

CORRIGÉS DES EXAMENS
D'ELECTROMAGNÉTISME
ET D'OPTIQUE

Christian Carimalo

Superposition, interférences

1°) $k = \frac{\omega}{c}$; $\vec{u}_1 = \vec{k}_1 / k_1 = -\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_z$

2°) $\vec{B}_1 = -\frac{j}{2} B_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})}$, avec $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = k(-\cos\theta x + \sin\theta z)$.

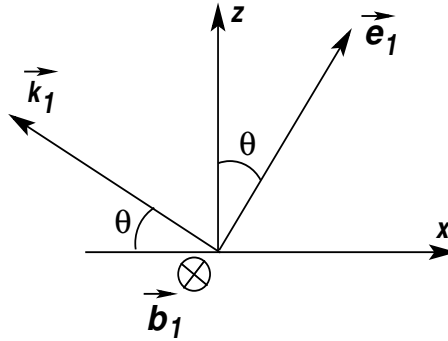
3°) La relation $\text{rot } \vec{B}_1 = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_1$, donne ici $\vec{E}_1 = \vec{B}_1 \wedge c \vec{u}_1$ d'où

$$\vec{E}_1 = -\frac{j c}{2} B_0 [\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_z] e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})}.$$

4°) $\vec{e}_1 = \Re[\vec{E}_1] = \frac{c B_0}{2} [\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_z] \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$;

$$\vec{b}_1 = \Re[\vec{B}_1] = \frac{B_0}{2} \vec{e}_y \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$$

5°)



6°) $\vec{R}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_1 \wedge \vec{b}_1 = \frac{c B_0^2}{4 \mu_0} \sin^2(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \vec{u}_1$. 7°) $r_1 = \frac{c B_0^2}{8 \mu_0} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$
(puissance moyenne transférée par unité de surface).

8°) $\vec{B}_2 = \frac{j}{2} B_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}$, avec $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k(\cos\theta x + \sin\theta z)$; $\vec{E}_2 = \vec{B}_2 \wedge c \vec{u}_2$ avec

$$\vec{u}_2 = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_z, \text{ soit } \vec{E}_2 = \frac{j c}{2} B_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} [\sin\theta \vec{e}_x - \cos\theta \vec{e}_z]$$

9°) $\vec{E} = c B_0 e^{j(\omega t - k \sin\theta z)} [\sin\theta \vec{e}_x \sin(k \cos\theta x) - j \cos\theta \vec{e}_z \cos(k \cos\theta x)]$

$\vec{B} = B_0 e^{j(\omega t - k \sin\theta z)} \vec{e}_y \sin(k \cos\theta x)$. Cette onde se propage dans la direction $z'z$, avec la vitesse de phase $v_\phi = \omega / (k \sin\theta) = c / \sin\theta > c$; les champs réels sont :

$$\vec{e} = c B_0 \left[\vec{e}_x \sin\theta \sin(k \cos\theta x) \cos\varphi + \vec{e}_z \cos\theta \cos(k \cos\theta x) \sin\varphi \right] \text{ et}$$

$$\vec{b} = B_0 \vec{e}_y \sin(k \cos \theta x) \cos \varphi, \text{ où } \varphi = \omega t - k \sin \theta z.$$

$$10^\circ) \text{ a) } \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{e} \wedge \vec{b} = \frac{cB_0^2}{\mu_0} \left[\vec{e}_z \sin \theta \sin^2(k \cos \theta x) \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \vec{e}_x \cos \theta \sin(2k \cos \theta x) \sin 2\varphi \right];$$

$$\langle \vec{R} \rangle = I \vec{e}_z \text{ avec } I = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \sin \theta \sin^2(k \cos \theta x) = \frac{cB_0^2}{4\mu_0} \cos \theta [1 - \cos(2k \cos \theta x)].$$

$$\text{b) L'interfrange est : } \ell = \frac{\lambda}{2 \cos \theta} \text{ où } \lambda = 2\pi c/\omega.$$

11°) i) Circulation du champ électrique.

$$\mathcal{E} = \int_{-a/2}^{a/2} dz [E_z(t, 0, z) - E_z(t, a, z)] + \int_0^a dx [E_x(t, x, a/2) - E_x(t, x, -a/2)];$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} dz [E_z(t, 0, z) - E_z(t, a, z)] = -jcB_0 e^{j\omega t} [1 - \cos(ka \cos \theta)] \frac{2 \cos \theta}{k \sin \theta} \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right),$$

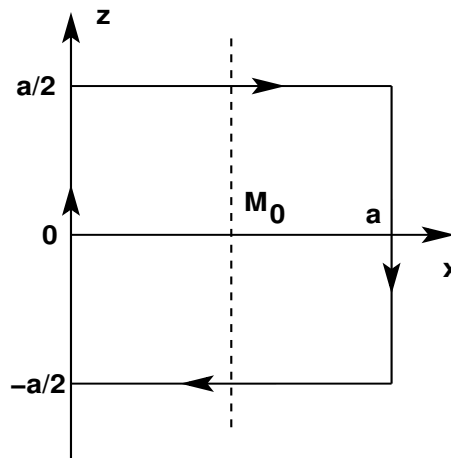
$$\int_0^a dx [E_x(t, x, a/2) - E_x(t, x, -a/2)] = -jcB_0 e^{j\omega t} \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right) \frac{2 \sin \theta}{k \cos \theta} [1 - \cos(ka \cos \theta)],$$

$$\text{d'où } \mathcal{E} = -\frac{4jcB_0}{k \sin \theta \cos \theta} \sin^2\left(\frac{ka \cos \theta}{2}\right) \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right) e^{j\omega t}.$$

ii) Flux du champ magnétique.

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -j\omega e^{j\omega t} \int_{-a/2}^{a/2} dz e^{-jk \sin \theta z} \int_0^a dx \sin(k \cos \theta x) = -j\omega e^{j\omega t} \frac{-2j \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right)}{-jk \sin \theta} \times$$

$$\frac{[1 - \cos(ka \cos \theta)]}{k \cos \theta} = -\frac{4jcB_0}{k \sin \theta \cos \theta} \sin^2\left(\frac{ka \cos \theta}{2}\right) \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right) e^{j\omega t}.$$



Cable coaxial

1°) a) b) La relation $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ donne en coordonnées cylindriques

$$-j\omega B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \quad -j\omega B_\varphi = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \quad -j\omega B_z = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho E_\varphi] - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right\}$$

La symétrie cylindrique impose que les dérivées partielles par rapport à φ soient nulles et que $E_\varphi = 0$ car les demi-plans définis par $\varphi = \text{constante}$ sont ici considérés comme des P^+ . Les seules composantes a priori non nulles sont donc E_ρ , E_z et B_φ .

2°) a) On prend $E_z = 0$, d'où $\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -j\omega B_\varphi$. La relation $\vec{\text{rot}} \vec{B} = j\frac{\omega}{v^2} \vec{E}$, où $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$, conduit à $\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -j\frac{\omega}{v^2} E_\rho$.

b) La relation $\vec{\text{div}} \vec{E} = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho E_\rho]$ implique que E_ρ soit de la forme (en notation complexe) $E_\rho(\rho, z, t) = \frac{F(z)}{\rho} e^{j\omega t}$.

3°) a) b) Combinant les deux relations du 2°) a), on déduit $\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} = -k^2 E_\rho$ où $k = \omega/v = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$. La fonction F du 2°) b) doit donc satisfaire l'équation $\frac{d^2 F}{dz^2} = -k^2 F$ dont la solution générale peut être écrite sous la forme $F(z) = F[e^{-jkz} + re^{jkz}]$ où F et r sont deux constantes. Le premier terme $F e^{-jkz}$ représente une onde progressive dans la direction $z'z$ tandis que le second représente une onde rétrograde dans la direction opposée, cette dernière pouvant résulter d'une réflexion de la première, avec un coefficient de réflexion r .

☞ Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous omettons, partout où cela est possible, le facteur temporel $e^{j\omega t}$.

c) $B_\varphi = \frac{1}{v} \frac{F}{\rho} [e^{-jkz} - re^{jkz}]$.

4°) a) $\sigma_a = \epsilon E_\rho(\rho = a + 0) = \frac{\epsilon F}{a} [e^{-jkz} + re^{jkz}]; Q_a = 2\pi a \sigma_a;$

$\sigma_b = -\epsilon E_\rho(\rho = b - 0) = \frac{\epsilon F}{b} [e^{-jkz} + re^{jkz}]; Q_b = 2\pi b \sigma_b = -Q_a.$

b) $J_a = \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(\rho = a + 0) = \frac{1}{\mu_0 v} \frac{F}{a} [e^{-jkz} - re^{jkz}]; I_a = 2\pi a J_a = \frac{2\pi}{\mu_0 v} F [e^{-jkz} - re^{jkz}];$

$J_b = -\frac{1}{\mu_0} B_\varphi(\rho = b - 0) = -\frac{1}{\mu_0 v} \frac{F}{b} [e^{-jkz} - re^{jkz}]; I_b = 2\pi b J_b = -I_a.$

5°) a) $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}; \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; E_\varphi = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ conduisent à $A_\varphi = 0$. Si l'on peut prendre de plus $A_\rho = 0$, alors $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ et $B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$.

b) $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -E_\rho = -\frac{F}{\rho} [e^{-jkz} + re^{jkz}]$. En intégrant cette équation par rapport à ρ et en ajustant la "constante d'intégration" de telle sorte que V soit nul pour $\rho = b$, on obtient $V = F \ln\left[\frac{b}{\rho}\right] [e^{-jkz} + re^{jkz}]$.

c) Puisque $E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} - j\omega A_z$, on déduit $A_z = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial V}{\partial z}$, soit, en tenant compte de $k/\omega = 1/v$, $A_z = \frac{F}{v} \ln\left[\frac{b}{\rho}\right] [e^{-jkz} - re^{jkz}]$.

