

Chapitre 3

Spineurs de Dirac en couplages d'hélicité

3.1 Introduction

En Physique des particules, on a souvent à considérer des réactions élémentaires faisant intervenir, à l'état initial ou à l'état final, des particules de spin 1/2, leptons ou quarks. Considérons l'exemple simple de l'effet Compton en Electrodynamique Quantique :

$$e + \gamma \rightarrow e + \gamma \quad (3.1)$$

e représentant l'électron, γ le photon. A part des facteurs ici inessentiels, l'amplitude de transition de ce processus prend la forme

$$T_{\sigma',\lambda';\sigma,\lambda} = \epsilon_{\lambda'}^{*\mu}(k') \bar{U}_{\sigma'}(p') \mathcal{M}_{\mu\nu} U_{\sigma}(p) \epsilon_{\lambda}^{\nu}(k) \quad (3.2)$$

où $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ est un tenseur que l'on écrit suivant les règles bien connues de Feynman et qui se présente, en toute généralité, comme une somme de produits de matrices γ de Dirac, la présence de celles-ci venant d'une part du couplage vectoriel électron-photon en γ_{δ} , et d'autre part de facteurs de propagation de l'électron, du type $m + \gamma(q)$, m étant la masse de l'électron.

Si l'on s'intéresse uniquement à la section efficace totale de cette réaction, on doit tout d'abord calculer le taux d'interaction :

$$\mathcal{T} = \sum_{\lambda'\lambda} \sum_{\sigma,\sigma'} |T_{\sigma'\sigma;\lambda'\lambda}|^2 \quad (3.3)$$

Ceci est usuellement mené à terme sans qu'il soit nécessaire de définir les états de spin des particules entrantes et sortantes, en transformant la somme dans (3.3) de façon à faire apparaître des projecteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^{*\mu}(k') \epsilon_{\lambda'}^{\rho}(k') \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu}(k) \epsilon_{\lambda}^{*\delta}(k) \times \\ & \times \text{Tr} \left\{ \sum_{\sigma'} U_{\sigma'}(p') \bar{U}_{\sigma'}(p') \mathcal{M}_{\mu\nu} \sum_{\sigma} U_{\sigma}(p) \bar{U}_{\sigma}(p) \bar{\mathcal{M}}_{\rho\delta} \right\} \end{aligned}$$

où $\bar{\mathcal{M}}_{\rho\delta} = \gamma_0 \mathcal{M}_{\rho\delta}^{\dagger} \gamma_0$, puis en effectuant les substitutions ¹

1. En tenant compte de l'invariance de jauge : $k'^{\mu} \bar{U}_{\sigma'}(p') \mathcal{M}_{\mu\nu} U_{\sigma}(p) = 0$, $k^{\nu} \bar{U}_{\sigma'}(p') \mathcal{M}_{\mu\nu} U_{\sigma}(p) = 0$.

$$\sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^{*\mu}(k') \epsilon_{\lambda'}^{\rho}(k') \rightarrow -g_{\mu\rho}, \quad \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu}(k) \epsilon_{\lambda}^{*\delta}(k) \rightarrow -g_{\nu\delta}$$

$$\sum_{\sigma'} U_{\sigma'}(p') \bar{U}_{\sigma'}(p') = m + \gamma(p'), \quad \sum_{\sigma} U_{\sigma}(p) \bar{U}_{\sigma}(p) = m + \gamma(p)$$

de sorte que \mathcal{T} prenne la forme d'une trace

$$\mathcal{T} = \text{Tr} [m + \gamma(p')] \mathcal{M}^{\mu\nu} [m + \gamma(p)] \bar{\mathcal{M}}_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

dont le calcul est une affaire de “ γ -gymnastique”². Si le nombre maximum de matrices γ impliquées n'est pas trop élevé, ce calcul se fait aisément à la main. Pour l'effet Compton considéré à l'ordre le plus bas suivant la constante électromagnétique³ $\alpha = 1/137$, il est de trois, ce qui ne pose aucune difficulté. Par contre, pour des processus plus compliqués, ce nombre peut être élevé et dans ce cas on effectue généralement le calcul sur ordinateur, à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique (par exemple, “Mathematica”). Certes, ce moyen permet un gain indéniable en rapidité d'exécution du calcul tout en prévenant les erreurs. Cependant, l'expérience montre que ce gain est généralement contrecarré par la grande longueur et le manque de transparence du résultat ainsi obtenu, qui devient dès lors hermétique à l'interprétation physique. En effet, l'expérience montre aussi que tout calcul analytique comporte des astuces permettant des simplifications et des regroupements de termes, ce que le logiciel de calcul⁴ ignore généralement. C'est d'ailleurs la difficulté d'exploiter le résultat analytique délivré par ledit logiciel et la facilité d'un traitement informatique global, qui pourraient en partie expliquer le fait que dans les revues spécialisées, nombre d'articles traitant de tels processus ne présentent quasiment plus de formules analytiques, mais seulement des résultats numériques finals, sous forme de courbes ou de jolies représentations 3D très en vogue...

Le calcul de chacune des amplitudes telles que (3.2), s'avère nécessaire lorsqu'on recherche des effets liés aux états de spin des particules impliquées dans une réaction. D'une part, on accomplit ainsi une analyse théorique fine de celle-ci, ce qui est déjà en soi très satisfaisant, et d'autre part, par comparaison avec les mesures expérimentales, on peut vérifier plus précisément ces prévisions théoriques et éventuellement, selon la réaction considérée, de déceler plus clairement des déviations par rapport à ces prévisions, qui seraient révélatrices de nouveaux phénomènes, comme par exemple des couplages jusqu'alors inconnus entre particules. Outre qu'il soit incontournable pour ce type d'étude, un calcul pas à pas du processus, amplitude par amplitude, apparaît plus méthodique techniquement parlant, tout en se prêtant mieux à l'interprétation physique⁵, ces deux aspects se complétant dans une telle décomposition du calcul, ce qui permet aussi d'éviter des erreurs⁶.

On a souvent considéré les effets de spin comme n'apportant que des complications de calcul. Sans doute ce jugement provient-il, au moins en partie, du fait que l'on peut se trouver perplexe devant les nombreux choix possibles pour définir les états de spin des particules, ne sachant lequel pourrait être le plus judicieux. Or, comme nous l'avons esquissé au chapitre 1, et comme nous l'illustrerons dans la suite, l'utilisation des couplages d'hélicité se révèle un procédé efficace et clarificateur pour le calcul d'amplitudes envisagé. C'est pourquoi l'objet de ce chapitre est de définir les couplages d'hélicité impliquant des spineurs de Dirac et d'établir des formules utiles s'y rapportant.

Considérons un processus $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ (deux particules 1 et 2 entrant en collision donnant deux particules 3 et 4 à l'état final), schématisé à la figure (3.1). Les impulsions et les masses

2. ITL, section 7.3.

3. Ou constante de structure fine.

4. Ou plutôt, son concepteur !

5. Certaines amplitudes peuvent se révéler plus importantes que d'autres dans le processus étudié.

6. Ajoutons que même dans cette démarche, il est toujours possible de s'aider astucieusement d'un ordinateur !

respectives des particules 1, 2, 3 et 4 seront notées (p_1, m_1) , (p_2, m_2) , (p_3, m_3) et (p_4, m_4) . Dans un premier temps, les masses sont supposées non nulles et toutes différentes.

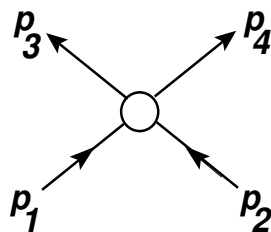


FIGURE 3.1 – Schéma d'une réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

Le couplage le plus couramment utilisé est celui de la voie s , entre 1 et 2 d'une part, et 3 et 4 d'autre part. C'est sûrement le plus judicieux pour des processus tels que celui représenté par le diagramme de la figure (3.2), dans lequel une particule (virtuelle) est échangée dans la voie s , ou lorsqu'une résonance est formée dans cette voie.

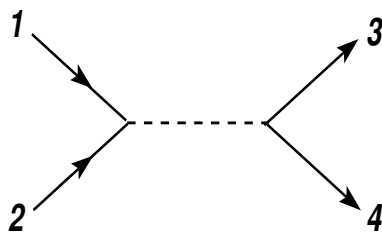


FIGURE 3.2 – Réaction avec échange de particule dans la voie s

Par contre, pour des processus répondant au schéma de la figure (3.3) (a), où une particule (virtuelle) est échangée dans la voie t , le couplage dans la voie t s'impose, entre 1 et 3 d'une part, et 2 et 4 d'autre part.

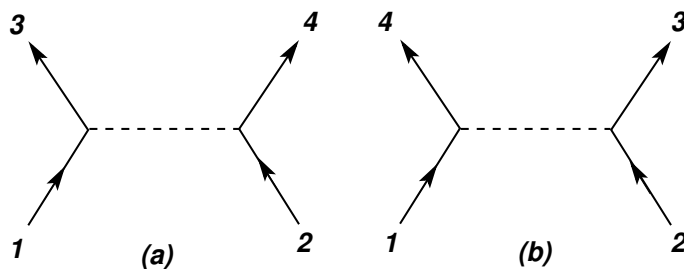


FIGURE 3.3 – (a) : Réaction avec échange de particule dans la voie t ;
(b) : diagramme d'échange $3 \leftrightarrow 4$.

Cependant, l'affaire se complique si les particules impliquées sont toutes de la même espèce, car en plus du diagramme (a), on doit considérer le diagramme (b) déduit du premier par l'échange entre les particules 3 et 4. Comme les états de spin de chaque particule doivent être définis une fois pour toutes pour le processus global, le couplage dans la voie t utilisé pour le diagramme (a) n'est plus adapté au diagramme (b). Dans ce cas, il vaut mieux utiliser le couplage dans la voie s .

Pour des raisons pratiques évidentes, les réactions (collisions) réalisées en laboratoire avec des accélérateurs se font entre deux particules entrantes uniquement. Si ces particules sont composites (hadrons constitués de quarks), les phénomènes sont généralement interprétés en termes de collisions entre deux des constituants élémentaires de ces particules (quark ou gluon). Par contre, l'état final peut contenir plus de deux particules. Il est alors préférable d'introduire un autre type de couplage d'hélicité dans cet état final⁷.

Faisons aussi la remarque suivante. Envisageons l'amplitude de transition d'un processus relevant du modèle standard électro-faible ou de la chromodynamique quantique, et impliquant des leptons ou des quarks externes. Il est connu qu'en effectuant des anti-commutations appropriées de matrices γ et en utilisant les équations de Dirac relatives aux spineurs externes, on peut faire disparaître tous les facteurs de masse des numérateurs des propagateurs internes de spineurs. On obtient alors une amplitude de transition où les matrices 4×4 "sandwichées" sont des produits de matrices γ où celles-ci interviennent en nombre impair. Fondamentalement, ceci est une conséquence de la nature du couplage γ_μ ou $\gamma_\mu \gamma_5$ entre les leptons ou les quarks, et les particules vectorielles (γ, W, Z , gluon). A titre d'illustration, considérons l'effet Compton (3.1), au plus bas ordre en α . Notons p_1 et p_2 les impulsions respectives de l'électron et du photon initiaux, p_3 et p_4 les impulsions respectives de l'électron et du photon finals. L'amplitude de transition s'écrit

$$T_{\sigma_2, \lambda_2; \sigma_1 \lambda_1} = 4\pi\alpha \epsilon_{\lambda_4}^{\mu*}(p_4) \bar{U}_{\sigma_3}(p_3) \mathcal{M}_{\mu\nu} U_{\sigma_1}(p_1) \epsilon_{\lambda_2}^\nu(p_2) \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \gamma_\mu \frac{m + \gamma(p_1 + p_2)}{m^2 - (p_1 + p_2)^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{m + \gamma(p_1 - p_4)}{m^2 - (p_1 - p_4)^2} \gamma_\mu$$

où $\epsilon_{\lambda_2}(p_2)$ et $\epsilon_{\lambda_4}(p_4)$ sont les vecteurs de polarisation respectifs du photon initial et du photon final. Comme

$$[m + \gamma(p_1)] \gamma_\delta U_{\sigma_1}(p_1) = \{\gamma_\delta [m - \gamma(p_1)] + 2p_{1\delta}\} U_{\sigma_1}(p_1) \equiv 2p_{1\delta} U_{\sigma_1}(p_1)$$

on voit que $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ peut être remplacé par

$$\mathcal{M}'_{\mu\nu} = \frac{\gamma_\mu \gamma(p_2) \gamma_\nu + 2p_{1\nu} \gamma_\mu}{m^2 - (p_1 + p_2)^2} + \frac{2p_{1\mu} \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma(p_4) \gamma_\mu}{m^2 - (p_1 - p_4)^2}$$

qui s'écrit bien sous la forme attendue. Projetée sur la base des 16 matrices de Dirac⁸, une telle expression n'a de composantes que sur les matrices γ_δ et $\gamma_\delta \gamma_5$:

$$\mathcal{M}'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu\delta} \gamma^\delta + B_{\mu\nu\delta} \gamma^\delta \gamma_5 \quad (3.5)$$

Par conséquent, pour ces processus, il suffirait de savoir calculer uniquement des expressions telles que $\bar{U}_{\sigma_3}(p_3) \gamma_\delta U_{\sigma_1}(p_1)$ et $\bar{U}_{\sigma_3}(p_3) \gamma_\delta \gamma_5 U_{\sigma_1}(p_1)$. Cependant, pour des processus plus compliqués que l'effet Compton, la décomposition (3.5) peut s'avérer difficile à établir et prendre finalement plus de temps et de place qu'un calcul direct gardant $\mathcal{M}'_{\mu\nu}$ en l'état⁹. Par ailleurs, il est intéressant de connaître les expressions $\bar{U}_{\sigma_3}(p_3) \Gamma U_{\sigma_1}(p_1)$ où Γ est l'une des 16 matrices de Dirac, dans la perspective de modèles théoriques "au-delà du modèle standard", utilisant des couplages d'interaction différents des couplages vectoriels. Pour ces raisons, nous établirons aussi des formules pour tous les éléments de matrice $\bar{\Psi}_{\sigma_3}(p_3) \Gamma \Phi_{\sigma_1}(p_1)$, avec Ψ, Φ pris comme des spineurs de type U ou de type $V (= \gamma_5 U)$.

Les formules de base utilisées sont les suivantes. Au paragraphe 2.2.4, nous avons montré que dans la transformation de Lorentz pure effectuant le passage de la base (T, X, Y, Z) à la base

7. Voir Chapitre 1, §1.3.4, et C. Carimalo, "Jet-like QED Processes : On General Properties of Impact Factors" hep-ph arXiv :1401.4407.

8. Voir ITL, section 7.2.

9. En considérant aussi qu'il existe toujours des astuces de calcul.

($t, x = X, y = Y, z$), le spineur $U_\sigma([T])$ attaché à la première base devient un spineur $U_\sigma([t])$ attaché à la seconde définie par ¹⁰ $[t] = [T \rightarrow t][T]$, et l'on a

$$U_\sigma([t]) = S_{T \rightarrow t} U_\sigma([T]) \quad \text{avec} \quad S_{T \rightarrow t} = \frac{1 + \gamma(t)\gamma(T)}{\sqrt{2(1 + t \cdot T)}} \quad (3.6)$$

Les relations

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot T &= 1 + \cosh \chi = 2 \cosh^2 \frac{\chi}{2} \\ [1 + \gamma(t)\gamma(T)] U_\sigma([T]) &= [1 + \gamma(t)] U_\sigma([T]) \quad \text{car} \quad \gamma(T) U_\sigma([T]) = U_\sigma([T]) \quad \text{et} \\ [1 + \gamma(t)] U_\sigma([T]) &= [1 + \cosh \chi \gamma(T) + \sinh \chi \gamma(Z)] U_\sigma([T]) \\ &= 2 \cosh \frac{\chi}{2} \left[\cosh \frac{\chi}{2} + \sinh \frac{\chi}{2} \gamma(Z) \right] U_\sigma([T]) \end{aligned}$$

permettent de réécrire (3.6) comme

$$U_\sigma([t]) = \left[\cosh \frac{\chi}{2} + \sinh \frac{\chi}{2} \gamma(Z) \right] U_\sigma([T]) \quad (3.7)$$

ou encore, en utilisant (2.72),

$$U_\sigma([t]) = \cosh \frac{\chi}{2} U_\sigma([T]) + 2\sigma \sinh \frac{\chi}{2} V_\sigma([T]) \quad (3.8)$$

De la même manière, dans la transformation de Lorentz pure (T, X, Y, Z) \rightarrow ($t', x' = X, y' = Y, z'$), on a

$$U_\sigma([t']) = S_{T \rightarrow t'} U_\sigma([T]) \quad \text{avec} \quad S_{T \rightarrow t'} = \frac{1 + \gamma(t')\gamma(T)}{\sqrt{2(1 + t' \cdot T)}} \quad \text{et} \quad [t'] = [T \rightarrow t'][T] \quad (3.9)$$

La tétrade $[T]$ peut servir de référence pour définir les spineurs attachés aux vecteurs t et t' , au moyen des formules (3.6) et (3.9) ou (3.8). Cependant, on doit prendre garde au fait que les spineurs qui y figurent doivent avoir la même normalisation, par exemple $\bar{U}U = 2$. La particularité des deux transformations précédentes est qu'elles agissent dans le même 2-plan (T, Z). Elles peuvent être envisagées comme des rotations d'angles complexes autour de l'axe Y , conservant l'axe X . Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} t &= \cosh \chi T + \sinh \chi Z, & z &= \sinh \chi T + \cosh \chi Z, \\ t' &= \cosh \chi' T - \sinh \chi' Z, & z' &= -\sinh \chi' T + \cosh \chi' Z \end{aligned}$$

La transformation (t, X, Y, z) \rightarrow (t', X, Y, z') est aussi une transformation de Lorentz pure agissant dans le 2-plan (T, Z), et l'on a ¹¹

$$t' = \cosh 2\zeta^{(+)} t - \sinh 2\zeta^{(+)} z, \quad z' = -\sinh 2\zeta^{(+)} t + \cosh 2\zeta^{(+)} z, \quad \text{avec} \quad \zeta^{(+)} = \frac{\chi + \chi'}{2}$$

10. Rappelons que $[T \rightarrow t]$ est la matrice (au signe près) de $SL(2, C)$ qui représente ladite transformation de Lorentz pure.

