtres en utilisant les polynômes de Butterworth et prenons pour exemple les conditions $A_2 = 15$ dB, $A_1 = 3$ dB, $\omega_1/(2\pi) = 5$ MHz, $\omega_2/(2\pi) = 10$ MHz ; on a donc $k = 2$.

Selon la formule 10.13, l'atténuation relative au filtre passe-bas s'écrit

$$A(x) = 10 \log_{10} [1 + x^{2n}] \quad (10.72)$$

et l'ordre n est déterminé en écrivant $A_2 = 10 \log_{10} [1 + 2^{2n}] = 15$. On trouve $n = 2,47$ et l'on choisira donc $n = 3$. D'après le tableau II, le polynôme de Butterworth à considérer est donc $B_3(p) = (1 + p)(1 + p + p^2)$. Le filtre passe-bas correspondant a pour fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{(1 + p)(1 + p + p^2)}$$

et la fonction de transfert du filtre passe-haut compatible avec le gabarit proposé s'en déduit par la transposition $p \rightarrow 1/p$, d'où

$$H'(p) = \frac{p^3}{(1 + p)(1 + p + p^2)}, \quad \text{soit, en dénormalisant}$$

$$H'(j\omega) = -j \frac{(\omega/\omega_1)^3}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_1 - (\omega/\omega_1)^2)} \quad (10.73)$$

Cette méthode, faisant appel à un filtre passe-bas intermédiaire, dit *prototype*, peut être aussi utilisée pour constituer un filtre passe-bande ou un filtre coupe-bande. Considérons par exemple le gabarit proposé à la figure 10.10 pour un filtre passe-bande,

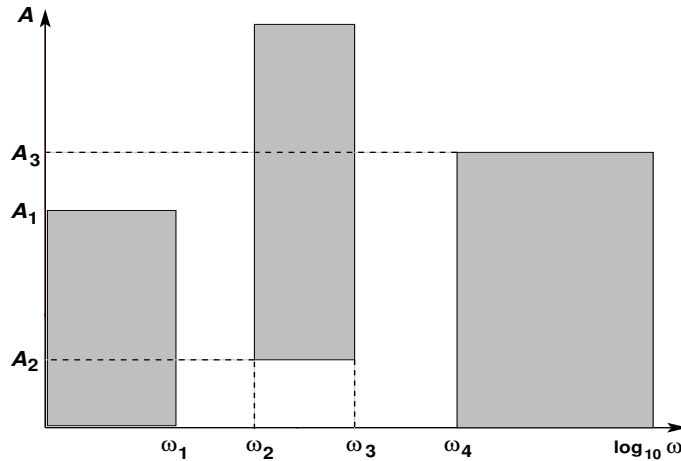


FIGURE 10.10 – Gabarit d'un filtre passe-bande

où A_2 est l'atténuation maximum tolérée dans l'intervalle $[\omega_2, \omega_3]$, la différence $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_2$ étant ici identifiée à la bande passante en pulsation ; A_1 et A_3 sont les atténuations minimales à imposer dans les domaines de pulsations à éliminer. Dans les domaines $[\omega_1, \omega_2]$ et $[\omega_3, \omega_4]$, la courbe de Bode du gain présentera deux asymptotes de fortes pentes. Nous admettrons ici que $A_1 = A_3$ ²⁸. Considérant dans le diagramme de Bode les intervalles correspondant respectivement aux intervalles $[\omega_1, \omega_2]$ et $[\omega_3, \omega_4]$, il est alors facile de se rendre compte que c'est celui de plus faible longueur qui impose la pente d'asymptote la plus grande en valeur absolue, et donc l'ordre du filtre. La définition du gabarit du filtre passe-bas qui doit lui être associé est ici moins aisée. Introduisons tout d'abord la pulsation centrale $\omega_0 = \sqrt{\omega_2\omega_3}$ que nous utiliserons pour définir la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ et la variable de Laplace réduite $p (=jx)$. C'est ensuite la définition du changement de variable dans la transposition passe-bas \leftrightarrow passe-bande qui pose problème. En effet, le tableau XII le donne uniquement pour la transposition entre un filtre passe-bas

²⁸. Le filtre passe-bande étant conçu pour sélectionner des fréquences dans un certain intervalle, il ne semble pas utile de vouloir atténuer moins que d'autres des fréquences en dehors dudit intervalle, d'où le choix opérationnel $A_1 = A_3$.