6°) a) $U(z, t) = V(a, z, t) = F \ln\left[\frac{b}{a}\right] [e^{-jkz} + re^{jkz}] e^{j\omega t}$;

$$U(0, t) = F \ln\left[\frac{b}{a}\right] [1 + r] e^{j\omega t}, \text{ donc } F = \frac{U_0}{(1 + r) \ln\left[\frac{b}{a}\right]}.$$

b) $U(z, t) = U_0 \frac{[e^{-jkz} + re^{jkz}]}{1 + r} e^{j\omega t}$, $I_a(z, t) = \frac{2\pi}{\mu_0 v} \frac{U_0}{(1 + r) \ln\left[\frac{b}{a}\right]} [e^{-jkz} - re^{jkz}] e^{j\omega t}$

7°) a) $Z = \frac{\mu_0 v}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \left[\frac{e^{-jkz} + re^{jkz}}{e^{-jkz} - re^{jkz}} \right] = Z_c \left[\frac{e^{-jkz} + re^{jkz}}{e^{-jkz} - re^{jkz}} \right] = Z_c \frac{1 + x}{1 - x}$, avec $x = re^{2jkz} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$.

b) A $z = h$, $re^{2jkh} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c}$. On supprime la réflexion en prenant $Z_0 = Z_c$.

c) $Z_c = 60 \Omega$.

8°) a) Pour $z > \ell$: $E_\rho^> = \frac{e^{j\omega t}}{\rho} F t e^{-jk'z}$ où t est un coefficient de transmission, et $k' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'}$; $B_\varphi^> = \frac{F}{\rho v'} e^{-jk'z}$; pour $z < \ell$: $E_\rho^< = \frac{F}{\rho} [e^{-jkz} + re^{jkz}]$, $B_\varphi^< = \frac{F}{\rho v} [e^{-jkz} - re^{jkz}]$.

b) En $z = \ell$: $e^{-jk\ell} + re^{jk\ell} = te^{-jk'\ell}$; $\frac{1}{v} [e^{-jk\ell} - re^{jk\ell}] = \frac{t}{v'} e^{-jk'\ell}$. En posant $v = c/n$, $v' = c/n'$, on obtient

$$r = e^{-2jk\ell} \frac{n - n'}{n + n'}, \quad t = e^{j(k' - k)\ell} \frac{2n}{n + n'}$$

Onde électromagnétique dans l'ionosphère

1°) $\rho = eN - e(N + n) = -en.$

2°) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} = jm\omega \vec{v}$, d'où, en notation complexe, $\vec{v} = -\frac{e}{jm\omega} \vec{E}$

3°) $\vec{J} = -Ne \vec{v} = \frac{Ne^2}{jm\omega} \vec{E}$

4°) $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{ne}{\epsilon_0}$; $\text{div} \vec{B} = 0$; $\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$; $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + j\omega\epsilon_0 \vec{E} \right].$

5°) La conservation de la charge s'exprime par la relation $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, qui se transcrit ici comme $\text{div} \left[-N_e \vec{v} \right] + j\omega(-ne) = 0$, soit $\text{div} \left[N_e \vec{v} \right] = -j\omega n.$

6°) a) $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[\frac{Ne^2}{jm\omega} \vec{E} + j\omega\epsilon_0 \vec{E} \right] = j\omega\mu_0\epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, avec $\epsilon = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}.$

b) De 6°) a) on déduit $\text{div} \text{rot} \vec{B} = 0 = j\omega\mu_0\epsilon_0 \text{div} \left[\epsilon \vec{E} \right]$, donc $\text{div} \left[\epsilon \vec{E} \right] = 0.$

c) $\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ (voir 4°)).

d) $\text{div} \vec{B} = 0$: c'est une équation fondamentale du magnétisme.

7°) De la relation $\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, on tire, compte tenu de 6°) b) (ϵ est ici une constante), $-\Delta \vec{E} = \text{rot} \left[-j\omega \vec{B} \right] = -j\omega \left[j\omega\mu_0\epsilon_0 \epsilon \vec{E} \right]$, soit $\Delta \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E}$, avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. En procédant de la même manière pour le champ \vec{B} , on trouve que celui-ci satisfait la même équation.

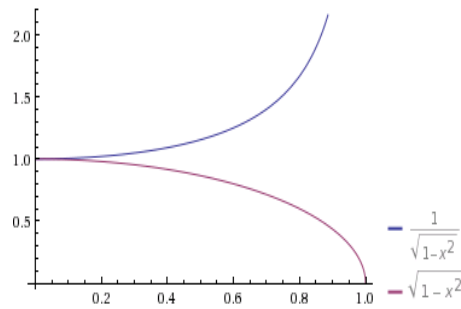
8°) a) $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon.$

b) La propagation dans le milieu ionisé n'est possible que si k^2 est positif, et cela n'est réalisé que si $\omega > \omega_p$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$.

c) $\omega_p \simeq 2,4 \cdot 10^7$ rd/s; $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \simeq 75$ m; la propagation se fait sans atténuation dans le domaine $\lambda < \lambda_p$.

9°) a) $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$; $V_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

b)



10°) Continuité des composantes parallèles au plan xOy des champs électrique et magnétique.

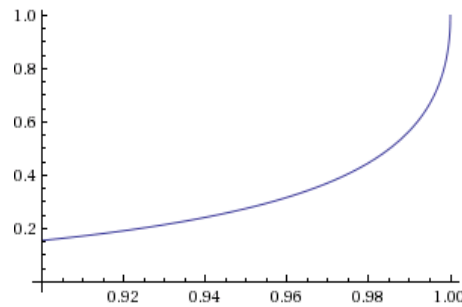
11°) a) $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

b) $\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c} [e^{-jk_0z} - r e^{jk_0z}] e^{j\omega t} \vec{e}_x$; $\vec{B}_2 = -\frac{E_0 n}{c} \tau e^{-jkz} e^{j\omega t} \vec{e}_x$, avec $n = \sqrt{\epsilon}$.

12°) Continuité de E_y à $z = 0$: $1 + r = \tau$; continuité de B_x à $z = 0$: $1 - r = n\tau$. On en déduit

$$r = \frac{1 - n}{1 + n}, \quad \tau = \frac{2}{1 + n}$$

13°) 14°) $R = r^2 = \left[\frac{1 - n}{1 + n} \right]^2 = \left[\frac{1 - n^2}{(1 + n)^2} \right]^2 = \frac{u^4}{(1 + \sqrt{1 - u^2})^4}$; $R(0,6) = 1,2 \cdot 10^{-2}$;
 $R(0,8) = 6,25 \cdot 10^{-2}$; $R(\sqrt{(80/81)}) = 0,64$.



15°) a) Le facteur de réflexion R devient de plus en plus important en avoisinant 100%, à mesure que λ s'approche de $\lambda_p = 75$ m par valeurs inférieures.

b) $h = c \frac{\delta t}{2} = 90$ km.

Vitesse de phase, vitesse de groupe, réflexion

Exercice I

1°) Les équations de Maxwell dans ce milieu sont :

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = j\omega \frac{n}{c^2} \vec{E}$, $\text{div} \vec{B} = 0$, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$, $\text{div} \vec{E} = 0$, où $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. On a $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -j\omega \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\omega^2}{c^2} n \vec{E}$, donc $\Delta \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} n \vec{E}$. Le champ magnétique satisfait la même équation. On a ici $k = \frac{\omega}{c}n$.

2°) a) Voir le cours. b) $v_\phi = \omega/k = c/n$, $v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}$. Avec $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ où $\omega_0 = 2\pi c/a$, on obtient $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$ et $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$. La vitesse de groupe, associée à

la propagation de l'énergie, est inférieure à c , ce qui est en accord avec la relativité, tandis que la vitesse de phase peut bien être supérieure à c comme ici car elle ne représente pas la propagation d'un phénomène matériel.

Exercice II

1°) a) b) $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$, avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Les ondes incidente et réfléchie se propagent dans le même milieu ont des vecteurs d'onde de même module, donc $\|\vec{k}'\| = k = \frac{\omega}{c}$.

2°) a) Les composantes du champ électrique dans les directions parallèles à xOz , soit E_x et E_z , doivent être continues en $y = 0$. Le miroir étant supposé parfait, le champ électrique est nul dans la région $y < 0$ et par conséquent, $E_x = 0$ et $E_z = 0$ pour $y = 0$.

b) Le champ total dans la région $y > 0$ est la somme du champ de l'onde incidente et de celui de l'onde réfléchie : $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E} + \vec{E}'$. Pour $y = 0$, on a,

$$E_{0x}e^{-j(k_x x + k_z z)} + E'_{0x}e^{-j(k'_x x + k'_z z)} = 0, \quad E_{0z}e^{-j(k_x x + k_z z)} + E'_{0z}e^{-j(k'_x x + k'_z z)} = 0$$

Ces égalités doivent être vérifiées pour tout x et pour tout z . Par conséquent, on doit avoir d'une part $k'_x = k_x = k \sin \theta$, $k'_z = k_z = 0$, et, d'autre part, $E'_{0x} = -E_{0x}$ et $E'_{0z} = -E_{0z}$.

c) Puisque $(\vec{k}')^2 = k^2 = (k'_x)^2 + (k'_y)^2 + (k'_z)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, et compte tenu des égalités précédentes, on a $(k'_y)^2 = k_y^2$, soit $k'_y = \pm k_y$. Seule la solution $k'_y = -k_y$ représente une onde réfléchie.

d) Dans le milieu $y > 0$, dépourvu de charge, est vérifiée l'équation $\text{div} \vec{E}_{\text{tot}} = 0$, laquelle conduit à $\vec{k} \cdot \vec{E} + \vec{k}' \cdot \vec{E}' = 0$. En prenant $x = 0$ et $z = 0$, cette équation donne elle-même $k_x [E_{0x}e^{-jk_y y} + E'_{0x}e^{jk_y y}] + k_z [E_{0z}e^{-jk_y y} + E'_{0z}e^{jk_y y}] + k_y [E_{0y}e^{-jk_y y} - E'_{0y}e^{jk_y y}] = 0$.