11. Il est facile de vérifier que $S_{T \rightarrow t'} S_{T \rightarrow t}^{-1} = \frac{1 + \gamma(t)\gamma(T)}{\sqrt{2(1 + t' \cdot T)}} \frac{1 + \gamma(T)\gamma(t)}{\sqrt{2(1 + t \cdot T)}} = \frac{1 + \gamma(t')\gamma(t)}{\sqrt{2(1 + t \cdot t')}}.$

$$U_\sigma([t']) = S_{t \rightarrow t'} U_\sigma([t]) \quad \text{avec} \quad S_{t \rightarrow t'} = \frac{1 + \gamma(t') \gamma(t)}{\sqrt{2(1 + t \cdot t')}} \quad \text{et} \quad [t'] = [t \rightarrow t'] [t] \quad (3.10)$$

$$U_\sigma([t']) = \cosh \zeta^{(+)} U_\sigma([t]) - 2\sigma \sinh \zeta^{(+)} V_\sigma([t])$$

Introduisons les 4-vecteurs

$$\mathcal{T} = \cosh \zeta^{(-)} T + \sinh \zeta^{(-)} Z, \quad \mathcal{Z} = \cosh \zeta^{(-)} Z + \sinh \zeta^{(-)} T, \quad \text{où} \quad \zeta^{(-)} = \frac{\chi - \chi'}{2}, \quad (3.11)$$

le premier du genre temps pointant vers le futur, le second du genre espace, orthogonal au premier. On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \cosh \zeta^{(+)} t - \sinh \zeta^{(+)} z = \cosh \zeta^{(+)} t' + \sinh \zeta^{(+)} z' \\ \mathcal{Z} &= \cosh \zeta^{(+)} z - \sinh \zeta^{(+)} t = \cosh \zeta^{(+)} z' + \sinh \zeta^{(+)} t' \\ \text{où} \quad \zeta^{(+)} &= \frac{\chi + \chi'}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'ensemble $(\mathcal{T}, X, Y, \mathcal{Z})$ forme également une base orthonormée d'orientation directe et l'on a

$$\gamma(\mathcal{T}) \gamma(\mathcal{Z}) = \gamma(T) \gamma(Z) = \gamma(t) \gamma(z) = \gamma(t') \gamma(z') = 2S_Z \gamma_5 \quad (3.13)$$

On peut alors récrire la relation entre spineurs dans (3.10) comme

$$\begin{aligned} U_\sigma([t']) &= \left[\cosh \zeta^{(+)} - \sinh \zeta^{(+)} \gamma(z) \gamma(t) \right] U_\sigma([t]) \\ &= \left[\cosh \zeta^{(+)} \gamma(t) - \sinh \zeta^{(+)} \gamma(z) \right] \gamma(t) U_\sigma([t]) \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$U_\sigma([t']) = \gamma(\mathcal{T}) \gamma(t) U_\sigma([t]) \equiv \gamma(\mathcal{T}) U_\sigma([t]) \quad (3.14)$$

Une telle relation (3.14) sera systématiquement utilisée pour relier les spineurs de Dirac de deux particules en couplage d'hélicité. Dans celle-ci, les spineurs peuvent avoir tous deux la normalisation usuelle $\bar{U}U = 2m$. Supposons que T , t et t' soient tels que

$$T = \kappa (t + t') \quad (3.15)$$

où κ est un réel positif. On a dans ce cas $t \cdot T = t' \cdot T = \kappa (1 + t \cdot t')$, d'où $\chi = \chi'^{12}$, puis $\mathcal{T} \equiv T$, $\mathcal{Z} \equiv Z$, ce qui simplifie encore (3.10). La relation (3.15) est réalisée lorsqu'on considère deux particules de même masse m , dont on définit les états de spin par un couplage d'hélicité, dans la voie s ou dans la voie t (voir chapitre 1). En effet, dans le premier cas, la tétrade de référence est celle attachée à l'impulsion totale $P = p_1 + p_2$ où p_1 et p_2 sont les impulsions respectives des deux particules : notant $P^2 = s$, $T = P/\sqrt{s}$, $t_1 = p_1/m$, $t_2 = p_2/m$, on a $T = \frac{m}{\sqrt{s}}(t_1 + t_2)$. Dans le second cas, la tétrade de référence a pour vecteur unitaire du genre temps (voir Eqs. 1.57, 1.58)

$$T = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{t + 4m^2}} = \frac{m}{\sqrt{t + 4m^2}}(t_1 + t_2) \quad (3.16)$$

12. $\sqrt{2(1 + t \cdot t')} = \kappa^{-1}$ car $T^2 = 1$.

où ici $t = -(p_1 - p_2)^2 > 0$.

Faisons une dernière remarque sur l'interprétation des hélicités des particules. Supposant qu'elles soient de spin $1/2$, l'opérateur d'hélicité de la première est

$$S_{z_1}(t_1) = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(z_1) \gamma(t_1)$$

Appliquant (3.13), on a

$$S_{z_1}(t_1) = S_Z(T) \quad (3.17)$$

Cette égalité est également valable pour la seconde particule dans le cas d'un couplage dans la voie t . À noter aussi qu'elle n'est vraie que pour les composantes de spin suivant les axes "z" respectifs des particules. Dans le cas du couplage dans la voie s , on sait qu'une rotation d'angle π autour de Y doit être introduite pour définir la tétrade de la seconde particule. Son opérateur d'hélicité est alors l'opposé de (3.17).

Dans le référentiel propre de T , la 3-impulsion de la particule 1 est selon le troisième axe, et (3.17) devient

$$S_{z_1}(t_1) \equiv \frac{1}{2} \tau_3 \quad (3.18)$$

autrement dit, dans ce référentiel, l'hélicité de ladite particule représente la composante de son spin suivant sa 3-impulsion¹³. S'il s'agit d'un couplage dans la voie s , le référentiel propre de T est celui du centre de masse des deux particules. Dans celui-ci, la 3-impulsion de la seconde particule est aussi selon l'axe 3, mais en sens opposé. Du fait du renversement de signe mentionné plus haut, son hélicité y représente aussi la composante de son spin suivant sa 3-impulsion. Par contre, s'il s'agit d'un couplage dans la voie t , le référentiel propre de T est le référentiel de Breit dans lequel la 3-impulsion de la seconde particule est dans le sens opposé de l'axe 3. L'hélicité de cette particule y représente alors l'opposée de la composante de son spin suivant sa 3-impulsion.

Dans la suite, sauf indication contraire, les spineurs de Dirac ont tous la même normalisation :

$$\bar{U}U = -\bar{V}V = 2 \quad (3.19)$$

3.2 Le couplage d'hélicité dans la voie s

3.2.1 Définition des tétrades

Considérons le processus de la figure (3.1) où nous supposons dans un premier temps que les quatre particules sont toutes de spin $1/2$. Nous utiliserons les notations suivantes.

$$P = p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad s = P^2 \left(\geq \text{Max} \{ (m_1 + m_2)^2, (m_3 + m_4)^2 \} \right)$$

$$t_i = \frac{p_i}{m_i}, \quad T = \frac{P}{\sqrt{s}}, \quad \cosh \chi_i = t_i \cdot T$$

$$t = -(p_1 - p_3)^2 = -(p_2 - p_4)^2, \quad u = -(p_1 - p_4)^2 = -(p_2 - p_3)^2$$

13. L'hélicité d'une particule est couramment définie comme la composante de son spin suivant sa 3-impulsion, quel que soit le référentiel considéré. Mais comme nous l'avons vu, sauf pour une particule sans masse, il ne s'agit pas d'une grandeur invariante relativiste.

Dans le référentiel du centre de masse (où $\vec{P} = \vec{0}$), les énergies et modules de 3-impulsion de chaque particule sont

$$E_1 = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} = m_1 \cosh \chi_1, \quad E_2 = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} = m_2 \cosh \chi_2$$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = m_1 \sinh \chi_1 = m_2 \sinh \chi_2 = \frac{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}} \quad \text{avec} \quad \Lambda_{12} = \Lambda(s, m_1^2, m_2^2)$$

$$|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = m_3 \sinh \chi_3 = m_4 \sinh \chi_4 = \frac{\Lambda_{34}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}} \quad \text{avec} \quad \Lambda_{34} = \Lambda(s, m_3^2, m_4^2)$$

De par la conservation de la 4-impulsion totale, trois seulement des impulsions sont indépendantes. Pour constituer une base d'espace-temps, on peut par exemple utiliser les trois impulsions P , p_1 et p_3 . Le dernier vecteur devant compléter la base sera choisi perpendiculaire à l'hyperplan de ces trois vecteurs. C'est donc un vecteur du genre espace que l'on prendra comme axe Y , commun à toutes les tétrades. On montre que le vecteur unitaire correspondant s'écrit

$$Y_\mu = A \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} P^\nu p_1^\rho p_3^\delta \quad \text{avec} \quad A = \frac{4\sqrt{s}}{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{34}^{\frac{1}{2}} \sin \theta} \quad (3.20)$$

où, dans le référentiel du centre de masse, θ est l'angle entre \vec{p}_3 et \vec{p}_1 (angle de diffusion).

En suivant ce qui a été dit au chapitre 1, les tétrades associées à chacune des particules dans ce couplage d'hélicité sont les suivantes.

① Pour la particule 1

$$t_1 = \cosh \chi_1 T + \sinh \chi_1 Z, \quad z_1 = \sinh \chi_1 T + \cosh \chi_1 Z$$

$$x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad \epsilon_1^{(\pm)} = E^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X \pm iY]$$

Ce choix correspond bien à un couplage d'hélicité entre la tétrade (T, X, Y, Z) associée à T et celle, (t_1, x_1, y_1, z_1) , associée à t_1 car

$$Z \equiv \frac{2\sqrt{s}}{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}} \left(p_1 - \frac{(p_1 \cdot P)}{s} P \right) \quad \text{et} \quad z_1 \equiv \frac{2m_1}{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}} \left(-P + \frac{(p_1 \cdot P)}{m_1^2} p_1 \right)$$

On passe de la tétrade $\{[T] : (T, X, Y, Z)\}$ à la tétrade $\{[t_1]_s : (t_1, x_1, y_1, z_1)\}$ par une transformation de Lorentz pure agissant dans le 2-plan (T, Z) ($[t_1]_s = [T \rightarrow t_1][T]$). Avec ce choix, la 3-impulsion de la particule 1 dans le référentiel (T, X, Y, Z) est selon l'axe des z .

② Pour la particule 2

$$t_2 = \cosh \chi_2 T - \sinh \chi_2 Z, \quad z_2 = \sinh \chi_2 T - \cosh \chi_2 Z$$

$$x_2 = -X, \quad y_2 = Y, \quad \epsilon_2^{(\pm)} = E^{(\mp)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [X \mp iY]$$

On a ici

$$Z \equiv \frac{2\sqrt{s}}{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}} \left(-p_2 + \frac{(p_2 \cdot P)}{s} P \right) \quad \text{et} \quad z_2 \equiv \frac{2m_2}{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}} \left(-P + \frac{(p_2 \cdot P)}{m_2^2} p_2 \right)$$

On passe de la tétrade $[T]$ à la tétrade $\{[t_2]_s : (t_2, x_2, y_2, z_2)\}$ en effectuant d'abord une rotation de π autour de Y dans le référentiel lié à T ($R_Y(\pi)$), puis une transformation de Lorentz pure

agissant dans le 2-plan (T, Z) ($[t_2]_s = [T \rightarrow t_2] R_Y(\pi) [T]$). Dans le référentiel (T, X, Y, Z) la 3-impulsion de la particule 2 est en sens opposé à celui de l'axe des z .

③ Pour les particules 3 et 4

On effectue tout d'abord une rotation d'angle θ autour de Y , $R_Y(\theta)$, transformant X et Z en

$$X' = \cos \theta X - \sin \theta Z, \quad Z' = \cos \theta Z + \sin \theta X$$

Une nouvelle tétrade ($[T]' = R_Y(\theta) [T]$) est ainsi associée à T et la tétrade associée à la particule 3 est alors

$$t_3 = \cosh \chi_3 T + \sinh \chi_3 Z', \quad z_3 = \sinh \chi_3 T + \cosh \chi_3 Z'$$

$$x_3 = X', \quad y_3 = Y, \quad \epsilon_3^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X' \pm iY]$$

$$\text{soit } \epsilon_3^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta Z + \frac{1}{2} [1 + \cos \theta] E^{(\pm)} + \frac{1}{2} [1 - \cos \theta] E^{(\mp)}$$

On a donc $[t_3]_s = [T \rightarrow t_3]' [T]'$, où $[T \rightarrow t_3]'$ est une transformation de Lorentz pure agissant dans le 2-plan (T, Z') . Enfin, la tétrade associée à la particule 4 est $[t_4]_s = [T \rightarrow t_4]' R_Y(\pi) [T]'$, soit

$$t_4 = \cosh \chi_4 T - \sinh \chi_4 Z', \quad z_4 = \sinh \chi_4 T - \cosh \chi_4 Z'$$

$$x_4 = -X', \quad y_4 = Y, \quad \epsilon_4^{(\pm)} = \epsilon_3^{(\mp)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [X' \mp iY]$$

Notons U_σ et $V_\sigma = \gamma_5 U_\sigma$ les spineurs de Dirac associés à la tétrade de référence $[T]$. Dans l'espace des spineurs, les rotations $R_Y(\pi)$ et $R_Y(\theta)$ sont représentées par les matrices

$$R_Y(\pi) = \gamma(Z) \gamma(X) = -2i S_Y, \quad R_Y(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \gamma(Z) \gamma(X)$$

et les transformations de Lorentz pures précédentes par

$$[T \rightarrow t_1] \rightarrow S_{T \rightarrow t_1} = \cosh \frac{\chi_1}{2} + \sinh \frac{\chi_1}{2} \gamma(Z) \gamma(T) \quad (\gamma(Z) \gamma(T) = 2\gamma_5 S_Z)$$

$$[T \rightarrow t_2] \rightarrow S_{T \rightarrow t_2} = \cosh \frac{\chi_2}{2} - \sinh \frac{\chi_2}{2} \gamma(Z) \gamma(T)$$

$$[T \rightarrow t_3]' \rightarrow S'_{T \rightarrow t_3} = \cosh \frac{\chi_3}{2} + \sinh \frac{\chi_3}{2} \gamma(Z') \gamma(T) \quad (\gamma(Z') \gamma(T) = 2\gamma_5 S_{Z'})$$

$$[T \rightarrow t_4]' \rightarrow S'_{T \rightarrow t_4} = \cosh \frac{\chi_4}{2} - \sinh \frac{\chi_4}{2} \gamma(Z') \gamma(T)$$

Compte tenu de la relation $S_Y U_\sigma = i\sigma U_{-\sigma}$, les spineurs associés à la tétrade $[T]'$ sont donnés par

$$U'_\sigma = R_Y(\theta) U_\sigma = \cos \frac{\theta}{2} U_\sigma + 2\sigma \sin \frac{\theta}{2} U_{-\sigma}, \quad V'_\sigma = \cos \frac{\theta}{2} V_\sigma + 2\sigma \sin \frac{\theta}{2} V_{-\sigma} \quad (3.21)$$

Appliquant sur U_σ les transformations appropriées, on obtient facilement les spineurs de Dirac associés dans ce couplage aux particules 1, 2, 3 et 4, respectivement. Ainsi :

① Particule 1

$$U_{1\sigma} = S_{T \rightarrow t_1} U_\sigma = \cosh \frac{\chi_1}{2} U_\sigma + 2\sigma \sinh \frac{\chi_1}{2} V_\sigma \quad (3.22)$$

② **Particule 2**

$$U_{2\sigma} = S_{T \rightarrow t_2} R_Y(\pi) U_\sigma = 2\sigma \left[\cosh \frac{\chi_2}{2} U_{-\sigma} + 2\sigma \sinh \frac{\chi_2}{2} V_{-\sigma} \right] \quad (3.23)$$

 ③ **Particule 3**

$$U_{3\sigma} = S'_{T \rightarrow t_3} R_Y(\theta) U_\sigma = \cosh \frac{\chi_3}{2} U'_\sigma + 2\sigma \sinh \frac{\chi_3}{2} V'_\sigma \quad (3.24)$$

 ④ **Particule 4**

$$U_{4\sigma} = S'_{T \rightarrow t_4} R_Y(\theta) R_Y(\pi) U_\sigma = 2\sigma \left[\cosh \frac{\chi_4}{2} U'_{-\sigma} + 2\sigma \sinh \frac{\chi_4}{2} V'_{-\sigma} \right] \quad (3.25)$$

Voyons comment ces spineurs peuvent être reliés les uns aux autres. Posons

$$\chi_{12}^{(+)} = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad \chi_{12}^{(-)} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}, \quad \chi_{34}^{(+)} = \frac{\chi_3 + \chi_4}{2}, \quad \chi_{34}^{(-)} = \frac{\chi_3 - \chi_4}{2} \quad (3.26)$$

Combinant (3.22) et (3.23), on obtient

$$U_{2\sigma} = 2\sigma \left[\cosh \chi_{12}^{(+)} U_{1-\sigma} + 2\sigma \sinh \chi_{12}^{(+)} V_{1-\sigma} \right] \quad (3.27)$$

De même, à l'état final, on a

$$U_{4\sigma} = 2\sigma \left[\cosh \chi_{34}^{(+)} U_{3-\sigma} + 2\sigma \sinh \chi_{34}^{(+)} V_{3-\sigma} \right] \quad (3.28)$$

Enfin, en posant $\chi_{31}^{(-)} = \frac{\chi_3 - \chi_1}{2}$ et $\chi_{42}^{(-)} = \frac{\chi_4 - \chi_2}{2}$, on trouve

$$\begin{aligned} U_{3\sigma} &= R_Y(\theta) \left[\cosh \chi_{31}^{(-)} U_{1\sigma} + 2\sigma \sinh \chi_{31}^{(-)} V_{1\sigma} \right] \\ U_{4\sigma} &= R_Y(\theta) \left[\cosh \chi_{42}^{(-)} U_{2\sigma} + 2\sigma \sinh \chi_{42}^{(-)} V_{2\sigma} \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

La relation (3.27) peut être réécrite sous forme condensée en observant que $\gamma(t_1) U_1 = U_1$ et que $-2\sigma V_{1-\sigma} = \gamma(z_1) U_{1-\sigma}$. On obtient en effet

$$\begin{aligned} U_{2\sigma} &= 2\sigma \gamma(\mathcal{T}_{12}) U_{1-\sigma} \quad \text{avec} \\ \mathcal{T}_{12} &= t_1 \cosh \chi_{12}^{(+)} - z_1 \sinh \chi_{12}^{(+)} = T \cosh \chi_{12}^{(-)} + Z \sinh \chi_{12}^{(-)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pour l'état final, on obtient de façon similaire

$$\begin{aligned} U_{4\sigma} &= 2\sigma \gamma(\mathcal{T}_{34}) U_{3-\sigma} \quad \text{avec} \\ \mathcal{T}_{34} &= t_3 \cosh \chi_{34}^{(+)} - z_3 \sinh \chi_{34}^{(+)} = T \cosh \chi_{34}^{(-)} + Z' \sinh \chi_{34}^{(-)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

A l'aide des deux vecteurs \mathcal{T}_{12} et \mathcal{T}_{34} on obtient donc des formules du type (3.14). Ce sont des vecteurs du genre temps et unitaires, et les tétrades

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12}, \quad \mathcal{Z}_{12} &= Z \cosh \chi_{12}^{(-)} + T \sinh \chi_{12}^{(-)}, \quad X, \quad Y \\ \mathcal{T}_{34}, \quad \mathcal{Z}_{34} &= Z' \cosh \chi_{34}^{(-)} + T \sinh \chi_{34}^{(-)}, \quad X', \quad Y \end{aligned} \quad (3.32)$$

qui leur sont respectivement associées se déduisent, la première de la tétrade (T, X, Y, Z) par la transformation de Lorentz pure de paramètre $\chi_{12}^{(-)}$ dans le 2-plan (T, Z) ; la seconde, de la tétrade (T, X', Y, Z') par la transformation de Lorentz pure de paramètre $\chi_{34}^{(-)}$ dans le 2-plan (T, Z') .