du premier ordre et un filtre passe-bande du second ordre. Comment le définir pour des filtres d'ordres supérieurs ? Dans celle du tableau XII intervient la grandeur $2m$ qui représente la bande passante en x du filtre passe-bande du second ordre²⁹. Pour des filtres d'ordres supérieurs, il paraît donc naturel de définir ladite transposition par

$$p \longleftrightarrow p' = \frac{1}{\Delta x} \left(p + \frac{1}{p} \right) \quad (10.74)$$

où Δx est la bande passante, suivant la variable normalisée x , attribuée au filtre passe-bande à constituer. Notons qu'ici on a $\Delta x = x_3 - x_2$, avec $x_2 x_3 = 1$, compte tenu de la définition de ω_0 . La variable réduite transformée est donc

$$X = \frac{1}{\Delta x} \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

et l'on a les correspondances : $X(1) = 0$; $X(x_2) = X(x_3) = 1$; les valeurs $X_1 = X(x_1)$ et $X_4 = X(x_4)$ sont supérieures à 1. Si $X_+ = X(x_+)$ avec $x_+ \geq 1$ et $X_- = X(x_-)$ avec $x_- \leq 1$, on note que

$$(X_+ - X_-)(x_+ x_- - 1) \geq 0 \quad \text{et} \quad X_+ \geq X_- \quad \text{si et seulement si} \quad \log_{10} x_+ \geq |\log_{10} x_-|$$

Eu égard à la remarque précédente sur les longueurs d'intervalles, c'est donc la plus faible valeur d'entre X_1 et X_4 , soit $X_m = \min(X_1, X_4)$, qui va déterminer l'ordre du filtre passe-bas prototype, en imposant pour celui-ci $A(X_m) = A_1 = A_3$. On aboutit ainsi au gabarit du passe-bas prototype de la figure 10.11

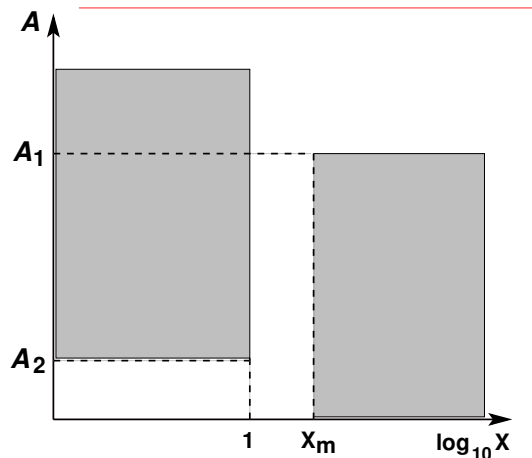


FIGURE 10.11 – Gabarit du filtre passe-bas associé au filtre passe-bande

Considérons l'application suivante. On donne $\omega_1/(2\pi) = 100$ kHz, $\omega_2/(2\pi) = 400$ kHz, $\omega_3/(2\pi) = 1,6$ MHz, $\omega_4 = 3,2$ MHz; $A_2 = 3$ dB, $A_1 = A_3 = 20$ dB. On obtient

$$\omega_0/(2\pi) = 800 \text{ kHz}; \quad x_1 = 0,125; \quad x_2 = 0,5; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 4; \quad \Delta x = 1,5; \quad x_1 x_4 = 0,5 < 1$$

$$X_1 = 5,25; \quad X_2 = X_3 = 1; \quad X_4 = 2,5, \quad \text{donc} \quad X_m = X_4 = 2,5$$

Envisageons encore un filtre de Butterworth. L'ordre n est obtenu par l'équation³⁰

29. Voir §9.3.3.

30. A noter que $1/|\log_{10} 2,5| \simeq 2,5$.

$$A_1 = A_3 = 20 \text{ dB} = 10 \log_{10} (1 + X_4^{2n}), \text{ d'où } n \simeq 2,5, \text{ soit } n = 3$$

C'est ici encore le polynôme $B_3(p) = (1 + p)(1 + p + p^2)$ qui est à l'œuvre. Appliquant la transposition définie plus haut, on trouve pour fonction de transfert du filtre passe-bande souhaité :

$$H(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1,5} \left(p + \frac{1}{p}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{1,5} \left(p + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2,25} \left(p + \frac{1}{p}\right)^2\right)}, \text{ soit}$$
$$H(p) = \frac{27p^3}{(2 + 3p + 2p^2)(4 + 6p + 17p^2 + 6p^3 + 4p^4)} \quad (10.75)$$

qui est une fonction de transfert d'ordre 6.