En passant à la limite $y = 0$ et en tenant compte des égalités établies précédemment, on obtient $k_y [E_{0y} - E'_{0y}] = 0$, donc $E'_{0y} = E_{0y}$.

$$3^\circ) \vec{E}_T = 2 e^{j(\omega t - k_x x)} \left\{ -j \sin k_y y \left[\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_z E_{0z} \right] + \cos k_y y \vec{e}_y E_{0y} \right\}$$

$$\mathcal{E}_x = 2E_{0x} \sin k_y y \sin(\omega t - k_x x), \quad \mathcal{E}_y = 2E_{0y} \cos k_y y \cos(\omega t - k_x x),$$

$$\mathcal{E}_z = 2E_{0z} \sin k_y y \sin(\omega t - k_x x).$$

$$4^\circ) \text{ a) } \vec{\text{rot}} \vec{E}_{i,r} = -j\omega \vec{B}_{i,r} = -j \vec{k}_{i,r} \wedge \vec{E}_{i,r}, \text{ donc } \vec{B}_{i,r} = \frac{1}{c} \vec{u}_{i,r} \wedge \vec{E}_{i,r}. \text{ On en déduit}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \left[k_y E_{0z} \vec{e}_x - k_x E_{0z} \vec{e}_y + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \vec{e}_z \right]$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{\omega} e^{j(\omega t - k_x x + k_y y)} \left[k_y E_{0z} \vec{e}_x + k_x E_{0z} \vec{e}_y + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \vec{e}_z \right].$$

$$\text{b) } \mathcal{B}_x = \frac{2}{\omega} k_y E_{0z} \cos k_y y \cos(\omega t - k_x x), \quad \mathcal{B}_y = -\frac{2}{\omega} k_x E_{0z} \sin k_y y \sin(\omega t - k_x x)$$

$$\mathcal{B}_z = \frac{2}{\omega} (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \cos k_y y \cos(\omega t - k_x x)$$

5°) L'onde incidente étant plane, on doit aussi avoir $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = k_x E_{0x} + k_y E_{0y} = k [\sin \theta E_{0x} - \cos \theta E_{0y}]$. On posera donc $E_{0x} = E_0 \cos \theta$, $E_{0y} = E_0 \sin \theta$. Exprimant toutes les constantes en fonction de E_0 , θ , ω et c , il vient $\mathcal{E}_z = 0$ et

$$\mathcal{E}_x = -2E_0 \cos \theta \sin\left(\frac{\omega \cos \theta}{c} y\right) \sin \omega\left(t - \frac{\sin \theta}{c} x\right),$$

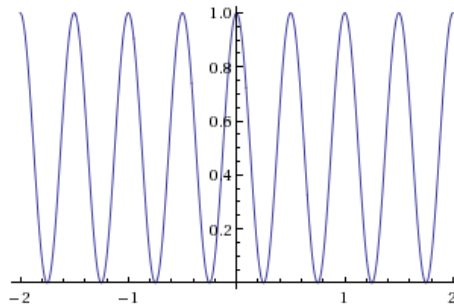
$$\mathcal{E}_y = 2E_0 \sin \theta \cos\left(\frac{\omega \cos \theta}{c} y\right) \cos \omega\left(t - \frac{\sin \theta}{c} x\right), \text{ puis } \mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0 \text{ et}$$

$$\mathcal{B}_z = 2 \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega \cos \theta}{c} y\right) \cos \omega\left(t - \frac{\sin \theta}{c} x\right).$$

$$6^\circ) \text{ a) } \text{Energie transférée, par unité de surface et par unité de temps : } \vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathcal{E}_y \vec{e}_x - \mathcal{E}_x \vec{e}_y \right] \mathcal{B}_z, \quad P_z = 0.$$

$$\text{b) } \langle P_y \rangle = 0, \quad \langle P_x \rangle = 2 \frac{E_0^2}{c\mu_0} \sin \theta \cos^2\left(\frac{\omega \cos \theta}{c} y\right)$$

7°) La fonction $\cos^2\left(\frac{\omega \cos \theta}{c} y\right)$ s'annule pour $\frac{\omega \cos \theta}{c} y = \frac{\pi}{2} + m\pi$ où m est un entier relatif, soit $y = \frac{\lambda}{\cos \theta} \left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right)$ où $\lambda = 2\pi c/\omega$.



$$8^\circ) \text{ a) } \sigma = \epsilon_0 \mathcal{E}_y|_{y=0^+} = 2E_0\epsilon_0 \sin \theta \cos \omega(t - \frac{\sin \theta}{c}x)$$

$$\text{b) } j_x = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_z|_{y=0^+} = \frac{2E_0}{c\mu_0} \cos \omega(t - \frac{\sin \theta}{c}x)$$

$$9^\circ) \text{ a) b) } \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{2E_0}{c\mu_0} \left(\frac{\omega \sin \theta}{c} \right) \sin \omega(t - \frac{\sin \theta}{c}x) = 2\epsilon_0 E_0 \sin \theta \omega \sin \omega(t - \frac{\sin \theta}{c}x)$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -2\epsilon_0 E_0 \sin \theta \omega \sin \omega(t - \frac{\sin \theta}{c}x)$. On a donc $\frac{\partial j_x}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$, équation qui traduit la loi de conservation de la charge.

Milieu diélectrique absorbant

1°) a) b) $\vec{\Delta E} = -k^2 \vec{E}$, avec $k = \frac{\omega}{c}n$ où $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

2°) Pour l'air, $n = 1$, donc $k \equiv k_0 = \frac{\omega}{c}$.

3°) Pour une onde plane, $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$;

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x e^{j(\omega t - k_0 z)} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_0 z)} ; \vec{B}_r = -r \frac{E_0}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t + k_0 z)} ;$$

$$\vec{B}_i = n\tau \frac{E_0}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x e^{j(\omega t - kz)} = n\tau \frac{E_0}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t - kz)}$$

4°) $n^2 = n'^2 - n''^2 - 2jn'n'' = \epsilon'_r - j\epsilon''_r$, donc $n'^2 - n''^2 = \epsilon'_r$, $2n'n'' = \epsilon''_r$

5°) $e^{-jkz} = e^{-jk_0 n'z} e^{-k_0 n''z}$. L'existence d'une partie imaginaire de l'indice doit rendre compte d'un phénomène d'absorption du milieu. Elle fait apparaître dans l'amplitude du champ un facteur réel $e^{-k_0 n''z}$ qui doit être *décroissant* lorsque z augmente. On doit donc avoir $n'' > 0$.

6°) D'une façon générale, continuité des composantes tangentes du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique. Pour un diélectrique, toutes les composantes du champ magnétique sont continues.

7°) Continuité du champ électrique : $1+r = \tau$; Continuité du champ magnétique : $1-r = n\tau$.
D'où

$$\tau = \frac{2}{n+1}, \quad r = \frac{1-n}{1+n}.$$

8°) $r = \frac{1-n'+jn''}{1+n'-jn''} = \frac{1-n'^2-n''^2+2jn''}{(1+n')^2+n''^2}$, donc $r_0 = |r| = \sqrt{\frac{(1-n')^2+n''^2}{(1+n')^2+n''^2}}$

et $\tan \phi = -\frac{2n''}{1-n'^2-n''^2}$.

9°) $\tau_0 = |\tau| = \frac{2}{\sqrt{(1+n')^2+n''^2}}$, $\tan \phi' = \frac{n''}{1+n'}$;

$$\tau'_0 = |n\tau| = 2 \frac{\sqrt{n'^2+n''^2}}{\sqrt{(1+n')^2+n''^2}}, \quad \tan \phi'' = -\frac{n''}{n'(1+n')+n''^2} ;$$

$$\mathcal{E}_{ix} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z), \quad \mathcal{B}_{iy} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_0 z) ;$$

$$\mathcal{E}_{rx} = r_0 E_0 \cos(\omega t + k_0 z - \phi), \quad \mathcal{B}_{ry} = -r_0 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k_0 z - \phi) ;$$

$$\mathcal{E}_{tx} = \tau_0 e^{-k_0 n''z} E_0 \cos(\omega t - k_0 n'z + \phi'), \quad \mathcal{B}_{ry} = \tau'_0 e^{-k_0 n''z} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_0 n'z + \phi'')$$

$$10^\circ) \vec{P}_i = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}}_i \wedge \vec{\mathcal{B}}_i = \vec{e}_z \frac{\mathcal{E}_{ix}^2}{c\mu_0}; \vec{P}_r = -\vec{e}_z \frac{\mathcal{E}_{rx}^2}{c\mu_0}; \vec{P}_t = \vec{e}_z \frac{\mathcal{E}_{tx}\mathcal{B}_{ty}}{\mu_0};$$

$$\vec{P}_i = \vec{e}_z \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - k_0 z), \quad \langle \vec{P}_i \rangle = \vec{e}_z \frac{E_0^2}{2c\mu_0};$$

$$\vec{P}_r = -\vec{e}_z r_0^2 \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - k_0 z - \phi), \quad \langle \vec{P}_r \rangle = -\vec{e}_z r_0^2 \frac{E_0^2}{2c\mu_0};$$

$$\vec{P}_t = \vec{e}_z \tau_0 \tau'_0 e^{-2k_0 n'' z} \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos(\omega t - k_0 n' z + \phi') \cos(\omega t - k_0 n' z + \phi''),$$

$$\langle \vec{P}_t \rangle = \vec{e}_z \tau_0 \tau'_0 e^{-2k_0 n'' z} \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \cos(\phi' - \phi'');$$