On voit alors que la tétrade (t_1, X, Y, z_1) se déduit de la tétrade $(\mathcal{T}_{12}, X, Y, \mathcal{Z}_{12})$ par la transformation de Lorentz pure L_{12} de paramètre $\chi_{12}^{(+)}$ dans le 2-plan (T, Z) , tandis que la tétrade $(t_2, -X, Y, z_2)$ est obtenue à partir de cette tétrade en effectuant d'abord une rotation de π autour de Y et en appliquant ensuite L_{12} . On a ainsi

$$\begin{aligned} t_1 &= \cosh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{T}_{12} + \sinh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{Z}_{12}, & t_2 &= \cosh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{T}_{12} - \sinh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{Z}_{12}, & \text{donc} \\ t_1 + t_2 &= 2 \cosh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{T}_{12}, & t_1 - t_2 &= 2 \sinh \chi_{12}^{(+)} \mathcal{Z}_{12} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Notons que lorsque $m_1 = m_2$, soit $\chi_{12}^{(-)} = 0$, (3.30) devient similaire à (3.14) :

$$U_{2\sigma} = 2\sigma \gamma(T) U_{1-\sigma} \quad (3.34)$$

et que pour $\chi_{31}^{(-)} = 0$, soit, pour le cas qui nous intéressera, $m_1 = m_3$ et $m_2 = m_4$, la relation entre U_3 et U_1 se réduit à

$$U_{3\sigma} = R_Y(\theta) U_{1\sigma} \quad (3.35)$$

3.2.2 Projecteurs $U_1 \bar{U}_2$ du couplage en voie s

Rappelons tout d'abord certaines formules

$$\begin{aligned} U_\sigma \bar{U}_{\sigma'} &= \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [1 + (2\sigma)\gamma_5 \gamma(z)] [1 + \gamma(t)] \\ &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{1}{2} \gamma_5 (x + i(2\sigma)y) [1 + \gamma(t)] \\ \bar{U}_{\sigma'} U_\sigma &= 2\delta_{\sigma',\sigma}, & \bar{U}_{\sigma'} \gamma_5 U_\sigma &= 0, & \bar{U}_{\sigma'} \gamma_\mu U_\sigma &= 2\delta_{\sigma',\sigma} t_\mu, \\ \bar{U}_{\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_\sigma &= 2(2\sigma)\delta_{\sigma',\sigma} z_\mu + 2\delta_{\sigma',-\sigma} [x + i(2\sigma)y]_\mu \\ \bar{U}_{\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_\sigma &= (2\sigma)\delta_{\sigma',\sigma} [x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu] \\ &\quad + i(2\sigma)\delta_{\sigma',-\sigma} \left\{ z_\mu [x + i(2\sigma)y]_\nu - z_\nu [x + i(2\sigma)y]_\mu \right\} \\ \bar{U}_{\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_\sigma &= i(2\sigma)\delta_{\sigma',\sigma} [t_\mu z_\nu - t_\nu z_\mu] \\ &\quad + i\delta_{\sigma',-\sigma} \left\{ t_\mu [x + i(2\sigma)y]_\nu - t_\nu [x + i(2\sigma)y]_\mu \right\} \\ \gamma_5 \gamma(x + i\epsilon y) &= \epsilon \gamma(x + i\epsilon y) \gamma(z) \gamma(t) \quad (\epsilon = \pm 1) \\ \gamma(z_1) \gamma(t_1) &= \gamma(Z) \gamma(T) = \gamma(\mathcal{Z}_{12}) \gamma(\mathcal{T}_{12}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

et rappelons aussi¹⁴ que $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$.

14. ITL, Chap. 7, Eq. 7.80.

① **Projecteur** $U_1^\uparrow \overline{U_2^\uparrow}$

D'après (3.30), on a

$$\begin{aligned} U_1^\uparrow \overline{U_2^\uparrow} &= U_1^\uparrow \overline{U_1^\downarrow} \gamma(\mathcal{T}_{12}) = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(X + iY) [1 + \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{T}_{12}) = \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma_5 \gamma(X + iY) \gamma(\mathcal{T}_{12}) \\ &= -\frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{Z}_{12}) \gamma(X + iY) = \frac{1}{2} \gamma(X + iY) [1 - \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{Z}_{12}) \end{aligned}$$

Or, $[1 - \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{Z}_{12}) = \gamma(\mathcal{Z}_{12}) - \cosh \chi_{12}^{(-)} \gamma(\mathcal{T}_{12}) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) + \sinh \chi_{12}^{(-)} = \gamma(\mathcal{Z}_{12}) [1 + \gamma(t_2)]$, d'où

$$U_1^\uparrow \overline{U_2^\uparrow} = \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma(X + iY) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) = \frac{1}{2} \gamma(X + iY) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) [1 + \gamma(t_2)] \quad (3.37)$$

 ② **Projecteur** $U_1^\downarrow \overline{U_2^\downarrow}$

Le même type de calcul conduit à

$$U_1^\downarrow \overline{U_2^\downarrow} = -\frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma(X - iY) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) = -\frac{1}{2} \gamma(X - iY) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) [1 + \gamma(t_2)] \quad (3.38)$$

 ③ **Projecteur** $U_1^\downarrow \overline{U_2^\uparrow}$

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad U_1^\downarrow \overline{U_2^\uparrow} &= U_1^\downarrow \overline{U_1^\uparrow} \gamma(\mathcal{T}_{12}) = \frac{1}{2} [1 - \gamma_5 \gamma(z_1) \gamma(t_1)] [1 + \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{T}_{12}) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] [1 - \gamma_5 \gamma(z_1) \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{T}_{12}) \end{aligned}$$

Mais $[1 - \gamma_5 \gamma(z_1) \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{T}_{12}) = [1 - \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12}) \gamma(\mathcal{T}_{12})] \gamma(\mathcal{T}_{12}) = \gamma(\mathcal{T}_{12}) - \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12})$ et $[1 + \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{T}_{12}) = \gamma(\mathcal{T}_{12}) [1 + \gamma(t_2)]$, $[1 - \gamma(t_1)] \gamma(\mathcal{Z}_{12}) = \gamma(\mathcal{Z}_{12}) [1 + \gamma(t_2)]$, d'où

$$U_1^\downarrow \overline{U_2^\uparrow} = \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] [\gamma(\mathcal{T}_{12}) - \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12})] = \frac{1}{2} [\gamma(\mathcal{T}_{12}) - \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12})] [1 + \gamma(t_2)] \quad (3.39)$$

 ④ **Projecteur** $U_1^\uparrow \overline{U_2^\downarrow}$

On trouve de la même manière

$$\begin{aligned} U_1^\uparrow \overline{U_2^\downarrow} &= -\frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] [\gamma(\mathcal{T}_{12}) + \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12})] \\ &= -\frac{1}{2} [\gamma(\mathcal{T}_{12}) + \gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{12})] [1 + \gamma(t_2)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.2.3 Formes bilinéaires $\overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ et $\overline{V}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ du couplage en voie s

Celles-ci se calculent aisément en les exprimant comme des traces et en utilisant les expressions précédentes des projecteurs : $\overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} = \text{Tr} \Gamma U_{1\sigma} \overline{U}_{2\sigma'}$, $\overline{V}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} = -\text{Tr} \gamma_5 \Gamma U_{1\sigma} \overline{V}_{2\sigma'}$. Rappelons que les traces des matrices γ ainsi que celle de γ_5 sont nulles, que $\text{Tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 = 0$, et que la trace du produit d'un nombre impair de matrices γ est nul¹⁵. On tient compte également des relations d'orthogonalité entre les vecteurs de la tétrade $(\mathcal{T}_{12}, X, Y, \mathcal{Z}_{12})$.

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma}} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow U_1^\uparrow &= \overline{U}_2^\downarrow U_1^\downarrow = \overline{V}_2^\uparrow \gamma_5 U_1^\uparrow = \overline{V}_2^\downarrow \gamma_5 U_1^\downarrow = 0 \\ \overline{U}_2^\uparrow U_1^\downarrow &= -\overline{U}_2^\downarrow U_1^\uparrow = -\overline{V}_2^\uparrow \gamma_5 U_1^\downarrow = \overline{V}_2^\downarrow \gamma_5 U_1^\uparrow = 2 \cosh \chi_{12}^{(+)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow \gamma_5 U_1^\uparrow &= \overline{U}_2^\downarrow \gamma_5 U_1^\downarrow = \overline{V}_2^\uparrow U_1^\uparrow = \overline{V}_2^\downarrow U_1^\downarrow = 0 \\ \overline{U}_2^\uparrow \gamma_5 U_1^\downarrow &= \overline{U}_2^\downarrow \gamma_5 U_1^\uparrow = -\overline{V}_2^\uparrow U_1^\downarrow = -\overline{V}_2^\downarrow U_1^\uparrow = -2 \sinh \chi_{12}^{(+)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow \gamma_\mu U_1^\uparrow &= \overline{V}_2^\uparrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\uparrow = 2 [X + iY]_\mu \sinh \chi_{12}^{(+)} \\ \overline{U}_2^\downarrow \gamma_\mu U_1^\downarrow &= \overline{V}_2^\downarrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\downarrow = 2 [X - iY]_\mu \sinh \chi_{12}^{(+)} \\ \overline{U}_2^\uparrow \gamma_\mu U_1^\downarrow &= -\overline{U}_2^\downarrow \gamma_\mu U_1^\uparrow = \overline{V}_2^\uparrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\downarrow = -\overline{V}_2^\downarrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\uparrow = 2 \mathcal{T}_{12\mu} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\uparrow &= \overline{V}_2^\uparrow \gamma_\mu U_1^\uparrow = 2 [X + iY]_\mu \cosh \chi_{12}^{(+)} \\ \overline{U}_2^\downarrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\downarrow &= \overline{V}_2^\downarrow \gamma_\mu U_1^\downarrow = -2 [X - iY]_\mu \cosh \chi_{12}^{(+)} \\ \overline{U}_2^\uparrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\downarrow &= \overline{U}_2^\downarrow \gamma_\mu \gamma_5 U_1^\uparrow = \overline{V}_2^\uparrow \gamma_\mu U_1^\downarrow = \overline{V}_2^\downarrow \gamma_\mu U_1^\uparrow = -2 \mathcal{Z}_{12\mu} \end{aligned}$$

15. Pour la "γ-gymnastique", voir ITL, section 7.3.

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\uparrow &= -\overline{V}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\uparrow = i \{ \mathcal{Z}_{12\mu} (X + iY)_\nu - \mathcal{Z}_{12\nu} (X + iY)_\mu \} \\ \overline{U}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\downarrow &= -\overline{V}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\downarrow = i \{ \mathcal{Z}_{12\mu} (X - iY)_\nu - \mathcal{Z}_{12\nu} (X - iY)_\mu \} \\ \overline{U}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\downarrow &= -\overline{V}_2^\uparrow \gamma_\mu U_1^\downarrow = i \sinh \chi_{12}^{(+)} [\mathcal{T}_{12\mu} \mathcal{Z}_{12\nu} - \mathcal{T}_{12\nu} \mathcal{Z}_{12\mu}] \\ &\quad - \cosh \chi_{12}^{(+)} [X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu] \\ \overline{U}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\uparrow &= -\overline{V}_2^\downarrow \gamma_\mu U_1^\uparrow = -i \sinh \chi_{12}^{(+)} [\mathcal{T}_{12\mu} \mathcal{Z}_{12\nu} - \mathcal{T}_{12\nu} \mathcal{Z}_{12\mu}] \\ &\quad - \cosh \chi_{12}^{(+)} [X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu] \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\uparrow &= -\overline{V}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\uparrow = i \{ \mathcal{T}_{12\mu} (X + iY)_\nu - \mathcal{T}_{12\nu} (X + iY)_\mu \} \\ \overline{U}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\downarrow &= -\overline{V}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\downarrow = -i \{ \mathcal{T}_{12\mu} (X - iY)_\nu - \mathcal{T}_{12\nu} (X - iY)_\mu \} \\ \overline{U}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\downarrow &= -\overline{V}_2^\uparrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\downarrow = -i \cosh \chi_{12}^{(+)} [\mathcal{T}_{12\mu} \mathcal{Z}_{12\nu} - \mathcal{T}_{12\nu} \mathcal{Z}_{12\mu}] \\ &\quad + \sinh \chi_{12}^{(+)} [X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu] \\ \overline{U}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_1^\uparrow &= -\overline{V}_2^\downarrow \sigma_{\mu\nu} U_1^\uparrow = -i \cosh \chi_{12}^{(+)} [\mathcal{T}_{12\mu} \mathcal{Z}_{12\nu} - \mathcal{T}_{12\nu} \mathcal{Z}_{12\mu}] \\ &\quad - \sinh \chi_{12}^{(+)} [X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu] \end{aligned}$$

Pour obtenir (3.45), on a utilisé la relation $\gamma(\mathcal{T}_{12}) \gamma(\mathcal{Z}_{12}) \gamma_5 = -i\gamma(X) \gamma(Y)$. On notera les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12\mu} \mathcal{Z}_{12\nu} - \mathcal{T}_{12\nu} \mathcal{Z}_{12\mu} &= T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu = t_{1\mu} z_{1\nu} - t_{1\nu} z_{1\mu} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\delta} X^\rho Y^\delta \\ Y_\mu X_\nu - Y_\nu X_\mu &= i \left\{ E_\mu^{(+)} E_\nu^{(-)} - E_\nu^{(+)} E_\mu^{(-)} \right\} = \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} T^\rho Z^\delta \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma_3} U_{4\sigma_4} &= \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_5 V_{4\sigma_4} = 2(2\sigma_4) \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \cosh \chi_{34}^{(+)} \\ \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_5 U_{4\sigma_4} &= \overline{U}_{3\sigma_3} V_{4\sigma_4} = 2 \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \sinh \chi_{34}^{(+)} \\ \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu U_{4\sigma_4} &= \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu \gamma_5 V_{4\sigma_4} = 2 \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} (2\sigma_4) \mathcal{T}_{34\mu} \\ &\quad + 2 \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \sinh \chi_{34}^{(+)} (X' - 2i\sigma_4 Y)_\mu \\ \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu \gamma_5 U_{4\sigma_4} &= \overline{U}_{3\sigma_3} \gamma_\mu V_{4\sigma_4} = -2 \delta_{\sigma_3, -\sigma_4} \mathcal{Z}_{34\mu} \\ &\quad + 2(2\sigma_4) \delta_{\sigma_3, \sigma_4} \cosh \chi_{34}^{(+)} (X' - 2i\sigma_4 Y)_\mu \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les formules pour l'état final (3, 4) sont tout à fait similaires aux précédentes, notamment celles présentées dans (3.48).

3.2.4 Formes bilinéaires $\overline{U}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ et $\overline{V}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ du couplage en voie s

A partir de (3.21) et (3.36) on déduit les formules

$$\begin{aligned}
 \overline{U}'_{\sigma'} U_{\sigma} &= 2 \left[\cos \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma'\sigma} - 2\sigma \sin \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma',-\sigma} \right], \quad \overline{U}'_{\sigma'} \gamma_5 U_{\sigma} = 0 \\
 \overline{U}'_{\sigma'} \gamma_{\mu} U_{\sigma} &= 2T_{\mu} \left[\cos \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma'\sigma} - 2\sigma \sin \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma',-\sigma} \right] \\
 \overline{U}'_{\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 U_{\sigma} &= 2\delta_{\sigma'\sigma}(2\sigma) \left[Z_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (X + 2\sigma iY)_{\mu} \right] \\
 &\quad + 2\delta_{\sigma',-\sigma} \left[(X + 2\sigma iY)_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} Z_{\mu} \right] \\
 \overline{U}'_{\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{\sigma} &= \delta_{\sigma'\sigma} \left[(2\sigma) \cos \frac{\theta}{2} (X_{\mu} Y_{\nu} - X_{\nu} Y_{\mu}) + i \sin \frac{\theta}{2} \left[Z_{\mu} (X + 2i\sigma Y)_{\nu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - Z_{\nu} (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \right] \right] + \delta_{\sigma',-\sigma} \left[(2\sigma) i \cos \frac{\theta}{2} \left[Z_{\mu} (X + 2i\sigma Y)_{\nu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - Z_{\nu} (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \right] - \sin \frac{\theta}{2} (X_{\mu} Y_{\nu} - X_{\nu} Y_{\mu}) \right] \\
 \overline{U}'_{\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{\sigma} &= i \delta_{\sigma'\sigma}(2\sigma) \left[\cos \frac{\theta}{2} (T_{\mu} Z_{\nu} - T_{\nu} Z_{\mu}) + \sin \frac{\theta}{2} \left[T_{\mu} (X + 2i\sigma Y)_{\nu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - T_{\nu} (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \right] \right] + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left[T_{\mu} (X + 2i\sigma Y)_{\nu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - T_{\nu} (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \right] - \sin \frac{\theta}{2} (T_{\mu} Z_{\nu} - T_{\nu} Z_{\mu}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Utilisant (3.22) et (3.24), on a

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \cosh \frac{\chi_3}{2} \cosh \frac{\chi_1}{2} \overline{U}'_{\sigma'} \Gamma U_{\sigma} - (2\sigma)(2\sigma') \sinh \frac{\chi_3}{2} \sinh \frac{\chi_1}{2} \overline{U}'_{\sigma'} \gamma_5 \Gamma \gamma_5 U_{\sigma} \\
 &\quad + (2\sigma) \cosh \frac{\chi_3}{2} \sinh \frac{\chi_1}{2} \overline{U}'_{\sigma'} \Gamma \gamma_5 U_{\sigma} - (2\sigma') \sinh \frac{\chi_3}{2} \cosh \frac{\chi_1}{2} \overline{U}'_{\sigma'} \gamma_5 \Gamma U_{\sigma}
 \end{aligned}$$

Nous distinguerons alors le cas où Γ commute avec γ_5 , réalisé par les matrices 1 , γ_5 , $\sigma_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu} \gamma_5$, de celui où Γ anticommute avec γ_5 , réalisé par les matrices γ_{μ} et $\gamma_{\mu} \gamma_5$. Pour simplifier l'écriture, nous poserons $c_+ = \cosh \chi_{31}^{(+)}$, $c_- = \cosh \chi_{31}^{(-)}$, $s_+ = \sinh \chi_{31}^{(+)}$, $s_- = \sinh \chi_{31}^{(-)}$.

① Γ commute avec γ_5

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \{ c_- \overline{U}'_{\sigma} \Gamma U_{\sigma} - (2\sigma) s_- \overline{U}'_{\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{\sigma} \} \\
 &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} \{ c_+ \overline{U}'_{-\sigma} \Gamma U_{\sigma} + (2\sigma) s_+ \overline{U}'_{-\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{\sigma} \}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

① Γ anticommute avec γ_5

$$\begin{aligned}\overline{U}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \{c_+ \overline{U}'_{\sigma} \Gamma U_{\sigma} + (2\sigma) s_+ \overline{U}'_{\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{\sigma}\} \\ &+ \delta_{\sigma',-\sigma} \{c_- \overline{U}'_{-\sigma} \Gamma U_{\sigma} - (2\sigma) s_- \overline{U}'_{-\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{\sigma}\}\end{aligned}\quad (3.51)$$

On en déduit les formes bilinéaires ci-dessous, présentées de façon synthétique, comme il sera fait dorénavant.

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma}} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} c_- \cos \frac{\theta}{2} - 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} c_+ \sin \frac{\theta}{2} \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} V_{1\sigma}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} &= -2 \left[\delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) s_- \cos \frac{\theta}{2} + \delta_{\sigma',-\sigma} s_+ \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} V_{1\sigma}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} U_{1\sigma}} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \left[T_{\mu} c_+ \cos \frac{\theta}{2} + s_+ \left[Z_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \\ &- 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[T_{\mu} c_- \sin \frac{\theta}{2} + s_- \left[-Z_{\mu} \sin \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} \right] \right] \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 V_{1\sigma}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \left[T_{\mu} s_+ \cos \frac{\theta}{2} + c_+ \left[Z_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] \\ &+ 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \left[T_{\mu} s_- \sin \frac{\theta}{2} + c_- \left[-Z_{\mu} \sin \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_{\mu} \cos \frac{\theta}{2} \right] \right] \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} V_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_{\mu} \gamma_5 V_{1\sigma}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[c_- \left\{ (2\sigma) \cos \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \sin \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - i s_- \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) + \sin \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right\} \right] \\ &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} \left[c_+ \left\{ i(2\sigma) \cos \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right\} + (2\sigma) i s_+ \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) \right\} \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[(2\sigma) i c_- \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - X_\nu Y_\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right\} - s_- \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i(2\sigma) \sin \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right\} \right] \\ &\quad + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[c_+ \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) \right\} + s_+ \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i(2\sigma) \sin \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right\} \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

A titre d'exercice, nous proposons au lecteur :

- de montrer que

$$\begin{aligned} U_{1\sigma} \overline{U}_{3\sigma'} &= \cos \frac{\theta}{2} U_{1\sigma} \overline{U}_{1\sigma'} \left[\cosh \chi_{31}^{(-)} - (2\sigma') \sinh \chi_{31}^{(-)} \gamma_5 \right] \\ &\quad + \sin \frac{\theta}{2} U_{1\sigma} \overline{U}_{-1\sigma'} \left[(2\sigma') \cosh \chi_{31}^{(+)} - \sinh \chi_{31}^{(+)} \gamma_5 \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

et d'utiliser ce projecteur pour retrouver les expressions des formes bilinéaires ci-dessus ;

- de montrer que

$$\begin{aligned}
 U_{2\sigma} \overline{U}_{4\sigma'} &= \cos \frac{\theta}{2} U_{2\sigma} \overline{U}_{2\sigma'} \left[\cosh \chi_{42}^{(-)} - (2\sigma') \sinh \chi_{42}^{(-)} \gamma_5 \right] \\
 &+ \sin \frac{\theta}{2} U_{2\sigma} \overline{U}_{2-\sigma'} \left[(2\sigma') \cosh \chi_{42}^{(+)} - \sinh \chi_{42}^{(+)} \gamma_5 \right]
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

et d'utiliser ce projecteur pour établir les expressions des formes bilinéaires $\overline{U}_{4\sigma'} \Gamma U_{2\sigma}$.