11°) a) $T = \tau_0 \tau'_0 \cos(\phi' - \phi'')$; or, $\tau^* \tau' = \tau_0 \tau'_0 e^{j(\phi'' - \phi')}$. On a donc $T = \Re(\tau \tau'^*)$.

b) $R = r_0^2 = \frac{(1 - n')^2 + n''^2}{(1 + n')^2 + n''^2}$; $\tau^* \tau' = \frac{4n}{|1 + n|^2}$, et $\Re(\tau^* \tau') = \frac{4n'}{(1 + n')^2 + n''^2}$; d'où

$R + T = 1$. Cette relation exprime la conservation de l'énergie au passage de l'onde à travers le plan $z = 0$.

12°) $R = \frac{4625}{7585} = \frac{18500}{30100} \simeq 0,6$; $T = 1 - R \simeq 0,4$; $P_{\text{abs.}} \simeq 0,4 \text{ mW}$.

13°) $\delta = \frac{1}{2k_0 n''} = \frac{c}{4\pi n'' \nu} \simeq 2,5 \text{ cm}$.

Ondes em guidées - I

1°) Les deux conducteurs étant supposés parfaits, le champ électrique doit y être nul. On sait qu'à la traversée de la surface séparant deux milieux quelconques, les composantes du champ électrique dans les directions parallèles à la surface sont continues. Or, ici, le champ étudié n'a qu'une seule composante E_x , parallèle aux deux plans $y = 0$ et $y = a$. Par conséquent, $E_x(0) = 0$ et $E_x(a) = 0$.

$$2^\circ) \vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \text{ d'où } B_x = 0, B_y = \frac{k}{\omega} E_x \text{ et } B_z(y) = -\frac{j}{\omega} \frac{dE}{dy}(y) e^{j(\omega t - kz)};$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = j\omega\epsilon_0\mu_0 \vec{E}, \text{ d'où, avec } c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0},$$

$$j\frac{\omega}{c^2} E_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = e^{j(\omega t - kz)} \left[-\frac{j}{\omega} \frac{d^2 E}{dy^2}(y) + j\frac{k^2}{\omega} E(y) \right]. \text{ On obtient ainsi l'équation différentielle } \frac{d^2 E}{dy^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) E = K^2 E, \text{ avec } K^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

3°) Si $k = \omega/c$, la solution générale de l'équation différentielle est $E(y) = A_1 y + A_2$, où les deux constantes doivent être ajustées de telle sorte que $E(0) = 0$ et $E(a) = 0$. On obtient $A_2 = 0$, $A_1 = 0$. Dans ce cas, la solution avec lesdites conditions aux limites est nulle et il ne peut y avoir propagation.

Supposons donc $K \neq 0$. $E(y)$ est alors de la forme $E(y) = A_1 e^{Ky} + A_2 e^{-Ky}$. Les deux conditions aux limites donnent $A_1 = -A_2$, et $0 = A_1 (e^{Ka} - e^{-Ka})$. La solution n'est différente de zéro que si $A_1 \neq 0$, ce qui implique que la deuxième condition soit réalisée avec $e^{Ka} - e^{-Ka} = 2 \sinh(Ka) = 0$. Mais cette nouvelle condition n'est réalisable que si K est complexe. La propagation de l'onde n'est donc possible que si $k < \omega/c$. Posons maintenant $K = j\chi$ avec $\chi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$. La solution générale de l'équation différentielle peut maintenant s'écrire comme $E(y) = E_0 \sin \chi y + A \cos \chi y$. On a $E(0) = A = 0$, puis $E(a) = E_0 \sin \chi a = 0$. Cette deuxième condition est vérifiée si $\chi a = p\pi$ où p est un entier. Il existe donc a priori une infinité (discrète) de solutions du type $E_p(y) = E_{0p} \sin\left(\frac{p\pi}{a} y\right)$.

4°) a) b) $k_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{a^2}$. Si $\omega < cp\pi/a$, k_p est purement imaginaire. Ecrivant $k_p = -j\alpha_p$, le facteur de propagation e^{-jkz} devient alors un facteur d'atténuation $e^{-\alpha_p z}$: l'onde ne peut alors se propager. La propagation de ce mode n'est donc possible que si $\omega > cp\pi/a$. On voit donc qu'il n'y aura de possibilité de propagation d'un quelconque mode que si ω est supérieur à la valeur minimum $\omega_m = \frac{c\pi}{a}$.

$$c) k_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{a^2}}; v_{\pi p} = \frac{\omega}{k_p} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}; v_{gp} = \left(\frac{dk_p}{d\omega}\right)^{-1} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

$$5^\circ) \vec{B}_p = \frac{j}{\omega} \vec{\text{rot}} \vec{E}_p = \frac{j}{\omega} \left[-jk_p E_{px} \vec{e}_y - \frac{\partial E_{px}}{\partial y} \vec{e}_z \right] =$$

$$E_{0p} e^{j(\omega t - k_p z)} \left[\frac{k_p}{\omega} \sin \chi_p y \vec{e}_y - j \frac{\chi_p}{\omega} \cos \chi_p y \vec{e}_z \right], \text{ avec } \chi_p = p\pi/a.$$

$$6^\circ) p = 1, k \equiv k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}, \chi_1 = \frac{\pi}{a};$$

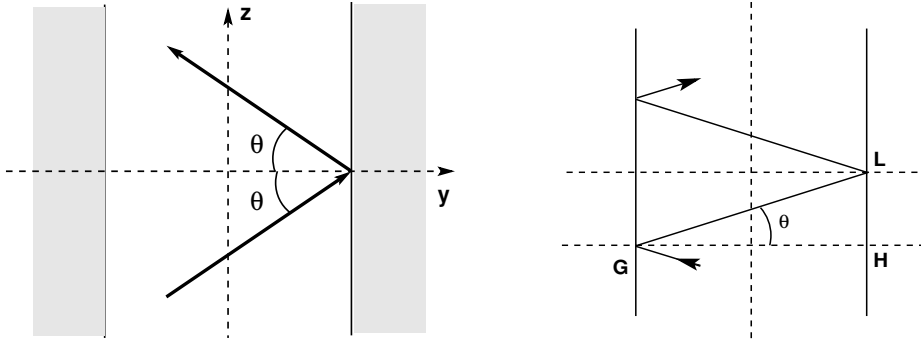
$$\vec{B}_1 = E_{01} e^{j(\omega t - k_1 z)} \left[\frac{k_1}{\omega} \sin \pi \frac{y}{a} \vec{e}_y - j \frac{\pi}{a\omega} \cos \pi \frac{y}{a} \vec{e}_z \right],$$

On sait que les discontinuités des composantes tangentes du champ magnétique à la traversée de la surface d'un conducteur sont dues à la présence de courants superficiels sur ladite surface. Comme ici $B_x = 0$ à l'intérieur comme à l'extérieur des deux conducteurs, il ne peut y avoir sur les deux surfaces $y = 0$ et $y = a$ de composante de courant superficiel dans la direction $z'z$. Par contre, il y a sur les deux surfaces des courants superficiels dans la direction $x'x$ dont les densités sont données par

$$J_x = \frac{1}{\mu_0} [B_z(0+) - B_z(0-)] \equiv \frac{B_z(0+)}{\mu_0} = -jE_{01} \frac{\pi}{a\omega} e^{j(\omega t - k_1 z)} \text{ pour } y = 0;$$

$$J'_x = \frac{1}{\mu_0} [B_z(a-0) - B_z(a+0)] \equiv \frac{B_z(a-0)}{\mu_0} = +jE_{01} \frac{\pi}{a\omega} e^{j(\omega t - k_1 z)} = -J_x \text{ pour } y = a;$$

7°) Ecrivant le champ électrique sous la forme $E_x = \frac{jE_0}{2} e^{j\omega t} [e^{-j(\chi y + kz)} - e^{-j(-\chi y + kz)}]$, celui-ci apparaît comme la somme du champ électrique d'une onde se propageant dans la direction du vecteur $\chi \vec{e}_y + k \vec{e}_z$, et du champ électrique d'une onde se propageant dans la direction du vecteur $-\chi \vec{e}_y + k \vec{e}_z$. Cette dernière onde provient de la réflexion de la première sur la surface conductrice $y = a$, et la première provient de la réflexion de la seconde sur la surface conductrice $y = 0$ (voir dessin), les réflexions s'effectuant avec un coefficient de réflexion égal à -1 .



$$\text{L'angle de réflexion } \theta \text{ est donné par } \sin \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \chi^2}} = \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{v_\phi} = \frac{v_g}{c} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

On constate ainsi qu'une onde ne se propage pas en ligne droite dans l'espace inter-conducteur $0 \leq y \leq a$, mais y progresse par réflexions successives sur les parois des conducteurs. La distance GL par exemple est parcourue à la vitesse c en un laps de temps $\Delta t = GL/c$, tandis que le transfert d'énergie progresse de H à L à la vitesse $HL/\Delta t = cHL/GL = c \sin \theta = v_g$.