3.2.5 Couplage en voie s : cas $m_1 = m_2 = m$

Puisqu'alors $\chi_{12}^{(-)} = 0$, on a $\mathcal{T}_{12} = T$, $\mathcal{Z}_{12} = Z$, $\chi_{12}^{(+)} = \chi_1 = \chi_2$. Ci-dessous nous donnons les expressions, correspondant à ce cas, du projecteur $U_{1\sigma} \overline{U}_{2\sigma'}$ et des formes bilinéaires $\overline{\Psi}_{2\sigma'} \Gamma \Psi_{1\sigma}$ ($\Psi = U, V$). On notera qu'ici $\cosh \chi_1 = \frac{\sqrt{s}}{2m}$, $\sinh \chi_1 = \frac{\sqrt{s}}{2m} \beta$ où $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$.

Projecteur $U_{1\sigma} \overline{U}_{2\sigma'}$

$$\begin{aligned}
 U_{1\sigma} \overline{U}_{2\sigma'} &= \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma(X + 2i\sigma Y) \gamma(Z) \\
 &- \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] [(2\sigma)\gamma(T) + \gamma_5 \gamma(Z)] \\
 &= \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} \gamma(X + 2i\sigma Y) \gamma(Z) [1 + \gamma(t_2)] \\
 &- \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{1}{2} [(2\sigma)\gamma(T) + \gamma_5 \gamma(Z)] [1 + \gamma(t_2)]
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma}} \tag{3.61}$$

$$\overline{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma} = -2 \cosh \chi_1 (2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} V_{1\sigma}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \tag{3.62}$$

$$\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -2 \sinh \chi_1 \delta_{\sigma',-\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} \gamma_5 V_{1\sigma}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \sinh \chi_1 (X + 2i\sigma Y)_\mu - 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} T_\mu \\
 &= \overline{V}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} = \overline{V}_{2\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \cosh \chi_1 (X + 2i\sigma Y)_\mu - 2\delta_{\sigma',-\sigma} Z_\mu \\ &= \overline{V}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} = \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{V}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= i \delta_{\sigma',\sigma} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \\ &- \delta_{\sigma',-\sigma} \left[i(2\sigma) \sinh \chi_1 [T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu] + \cosh \chi_1 (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right] \\ &= -\overline{V}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= i \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \\ &- \delta_{\sigma',-\sigma} \left[i \cosh \chi_1 [T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu] + (2\sigma) \sinh \chi_1 (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right] \\ &= -\overline{V}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = -\overline{V}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

3.2.6 Couplage en voie s : cas $m_1 = m_3$ et $m_2 = m_4$ ($\chi_{31}^{(-)} = \chi_{42}^{(-)} = 0$)

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma}} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma} &= 2\delta_{\sigma',\sigma} \cos \frac{\theta}{2} - 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \cosh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.68)$$

$$\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -2\delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \chi_1 \sin \frac{\theta}{2} = -\overline{V}_{3\sigma'} U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} V_{1\sigma}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \left[T_\mu \cosh \chi_1 \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &+ \left. \sinh \chi_1 \left[Z_\mu \cos \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] - 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} T_\mu \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \left[T_\mu \sinh \chi_1 \cos \frac{\theta}{2} + \cosh \chi_1 \left[Z_\mu \cos \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. (X + 2i\sigma Y)_\mu \sin \frac{\theta}{2} \right] \right] + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \left[-Z_\mu \sin \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_\mu \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[(2\sigma) \cos \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) + i \sin \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu \right. \right. \\ &- \left. \left. Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right] + \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\cosh \chi_1 \left\{ i(2\sigma) \cos \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu \right. \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] - \sin \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right\} \\ &+ (2\sigma) i \sinh \chi_1 \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \\ &- \left. \left. \sin \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) \right\} \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \tag{3.72} \\
 \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[(2\sigma) i \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - X_\nu Y_\mu) + \sin \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right\} \right. \\
 & \quad \left. + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\cosh \chi_1 \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[T_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - T_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin \frac{\theta}{2} (T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) \right\} + \sinh \chi_1 \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[Z_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu - Z_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + i(2\sigma) \sin \frac{\theta}{2} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right\} \right] \\
 &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma}
 \end{aligned}$$

3.3 Le couplage d'hélicité dans la voie t

3.3.1 Définition des tétrades

Considérons à nouveau le processus de la figure (3.1) où nous supposons que les quatre particules sont toutes de spin 1/2. On effectue maintenant des couplages d'hélicité entre les particules 1 et 3 d'une part, et 2 et 4 d'autre part, ces deux groupes de particules ayant en commun le 4-vecteur de "transfert" du genre espace $q = p_1 - p_3 = -(p_2 - p_4)$ ("quadri-transfert"), pour lequel nous poserons $q^2 = -t < 0$. Dans le couplage de la voie t , les tétrades associées aux quatre particules ont en commun le 4-vecteur Y défini en (3.20) et le 4-vecteur $Q = q/\sqrt{t}$, ce dernier servant à définir un axe des z . Pour la commodité, les associations (p_1, p_3, q) et (p_2, p_4, q) seront respectivement appelées vertex de gauche et vertex de droite.

Les tétrades associées à chacun des vertex dans ce couplage d'hélicité sont les suivantes.

☞ Pour le vertex de gauche

- La tétrade associée à q est :

$$T_g = \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}} \left(p_1 + q \frac{p_1 \cdot q}{t} \right) = \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}} \left(p_3 + q \frac{p_3 \cdot q}{t} \right), \quad Z_g = Q, \quad Y, \quad \text{avec } \Lambda_g = \Lambda(-t, m_1^2, m_3^2),$$

$$\text{et } X_{g\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_g^\nu Y^\rho Z_g^\sigma;$$

- celle associée à p_1 est ¹⁶

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{p_1}{m_1} = \cosh \xi_1 T_g + \sinh \xi_1 Z_g, \\
 z_1 &= \frac{2m_1}{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}} \left(q - p_1 \frac{p_1 \cdot q}{m_1^2} \right) = \sinh \xi_1 T_g + \cosh \xi_1 Z_g
 \end{aligned}$$

16. Bien que les mêmes lettres soient utilisées pour les définir, les 4-vecteurs introduits ici ne doivent pas être confondus avec ceux du couplage de la voie s !

$$\text{avec } \cosh \xi_1 = \frac{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}}{2m_1\sqrt{t}}, \quad \sinh \xi_1 = \frac{t + m_3^2 - m_1^2}{2m_1\sqrt{t}} \quad (-2p_1 \cdot q = t + m_3^2 - m_1^2)$$

$$x_1 = X_g, \quad y_1 = Y, \quad \epsilon_1^{(\pm)} = E_g^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X_g \pm iY];$$

• et celle associée à p_3 est :

$$t_3 = \frac{p_3}{m_3} = \cosh \xi_3 T_g - \sinh \xi_3 Z_g,$$

$$z_3 = \frac{2m_3}{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}} \left(q - p_3 \frac{p_3 \cdot q}{m_3^2} \right) = -\sinh \xi_3 T_g + \cosh \xi_3 Z_g$$

$$\text{avec } \cosh \xi_3 = \frac{\Lambda_g^{\frac{1}{2}}}{2m_3\sqrt{t}}, \quad \sinh \xi_3 = \frac{t + m_1^2 - m_3^2}{2m_3\sqrt{t}} \quad (2p_3 \cdot q = t + m_1^2 - m_3^2)$$

$$x_3 = X_g, \quad y_3 = Y, \quad \epsilon_3^{(\pm)} = \epsilon_1^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X_g \pm iY];$$

Dans le référentiel (T_g, X_g, Y, Z_g) , les 3-vecteurs \vec{p}_1 , \vec{q} et \vec{p}_3 sont tous les trois selon l'axe des z , dans le sens positif pour les deux premiers, dans le sens négatif pour le troisième. On passe de la tétrade $\{[T_g] : (T_g, X_g, Y, Z_g)\}$ aux tétrades $\{[t_1]_t : (t_1, x_1, y_1, z_1)\}$ et $\{[t_3]_t : (t_3, x_3, y_3, z_3)\}$ au moyen des transformations de Lorentz pures $[T_g \rightarrow t_1]$ et $[T_g \rightarrow t_3]$ respectivement :

$$[t_1]_t = [T_g \rightarrow t_1][T_g], \quad [t_3]_t = [T_g \rightarrow t_3][T_g]$$

lesquelles s'effectuent dans le 2-plan (T_g, Z_g) orthogonal au 2-plan (X_g, Y) et dont les représentations agissant dans l'espace des spineurs de Dirac sont

$$S_{T_g \rightarrow t_1} = \cosh \frac{\xi_1}{2} + \sinh \frac{\xi_1}{2} \gamma(Z_g) \gamma(T_g) \quad \text{et} \quad S_{T_g \rightarrow t_3} = \cosh \frac{\xi_3}{2} - \sinh \frac{\xi_3}{2} \gamma(Z_g) \gamma(T_g) \quad (3.73)$$

On notera que

$$\gamma(Z_g) \gamma(T_g) = \gamma(z_1) \gamma(t_1) = \gamma(z_3) \gamma(t_3) = 2 S_{z_g} \gamma_5 \quad (3.74)$$

Notons $U_{g\sigma}$ et $V_{g\sigma} = \gamma_5 U_{g\sigma}$ les spineurs de Dirac associés à la tétrade $[T_g]_t$, prise comme référence pour le vertex de gauche. Ces spineurs sont supposés normalisés selon $\bar{U}U = 2$. Les spineurs de Dirac correspondant aux tétrades $[t_1]_t$ et $[t_3]_t$ s'en déduisent en utilisant (3.73) et (3.74) :

① pour la particule 1

$$U_{1\sigma} = S_{T_g \rightarrow t_1} U_{g\sigma} = \cosh \frac{\xi_1}{2} U_{g\sigma} + (2\sigma) \sinh \frac{\xi_1}{2} V_{g\sigma} \quad (3.75)$$

② pour la particule 3

$$U_{3\sigma} = S_{T_g \rightarrow t_3} U_{g\sigma} = \cosh \frac{\xi_3}{2} U_{g\sigma} - (2\sigma) \sinh \frac{\xi_3}{2} V_{g\sigma} \quad (3.76)$$

Les deux tétrades $[t_1]_t$ et $[t_3]_t$ peuvent être directement reliées par la transformation de Lorentz pure $[T_g \rightarrow t_3][T_g \rightarrow t_1]^{-1}$ s'effectuant dans le même 2-plan (T_g, Z) . Exprimons sa représentation sur les spineurs de Dirac. Compte tenu de (3.74), on a

$$\begin{aligned}
 S_{t_1 \rightarrow t_3} &= S_{T_g \rightarrow t_3} S_{T_g \rightarrow t_1}^{-1} = \left[\cosh \frac{\xi_3}{2} - \sinh \frac{\xi_3}{2} \gamma(z_1) \gamma(t_1) \right] \left[\cosh \frac{\xi_1}{2} - \sinh \frac{\xi_1}{2} \gamma(z_1) \gamma(t_1) \right] \\
 &= \cosh \xi_{13}^{(+)} - \sinh \xi_{13}^{(+)} \gamma(z_1) \gamma(t_1)
 \end{aligned}$$

où l'on a posé $\xi_{13}^{(+)} = \frac{\xi_1 + \xi_3}{2}$. Cette expression peut être réécrite comme

$$\begin{aligned}
 S_{t_1 \rightarrow t_3} &= \gamma(\mathcal{T}_{13}) \gamma(t_1) \quad \text{avec} \\
 \mathcal{T}_{13} &= \cosh \xi_{13}^{(+)} t_1 - \sinh \xi_{13}^{(+)} z_1 = \cosh \xi_{13}^{(-)} T_g + \sinh \xi_{13}^{(-)} Z_g \quad \text{où} \\
 \xi_{13}^{(-)} &= \frac{\xi_1 - \xi_3}{2}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Puisque $\gamma(t_1) U_1 = U_1$, les deux spineurs (3.76) et (3.75) sont donc simplement reliés par :

$$U_{3\sigma} = \gamma(\mathcal{T}_{13}) U_{1\sigma} \tag{3.78}$$

☞ Pour le vertex de droite

Pour le vertex de droite, le 4-transfert est $q' = p_2 - p_4 = -q$. Cependant, nous garderons le même 4-vecteur q pour définir la tétrade de référence associée à ce vertex. Bien que cela induise une certaine dissymétrie entre les deux vertex, revenant à inverser les rôles de la particule entrante 2 et de la particule sortante 4, on en tire l'avantage que les tétrades de référence des deux vertex sont alors reliées par une simple transformation de Lorentz dans le 2-plan orthogonal au 2-plan (Q, Y) . Compte tenu de ce choix, les tétrades du vertex de droite seront définies comme suit.

- La tétrade associée à q est :

$$\begin{aligned}
 T_d &= \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}} \left(p_2 + q \frac{p_2 \cdot q}{t} \right) = \frac{2\sqrt{t}}{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}} \left(p_4 + q \frac{p_4 \cdot q}{t} \right), \quad Z_d = Z_g = Q, \quad Y, \\
 &\text{avec } \Lambda_d = \Lambda(-t, m_2^2, m_4^2), \quad \text{et } X_{d\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_d^\nu Y^\rho Z_d^\sigma
 \end{aligned}$$

Elle sera prise comme référence pour le vertex de droite.

- La tétrade associée à p_2 est

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{p_2}{m_2} = \cosh \xi_2 T_d - \sinh \xi_2 Z_d, \\
 z_2 &= \frac{2m_2}{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}} \left(-q + p_2 \frac{p_2 \cdot q}{m_2^2} \right) = -\sinh \xi_2 T_d + \cosh \xi_2 Z_d \\
 \text{avec } \cosh \xi_2 &= \frac{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}}{2m_2\sqrt{t}}, \quad \sinh \xi_2 = \frac{t + m_4^2 - m_2^2}{2m_2\sqrt{t}} \quad (2p_2 \cdot q = t + m_4^2 - m_2^2) \\
 x_2 &= X_d, \quad y_2 = Y, \quad \epsilon_2^{(\pm)} = E_d^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X_d \pm iY];
 \end{aligned}$$

• et celle associée à p_4 est :

$$\begin{aligned}
 t_4 &= \frac{p_4}{m_4} = \cosh \xi_4 T_d + \sinh \xi_4 Z_d, \\
 z_4 &= \frac{2m_4}{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}} \left(-q + p_4 \frac{p_4 \cdot q}{m_4^2} \right) = \sinh \xi_4 T_d + \cosh \xi_4 Z_d \\
 \text{avec } \cosh \xi_4 &= \frac{\Lambda_d^{\frac{1}{2}}}{2m_4 \sqrt{t}}, \quad \sinh \xi_4 = \frac{t + m_2^2 - m_4^2}{2m_4 \sqrt{t}} \quad (-2p_4 \cdot q = t + m_2^2 - m_4^2) \\
 x_4 &= X_d, \quad y_4 = Y, \quad \epsilon_4^{(\pm)} = \epsilon_2^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [X_d \pm iY];
 \end{aligned}$$

Dans le référentiel (T_d, X_d, Y, Z_d) , les 3-vecteurs \vec{p}_4 , \vec{q} et \vec{p}_2 sont tous les trois selon l'axe des z , dans le sens positif pour les deux premiers, dans le sens négatif pour le troisième. On passe de la tétrade $\{[T_d] : (T_d, X_d, Y, Z_d)\}$ aux tétrades $\{[t_2]_t : (t_2, x_2, y_2, z_2)\}$ et $\{[t_4]_t : (t_4, x_4, y_4, z_4)\}$ au moyen des transformations de Lorentz pures $[T_d \rightarrow t_2]$ et $[T_d \rightarrow t_4]$ respectivement :

$$[t_2]_t = [T_2 \rightarrow t_2][T_d], \quad [t_4]_t = [T_d \rightarrow t_4][T_d]$$

lesquelles s'effectuent dans le 2-plan (T_d, Z_d) orthogonal au 2-plan (X_d, Y) et dont les représentations agissant dans l'espace des spineurs de Dirac sont

$$S_{T_d \rightarrow t_2} = \cosh \frac{\xi_2}{2} - \sinh \frac{\xi_2}{2} \gamma(Z_d) \gamma(T_d) \quad \text{et} \quad S_{T_d \rightarrow t_4} = \cosh \frac{\xi_4}{2} + \sinh \frac{\xi_4}{2} \gamma(Z_d) \gamma(T_d) \quad (3.79)$$

On notera la relation symétrique de (3.74) :

$$\gamma(Z_d) \gamma(T_d) = \gamma(z_2) \gamma(t_2) = \gamma(z_4) \gamma(t_4) = 2 S_{z_d} \gamma_5 \quad (3.80)$$

Notons $U_{d\sigma}$ et $V_{d\sigma} = \gamma_5 U_{d\sigma}$ les spineurs de Dirac associés à la tétrade $[T_d]$, prise comme référence pour le vertex de droite, dont notera bien qu'elle est différente de la tétrade de référence du vertex de gauche. Ces spineurs sont aussi supposés normalisés selon $\bar{U}U = 2$. Les spineurs de Dirac correspondant aux tétrades $[t_2]_t$ et $[t_4]_t$ se déduisent de ces spineurs de référence en utilisant (3.79) et (3.80) :

① pour la particule 2

$$U_{2\sigma} = S_{T_d \rightarrow t_2} U_{d\sigma} = \cosh \frac{\xi_2}{2} U_{d\sigma} - (2\sigma) \sinh \frac{\xi_2}{2} V_{d\sigma} \quad (3.81)$$

② pour la particule 4

$$U_{4\sigma} = S_{T_d \rightarrow t_4} U_{d\sigma} = \cosh \frac{\xi_4}{2} U_{d\sigma} + (2\sigma) \sinh \frac{\xi_4}{2} V_{d\sigma} \quad (3.82)$$