Effet Faraday

$$1^\circ) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \vec{u} + q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

2°) Pour une onde plane se propageant à la vitesse V , on a $|\vec{B}| = |\vec{E}|/V$. Puisque $v \ll V$, on peut négliger la partie magnétique de la force de Lorentz.

$$3^\circ) \text{ a) b) } -m\omega^2 \vec{u} = -m\omega_0^2 \vec{u} + q \vec{E}, \text{ d'où } \vec{u} = \frac{q \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}; \vec{p} = q \vec{u} = \frac{q^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

$$\text{c) } \vec{\mathcal{P}} = N \vec{p} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \text{ avec } \chi = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

$$4^\circ) \text{ a) b) c) } \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}; \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[j\omega \vec{\mathcal{P}} + \epsilon_0 j\omega \vec{E} \right] = j\omega\epsilon_0\mu_0(1 + \chi) \vec{E};$$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \operatorname{div} \vec{E} = 0$ (car χ est indépendant des coordonnées); $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = n^2 = 1 + \chi$,

$$\text{et } n = \sqrt{1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}}.$$

$$\text{d) } v_\phi = \omega/k; v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1}, \text{ avec ici } k = \frac{\omega n}{c}. \text{ D'où, d'une part, } v_\phi = \frac{c}{n}, \text{ et, d'autre part,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\omega} &= \frac{n}{c} + \frac{\omega}{2cn} \frac{dn}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{2nc} \left[\frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{nc} \left[n^2 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{nc} \left[1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right], \text{ donc } v_g = \frac{nc}{1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \end{aligned}$$

$$5^\circ) \quad \vec{E}(M, t) = E_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - kz)}; \quad \vec{B}(M, t) = \frac{E_0 n}{c} \vec{e}_y e^{j(\omega t - kz)}.$$

$$6^\circ) \text{ a) } m(\omega_0^2 - \omega^2) u_x = qE_x + j\omega q B_0 u_y; m(\omega_0^2 - \omega^2) u_y = qE_y - j\omega q B_0 u_x \\ m(\omega_0^2 - \omega^2) u_z = qE_z = 0.$$

$$\text{b) } u_\pm = \frac{qE_\pm}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \mp \omega q B_0}.$$

$$7^\circ) \text{ a) } \Delta E_\pm = -\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_\pm) E_\pm, \text{ avec } \chi_\pm = \frac{Nq^2}{\epsilon_0} \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \mp \omega q B_0}.$$

$$\text{b) } n_\pm = \sqrt{1 + \chi_\pm}; k_\pm = k_0 n_\pm, \text{ avec } k_0 = \omega/c.$$

$$8^\circ) \quad n_\pm^2 \simeq 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[1 \pm \frac{\omega q B_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = n^2 \left[1 \pm \frac{Nq^3 B_0 \omega}{m^2 n^2 \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right], \text{ soit}$$

$$n_\pm \simeq n \pm \frac{Nq^3 B_0 \omega}{2m^2 n \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

9°) a) b) $E_{\pm} = E_0 e^{j(\omega t - k_{\pm} z)}$, d'où

$$E_x = \frac{E_0}{2} e^{j\omega t} \left[e^{-jk_+ z} + e^{-jk_- z} \right], \quad E_y = \frac{E_0}{2j} e^{j\omega t} \left[e^{-jk_+ z} - e^{-jk_- z} \right]$$

c) On pose $k_+ = k_1 + k_2$, $k_- = k_1 - k_2$. On a alors

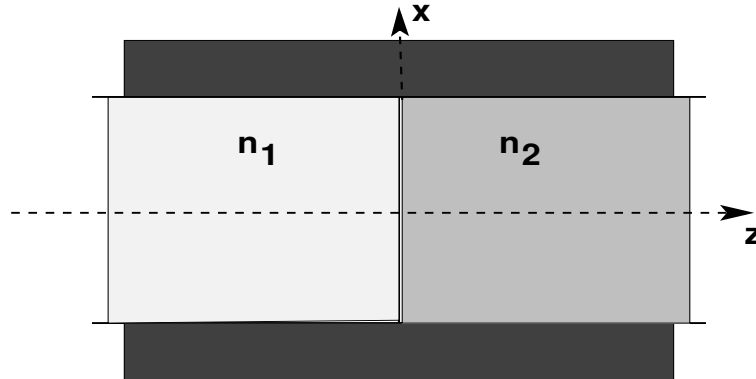
$E_x = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \cos k_2 z$, $E_y = -E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \sin k_2 z$. Le rapport $E_y/E_x = -\tan k_2 z$ reste constant au cours du temps : en chaque point, le champ électrique garde une orientation constante au cours du temps.

10°) L'angle θ de cette orientation par rapport à l'orientation initiale selon $x'x$ est donné par

$$\theta = KB_0 z \text{ avec } K = -\frac{Nq^3\omega^2}{2m^2 c n \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{Ne^3\omega^2}{2m^2 c n \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \text{ pour } q = -e. \text{ Cette}$$

dernière expression peut encore s'écrire $K = \frac{e(n^2 - 1)}{2m c n} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Ondes guidées - II



1°) $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = j\omega\mu_0\epsilon \vec{E}$; $\text{div} \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0$.

2°) Les équations du 1°) donnent ici

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega B_y ; j\omega\mu_0\epsilon E_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z} ; j\omega\mu_0\epsilon E_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} ; \text{d'où}$$

$$-j\omega B_y = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon} \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right], \text{ soit finalement}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -k^2 B_y \text{ en posant } k = \frac{\omega n}{c} \text{ où } n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}. \text{ Ainsi, } k_1 = \frac{\omega n_1}{c}, k_2 = \frac{\omega n_2}{c}.$$

3°) a) Posant $B_y = f(x)g(y)e^{j\omega t}$, on déduit de l'équation du 2°) : $f''g + fg'' = -k^2 fg$, ou

$\frac{f''}{f}(x) + \frac{g''}{g}(y) = -k^2$. Les deux variables x et y étant indépendantes, cette dernière équation ne peut être satisfaite que si et seulement si chaque membre du terme de gauche est une constante, soit $\frac{f''}{f} = \text{constante} = \gamma$ et $\frac{g''}{g} = -k^2 - \gamma$.

b) La composante E_z du champ électrique est tangentielle vis-à-vis des parois conductrices et de ce fait doit être continue au passage à travers ces parois. Or, $\vec{E} = \vec{0}$ dans le conducteur supposé parfait. Donc $E_z = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$, et comme $E_x \propto \frac{\partial B_y}{\partial x}$, on en déduit $f'(0) = f'(a) = 0$.

c) L'équation $f'' = \gamma f$ a pour solution générale :

i) $f(x) = A_1 x + A_2$ si $\gamma = 0$;

ii) $f(x) = A_1 \cosh(\sqrt{\gamma}x) + A_2 \sinh(\sqrt{\gamma}x)$ si $\gamma > 0$;

iii) $f(x) = A_1 \cos(\sqrt{-\gamma}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\gamma}x)$ si $\gamma < 0$;

dans chaque cas, les constantes A_1 et A_2 doivent être ajustées de telle sorte que les deux conditions du b) soient vérifiées. On montre facilement que compte tenu de ces conditions, les formes i) et ii) ne conviennent pas car elles conduisent à la solution nulle. La forme iii) est

la seule acceptable. En effet, posant $\alpha = \sqrt{-\gamma}$, on a $f'(x) = -A_1\alpha \sin(\alpha x) + \alpha A_2 \cos(\alpha x)$, et lesdites conditions donnent $f'(0) = \alpha A_2 = 0$, soit $A_2 = 0$, et $f'(a) = -\alpha A_1 \sin(\alpha a) = 0$, soit $\sin(\alpha a) = 0$, si l'on veut éviter la solution nulle. On obtient donc des solutions non nulles si $\alpha a = p\pi$ où p est un entier que l'on peut supposer positif (strictement), et par conséquent, $\gamma = -p^2 \frac{\pi^2}{a^2}$.

4°) a) $g'' = -(k^2 + \gamma)g = -\chi^2 g$ avec $\chi^2 = k^2 - p^2 \frac{\pi^2}{a^2}$.

b) Il y a propagation sans atténuation si et seulement si $\chi^2 > 0$, soit $k > p \frac{\pi}{a}$ (sinon, $\chi = j\eta$ avec $\eta > 0$, ce qui conduirait à un $g(z)$ proportionnel au facteur décroissant $e^{-\eta z}$).

c) $k = \frac{2\pi n\nu}{c} \geq \frac{\pi}{a}$, d'où (pour $p = 1$), $\nu_{\min} = \nu_c = \frac{c}{2na}$; on trouve $\nu_{1c} = 7,5 \cdot 10^9$ Hz pour $n = n_1$ et $\nu_{2c} = 15 \cdot 10^9$ Hz pour $n = n_2$.

Or, $\nu = c/\lambda = 20 \cdot 10^9$ Hz, soit ν_{2c} ($p = 1$) $< \nu < 2\nu_{2c}$ ($p = 2$): dans le milieu II, seul le mode $p = 1$ se propage sans atténuation.