Comme dans le cas du vertex de gauche, les deux tétrades $[t_2]_t$ et $[t_4]_t$ peuvent aussi être directement reliées par une transformation de Lorentz pure, à savoir $[T_d \rightarrow t_4][T_d \rightarrow t_2]^{-1}$, laquelle s'effectue dans 2-plan (T_d, Z') . Compte tenu de (3.80), on a

$$S_{t_2 \rightarrow t_4} = S_{T_d \rightarrow t_4} S_{T_d \rightarrow t_2}^{-1} = \left[\cosh \frac{\xi_4}{2} + \sinh \frac{\xi_4}{2} \gamma(z_2) \gamma(t_2) \right] \left[\cosh \frac{\xi_2}{2} + \sinh \frac{\xi_2}{2} \gamma(z_2) \gamma(t_2) \right]$$

$$= \cosh \xi_{24}^{(+)} + \sinh \xi_{24}^{(+)} \gamma(z_2) \gamma(t_2)$$

où l'on a posé $\xi_{24}^{(+)} = \frac{\xi_2 + \xi_4}{2}$. Cette expression peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} S_{t_2 \rightarrow t_4} &= \gamma(\mathcal{T}_{24}) \gamma(t_2) \quad \text{avec} \\ \mathcal{T}_{24} &= \cosh \xi_{24}^{(+)} t_2 + \sinh \xi_{24}^{(+)} z_2 = \cosh \xi_{24}^{(-)} T_d - \sinh \xi_{24}^{(-)} Z_d \quad \text{où} \\ \xi_{24}^{(-)} &= \frac{\xi_2 - \xi_4}{2} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Puisque $\gamma(t_2) U_2 = U_2$, les deux spineurs (3.81) et (3.82) sont simplement reliés par :

$$U_{4\sigma} = \gamma(\mathcal{T}_{24}) U_{2\sigma} \quad (3.84)$$

3.3.2 Projecteurs $U_1 \bar{U}_3$ et $U_2 \bar{U}_4$ du couplage en voie t

Définissons tout d'abord

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{13} &= \cosh \xi_{13}^{(-)} Z + \sinh \xi_{13}^{(-)} T_g = \cosh \xi_{13}^{(+)} z_1 - \sinh \xi_{13}^{(+)} t_1 \\ &= \cosh \xi_{13}^{(+)} z_3 + \sinh \xi_{13}^{(+)} t_3 \quad \text{et} \\ \mathcal{Z}_{24} &= \cosh \xi_{24}^{(-)} Z_d - \sinh \xi_{24}^{(-)} T_d = \cosh \xi_{24}^{(+)} z_2 + \sinh \xi_{24}^{(+)} t_2 \\ &= \cosh \xi_{24}^{(+)} z_4 - \sinh \xi_{24}^{(+)} t_4 \end{aligned} \quad (3.85)$$

On vérifie que

$$\gamma(\mathcal{Z}_{13}) \gamma(\mathcal{T}_{13}) = \gamma(z_1) \gamma(t_1) = \gamma(z_3) \gamma(t_3), \quad \gamma(\mathcal{Z}_{24}) \gamma(\mathcal{T}_{24}) = \gamma(z_2) \gamma(t_2) = \gamma(z_4) \gamma(t_4) \quad (3.86)$$

Rappelons que pour une base quelconque (T, X, Y, Z) , on a

$$\gamma_5 \gamma(X + i(2\sigma)Y) = (2\sigma) \gamma(X + i(2\sigma)Y) \gamma(Z) \gamma(T)$$

Combinant alors (3.78) et

$$U_{1\sigma} \bar{U}_{1\sigma'} = \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [1 + (2\sigma) \gamma_5 \gamma(z_1)] [1 + \gamma(t_1)] + \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(X_g + (2\sigma)iY) [1 + \gamma(t_1)] \quad (3.87)$$

il n'est pas difficile de déduire les projecteurs $U_1 \bar{U}_3$:

$$\begin{aligned}
 U_{1\sigma} \bar{U}_{3\sigma'} &= U_{1\sigma} \bar{U}_{1\sigma'} \gamma(\mathcal{T}_{13}) = \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] [\gamma(\mathcal{T}_{13}) + (2\sigma)\gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{13})] \\
 &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} (2\sigma) \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_1)] \gamma(X_g + (2\sigma)iY) \gamma(\mathcal{Z}_{13}) \\
 &= \gamma(\mathcal{T}_{13}) U_{3\sigma} \bar{U}_{3\sigma'} = \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [\gamma(\mathcal{T}_{13}) + (2\sigma)\gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{13})] [1 + \gamma(t_3)] \\
 &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} (2\sigma) \frac{1}{2} \gamma(X_g + (2\sigma)iY) \gamma(\mathcal{Z}_{13}) [1 + \gamma(t_3)]
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Symétriquement, on a

$$\begin{aligned}
 U_{2\sigma} \bar{U}_{4\sigma'} &= U_{2\sigma} \bar{U}_{2\sigma'} \gamma(\mathcal{T}_{24}) = \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_2)] [\gamma(\mathcal{T}_{24}) + (2\sigma)\gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{24})] \\
 &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} (2\sigma) \frac{1}{2} [1 + \gamma(t_2)] \gamma(X_d + (2\sigma)iY) \gamma(\mathcal{Z}_{24}) \\
 &= \gamma(\mathcal{T}_{24}) U_{4\sigma} \bar{U}_{4\sigma'} = \delta_{\sigma',\sigma} \frac{1}{2} [\gamma(\mathcal{T}_{24}) + (2\sigma)\gamma_5 \gamma(\mathcal{Z}_{24})] [1 + \gamma(t_4)] \\
 &\quad + \delta_{\sigma',-\sigma} (2\sigma) \frac{1}{2} \gamma(X_d + (2\sigma)iY) \gamma(\mathcal{Z}_{24}) [1 + \gamma(t_4)]
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

3.3.3 Formes bilinéaires $\bar{U}_{3\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ du couplage en voie t

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les formules ci-dessous.

Vertex de gauche

$$\boxed{\bar{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma}} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \cosh \xi_{13}^{(+)} \\
 \bar{U}_{3\sigma'} \gamma_5 V_{1\sigma} &= -\bar{V}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\bar{V}_{3\sigma'} V_{1\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 (2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sinh \xi_{13}^{(+)} \\
 \bar{U}_{3\sigma'} V_{1\sigma} &= -\bar{V}_{3\sigma'} U_{1\sigma} = -\bar{V}_{3\sigma'} \gamma_5 V_{1\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \mathcal{T}_{13\mu} + 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \xi_{13}^{(+)} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \mathcal{Z}_{13\mu} + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \cosh \xi_{13}^{(+)} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i \sinh \xi_{13}^{(+)} [\mathcal{T}_{13\mu} \mathcal{Z}_{13\nu} - \mathcal{T}_{13\nu} \mathcal{Z}_{13\mu}] \right. \\ &+ (2\sigma) \cosh \xi_{13}^{(+)} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \left. \right] + i(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\mathcal{Z}_{13\mu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{Z}_{13\nu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i(2\sigma) \cosh \xi_{13}^{(+)} (\mathcal{T}_{13\mu} \mathcal{Z}_{13\nu} - \mathcal{T}_{13\nu} \mathcal{Z}_{13\mu}) \right. \\ &\quad \left. + \sinh \xi_{13}^{(+)} (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right] + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\mathcal{T}_{13\mu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{T}_{13\nu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\text{Note : } \mathcal{T}_{13\mu} \mathcal{Z}_{13\nu} - \mathcal{T}_{13\nu} \mathcal{Z}_{13\mu} = t_{1\mu} z_{1\nu} - t_{1\nu} z_{1\mu} = t_{3\mu} z_{3\nu} - t_{3\nu} z_{3\mu} \quad (3.96)$$

☞ **Vertex de droite**

$$\boxed{\bar{U}_{4\sigma'} U_{2\sigma}} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \cosh \xi_{24}^{(+)} \\ \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_5 V_{2\sigma} &= -\bar{V}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma} = -\bar{V}_{4\sigma'} V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{U}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma} &= -2 (2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sinh \xi_{24}^{(+)} \\ \bar{U}_{4\sigma'} V_{2\sigma} &= -\bar{V}_{4\sigma'} U_{2\sigma} = -\bar{V}_{4\sigma'} \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma}} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \mathcal{T}_{24\mu} - 2 (2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \xi_{24}^{(+)} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \bar{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma} = \bar{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu V_{2\sigma} = \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \mathcal{Z}_{24\mu} + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \cosh \xi_{24}^{(+)} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \bar{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma} = \bar{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu V_{2\sigma} = \bar{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma}} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[-i \sinh \xi_{24}^{(+)} [\mathcal{T}_{24\mu} \mathcal{Z}_{24\nu} - \mathcal{T}_{24\nu} \mathcal{Z}_{24\mu}] \right. \\ &+ (2\sigma) \cosh \xi_{24}^{(+)} [X_{d\mu} Y_\nu - X_{d\nu} Y_\mu] \left. \right] + i(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[\mathcal{Z}_{24\mu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{Z}_{24\nu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\bar{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{2\sigma} = -\bar{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{2\sigma} = \bar{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{2\sigma} = -\bar{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\text{Note : } \mathcal{T}_{24\mu} \mathcal{Z}_{24\nu} - \mathcal{T}_{24\nu} \mathcal{Z}_{24\mu} = t_{2\mu} z_{2\nu} - t_{2\nu} z_{2\mu} = t_{4\mu} z_{4\nu} - t_{4\nu} z_{4\mu} \quad (3.102)$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{2\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i(2\sigma) \cosh \xi_{24}^{(+)} (\mathcal{T}_{24\mu} \mathcal{Z}_{24\nu} - \mathcal{T}_{24\nu} \mathcal{Z}_{24\mu}) \right. \\ &\quad \left. - \sinh \xi_{24}^{(+)} (X_{d\mu} Y_\nu - X_{d\nu} Y_\mu) \right] + i\delta_{\sigma',-\sigma} \left[\mathcal{T}_{24\mu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{T}_{24\nu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{2\sigma} = \overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

3.3.4 Couplage en voie t : cas $m_1 = m_3 = m$ (ou $m_2 = m_4 = m$)

On a alors $\xi_{13}^{(+)} = \xi_1 = \xi_3$ avec

$$\boxed{\cosh \xi_1 = \frac{\sqrt{t+4m^2}}{2m}, \quad \sinh \xi_1 = \frac{\sqrt{t}}{2m}} \quad (3.104)$$

et $\mathcal{T}_{13} = T_d$, $\mathcal{Z}_{13} = Z_g$. On a maintenant $U_{3\sigma} = S_{T_g \rightarrow t_1}^{-1} U_{g\sigma} = S_{T_g \rightarrow t_1}^{-2} U_{1\sigma}$. Les formes bilinéaires du précédent paragraphe prennent alors les expressions ci-dessous.

☞ Vertex de gauche

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma}} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \cosh \xi_1 \\ \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 V_{1\sigma} &= -\overline{V}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \sinh \xi_1 \\ \overline{U}_{3\sigma'} V_{1\sigma} &= -\overline{V}_{3\sigma'} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} T_{g\mu} + 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \xi_1 (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) Z_{g\mu} + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \cosh \xi_1 (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i \sinh \xi_1 [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] \right. \\ &+ (2\sigma) \cosh \xi_1 [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \left. \right] + i(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[Z_{g\mu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - Z_{g\nu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i(2\sigma) \cosh \xi_1 (T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}) \right. \\ &+ \sinh \xi_1 (X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu) \left. \right] + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[T_{g\mu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - T_{g\nu} (X_g + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

☞ Vertex de droite

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} U_{2\sigma}} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \cosh \xi_1 \\ \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_5 V_{2\sigma} &= -\overline{V}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_5 U_{2\sigma} &= -2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) \sinh \xi_1 \\ \overline{U}_{4\sigma'} V_{2\sigma} &= -\overline{V}_{4\sigma'} U_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma}} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} T_{d\mu} - 2(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \xi_1 (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma} = \overline{V}_{4\sigma'} \gamma_\mu V_{2\sigma} = \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{2\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) Z_{d\mu} + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \cosh \xi_1 (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \\ &= \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu V_{1\sigma} = \overline{V}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma}} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[-i \sinh \xi_1 [T_{d\mu} Z_{d\nu} - T_{d\nu} Z_{d\mu}] \right. \\ &+ (2\sigma) \cosh \xi_1 [X_{d\mu} Y_\nu - X_{d\nu} Y_\mu] \left. \right] + i(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[Z_{d\mu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - Z_{d\nu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} = \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{1\sigma} = -\overline{V}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{1\sigma} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{2\sigma}} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{2\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[i(2\sigma) \cosh \xi_1 (T_{d\mu} Z_{d\nu} - T_{d\nu} Z_{d\mu}) \right. \\ &- \sinh \xi_1 (X_{d\mu} Y_\nu - X_{d\nu} Y_\mu) \left. \right] + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[T_{d\mu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \\ &\quad \left. - T_{d\nu} (X_d + i(2\sigma)Y)_\mu \right] \\ &= -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{2\sigma} = \overline{U}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} V_{2\sigma} = -\overline{V}_{4\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 V_{2\sigma} \end{aligned}$$

3.3.5 Relations entre vertex de gauche et vertex de droite

Ayant les deux vecteurs Y et Q en commun, les tétrades de référence (T_g, X_g, Y, Q) et (T_d, X_d, Y, Q) des vertex de gauche et de droite, respectivement, sont reliées par une tranformation de Lorentz pure agissant dans le 2-plan orthogonal au 2-plan (Y, Q) . Soit Θ son paramètre, tel que $T_g \cdot T_d = \cosh \Theta$. Exprimons cette grandeur¹⁷. Compte tenu de $T_d \cdot q = 0$, on a

$$\begin{aligned}
 T_g \cdot T_d &= \frac{4}{\Lambda_{13}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{24}^{\frac{1}{2}}} p_1 \cdot [t p_2 + q (p_2 \cdot q)] \\
 &= \frac{1}{\Lambda_{13}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{24}^{\frac{1}{2}}} [2t(s - m_1^2 - m_2^2) - (t + m_3^2 - m_1^2)(t + m_4^2 - m_2^2)] \quad \text{soit} \\
 \cosh \Theta &= \frac{1}{\Lambda_{13}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{24}^{\frac{1}{2}}} [t(2s - t - \Sigma) - (m_3^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_2^2)] \\
 &\quad \text{où } \Sigma = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

On montre que

$$\begin{aligned}
 \sinh^2 \Theta &= \frac{4s t (t - t_{\min})(t_{\max} - t)}{\Lambda_{13} \Lambda_{24}} \quad \text{où} \\
 t_{\max} &= \frac{1}{2} \left[s - \Sigma + \frac{(m_2^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_3^2)}{s} + \frac{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{34}^{\frac{1}{2}}}{s} \right] \\
 t_{\min} &= \frac{1}{2} \left[s - \Sigma + \frac{(m_2^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_3^2)}{s} - \frac{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{34}^{\frac{1}{2}}}{s} \right]
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

les grandeurs t_{\max} et t_{\min} sont, respectivement, les valeurs maximum et minimum du transfert t , imposées par la cinématique de la réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Utilisant les variables relatives au référentiel du centre de masse, on a

$$t = -m_1^2 - m_3^2 + 2E_1 E_3 - 2p_i p_f \cos \theta \quad \text{avec } p_i = \frac{\Lambda_{12}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}}, \quad p_f = \frac{\Lambda_{34}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}},$$

et t_{\max} et t_{\min} correspondent en fait à $\cos \theta = -1$ et $\cos \theta = +1$ respectivement, ce qui donne

$$(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = 4p_i^2 p_f^2 \sin^2 \theta$$

d'où cette autre expression :

$$\sinh \Theta = \frac{4\sqrt{s} t p_i p_f \sin \theta}{\Lambda_{13}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{24}^{\frac{1}{2}}} \tag{3.119}$$

Calculons maintenant :

$$T_d \cdot X_g = \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} T_d^\mu T_g^\nu Y^\rho Q^\pi = \frac{4t}{\Lambda_{13}^{\frac{1}{2}} \Lambda_{24}^{\frac{1}{2}}} p_2^\mu p_1^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} Y^\rho Q^\pi$$

Or, dans la base (T, X, Y, Z) attachée au référentiel du centre de masse de la réaction, on a $p_1 = E_1 T + p_i Z$, $p_2 = E_2 - p_i Z$ (avec $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$) et donc

¹⁷. Voir : C. Carimalo et al. "Nuclei as Generators of Quasireal Photons", Phys.Rev. D10 (1974) 1561; C. Carimalo, "Les noyaux comme générateurs de photons quasi-réels", Thèse d'Etat, UPMC, Paris, 1977.

$$p_2^\mu p_1^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} Y^\rho = p_i \sqrt{s} \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} T^\mu Z^\nu Y^\rho = p_i \sqrt{s} X_\pi$$

et comme $\sqrt{t} X \cdot Q = X \cdot (p_1 - p_3) = -X \cdot p_3 = p_f \sin \theta$, on en déduit

$$T_d \cdot X_g = + \sinh \Theta$$

En conclusion,

$$T_d = \cosh \Theta T_g - \sinh \Theta X_g \quad (3.120)$$

Enfin, puisque

$$X_{d\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} T_d^\nu Y^\rho Q^\pi = \cosh \Theta \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} T_g^\nu Y^\rho Q^\pi - \sinh \Theta \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} X_d^\nu Y^\rho Q^\pi$$

$$\text{et puisque } X_{g\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} T_g^\nu Y^\rho Q^\pi, \quad T_{g\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\pi} X_d^\nu Y^\rho Q^\pi$$

on a aussi

$$X_d = \cosh \Theta X_g - \sinh \Theta T_g \quad (3.121)$$

Les relations (3.120) et (3.121) définissent la transformation de Lorentz entre les deux vertex, laquelle est, pour ce couplage de la voie t , l'analogie de la rotation $R_Y(\theta)$ pour le couplage dans la voie s . Sa représentation spinorielle est

$$S_{T_d \rightarrow T_g} = \cosh \frac{\Theta}{2} - \sinh \frac{\Theta}{2} \gamma(X_g) \gamma(T_g) \quad (3.122)$$

Compte tenu des relations générales $\gamma(X) \gamma(T) = 2S_x \gamma_5$ et $S_x U_\sigma = \frac{1}{2} U_{-\sigma}$, le spineur de référence U_d du vertex de droite se déduit ainsi de celui U_g du vertex de gauche par la relation

$$U_{d\sigma} = S_{T_d \rightarrow T_g} U_{g\sigma} = \cosh \frac{\Theta}{2} U_{g\sigma} - \sinh \frac{\Theta}{2} V_{g-\sigma} \quad (3.123)$$

On remarquera que puisque $\gamma(Y_g) \gamma(Z_g) = \gamma(Y_d) \gamma(Z_d) = \gamma(Y) \gamma(Q)$, c'est la composante suivant l'axe "x" du spin associé à T_d ou à T_g qui est conservée dans le passage d'un vertex à l'autre :

$$\gamma(X_d) \gamma(T_d) = \gamma(X_g) \gamma(T_g), \quad \text{donc } S_{dx} = S_{gx} \quad (3.124)$$

Notons que l'opérateur (3.122) peut être mis sous la forme

$$S_{T_d \rightarrow T_g} = \gamma(\mathcal{T}_{gd}) \gamma(T_g) \quad \text{où } \mathcal{T}_{gd} = \cosh \frac{\Theta}{2} T_g - \sinh \frac{\Theta}{2} X_g$$

de sorte que la relation entre U_d et U_g peut être exprimée comme

$$U_{d\sigma} = \gamma(\mathcal{T}_{gd}) \gamma(T_g) U_{g\sigma} \equiv \gamma(\mathcal{T}_{gd}) U_{g\sigma} \quad (3.125)$$

A partir de (3.123), ou de (3.125), et de (3.36), on déduit les formes bilinéaires $\overline{U_{d\sigma'}} \Gamma U_{g\sigma}$:

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{d\sigma'} U_{g\sigma} &= 2\delta_{\sigma',\sigma} \cosh \frac{\Theta}{2}, & \overline{U}_{d\sigma'} \gamma_5 U_{g\sigma} &= 2\delta_{\sigma',-\sigma} \sinh \frac{\Theta}{2} \\
 \overline{U}_{d\sigma'} \gamma_\mu U_{g\sigma} &= 2\delta_{\sigma',\sigma} \left[\cosh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} - \sinh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right] \\
 &\quad - (2\sigma)2\delta_{\sigma',-\sigma} Z_{g\mu} \\
 \overline{U}_{d\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{g\sigma} &= 2\delta_{\sigma',\sigma}(2\sigma) \cosh \frac{\Theta}{2} Z_{g\mu} + 2\delta_{\sigma',-\sigma} \left[\cosh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right. \\
 &\quad \left. - \sinh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} \right] \\
 \overline{U}_{d\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{g\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \left[(2\sigma) \cosh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \right. \\
 &\quad \left. + i \sinh \frac{\Theta}{2} \{ T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \} \right] \\
 + i(2\sigma)\delta_{\sigma',-\sigma} &\left[\cosh \frac{\Theta}{2} \{ Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \} \right. \\
 &\quad \left. + \sinh \frac{\Theta}{2} \{ T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu} \} \right] \\
 \overline{U}_{d\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{g\sigma} &= i(2\sigma)\delta_{\sigma',\sigma} \left[\cosh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] \right. \\
 &\quad \left. + \sinh \frac{\Theta}{2} \{ Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \} \right] \\
 + i\delta_{\sigma',-\sigma} &\left[\cosh \frac{\Theta}{2} \{ T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \} \right. \\
 &\quad \left. + (2\sigma) \sinh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \right]
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

3.3.6 Formes bilinéaires $\overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$ du couplage en voie t

Pour exprimer ces formes, nous procéderons comme au paragraphe 3.2.4. Ecrivons :

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \cosh \frac{\xi_2}{2} \cosh \frac{\xi_1}{2} \overline{U}_{d\sigma'} \Gamma U_{g\sigma} + (2\sigma)(2\sigma') \sinh \frac{\xi_2}{2} \sinh \frac{\xi_1}{2} \overline{U}_{d\sigma'} \gamma_5 \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma} \\
 &\quad + (2\sigma) \cosh \frac{\xi_2}{2} \sinh \frac{\xi_1}{2} \overline{U}_{d\sigma'} \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma} + (2\sigma') \sinh \frac{\xi_2}{2} \cosh \frac{\xi_1}{2} \overline{U}_{d\sigma'} \gamma_5 \Gamma U_{g\sigma}
 \end{aligned}$$

et distinguons le cas où Γ commute avec γ_5 de celui où Γ anticommute avec γ_5 . Pour simplifier l'écriture, nous poserons ici encore $c_+ = \cosh \xi_{12}^{(+)}$, $c_- = \cosh \xi_{12}^{(-)}$, $s_+ = \sinh \xi_{12}^{(+)}$, $s_- = \sinh \xi_{12}^{(-)}$ avec les définitions

$$\xi_{12}^{(+)} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \xi_{12}^{(-)} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \tag{3.127}$$

① Γ commute avec γ_5

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \{c_+ \overline{U}_{d\sigma} \Gamma U_{g\sigma} + (2\sigma) s_+ \overline{U}_{d\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma}\} \\ &+ \delta_{\sigma',-\sigma} \{c_- \overline{U}_{d-\sigma} \Gamma U_{g\sigma} + (2\sigma) s_- \overline{U}_{d-\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma}\} \end{aligned} \quad (3.128)$$

② Γ anticommute avec γ_5

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \{c_- \overline{U}_{d\sigma} \Gamma U_{g\sigma} + (2\sigma) s_- \overline{U}_{d\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma}\} \\ &+ \delta_{\sigma',-\sigma} \{c_+ \overline{U}_{d-\sigma} \Gamma U_{g\sigma} + (2\sigma) s_+ \overline{U}_{d-\sigma} \Gamma \gamma_5 U_{g\sigma}\} \end{aligned} \quad (3.129)$$

D'où les formes bilinéaires cherchées :

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma}} \quad (3.130)$$

$$\overline{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma} = 2 \delta_{\sigma',\sigma} c_+ \cosh \frac{\Theta}{2} + 2 (2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} s_- \sinh \frac{\Theta}{2}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.131)$$

$$\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} = 2 \delta_{\sigma',\sigma} (2\sigma) s_+ \cosh \frac{\Theta}{2} + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} c_- \sinh \frac{\Theta}{2}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= 2 \delta_{\sigma',\sigma} \left[c_- \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} - \sinh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right\} \right. \\ &+ s_- \cosh \frac{\Theta}{2} Z_{g\mu} \left. \right] + 2 (2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[s_+ \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right. \right. \\ &\left. \left. - \sinh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} \right\} - c_+ Z_{g\mu} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} &= 2 (2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \left[c_- \cosh \frac{\Theta}{2} Z_{g\mu} + s_- \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} \right. \right. \\ &\left. \left. - \sinh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right\} \right] + 2 \delta_{\sigma',-\sigma} \left[c_+ \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu \right. \right. \\ &\left. \left. - \sinh \frac{\Theta}{2} T_{g\mu} \right\} - s_+ Z_{g\mu} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma}} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} = & \delta_{\sigma',\sigma} \left[c_+ \left\{ (2\sigma) \cosh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \right. \right. \\ & \left. \left. + i \sinh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right\} \right. \\ & \left. + i s_+ \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] + \sinh \frac{\Theta}{2} [Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right\} \right] + i(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \left[c_- \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] + \sinh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] \right\} \right. \\ & \left. + s_- \left\{ (2\sigma) \cosh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma} = & (2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \left[i c_+ \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh \frac{\Theta}{2} [Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right\} \right. \\ & \left. + s_+ \left\{ (2\sigma) \cosh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] + i \sinh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right\} \right] + i \delta_{\sigma',-\sigma} \left[c_- \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - T_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] + (2\sigma) \sinh \frac{\Theta}{2} [X_{g\mu} Y_\nu - X_{g\nu} Y_\mu] \right\} \right. \\ & \left. + s_- \left\{ \cosh \frac{\Theta}{2} [Z_{g\mu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\nu - Z_{g\nu} [X_g + i(2\sigma)Y]_\mu] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sinh \frac{\Theta}{2} [T_{g\mu} Z_{g\nu} - T_{g\nu} Z_{g\mu}] \right\} \right] \end{aligned}$$

3.4 Cas où toutes les masses sont égales, puis nulles

Considérons maintenant le cas où les quatre particules de spin 1/2 qui participent à la réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ont la même masse m , masse que nous ferons tendre vers zéro par la suite. Tout d'abord, précisons encore les notations qui seront utilisées. Dans le couplage en voie s , la base de référence de l'état initial est

$$T = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{s}}, \quad Z_i = \frac{p_1 - p_2}{\beta \sqrt{s}}, \quad \text{avec } s = (p_1 + p_2)^2, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

$$Y_\mu \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\omega, \quad X_{i\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T^\nu Y^\rho Z_i^\omega \quad (3.136)$$

Le vecteur Y étant en fait défini comme en (3.20). Dans ce même couplage, la base de référence de l'état final est

$$T = \frac{p_3 + p_4}{\sqrt{s}}, \quad Z_f = \frac{p_3 - p_4}{\beta \sqrt{s}}, \quad Y, \quad X_f = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T^\nu Y^\rho Z_f^\omega, \quad \text{et l'on a}$$

$$Z_f = Z_i \cos \theta + \sin \theta X_i, \quad X_f = -Z_i \sin \theta + \cos \theta X_i \quad (3.137)$$

Cette base (3.137) s'obtient à partir de la première (3.136) par une rotation d'angle θ autour de l'axe Y . Rappelons que

$$t_1 = T \cosh \chi + Z_i \sinh \chi, \quad z_1^{(s)} = T \sinh \chi + Z_i \cosh \chi,$$

$$t_2 = T \cosh \chi - Z_i \sinh \chi, \quad z_2^{(s)} = T \sinh \chi - Z_i \cosh \chi,$$

$$t_3 = T \cosh \chi + Z_f \sinh \chi, \quad z_3^{(s)} = T \sinh \chi + Z_f \cosh \chi, \quad (3.138)$$

$$t_4 = T \cosh \chi - Z_f \sinh \chi, \quad z_4^{(s)} = T \sinh \chi - Z_f \cosh \chi,$$

$$\text{où } \cosh \chi = \frac{\sqrt{s}}{2m}, \quad \sinh \chi = \beta \frac{\sqrt{s}}{2m}$$

Dans le couplage en voie t , la base de référence du vertex de gauche est

$$T_g = \frac{p_1 + p_3}{\sqrt{t + 4m^2}}, \quad Z_g = \frac{p_1 - p_3}{\sqrt{t}}, \quad Y, \quad X_{g\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T_g^\nu Y^\rho Z_g^\omega, \quad \text{avec}$$

$$t = -(p_1 - p_3)^2 = s\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.139)$$

Celle du vertex de droite est

$$T_d = \frac{p_2 + p_4}{\sqrt{t + 4m^2}}, \quad Z_d = \frac{p_4 - p_2}{\sqrt{t}} = Z_d, \quad Y, \quad X_{d\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\omega} T_d^\nu Y^\rho Z_d^\omega \quad (3.140)$$

Et l'on écrit

$$t_1 = T_g \cosh \xi + Z_g \sinh \xi, \quad z_1^{(t)} = T_g \sinh \xi + Z_g \cosh \xi,$$

$$t_3 = T_g \cosh \xi - Z_g \sinh \xi, \quad z_3^{(t)} = -T_g \sinh \xi + Z_g \cosh \xi,$$

$$t_2 = T_d \cosh \xi - Z_d \sinh \xi, \quad z_2^{(t)} = -T_d \sinh \xi + Z_d \cosh \xi, \quad (3.141)$$

$$t_4 = T_d \cosh \xi + Z_d \sinh \xi, \quad z_4^{(t)} = T_d \sinh \xi + Z_d \cosh \xi,$$

$$\text{où } \cosh \xi = \frac{\sqrt{t + 4m^2}}{2m}, \quad \sinh \xi = \frac{\sqrt{t}}{2m}$$

Bien entendu, nous excluons ici les situations où $\theta = 0$ ou bien $\theta = \pi$. Sous cette condition, on trouve les décompositions

$$\begin{aligned} T_g &= T \cosh \Upsilon + \sinh \Upsilon \left[Z_i \cos \frac{\theta}{2} + X_i \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ X_g &= T \sinh \Upsilon + \cosh \Upsilon \left[Z_i \cos \frac{\theta}{2} + X_i \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ T_d &= T \cosh \Upsilon - \sinh \Upsilon \left[Z_i \cos \frac{\theta}{2} + X_i \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ X_d &= -T \sinh \Upsilon + \cosh \Upsilon \left[Z_i \cos \frac{\theta}{2} + X_i \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ Z_g &= Z_d = Z_i \sin \frac{\theta}{2} - X_i \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

$$\text{avec } \cosh \Upsilon = \sqrt{\frac{s}{t + 4m^2}}, \quad \sinh \Upsilon = \beta \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{s}{t + 4m^2}}$$

desquelles il ressort que la tétrade $\{[T_g] : T_g, X_g, Y, Z_g\}$ se déduit de la tétrade $\{[T]_i : T, X_i, Y, Z_i\}$ par une transformation de Lorentz pure de rapidité Υ dans le 2-plan (T, X) , suivie d'une rotation d'angle $\psi = \frac{\theta - \pi}{2}$ autour de l'axe Y . On remarque que

$$\begin{aligned} \cosh \Upsilon &= \frac{\cosh \chi}{\cosh \xi} \quad \text{que} \\ \sqrt{\frac{t + 4m^2}{s}} X_g &= T\beta \cos \frac{\theta}{2} + Z_i \cos \frac{\theta}{2} + X_i \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.143)$$

et que $\Upsilon = \Theta/2$ où Θ est le paramètre défini en (3.117), où les masses sont prises toutes égales à m .

Les tétrades associées, par exemple à la particule 1, dans les deux types de couplage, en voie s et en voie t , ont en commun les deux vecteurs t_1 et Y . On doit donc passer de l'une à l'autre par une rotation autour de l'axe Y , dans le 2-plan orthogonal au 2-plan (t_1, Y) . Les formules ci-après permettent d'obtenir, à 2π près, l'angle de cette rotation. On a

$$\begin{aligned} z_1^{(t)} \cdot X_i &= -\sinh \xi \sinh \Upsilon \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2m}{\sqrt{s}} \cosh \Upsilon \cos \frac{\theta}{2} \\ z_1^{(t)} \cdot z_1^{(s)} &= \sinh \chi \sinh \xi \cosh \Upsilon - \cos \frac{\theta}{2} \cosh \chi \sinh \xi - \sin \frac{\theta}{2} \cosh \chi \cosh \xi = -\sin \frac{\theta}{2} \cosh \Upsilon, \quad \text{et} \\ X_g \cdot X_i &= -\sin \frac{\theta}{2} \cosh \Upsilon, \quad X_g \cdot z_1^{(s)} = -\frac{2m}{\sqrt{s}} \cosh \Upsilon \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

On peut donc écrire ($x_1^{(s)} = X_i$)

$$\begin{aligned} z_1^{(t)} &= z_1^{(s)} \cos \psi_1 + x_1^{(s)} \sin \psi_1, \quad x_1^{(t)} = X_g = -z_1^{(s)} \sin \psi_1 + x_1^{(s)} \cos \psi_1, \quad \text{avec} \\ \cos \psi_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cosh \Upsilon, \quad \sin \psi_1 = -\frac{2m}{\sqrt{s}} \cosh \Upsilon \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.144)$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} z_3^{(t)} &= -z_3^{(s)} \cos \psi_1 + x_3^{(s)} \sin \psi_1, \quad x_3^{(t)} = X_g = -z_3^{(s)} \sin \psi_1 - x_3^{(s)} \cos \psi_1, \\ \text{soit } \psi_3 &= \pi - \psi_1, \end{aligned}$$

puis $(x_2^{(s)} = -X_i, x_4^{(s)} = -X_f)$

$$\begin{aligned} z_2^{(t)} &= -z_2^{(s)} \cos \psi_1 - x_2^{(s)} \sin \psi_1, & x_2^{(t)} &= X_d = z_2^{(s)} \sin \psi_1 - x_2^{(s)} \cos \psi_1, \\ & & \text{soit } \psi_2 &= \pi + \psi_1, \\ z_4^{(t)} &= z_4^{(s)} \cos \psi_1 - x_4^{(s)} \sin \psi_1, & x_4^{(t)} &= X_d = z_4^{(s)} \sin \psi_1 + x_4^{(s)} \cos \psi_1, \\ & & \text{soit } \psi_4 &= 2\pi - \psi_1, \end{aligned}$$

et l'on observe les relations (à 2π près)

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi_4 - \psi_3 = \pi, \quad \psi_2 + \psi_3 = \psi_1 + \psi_4 = 2\pi$$

Lesdites rotations étant planes, on peut évidemment utiliser la formule (2.91) du chapitre 2 pour exprimer, au signe près, les matrices qui les représentent, par exemple,

$$\begin{aligned} L_1 = L([t_1]_t [t_1]_s^{-1}) &= \frac{1}{\text{Tr}([t_1]_t [t_1]_s^{-1})} \left[\gamma(t_1) \gamma(t_1) - \gamma(x_1^{(s)}) \gamma(x_1^{(t)}) - \gamma(Y) \gamma(Y) \right. \\ &\quad \left. - \gamma(z_1^{(s)}) \gamma(z_1^{(t)}) \right] = \pm \left[\cos \frac{\psi_1}{2} + \sin \frac{\psi_1}{2} \gamma(z_1^{(s)}) \gamma(x_1^{(s)}) \right] \end{aligned} \quad (3.145)$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} [t_1]_t &= [T_g \rightarrow t_\xi^{(t)}] [T_g], & [t_1]_s &= [T \rightarrow t_\chi^{(s)}] [T], \quad \text{et} \\ [t_1]_t [t_1]_s^{-1} &= [T_g \rightarrow t_\xi^{(t)}] L [T \rightarrow t_\chi^{(s)}]^{-1} \quad \text{avec } L = [T_g] [T]^{-1}, \\ t_\xi^{(t)} &= T_g \cosh \xi + Z_g \sinh \xi, & t_\chi^{(s)} &= T \cosh \chi + Z \sinh \chi \end{aligned}$$

On a

$$L^{-1} [T_g \rightarrow t_\xi^{(t)}] L = [T \rightarrow t_\chi^{(s)}], \quad \text{et donc } [t_1]_t [t_1]_s^{-1} = L [T \rightarrow t_{\xi-\chi}^{(s)}]$$

Comme expliqué plus haut, la transformation L est le produit d'une transformation Lorentz pure dans le 2-plan (T, X) et d'une rotation autour de l'axe Y . En représentation spinorielle de Dirac, on a donc

$$\begin{aligned} L_1 &= \left[\cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \gamma(Z) \gamma(X) \right] \left[\cosh \frac{\Upsilon}{2} + \sinh \frac{\Upsilon}{2} \gamma(X) \gamma(T) \right] \times \\ &\quad \times \left[\cosh \frac{\chi - \xi}{2} - \sinh \frac{\chi - \xi}{2} \gamma(Z) \gamma(T) \right] \end{aligned} \quad (3.146)$$

Il est instructif, bien que fastidieux, de montrer que l'expression (3.146) est équivalente à l'expression (3.145). Ceci est fait en appendice.

Le fait important ici est que lorsque $m \rightarrow 0$, $\psi_1 \rightarrow 0$, $\psi_2 \rightarrow \pi$, $\psi_3 \rightarrow \pi$, $\psi_4 \rightarrow 2\pi$, à 2π près. Par conséquent, à la limite des masses nulles, on a, *aux signes près*, les équivalences

$$\boxed{U_{1\sigma}^{(t)} \simeq U_{1\sigma}^{(s)}, \quad U_{2\sigma}^{(t)} \simeq (2\sigma) U_{2-\sigma}^{(s)}, \quad U_{3\sigma}^{(t)} \simeq (2\sigma) U_{3-\sigma}^{(s)}, \quad U_{4\sigma}^{(t)} \simeq U_{4\sigma}^{(s)}} \quad (3.147)$$

Il en résulte que, pour obtenir les formes bilinéaires dans les deux types de couplage lorsque $m = 0$, il suffit de considérer uniquement les formules établies dans le couplage en voie s ¹⁸. A cette fin, il faut tout d'abord utiliser des spineurs normalisés selon $\bar{U}U = 2m$ puis poser $m = 0$ dans les expressions obtenues pour les projecteurs ou les formes bilinéaires. On trouve ainsi les expressions ci-après.

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{2\sigma'} U_{1\sigma} &= -\sqrt{s} (2\sigma) \delta_{\sigma', -\sigma} = (2\sigma) \bar{U}_{2\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} \\
 \bar{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma', \sigma} \sqrt{s} (X + 2i\sigma Y)_\mu = (2\sigma) \bar{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} \\
 \bar{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= -\delta_{\sigma', -\sigma} \frac{\sqrt{s}}{2} \left[i(2\sigma) [T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu] + (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) \right] \\
 &= (2\sigma) \bar{U}_{2\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

Le tableau (3.148) indique qu'à la limite $m = 0$, on a la relation $\bar{U}_{2\sigma'} \Gamma \gamma_5 U_{1\sigma} = (2\sigma) \bar{U}_{2\sigma'} \Gamma U_{1\sigma}$. Ce résultat mérite une explication. Considérons une particule de spin 1/2, de 4-impulsion p et de masse m . Il est toujours possible de définir une base de référence $\{T, X, Y, Z\}$ telle que la tétrade $\{[t] : t, x, y, z\}$ associée à p puisse s'écrire

$$\begin{aligned}
 t = \frac{p}{m} &= T \cosh \chi + Z \sinh \chi, \quad z = T \sinh \chi + Z \cosh \chi, \quad x = X, \quad y = Y \\
 \text{où } \cosh \chi &= \frac{E}{m}, \quad \sinh \chi = \frac{E}{m} \beta, \quad \text{avec } \beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \\
 \text{soit } e^\chi &= \frac{E}{m} (1 + \beta), \quad e^{-\chi} = \frac{m}{E} \frac{1}{1 + \beta}
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Les spineurs U_σ de ladite particule vérifiant

$$S_z U_\sigma = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma(z) \gamma(t) U_\sigma = \sigma U_\sigma, \quad \gamma(t) U_\sigma = U_\sigma,$$

on a

$$\gamma(t \pm z) U_\sigma = e^{\pm\chi} \gamma(T + Z) U_\sigma = [1 \pm (2\sigma) \gamma_5] U_\sigma \tag{3.150}$$

d'où l'on déduit qu'à la limite $m = 0$ ($e^{-\chi} \rightarrow 0$), les spineurs deviennent vecteurs propres de la chiralité γ_5 :

$$\gamma_5 U_\sigma \simeq (2\sigma) U_\sigma \tag{3.151}$$

ce qui se traduit aussi par la relation $V_\sigma \simeq (2\sigma) U_\sigma$, d'où le résultat en question.