5°) a) Pour $p = 1$, $f(x) \propto \cos \alpha x$ avec $\alpha = \frac{\pi}{a}$, et $\chi = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$. En supposant que le milieu II soit illimité vers les grandes valeurs positives de z , les expressions de B_y sont

$$B_y = \cos \alpha x B_2 e^{j(\omega t - \chi_2 z)} \quad \text{pour } z > 0,$$

$$B_y = \cos \alpha x e^{j\omega t} [B_0 e^{-j\chi_1 z} + B_1 e^{j\chi_1 z}] \quad \text{pour } z < 0,$$

où B_0, B_1 et B_2 sont des constantes, $\chi_i = \sqrt{k_i^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$, $k_i = \frac{\omega}{c} n_i$ ($i = 1, 2$).

b) Le terme proportionnel à B_1 rend compte de la réflexion de l'onde à l'interface $z = 0$.

c) i) Pour $z < 0$:

$$E_x = \frac{\omega \chi_1}{k_1^2} \cos \alpha x [B_0 e^{-j\chi_1 z} - B_1 e^{j\chi_1 z}] e^{j\omega t};$$

$$E_z = \frac{j\omega \alpha}{k_1^2} \sin \alpha x [B_0 e^{-j\chi_1 z} + B_1 e^{j\chi_1 z}] e^{j\omega t};$$

ii) pour $z > 0$:

$$E_x = \frac{\omega \chi_2}{k_2^2} \cos \alpha x B_2 e^{j(\omega t - \chi_2 z)}; \quad E_z = \frac{j\omega \alpha}{k_2^2} \sin \alpha x B_2 e^{j(\omega t - \chi_2 z)}.$$

6°) a) B_y continu, E_x continu.

b) $B_0 + B_1 = B_2$, $\frac{\chi_1}{k_1^2} [B_0 - B_1] = \frac{\chi_2}{k_2^2} B_2$, d'où, en posant $\rho_i = \epsilon_i / \chi_i$, $r = B_1 / B_0$,

$\tau = B_2 / B_0$: $1 + r = \tau$, $1 - r = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau$, soit

$$r = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad \tau = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1}.$$

7°) a) Les composantes des champs réels sont:

i) pour $z < 0$: $b_y = B_0 \cos \alpha x [\cos(\omega t - \chi_1 z) + r \cos(\omega t + \chi_1 z)]$,

$$e_x = \frac{B_0 \omega \chi_1}{k_1^2} \cos \alpha x [\cos(\omega t - \chi_1 z) - r \cos(\omega t + \chi_1 z)],$$

$$e_z = -\frac{B_0 \omega \alpha}{k_1^2} \sin \alpha x [\sin(\omega t - \chi_1 z) + r \sin(\omega t + \chi_1 z)].$$

ii) pour $z > 0$: $b_y = B_0 \tau \cos \alpha x \cos(\omega t - \chi_2 z)$;

$$e_x = B_0 \tau \frac{\omega \chi_2}{k_2^2} \cos \alpha x \cos(\omega t - \chi_2 z) ; e_z = -B_0 \tau \frac{\omega \alpha}{k_2^2} \sin \alpha x \sin(\omega t - \chi_2 z).$$

La forme générique du vecteur de Poynting est $\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{e} \wedge \vec{b} = \frac{1}{\mu_0} [e_x \vec{u}_z - e_z \vec{u}_x] b_y$;

le flux d'énergie radiante s'exprime comme $\Phi = \int_{-h}^h dy \int_0^a dx P_z = 2h \int_0^a dx P_z$. Tenant

compte de $\int_0^a dx \cos^2 \alpha x = \frac{a}{2}$, on obtient :

$$\Phi_1(t, z) = \frac{ah \omega \chi_1 B_0^2}{\mu_0 k_1^2} [\cos^2(\omega t - \chi_1 z) - r^2 \cos^2(\omega t + \chi_1 z)] ;$$

$$\Phi_2(t, z) = \frac{ah \omega \chi_2 B_0^2 \tau^2}{\mu_0 k_2^2} \cos^2(\omega t - \chi_2 z).$$

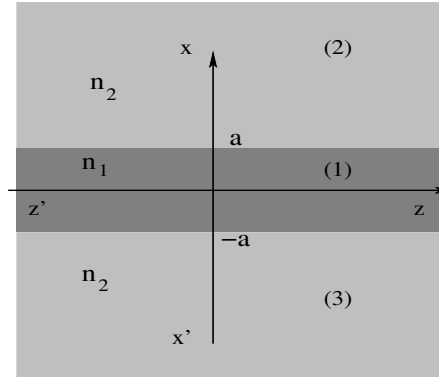
La conservation de l'énergie implique $\Phi_1 = \Phi_2$ pour $z = 0$, soit $\frac{\chi_1}{k_1^2} (1 - r^2) = \frac{\chi_2}{k_2^2} \tau^2$.

Vérifions cette relation. Comme $\tau = 1 + r$, $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_i^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_i$, on devrait donc avoir

$$\frac{\chi_1}{\epsilon_1} (1 - r) = \frac{1 - r}{\rho_1} = \frac{\chi_2}{\epsilon_2} \tau = \frac{\tau}{\rho_2}, \text{ et cette relation est bien vérifiée d'après 6°) b).}$$

c) $R = [\Phi_{\text{refl.}}/\Phi_{\text{inc.}}]_{z=0} = r^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}$, $T = [\Phi_{\text{trans.}}/\Phi_{\text{inc.}}]_{z=0} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau^2 = \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}$,
et l'on vérifie aisément la relation $R + T = 1$ qui exprime la conservation de l'énergie en $z = 0$.

Modèle plan d'une fibre optique



1°) $\vec{\text{rot}} \vec{E} = j\omega \vec{B}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = j\frac{\omega}{c^2}n^2 \vec{E}$, $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{div} \vec{E} = 0$.

2°) Les deux milieux sont supposés illimités dans les directions parallèles à y'/y : il y a invariance par translation parallèlement à cet axe, y ne peut être une variable sensible, les composantes du champ em n'en dépendent pas.

3°) $-\omega B_x = kE_y$, $\omega B_y = kE_x - j\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $\omega B_z = j\frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_x}{\partial x} = jkE_z$;

$$\frac{\omega n^2}{c^2}E_x = kB_y, \quad \frac{\omega n^2}{c^2}E_y = -kB_x + j\frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \frac{\omega n^2}{c^2}E_z = -j\frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = jkB_z.$$

4°) Les composantes B_x , B_y , B_z , E_y , E_z sont continues pour $x = a$ et pour $x = -a$.

5°) $E_z = 0$, $B_z = 0$. On a alors $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$. Les deux composantes E_x et B_x ne dépendent pas de x , aussi bien dans le milieu (I) que dans le milieu (II). Or, les champs sont supposés nuls pour $|x|$ infini. Par suite, $E_x = 0$ et $B_x = 0$ pour $x > a$ et $x < -a$. Utilisant les relations du 3°), on en déduit $B_y = 0$ et $E_y = 0$ dans ces deux régions. Comme conséquence de la continuité de ces deux dernières composantes et de B_x pour $x = a$ et $x = -a$, on a aussi $E_y = 0$, $B_y = 0$ et $B_x = 0$ aussi bien dans la région $-a \leq x \leq a$. Utilisant la relation $\frac{\omega n^2}{c^2}E_x = kB_y$, on en déduit enfin $E_x = 0$ dans la région $-a < x < a$. En conclusion, le champ électromagnétique est nul partout si $E_z = 0$ et $B_z = 0$.

6°) a) On a $\omega B_y = kE_x$ et $kB_y = \frac{\omega n^2}{c^2}E_x$, donc $\omega kB_y = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}E_x = k^2 E_x$. Si $k \neq \frac{\omega n}{c}$, cette relation n'est satisfaite que si $E_x = 0$ et aussi $B_y = 0$. On en conclut que dans ce cas $E_x = 0$ et $B_y = 0$ partout (par continuité).

b) $-\omega kB_x = k^2 E_y = \omega \left[\frac{\omega n^2}{c^2} E_y - j \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} E_y + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$, soit

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}) E_y \quad (v = c/n)$$

c) $E_y = A_1 e^{\alpha_1 x} + A'_1 e^{-\alpha_1 x}$ pour $-a \leq x \leq a$; $E_y = A_2 e^{-\alpha_2 x}$ pour $x \geq a$;
 $E_y = A_3 e^{\alpha_2 x}$ pour $x \leq -a$.

d) E_y est une composante tangentielle du champ électrique vis-à-vis des deux interfaces $x = a$ et $x = -a$; $\frac{\partial E_y}{\partial x} \propto B_z$ et B_z est continu.

• Continuité en $x = a$:

$$A_1 e^{\alpha_1 a} + A'_1 e^{-\alpha_1 a} = A_2 e^{-\alpha_2 a}, \quad \alpha_1 [A_1 e^{\alpha_1 a} - A'_1 e^{-\alpha_1 a}] = -\alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 a}, \quad \text{d'où}$$

$$2 A_1 e^{\alpha_1 a} = \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] A_2 e^{-\alpha_2 a}, \quad 2 A'_1 e^{-\alpha_1 a} = \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] A_2 e^{-\alpha_2 a}.$$

• Continuité en $x = -a$:

$$A_1 e^{-\alpha_1 a} + A'_1 e^{\alpha_1 a} = A_3 e^{-\alpha_2 a}, \quad \alpha_1 [A_1 e^{-\alpha_1 a} - A'_1 e^{\alpha_1 a}] = \alpha_2 A_3 e^{-\alpha_2 a}, \quad \text{d'où}$$

$$2 A_1 e^{-\alpha_1 a} = \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] A_3 e^{-\alpha_2 a}, \quad 2 A'_1 e^{\alpha_1 a} = \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] A_3 e^{-\alpha_2 a}.$$

D'où :

$$4A_1 A'_1 e^{2\alpha_1 a} = \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^2 A_2 A_3 e^{-2\alpha_2 a} \quad \text{et} \quad 4A_1 A'_1 e^{-2\alpha_1 a} = \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^2 A_2 A_3 e^{-2\alpha_2 a}$$

Si les constantes sont différentes de zéro, on en déduit la relation $e^{4\alpha_1 a} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$.
 Etant donné que $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, cette relation est impossible à réaliser puisque le membre de gauche est supérieur à 1 tandis que celui de droite est inférieur à 1. Par conséquent, $A_1 A'_1 = A_2 A_3 = 0$. Si $A_1 = 0$, alors, d'après les relations précédentes, $A_2 = A_3 = 0$ et donc $A'_1 = 0$. De même, si $A'_1 = 0$ alors $A_2 = A_3 = 0$ et par suite $A_1 = 0$. On en conclut que pour le cas étudié, le champ électromagnétique est nul partout.

7°) a) $E_y^{(1)} = A_1 \cos \alpha_1 x + A'_1 \sin \alpha_1 x$, soit, en tenant compte des conditions à $x = 0$:
 $E_y^{(1)} = E_0 \cos \alpha_1 x$; $E_y^{(2)} = A_2 e^{-\alpha_2 x}$; $E_y^{(3)} = A_3 e^{\alpha_2 x}$.

b) • Continuité en $x = a$:

$$E_0 \cos \alpha_1 a = A_2 e^{-\alpha_2 a}; \quad \alpha_1 E_0 \sin \alpha_1 a = \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 a}, \quad \text{donc, nécessairement } (E_0 \neq 0 \text{ et } A_2 \neq 0),$$

$$\tan(\alpha_1 a) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \cos(\alpha_1 a) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad \sin(\alpha_1 a) = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

$$\text{puis } A_2 = e^{\alpha_2 a} \frac{E_0 \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}};$$

• Continuité en $x = -a$: $E_0 \cos \alpha_1 a = A_3 e^{-\alpha_2 a}$; $-\alpha_1 E_0 \sin(-\alpha_1 a) = \alpha_2 A_3 e^{-\alpha_2 a}$; on trouve donc $A_3 = A_2$.

8°) a) De $\frac{\omega n_2}{c} < k < \frac{\omega n_1}{c}$, on tire $\frac{n_2}{n_1} < \cos \theta < 1$, soit encore

$$0 < \sin \theta < \sin \theta_c = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

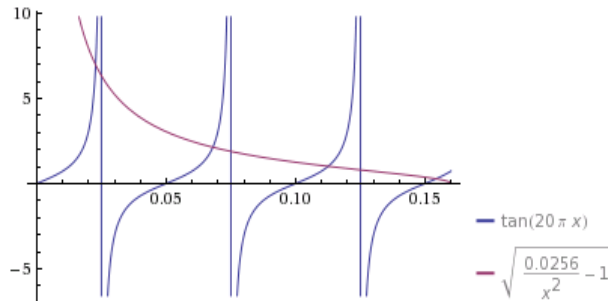
On a $\alpha_2 = \frac{\omega n_1}{c} \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta}$, d'où $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1}$ et $\tan(\alpha_1 a) =$

$\tan\left(\frac{2\pi n_1 a}{\lambda} \sin \theta\right)$. La relation (3) prend donc la forme $\tan\left(\frac{2\pi n_1 a}{\lambda} \sin \theta\right) = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1}$

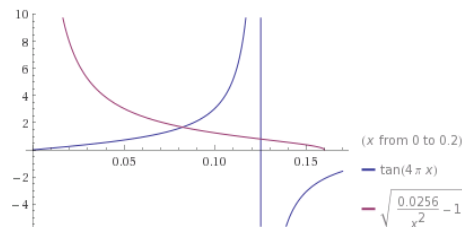
d) Le graphe de la fonction $f_1(u) = \tan(\psi(u))$ où $\psi(u) = \frac{2\pi n_1 a}{\lambda} u$, possède, dans chaque intervalle $M\pi < \psi < (M+1)\pi$, où M est un entier positif, une branche positive allant jusque l'infini. A cet intervalle de longueur π pour ψ correspond pour u l'intervalle $\frac{\lambda}{2n_1 a} M < u < \frac{\lambda}{2n_1 a} (M+1)$, de longueur $\Delta u = \frac{\lambda}{2n_1 a}$. La fonction positive $f_2(u) = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{u^2} - 1}$ est strictement décroissante jusque la valeur zéro dans l'intervalle $0 < u < \sin \theta_c$ et son graphe peut donc intercepter une ou plusieurs branches de celui de $f_1(u)$. Pour connaître le nombre p de points d'intersection entre les deux graphes, qui représente aussi le nombre de modes transmissibles, il suffit de diviser $\sin \theta_c$ par Δu pour obtenir :

$$p = E\left[\frac{2n_1 a}{\lambda} \sin \theta_c\right] + 1 = E\left[\frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right] + 1$$

où $E[H]$ représente la partie entière de H . Ce nombre croît avec a .



d) Pour que le premier mode soit le seul transmissible, on ne doit observer qu'une seule intersection entre les graphes de $f_1(u)$ et de $f_2(u)$, et ceci n'est réalisé que si le second zéro de $f_1(u)$ se trouvant après le zéro $u = 0$, c'est-à-dire $u = \frac{\lambda}{2n_1 a}$ (correspondant à $\psi = \pi$), est plus éloigné que le zéro $u = \sin \theta_c$ de $f_2(u)$. Dans ce cas, $p = 1$, soit $E\left[\frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right] = 0$, ou encore $\frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 1$. La condition sur $2a$ est donc $2a < \frac{\lambda}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = 6,25 \mu\text{m}$.



Rayonnement d'une antenne

1°) Tout plan défini par $\varphi = \text{constante}$ est un \mathcal{P}^+ et en chacun de ses points le champ magnétique lui est orthogonal, tandis que le champ électrique est contenu dans ce plan ; donc $B_\rho = B_z = 0$ et $E_\varphi = 0$. La symétrie cylindrique fait que φ n'est pas une variable sensible, les composantes non nulles du champ em n'en dépendent pas.

2°) L'équation $\vec{\text{rot}} \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$ donne $-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = j \frac{\omega}{c^2} E_\rho$, et $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho B_\varphi] = j \frac{\omega}{c^2} E_z$.

L'équation $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ donne $\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -j\omega B_\varphi$.

3°) Les équations du 2°) conduisent à $\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho B_\varphi] \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} B_\varphi$; si $\rho B_\varphi = F(z) e^{j\omega t}$, cette dernière équation conduit elle-même à $\frac{d^2 F}{dz^2} = -k^2 F$ où $k = \frac{\omega}{c}$. La fonction $F(z)$ a donc nécessairement la forme générale $F(z) = A e^{-jkz} + B e^{jkz}$, A et B étant deux constantes.

4°) a) Le corps de l'antenne étant parfaitement conducteur, le champ électromagnétique y est nul. Le champ magnétique ne s'annulant lorsqu'on approche de l'antenne depuis l'extérieur, subit donc une discontinuité qui mesure le vecteur densité superficielle du courant qui circule sur la surface de l'antenne. Ce vecteur n'a qu'une seule composante j_z selon $z'z$, donnée par $j_z = \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(a+0, z, t) = \frac{F(z)}{\mu_0 a} e^{j\omega t}$.

b) $I(z, t) = 2\pi a j_z = \frac{2\pi F(z)}{\mu_0} e^{j\omega t}$.

5°) On doit avoir $F(0) = A + B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \neq 0$, et $F(h/2) = A e^{-jkh/2} + B e^{jkh/2} = 0$, $F(-h/2) = A e^{jkh/2} + B e^{-jkh/2} = 0$. Sommant les deux dernières conditions, on obtient $2 \cos \left[\frac{kh}{2} \right] (A + B) = 0$, soit $(A + B \neq 0) \frac{kh}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$ ou $(k = 2\pi/\lambda) h = (n + \frac{1}{2})\lambda$.

Comme $A e^{jkh/2} = -B e^{-jkh/2}$ et $A e^{-jkh/2} = -B e^{jkh/2}$, on a $A^2 = B^2$ et comme $B \neq -A$, il vient $B = A = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}$. L'intensité I a ainsi pour expression $I(z, t) = I_0 \cos kz e^{j\omega t}$.