18. On notera le changement du signe de l'hélicité des particules 2 et 3 d'un couplage à l'autre.

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{3\sigma'} U_{1\sigma} &= -(2\sigma) \delta_{\sigma',-\sigma} \sqrt{t} = (2\sigma) \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_5 U_{1\sigma} \\
 \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{t} \left[[T_\mu + Z_\mu] \cot \frac{\theta}{2} + (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] \\
 &= (2\sigma) \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{1\sigma} \\
 \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} U_{1\sigma} &= \delta_{\sigma',-\sigma} \frac{\sqrt{t}}{2} \left[i(2\sigma) \cot \frac{\theta}{2} \left[(T + Z)_\mu (X + 2i\sigma Y)_\nu \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (T + Z)_\nu (X + 2i\sigma Y)_\mu \right] - (X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu) - (2\sigma) i(T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu) \right] \\
 &= (2\sigma) \overline{U}_{3\sigma'} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 U_{1\sigma}
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Dans les deux tableaux (3.148) et (3.152), la forme bilinéaire vectorielle s'exprime uniquement à l'aide des vecteurs de polarisations circulaires correspondant au couplage d'hélicité qui apparaît le plus naturel entre les deux particules considérées. Ainsi, pour les particules 1 et 2, couplées naturellement en voie s , lesdits vecteurs de polarisation sont

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{(s)}^{(\lambda)} &= -\lambda \frac{1}{\sqrt{2}} [X + i\lambda Y], \quad \text{et l'on a} \\
 \overline{U}_{2\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= -(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{2s} \left[\epsilon_{(s)}^{(2\sigma)} \right]_\mu
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

Pour les particules 1 et 3, couplées naturellement en voie t , les vecteurs de polarisation font intervenir X_g . Or, d'après (3.143), pour $m = 0$ on a

$$\begin{aligned}
 X_g &= X + \cot \frac{\theta}{2} (T + Z), \quad \text{et} \\
 X_g + i(2\sigma)Y &= \cot \frac{\theta}{2} (T + Z) + X + i(2\sigma)Y = -(2\sigma) \epsilon_{(t)}^{(2\sigma)}, \quad \text{d'où} \\
 \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= -(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{2t} \left[\epsilon_{(t)}^{(2\sigma)} \right]_\mu
 \end{aligned} \tag{3.154}$$

Le lecteur vérifiera que l'on a un résultat similaire pour les formes bilinéaires vectorielles $\overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma}$ et $\overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma}$, pour lesquelles on a cette fois une réminiscence de couplage "en voie u ". Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \overline{U}_{4\sigma'} \gamma_\mu U_{1\sigma} &= -(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{2u} \left[\epsilon_{(u)}^{(2\sigma)} \right]_\mu, \quad \overline{U}_{3\sigma'} \gamma_\mu U_{2\sigma} = -(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{2u} \left[\epsilon'_{(u)}^{(2\sigma)} \right]_\mu, \\
 \text{avec} \quad -\sqrt{2} (2\sigma) \epsilon_{(u)}^{(2\sigma)} &= X_u + i(2\sigma)Y, \quad X_u = X - \tan \frac{\theta}{2} (T + Z), \\
 -\sqrt{2} (2\sigma) \epsilon'_{(u)}^{(2\sigma)} &= X'_u + i(2\sigma)Y, \quad X'_u = X + \tan \frac{\theta}{2} (T - Z), \\
 u &= s \cos^2 \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

3.5 Couplage symétrique

Lorsque le nombre de particules apparaissant dans l'état final d'une réaction est supérieur à deux, il est préférable d'utiliser un couplage d'hélicité plus symétrique pour cet état final. Notons ici encore T, X, Y, Z les vecteurs de base définissant le référentiel du centre de masse de la réaction. Relativement à cette base, l'impulsion p d'une particule de masse m participant à la réaction s'écrit

$$p = TE + qZ \cos \theta + q \sin \theta (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \quad (3.156)$$

avec $q = \sqrt{E^2 - m^2}$. Associons à T la triade de 4-vecteurs du genre espace X', Y', Z' définis par

$$\begin{aligned} X' &= -Z \sin \theta + \cos \theta (X \cos \varphi + Y \sin \varphi), & Y' &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \\ Z' &= Z \cos \theta + \sin \theta (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \end{aligned} \quad (3.157)$$

On réalise un couplage d'hélicité entre T et p en associant à p la base :

$$\begin{aligned} t &= \frac{p}{m}, & x &= X', & y &= Y', & z &= T \sinh \chi + Z' \cosh \chi, & \text{où} \\ \cosh \chi &= \frac{E}{m}, & \sinh \chi &= \frac{q}{m} = \beta \frac{E}{m}, & \text{avec } \beta &= \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \end{aligned} \quad (3.158)$$

Ce couplage, du type couplage en voie s , est complètement symétrique vis-à-vis des particules de l'état final. Le choix du référentiel du centre de masse comme référence garantit la propriété de covariance qui est requise pour la définition d'une hélicité invariante. Le cas d'un état final à 3 particules a été abordé au chapitre 1. La transformation de Lorentz \mathcal{L} permettant de passer de ladite base de référence (T, X, Y, Z) à la base d'hélicité (t, x, y, z) est le produit de trois transformations : une transformation de Lorentz pure $\mathcal{H}_Z(\chi)$ de rapidité χ le long de l'axe Z , suivie d'une rotation $\mathcal{R}_Y(\theta)$ d'angle θ autour de l'axe Y , elle-même suivie d'une rotation $\mathcal{R}_Z(\varphi)$ d'angle φ autour de l'axe Z . En représentation spinorielle de Dirac :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{R}_Z(\varphi) \mathcal{R}_Y(\theta) \mathcal{H}_Z(\chi), & \text{avec} \\ \mathcal{R}_Z(\varphi) &= \cos \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} S_Z = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \gamma(X) \gamma(Y), \\ \mathcal{R}_Y(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} S_Y = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \gamma(Z) \gamma(X), \\ \mathcal{H}_Z(\chi) &= \cosh \frac{\chi}{2} + 2 \sinh \frac{\chi}{2} \gamma_5 S_Z = \cosh \frac{\chi}{2} + \sinh \frac{\chi}{2} \gamma(Z) \gamma(T) \end{aligned} \quad (3.159)$$

Dans la représentation spinorielle à deux dimensions, ces transformations sont décrites par les matrices

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Z^{(2)}(\varphi) &= \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} Z \tilde{T}, & \mathcal{R}_Y^{(2)}(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} Y \tilde{T}, \\ \mathcal{H}_Z^{(2)}(\chi) &= \cosh \frac{\chi}{2} + \sinh \frac{\chi}{2} Z \tilde{T} \end{aligned} \quad (3.160)$$

et la trace de leur produit $\mathcal{L}^{(2)}$ est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathcal{L}^{(2)} &= 2a_0 = \text{Tr}[T][T]^{-1} \mathcal{R}_Z^{(2)}(\varphi) \mathcal{R}_Y^{(2)}(\theta) \mathcal{H}_Z^{(2)}(\chi) \\ &= \text{Tr} \left[\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \tau_3 \right] \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \tau_2 \right] \left[\cosh \frac{\chi}{2} + \sinh \frac{\chi}{2} \tau_3 \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cosh \frac{\chi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sinh \frac{\chi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right]$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \left[\cosh \frac{\chi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sinh \frac{\chi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] \quad \text{et} \\ 2|a_0|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} [\cosh \chi + \cos \varphi] \end{aligned} \quad (3.161)$$

La transformation $(T, X, Y, Z) \rightarrow (t, x, y, z)$ n'est pas plane et c'est pourquoi le paramètre a_0 possède une partie imaginaire. Pour $\chi \neq 0$, cette partie imaginaire est imputable à la rotation $\mathcal{R}_Z(\varphi)$ ¹⁹. Utilisant la formule (7.98) de I.T.L, la matrice \mathcal{L} dans (3.159) peut être réécrite sous la forme²⁰

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\cosh \frac{\chi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sinh \frac{\chi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \gamma_5}{2 \cos \frac{\theta}{2} [\cosh \chi + \cos \varphi]} \times \\ &\times \left[\gamma(t)\gamma(T) - \gamma(x)\gamma(X) - \gamma(y)\gamma(Y) - \gamma(z)\gamma(Z) \right] \end{aligned} \quad (3.162)$$

Notons U_σ les spineurs de Dirac associés à la tétrade d'hélicité $[t]$ de p et ayant la normalisation $\bar{U}_{\sigma'} U_\sigma = 2 \delta_{\sigma', \sigma}$. On les obtient en appliquant la matrice \mathcal{L} aux spineurs de Dirac associés au référentiel de référence (tétrade $[T]$), notés $U_{0\sigma}$ et normalisés de la même façon : $U_\sigma = \mathcal{L} U_{0\sigma}$. On peut aussi les relier plus simplement aux spineurs de Dirac U'_σ associés à la tétrade d'hélicité $\{[T]': T, X', Y', Z'\}$, définis par

$$\begin{aligned} U'_\sigma &= \mathcal{R}_Z(\varphi) \mathcal{R}_Y(\theta) U_{0\sigma} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\sigma\varphi} U_{0\sigma} + (2\sigma) \sin \frac{\theta}{2} e^{i\sigma\varphi} U_{0-\sigma}, \quad \text{et l'on a} \\ U_\sigma &= \cosh \frac{\chi}{2} U'_\sigma + (2\sigma) \sinh \frac{\chi}{2} V'_\sigma \end{aligned} \quad (3.163)$$

Si la particule considérée est de spin 1/2, ses spineurs sont définis comme ci-dessus. S'il s'agit d'un photon réel ou d'un gluon, sa 4-impulsion k est du genre lumière et de la forme $k = E(T + Z')$. Ses vecteurs de polarisations circulaires sont

$$\epsilon^{(\lambda)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda x + iy) \quad (3.164)$$

x et y étant définis comme dans (3.158). Notons ici la relation

$$x = X \cos \varphi + Y \sin \varphi - (Z + Z') \tan \frac{\theta}{2} \quad (3.165)$$

qui permet de récrire ces vecteurs comme

$$\begin{aligned} \epsilon^{(\lambda)} &= E^{(\lambda)} \exp(-i\lambda\varphi) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tan \frac{\theta}{2} [(T + Z') - (T - Z)] \quad \text{où} \\ E^{(\lambda)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\lambda X + iY] \end{aligned} \quad (3.166)$$

19. A ce propos, le lecteur vérifiera que la transformation $[t_3]_s [t_1]_s^{-1}$ est plane.

20. En explicitant les 4-vecteurs dans (3.162), le lecteur vérifiera aussi, en usant abondamment de la relation $\gamma_5 = i\gamma(X)\gamma(Y)\gamma(Z)\gamma(T)$, que l'expression obtenue coïncide bien avec le développement du produit (3.159).

Si l'on considère des amplitudes issues de la théorie électro-faible ou de la Chromodynamique Quantique, celles-ci étant invariantes de jauge vis-à-vis du photon ou du gluon, on peut ignorer le terme $\propto (T+Z') \propto k$ dans l'expression ci-dessus et redéfinir les vecteurs de polarisations circulaires par

$$\begin{aligned}\epsilon^{(\lambda)} &= \exp(-i\lambda\varphi) \left[E^{(\lambda)} + \xi(T-Z) \right], \quad \text{où} \\ \xi &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tan \frac{\theta}{2} \exp(i\lambda\varphi)\end{aligned}\tag{3.167}$$

Il est facile de vérifier que ces nouveaux vecteurs sont encore orthogonaux à la fois à k et à $T-Z$.

Pour les applications dans le domaine dit "ultra-relativiste", celui des très hautes énergies pour lesquelles $E \gg m$, il peut être utile de pouvoir distinguer nettement, parmi les composantes de spineurs, celles qui sont les plus importantes dans ce domaine (les "grandes composantes") de celles pouvant y être négligées (les "petites composantes"). Comme nous allons le voir, l'utilisation conjointe de la paramétrisation (3.163) et de *projecteurs de chiralité* permet d'effectuer une telle distinction, où la rapidité χ , définie en (3.158), est déterminante; et ce, tout en évitant d'avoir à donner une représentation explicite des spineurs, en donnant de surcroît la possibilité de contrôler efficacement les approximations effectuées.

Au spineur (3.163), appliquons le projecteur de chiralité $\frac{1}{2}[1 + \eta\gamma_5]$ où $\eta = \pm 1$. On obtient

$$\frac{1}{2}[1 + \eta\gamma_5] U_\sigma = \frac{1}{2}[1 + \eta\gamma_5] \left[\cosh \frac{\chi}{2} + \eta(2\sigma) \sinh \frac{\chi}{2} \right] U'_\sigma$$

Choisissons $\eta = \pm(2\sigma)$ et posons $P_\sigma^{(\pm)} = \frac{1}{2}[1 \pm (2\sigma)\gamma_5]$. Il vient

$$P_\sigma^{(+)} U_\sigma = e^{\chi/2} P_\sigma^{(+)} U'_\sigma, \quad P_\sigma^{(-)} U_\sigma = e^{-\chi/2} P_\sigma^{(-)} U'_\sigma$$

Pour $E \gg m$, on a clairement $e^{\chi/2} \gg e^{-\chi/2}$, et l'on voit que la décomposition d'un spineur en spineurs propres de la chiralité, qui revient à une décomposition de Weyl dans la représentation initiale des spineurs, permet de faire une distinction claire entre composantes, dans leurs comportements à très haute énergie. Dorénavant, nous utiliserons des spineurs normalisés selon $\bar{U}U = 2m$, tout en gardant pour les spineurs U' la normalisation $\bar{U}'U' = 2$. Nous poserons

$$\begin{aligned}U_\sigma^{(\pm)} &= P_\sigma^{(\pm)} U_\sigma = \sqrt{m} e^{\pm\chi/2} P_\sigma^{(\pm)} U'_\sigma, \quad \text{et} \\ U_\sigma &= U_\sigma^{(+)} + U_\sigma^{(-)}\end{aligned}\tag{3.168}$$

Manifestement, les spineurs $U^{(\pm)}$ ne dépendent de l'énergie E que par les facteurs $\sqrt{m} e^{\pm\chi/2}$. On a

$$\begin{aligned}e^\chi &= \cosh \chi + \sinh \chi = \frac{E}{m}(1 + \beta), \quad \text{et} \\ \sqrt{m} e^{\chi/2} &= \sqrt{E(1 + \beta)}, \quad \sqrt{m} e^{-\chi/2} = \frac{m}{\sqrt{E(1 + \beta)}}\end{aligned}\tag{3.169}$$

Du point de vue de leurs dépendances vis-à-vis de l'énergie, il y a donc un rapport m/E entre $U^{(-)}$ et $U^{(+)}$, le premier spineur portant ainsi les petites composantes du spineur U , tandis que le second en porte les grandes. Il est aussi intéressant de noter le fait suivant. On a

$$\begin{aligned}U_\sigma^{(\pm)} &= \sqrt{m} e^{\pm\chi/2} P_\sigma^{(\pm)} U'_\sigma = \sqrt{m} e^{\pm\chi/2} \mathcal{R}_Z(\varphi) \mathcal{R}_Y(\theta) P_\sigma^{(\pm)} U_{0\sigma}, \quad \text{et} \\ P_\sigma^{(\pm)} U_{0\sigma} &= \frac{1}{2}[1 \pm 2\gamma_5 S_Z] U_{0\sigma} \equiv \frac{1}{2}\gamma(T \pm Z) U_{0\sigma}; \quad \text{or,}\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_Y(\theta)\gamma(T \pm Z) = \cos \frac{\theta}{2} \gamma(T \pm Z) - \sin \frac{\theta}{2} \gamma(T \mp Z) 2iS_Y, \quad \text{de sorte que}$$

$$U_\sigma^{(\pm)} = \frac{1}{2} \sqrt{m} e^{\pm \chi/2} \mathcal{R}_Z(\varphi) \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \gamma(T \pm Z) U_{0\sigma} + (2\sigma) \sin \frac{\theta}{2} \gamma(T \mp Z) U_{0-\sigma} \right\} \quad (3.170)$$

On voit alors qu'en appliquant $\gamma(T \pm Z)$ aux spineurs "chiraux" $U^{(\pm)}$, on peut sélectionner d'autres termes dans les spineurs. On a en effet :

$$\begin{aligned} \gamma(T - Z) U_\sigma^{(+)} &= \sqrt{E(1 + \beta)} \mathcal{R}_Z(\varphi) \cos \frac{\theta}{2} [1 - (2\sigma)\gamma_5] U_{0\sigma} \\ \gamma(T + Z) U_\sigma^{(+)} &= (2\sigma) \sqrt{E(1 + \beta)} \mathcal{R}_Z(\varphi) \sin \frac{\theta}{2} [1 - (2\sigma)\gamma_5] U_{0-\sigma} \\ \gamma(T + Z) U_\sigma^{(-)} &= \frac{m}{\sqrt{E(1 + \beta)}} \mathcal{R}_Z(\varphi) \cos \frac{\theta}{2} [1 + (2\sigma)\gamma_5] U_{0\sigma} \\ \gamma(T - Z) U_\sigma^{(-)} &= (2\sigma) \frac{m}{\sqrt{E(1 + \beta)}} \mathcal{R}_Z(\varphi) \sin \frac{\theta}{2} [1 + (2\sigma)\gamma_5] U_{0-\sigma} \end{aligned}$$

Dans une configuration de haute énergie et de petit angle de diffusion θ , les projections ci-dessus se classent respectivement en terme d'ordre zéro pour la première, termes d'ordre 1 pour la seconde et la troisième²¹.

Etant donné deux particules de spin 1/2 étiquetées par les indices (i) et (j), considérons les formes bilinéaires $F = \overline{U}_{j\sigma_j}^{(\epsilon_j)} \Gamma U_{i\sigma_i}^{(\epsilon_i)}$. Comme

$$\gamma_5 U_{i\sigma_i}^{(\epsilon_i)} = \epsilon_i (2\sigma_i) U_{i\sigma_i}^{(\epsilon_i)}, \quad \text{il vient} \quad \epsilon_i (2\sigma_i) F = \overline{U}_{j\sigma_j}^{(\epsilon_j)} \Gamma \gamma_5 U_{i\sigma_i}^{(\epsilon_i)} = -\epsilon \epsilon_j (2\sigma_j) F$$

avec $\epsilon = +1$ ou $\epsilon = -1$, selon que Γ commute ou anti-commute avec γ_5 , respectivement. La forme bilinéaire considérée est donc a priori non nulle si $\epsilon_i (2\sigma_i) = -\epsilon \epsilon_j (2\sigma_j)$, soit

$$\boxed{\sigma_j = -\epsilon \epsilon_i \epsilon_j \sigma_i} \quad (3.171)$$

Si l'on a envisagé un régime ultra-relativiste où $U_\sigma \approx U_\sigma^{(+)}$, on sera plutôt enclin à considérer principalement le cas $\epsilon_i = \epsilon_j = 1$. La relation (3.171) indique alors que pour $\Gamma = 1, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$, ($\epsilon = +1$), la forme bilinéaire correspondante n'est a priori non nulle que si $\sigma_j = -\sigma_i$; tandis que les formes bilinéaires correspondant à $\Gamma = \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5$, ($\epsilon = -1$), ne sont a priori non nulles que si $\sigma_j = \sigma_i$. On retrouve ici le fait que pour les théories du modèle standard, qui reposent sur des couplages vectoriels entre particules, l'hélicité se conserve. Dans cette même perspective, calculons explicitement la forme bilinéaire correspondant à $\Gamma = \gamma_\mu$; celle avec $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ s'en déduit facilement, puisque $\gamma_5 U_\sigma^{(+)} = (2\sigma) U_\sigma^{(+)}$. On a

$$U_\sigma^{(+)} = \frac{1}{2} \sqrt{E(1 + \beta)} [1 + (2\sigma)\gamma_5] \left[e^{-i\sigma\varphi} \cos \frac{\theta}{2} U_{0\sigma} + (2\sigma) e^{i\sigma\varphi} \sin \frac{\theta}{2} U_{0-\sigma} \right] \quad \text{et}$$

$$\overline{U}_{j\sigma_j}^{(+)} \gamma_\mu U_{i\sigma_i}^{(+)} = \sqrt{E_j E_i (1 + \beta_j)(1 + \beta_i)} G, \quad \text{avec}$$

21. A ce sujet, voir par exemple, C. Carimalo, hep-ph arXiv :1401.4407

$$G = \frac{1}{4} \left[e^{i\sigma'\varphi_j} \cos \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0\sigma'} + (2\sigma') e^{-i\sigma'\varphi_j} \sin \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0-\sigma'} \right] [1 - (2\sigma')\gamma_5] \gamma_\mu [1 + (2\sigma)\gamma_5] \times \\ \times \left[e^{-i\sigma\varphi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} U_{0\sigma} + (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} U_{0-\sigma} \right]$$

Comme $[1 - (2\sigma')\gamma_5] \gamma_\mu [1 + (2\sigma)\gamma_5] = \gamma_\mu [1 + (2\sigma')\gamma_5] [1 + (2\sigma)\gamma_5] = 2\delta_{\sigma,\sigma'} \gamma_\mu [1 + (2\sigma)\gamma_5]$, il vient $G = \delta_{\sigma',\sigma} G'$, où

$$G' = \frac{1}{2} \left[e^{i\sigma\varphi_j} \cos \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0\sigma} + (2\sigma) e^{-i\sigma\varphi_j} \sin \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0-\sigma} \right] \gamma_\mu [1 + (2\sigma)\gamma_5] \times \\ \times \left[e^{-i\sigma\varphi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} U_{0\sigma} + (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} U_{0-\sigma} \right]$$

Rappelons que

$$\overline{U}_{0\sigma'} \gamma_\mu U_{0\sigma} = 2\delta_{\sigma',\sigma} T_\mu, \quad \overline{U}_{0\sigma'} \gamma_\mu \gamma_5 U_{0\sigma} = 2(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} Z_\mu + 2\delta_{\sigma',-\sigma} [X + i(2\sigma)Y]_\mu, \quad \text{donc} \\ \overline{U}_{0\sigma'} \gamma_\mu [1 + \eta(2\sigma)\gamma_5] U_{0\sigma} = 2\delta_{\sigma',\sigma} [T + \eta Z]_\mu + 2(2\sigma) \eta \delta_{\sigma',-\sigma} [X + i(2\sigma)Y]_\mu \quad (\eta = \pm 1)$$

Pour $\Gamma = \gamma_\mu$, on en déduit

$$G'_\mu = e^{i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} [T + Z]_\mu + e^{-i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} [T - Z]_\mu \\ + e^{-i\sigma(\varphi_j + \varphi_i)} \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} [X + i(2\sigma)Y]_\mu + e^{i\sigma(\varphi_j + \varphi_i)} \cos \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} [X - i(2\sigma)Y]_\mu \quad (3.172)$$

Il est facile de vérifier que

$$[G']^2 = 0, \quad G' \cdot [G']^* = -[1 - \cos \theta_{ji}], \quad \text{où} \\ \cos \theta_{ji} = \cos \theta_j \cos \theta_i + \sin \theta_j \sin \theta_i \cos(\varphi_j - \varphi_i) \quad (3.173)$$

Le vecteur G' , isotrope et tel que $G' \cdot [G']^* < 0$, s'apparente à un vecteur de polarisation circulaire. Ceci nous amène à poser

$$\epsilon_{ji}^{(2\sigma)} = -(2\sigma) \frac{G'}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{\theta_{ji}}{2} \right|}, \quad \text{de sorte que} \\ \overline{U}_{j\sigma'}^{(+)} \gamma_\mu U_{i\sigma}^{(+)} = (2\sigma) \overline{U}_{j\sigma'}^{(+)} \gamma_\mu V_{i\sigma}^{(+)} \quad (3.174) \\ = -(2\sigma) \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{\frac{(1 + \beta_j)(1 + \beta_i)}{4}} \sqrt{2Q_{ji}} \left[\epsilon_{ji}^{(2\sigma)} \right]_\mu \quad \text{où} \\ Q_{ji} = 2E_j E_i (1 - \cos \theta_{ji})$$

L'expression de la forme bilinéaire présentée dans (3.174) est tout à fait similaire à celles dans (3.154) et (3.155), lorsque les masses des particules peuvent être négligées. En effet, dans ces conditions, la grandeur Q_{ji} peut tout aussi bien être interprétée comme le carré $M_{ji}^2 = (p_j + p_i)^2$ de la masse invariante du système des deux particules (j) et (i) si celles-ci sont toutes deux dans l'état final²², que comme le transfert $\Delta_{ji} = -(p_i - p_j)^2$, si la particule (j) est dans l'état final tandis que la particule (i) est dans l'état initial; de plus, $(1 + \beta_j)(1 + \beta_i)/4 \simeq 1$. Le vecteur $\epsilon_{ji}^{(2\sigma)}$ doit donc représenter un vecteur de polarisation circulaire d'un couplage en voie s ou en voie t . Pour mettre ce fait en évidence, prenons $m_j = m_i = 0$ et définissons

$$T_{ji} = \frac{p_j + p_i}{\sqrt{Q_{ji}}}, \quad X_{ji} = -(2\sigma)\sqrt{2} \Re \left\{ \epsilon_{ji}^{(2\sigma)} \right\}, \quad Y_{ji} = -\sqrt{2} \Im \left\{ \epsilon_{ji}^{(2\sigma)} \right\} \quad (3.175)$$

C'est un excellent exercice formateur que de démontrer la relation

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} X_{ji}^\rho Y_{ji}^\delta &= -[T_{ji}]_\mu [Z_{ji}]_\nu + [T_{ji}]_\nu [Z_{ji}]_\mu, \quad \text{où} \\ Z_{ji} &= \frac{p_i - p_j}{\sqrt{Q_{ji}}} \end{aligned}} \quad (3.176)$$

qui montre que les quatre vecteurs $T_{ji}, X_{ji}, Y_{ji}, Z_{ji}$ forment une base orthonormée et d'orientation directe, et que cette base est associée à un couplage d'hélicité entre les deux particules concernées, en voie s ou en voie t selon la position des particules dans la réaction²³. Ceci généralise les observations faites à la fin du précédent paragraphe.

Examinons maintenant le projecteur $P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma') = U_{i\sigma}^{(+)} \bar{U}_{j\sigma'}^{(+)}$ (avec $m \neq 0$). Comme toute matrice 4×4 , il peut être décomposé sur la base des 16 matrices de Dirac, dont les coefficients sont les formes bilinéaires considérées plus haut.

$$P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma') = S + P \gamma_5 + V^\mu \gamma_\mu + A^\mu \gamma_\mu \gamma_5 + T^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad \text{avec} \\ \text{Tr} \left[\Gamma_\alpha P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma') \right] = \bar{U}_{j\sigma'}^{(+)} \Gamma_\alpha U_{i\sigma}^{(+)}$$

Il est avantageux de décomposer préalablement le projecteur comme suit

$$P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma') = \delta_{\sigma', \sigma} P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma) + \delta_{\sigma', -\sigma} P_{ij}^{(+)}(\sigma, -\sigma)$$

D'après ce qui précède, la partie $P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma)$ du projecteur n'a de composantes que sur les matrices γ_μ et $\gamma_\mu \gamma_5$, tandis que l'autre partie $P_{ij}^{(+)}(\sigma, -\sigma)$ se décompose uniquement sur les matrices $1, \gamma_5$ et $\sigma_{\mu\nu}$. On a

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(+)}(\sigma, \sigma) &= \frac{1}{4} \left[\gamma_\mu \bar{U}_{j\sigma}^{(+)} \gamma^\mu U_{i\sigma}^{(+)} - \gamma_\mu \gamma_5 \bar{U}_{j\sigma}^{(+)} \gamma^\mu \gamma_5 U_{i\sigma}^{(+)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \gamma_\mu [1 - (2\sigma)\gamma_5] \bar{U}_{j\sigma}^{(+)} \gamma^\mu U_{i\sigma}^{(+)} \end{aligned} \quad (3.177)$$

où la forme $\bar{U}_{j\sigma}^{(+)} \gamma^\mu U_{i\sigma}^{(+)}$ peut être exprimée selon (3.174). Calculons ensuite

22. Auquel cas, la particule (i) est une anti-particule, plutôt représentée par le spineur $V_{i\sigma}^{(+)} = \gamma_5 U_{i\sigma}^{(+)}$.

23. A noter qu'à la limite des masses nulles, on a $\gamma(p_i) U_i^{(+)} = \gamma(p_j) U_j^{(+)} = 0$ et par conséquent $p_i \cdot \epsilon_{ji}^{(2\sigma)} = p_j \cdot \epsilon_{ji}^{(2\sigma)} = 0$, soit encore, $p_i \cdot X_{ji} = p_j \cdot X_{ji} = p_i \cdot Y_{ji} = p_j \cdot Y_{ji} = 0$, conformément à un couplage d'hélicité.

$$\begin{aligned} \overline{U}_{j-\sigma}^{(+)} U_{i\sigma}^{(+)} &= (2\sigma) \overline{U}_{j-\sigma}^{(+)} \gamma_5 U_{i\sigma}^{(+)} = \sqrt{E_j E_i (1 + \beta_j)(1 + \beta_i)} F_{ji}^\sigma \\ \text{où } F_{ji}^\sigma &= \frac{1}{2} \left[e^{-i\sigma\varphi_j} \cos \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0-\sigma} - (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_j} \sin \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0\sigma} \right] [1 + (2\sigma)\gamma_5] \times \\ &\quad \times \left[e^{-i\sigma\varphi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} U_{0\sigma} + (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} U_{0-\sigma} \right], \text{ soit} \\ F_{ji}^\sigma &= (2\sigma) \left[e^{-i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \cos \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} - e^{i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.178)$$

et l'on a

$$\boxed{|F_{ji}^\sigma|^2 = \sin^2 \frac{\theta_{ji}}{2}} \quad (3.179)$$

Puis

$$\begin{aligned} \overline{U}_{j-\sigma}^{(+)} \sigma_{\mu\nu} U_{i\sigma}^{(+)} &= \sqrt{E_j E_i (1 + \beta_j)(1 + \beta_i)} [T_{ji}^\sigma]_{\mu\nu} \\ \text{où } [T_{ji}^\sigma]_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[e^{-i\sigma\varphi_j} \cos \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0-\sigma} - (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_j} \sin \frac{\theta_j}{2} \overline{U}_{0\sigma} \right] [1 + (2\sigma)\gamma_5] \sigma_{\mu\nu} \times \\ &\quad \times \left[e^{-i\sigma\varphi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} U_{0\sigma} + (2\sigma) e^{i\sigma\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} U_{0-\sigma} \right], \text{ soit} \\ [T_{ji}^\sigma]_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} i (2\sigma) \left[e^{-i\sigma(\varphi_j + \varphi_i)} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \left[(T + Z)_\mu (X + i(2\sigma)Y)_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (T + Z)_\mu (X + i(2\sigma)Y)_\nu \right] + \left[e^{i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} + e^{-i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \cos \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[T_\mu Z_\nu - T_\nu Z_\mu - i(2\sigma) [X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu] \right] - e^{i\sigma(\varphi_j + \varphi_i)} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} \times \\ &\quad \left. \times \left[(T - Z)_\mu (X - i(2\sigma)Y)_\nu - (T - Z)_\nu (X - i(2\sigma)Y)_\mu \right] \right] \end{aligned}$$

et finalement

$$P_{ij}^{(+)}(\sigma, -\sigma) = \sqrt{E_j E_i (1 + \beta_j)(1 + \beta_i)} \left[\frac{1}{4} [1 + (2\sigma)\gamma_5] F_{ji}^\sigma + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} T_{ji}^{\mu\nu} \right] \quad (3.180)$$

Dans un premier temps, supposons non nulles, et toutes deux égales à m pour simplifier, les masses des particules (i) et (j). Couplons les deux particules en hélicité, avec pour base de référence

$$T_{ji} = \frac{p_j + p_i}{\sqrt{s_{ji}}}, \quad Z_{ji} = \frac{p_j - p_i}{\sqrt{s_{ji}}}, \quad X_{ji}, \quad Y_{ji}, \quad \text{avec } s_{ji} = 2m^2 + 2p_j \cdot p_i \quad (3.181)$$

et où les vecteurs X_{ji} et Y_{ji} ne coïncident avec ceux définis en (3.175) que lorsque $m = 0$. Soit $[t_i]'$ la tétrade associée à t_i dans ce couplage, similaire à celles étudiées dans le couplage en voie t . Comme cette tétrade et la tétrade $[t_i]$ définie dans le couplage symétrique ont le vecteur t_i en commun, on passe de l'une à l'autre par une rotation. Prenons ensuite $m = 0$. Dans ce cas, la

tétrade de référence (3.181) devient exactement celle définie dans (3.175). Nous invitons alors le lecteur à établir²⁴ et à interpréter²⁵ les relations

$$\begin{aligned}
 X_{ji} + i(2\sigma)Y_{ji} &= e^{i\Psi_s} [X_i + i(2\sigma)Y_i] + e^{i\Psi_c} (T + Z_i) \left| \cot \frac{\theta_{ji}}{2} \right| \\
 &= -e^{-i\Psi_s} [X_j - i(2\sigma)Y_j] + e^{i\Psi_c} (T + Z_j) \left| \cot \frac{\theta_{ji}}{2} \right|, \quad \text{où} \\
 e^{i\Psi_s} &= \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta_{ji}}{2} \right|} \left[\sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} - \cos \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} e^{i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \right], \\
 e^{i\Psi_c} &= \frac{1}{\left| \cos \frac{\theta_{ji}}{2} \right|} \left[\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} + \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} e^{-i\sigma(\varphi_j - \varphi_i)} \right]
 \end{aligned} \tag{3.182}$$

Nous invitons également le lecteur à vérifier que dans ce couplage d'hélicité symétrique, l'hélicité d'une particule, considérée dans le référentiel du centre de masse de la réaction, y est représentée par la projection de son spin sur le vecteur unitaire de sa 3-impulsion.

Pour terminer, notons que le choix des axes spatiaux X, Y, Z du référentiel du centre de masse est généralement dicté par des considérations pratiques. Par exemple, l'axe de collision des deux particules de l'état initial est pris de façon naturelle comme axe Z . Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, il peut être judicieux de choisir les vecteurs spatiaux de la base de référence de l'état final en fonction de leurs propriétés au regard du groupe des permutations des particules composant cet état. La nouvelle base ainsi choisie se déduit alors de celle de l'état initial par une simple rotation.

24. Et, en l'occurrence, à vérifier.

25. Revoir le paragraphe 2.1.1, ③.

3.6 Appendice : équivalence entre (3.146) et (3.145)

Le développement du produit de matrices (3.146), donne une expression du type

$$L_1 = a_1 + a_2 \gamma(X) \gamma(T) + a_3 \gamma(Z) \gamma(T) + a_4 \gamma(X) \gamma(Z)$$

Il est inutile d'expliciter ici les coefficients a_i , car cette expression doit être transformée en exprimant les vecteurs T et Z en fonction de t_1 et $z_1^{(s)}$, de manière à faire apparaître le générateur $\gamma(z_1^{(s)}) \gamma(X)$ de la rotation attendue. Cette opération conduit à

$$L_1 = A_1 + A_2 \gamma(z_1^{(s)}) \gamma(X) + A_3 \gamma(X) \gamma(t_1) + A_4 \gamma(z_1^{(s)}) \gamma(t_1), \quad \text{où}$$

$$A_1 = \cos \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\Upsilon}{2} \cosh \frac{\chi - \xi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\Upsilon}{2} \sinh \frac{\chi - \xi}{2}$$

$$A_2 = \cos \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\Upsilon}{2} \sinh \frac{\chi + \xi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\Upsilon}{2} \cosh \frac{\chi + \xi}{2}$$

$$A_3 = \cos \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\Upsilon}{2} \cosh \frac{\chi + \xi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\Upsilon}{2} \sinh \frac{\chi + \xi}{2}$$

$$-A_4 = \cos \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\Upsilon}{2} \sinh \frac{\chi - \xi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\Upsilon}{2} \cosh \frac{\chi - \xi}{2}$$

Il reste maintenant à montrer que cette expression peut être mise sous la forme (3.145), et notamment à montrer en premier lieu que $A_3 = A_4 = 0$. Pour la commodité d'écriture, nous poserons ici $c = \cos \frac{\theta}{2}$, $s = \sin \frac{\theta}{2}$, $r = \sqrt{1 - \beta^2 c^2}$. Une première étape consiste à exprimer des fonctions hyperboliques et trigonométriques, comme il est fait ci-après.

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 + \cosh(\chi - \xi) &= 1 + \cosh \chi \cosh \xi - \sinh \chi \sinh \xi = \frac{1}{1 - \beta^2} [r + 1 - \beta^2(s + 1)] \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1 - r}{1 - r} [r + 1 - \beta^2(s + 1)] = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (1 + s) \frac{r - s}{1 - r} \\ &= \frac{(1 + s)(1 + r)}{r + s} = 2 \cosh^2 \left(\frac{\chi - \xi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cosh(\chi - \xi) - 1 &= \frac{1}{1 - \beta^2} [r - 1 + \beta^2(1 - s)] = \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1 + r}{1 + r} [r - 1 + \beta^2(1 - s)] \\ &= \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (1 - s) \frac{r - s}{1 + r} = \frac{(1 - s)(1 - r)}{r + s} = 2 \sinh^2 \left(\frac{\chi - \xi}{2} \right) \end{aligned}$$

Le passage de $\chi - \xi$ à $\chi + \xi$ équivaut à changer s en $-s$. Donc

$$(3) \quad 2 \cosh^2 \left(\frac{\chi + \xi}{2} \right) = \frac{(1 - s)(1 + r)}{r - s}, \quad 2 \sinh^2 \left(\frac{\chi + \xi}{2} \right) = \frac{(1 + s)(1 - r)}{r - s}$$

$$(4) \quad 2 \cosh^2 \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1 + r}{r}, \quad 2 \sinh^2 \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1 - r}{r}$$

$$(5) \quad \cos \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \frac{\theta}{4} + \sin \frac{\theta}{4} \right] = \sqrt{\frac{1 + s}{2}}, \quad \sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \frac{\theta}{4} - \cos \frac{\theta}{4} \right] = -\sqrt{\frac{1 - s}{2}}$$

Utilisant ces expressions, on trouve

$$A_3 = \frac{1}{2\sqrt{2r(r-s)}} \left[\sqrt{1+s}\sqrt{1-r}\sqrt{(1-s)(1+r)} - \sqrt{1-s}\sqrt{1+r}\sqrt{(1+s)(1-r)} \right] = 0$$

$$-A_4 = \frac{1}{2\sqrt{2r(r+s)}} \left[\sqrt{1+s}\sqrt{1+r}\sqrt{(1-s)(1-r)} - \sqrt{1-s}\sqrt{1-r}\sqrt{(1+s)(1+r)} \right] = 0$$

Puis

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2r(r+s)}} \left[\sqrt{1+s}\sqrt{1+r}\sqrt{(1+s)(1+r)} - \sqrt{1-s}\sqrt{1-r}\sqrt{(1-s)(1-r)} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2r(r+s)}} \times 2(r+s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{s}{r}} = \cos \frac{\psi_1}{2}, \quad (\cos \psi_1 = \frac{s}{r} > 0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2r(r-s)}} \left[\sqrt{1+s}\sqrt{1-r}\sqrt{(1+s)(1-r)} - \sqrt{1-s}\sqrt{1+r}\sqrt{(1-s)(1+r)} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2r(r-s)}} \times 2(s-r) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{s}{r}} = \sin \frac{\psi_1}{2} \quad (\sin \psi_1 < 0). \end{aligned}$$

En conclusion, le produit matriciel (3.146) a bien la forme (3.145) attendue.