6°) $PM^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta$; Pour $r \gg |z|$, on a $PM = r \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2} - 2\frac{z}{r} \cos \theta} \simeq r - z \cos \theta + O\left(\frac{z^2}{r}\right)$, $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} + O\left(\frac{z}{r^2}\right)$, d'où $A_z \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{j\omega(t-r/c)} \int_{-h/2}^{h/2} \cos kz e^{jkz \cos \theta} dz$

7°) $\mathcal{J} = \int_{-h/2}^{h/2} \cos kz e^{jkz \cos \theta} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[e^{jkz(1+\cos \theta)} + e^{-jkz(1-\cos \theta)} \right] dz =$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin k(1+\cos \theta)h/2}{k(1+\cos \theta)} + \frac{2 \sin k(1-\cos \theta)h/2}{k(1-\cos \theta)} \right] =$$

$$\frac{1}{k} \left[\frac{\sin(1 + \cos \theta)\pi/2}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin(1 - \cos \theta)\pi/2}{1 - \cos \theta} \right] = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \text{ d'où}$$

$$A_z \simeq \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2 r} e^{j\omega(t-r/c)} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

8°) a) $\vec{A}_r = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z A_z = \cos \theta A_z$, $A_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z A_z = -\sin \theta A_z$.

b) De $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ on tire $B_r = 0$, $B_\theta = 0$, $B_\varphi \simeq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\theta] = -jk A_\theta$, puis $j \frac{\omega}{c^2} \vec{E} = \text{rot } \vec{B}$

donne $E_r \simeq 0$, $E_\varphi \simeq 0$ et $j \frac{\omega}{c^2} E_\theta \simeq -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r B_\varphi] \simeq -\frac{\omega^2}{c^2} A_\theta$, soit $E_\theta \simeq -j\omega A_\theta$. Cette dernière relation montre que l'on a fait le choix d'un potentiel électrique nul, puisque, d'une façon générale, on a $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Comme $B_\varphi \simeq -j \frac{\omega}{c} A_\theta$, on a bien $E_\theta \simeq c B_\varphi$ avec

$$B_\varphi \simeq j \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} e^{j\omega(t-r/c)} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$$

9°) a) $\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{e} \wedge \vec{b} = \frac{c}{\mu_0} b_\varphi^2 \vec{e}_r$, $P_r = \frac{c\mu_0 I_0^2}{4\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2 \sin^2 \omega(t-r/c)$,

$$\langle P_r \rangle = \frac{c\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2, \text{ puis } W = \frac{c\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2,$$

soit

$$W = \frac{c\mu_0 I_0^2}{4\pi} \times 1,22$$

b) $R = \frac{c\mu_0}{2\pi} \times 1,22 \simeq 73 \Omega$.

Diffraction par une fente rectangulaire - Apodisation

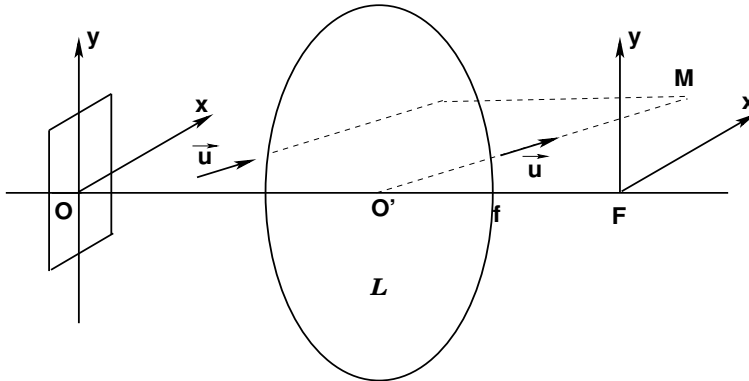
1°) Voir le cours.

$$2^\circ) \text{ a) } E(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{-a/2}^{a/2} dx_P \int_{-b/2}^{b/2} dy_P e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x_P + \beta y_P)} = \frac{1}{j\frac{2\pi\alpha}{\lambda}} \left[e^{j\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\frac{a}{2}} - e^{-j\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\frac{a}{2}} \right] \times$$

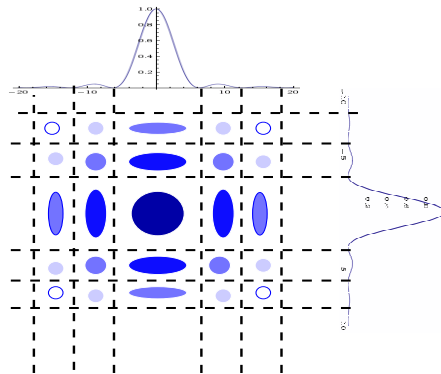
$$\frac{1}{j\frac{2\pi\beta}{\lambda}} \left[e^{j\frac{2\pi\beta}{\lambda}\frac{b}{2}} - e^{-j\frac{2\pi\beta}{\lambda}\frac{b}{2}} \right] = ab \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} \text{ où } X = \frac{\pi\alpha a}{\lambda} \text{ et } Y = \frac{\pi\beta b}{\lambda}.$$

$$\text{b) } \vec{u} = \frac{\vec{O'M}}{O'M}, \alpha = \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{FM}}{O'M} = \frac{x}{O'M} \simeq \frac{x}{f} \text{ et } X \simeq \frac{\pi a}{\lambda f} x;$$

$$\text{de même, } \beta = \vec{u} \cdot \vec{e}_y \simeq \frac{y}{f} \text{ et } Y \simeq \frac{\pi b}{\lambda f} y.$$



c) et 3°) L'intensité de l'éclairement est proportionnelle à $|E|^2$ et peut être prise égale à $I = H(X)H(Y)$ avec $H(U) = \frac{\sin^2 U}{U^2}$.



D'où la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan \mathcal{F} schématisée par la figure ci-dessus, centrée sur le foyer F . Les premiers minima d'intensité nulle sont obtenus pour $x = \pm \frac{\lambda f}{a}$ et pour $y = \pm \frac{\lambda f}{b}$. La région centrale de la figure de diffraction a donc pour dimensions

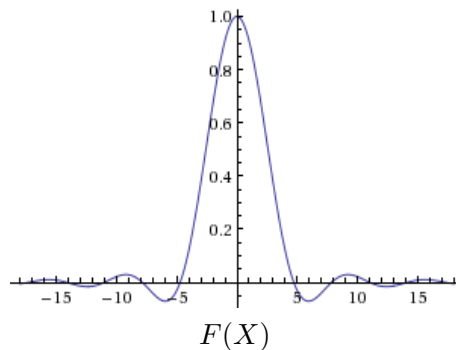
$$\Delta x = \frac{2\lambda f}{a} = 1,2 \text{ mm}, \quad \Delta y = \frac{2\lambda f}{b} = 0,04 \text{ mm}$$

On note que les zéros de $H(X)$ sont donnés par $X = n\pi$ avec $|n|$ entier supérieur ou égal à 1, tandis que ses maxima secondaires sont obtenus lorsque X est solution de $\tan X = X$, soit $X = \pm 4,49$ ($3\pi/2 = 4,71$), $X = \pm 7,72$ ($5\pi/2 = 7,85$), $X = \pm 10,99$ ($7\pi/2 = 10,99$), c'est-à-dire, pour des valeurs de X voisines de $X_p = \pm(2p+1)\frac{\pi}{2}$ avec p entier supérieur ou égal à 1, donnant $H(X_p) = \frac{4}{\pi^2(2p+1)^2}$, soit $H(X_1) = 0,045$, $H(X_2) = 0,016$, etc. Ces maxima sont à l'intérieur de bandes de largeur $\delta X = \pi$, soit $\delta x = \Delta x/2$.

4°) $E'(\alpha, \beta, \gamma) = b \frac{\sin Y}{Y} \mathcal{J}$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{-a/2}^{a/2} dx_P \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi\alpha}{\lambda} x_P} \left[e^{j \frac{\pi x_P}{a}} + e^{-j \frac{\pi x_P}{a}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{\pi}{a}} \left(e^{j \left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{\pi}{a} \right) \frac{a}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-j \left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{\pi}{a} \right) \frac{a}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{a}} \left(e^{j \left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{a} \right) \frac{a}{2}} - e^{-j \left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{a} \right) \frac{a}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{\pi}{a}} \left(e^{j \frac{\pi\alpha a}{\lambda}} + e^{-j \frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{\pi}{a}} \left(e^{j \frac{\pi\alpha a}{\lambda}} + e^{-j \frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right) \right] \\ &= \frac{2a}{\pi} F(X) \text{ avec } F(X) = \frac{\cos X}{1 - \frac{4X^2}{\pi^2}}, \quad X = \frac{\pi\alpha a}{\lambda}. \text{ Ainsi, } E'(\alpha, \beta, \gamma) = a b \frac{2}{\pi} F(X) \frac{\sin Y}{Y}. \end{aligned}$$

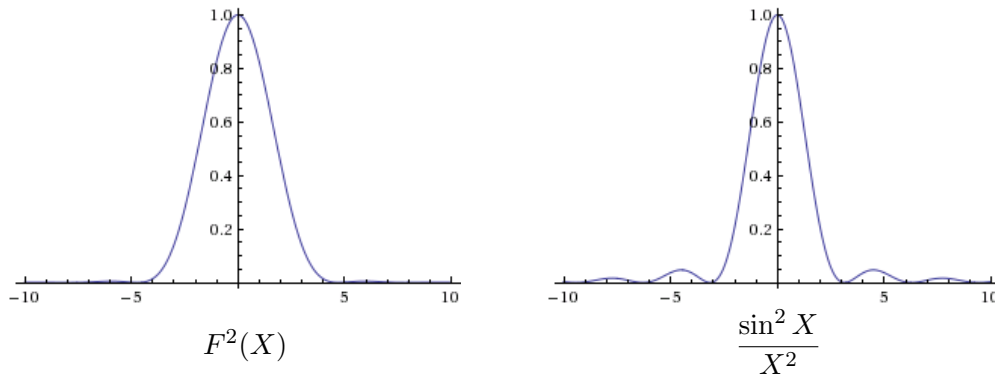
5°) a) b)



$$F(-X) = F(X); \quad F(0) = 1; \quad F(\pi/2) = \pi/4; \quad F(\pi) = 1/3; \quad F(3\pi/2) = 0; \quad F'(3\pi/2) = -1/8; \quad F(2\pi) = -1/15; \quad F(5\pi/2) = 0; \quad F'(5\pi/2) = 1/24.$$

$F(X) = 0$ pour $X = (2n + 3)\frac{\pi}{2}$ avec n entier ≥ 0 . Pour $X_1 = 5,93557 \simeq 2\pi$ intervient le premier extremum négatif de $F(X)$, égal à -0.07 . Le second extremum, positif et égal à $0,02927$, est obtenu pour $X_2 = 9,203 \simeq 3\pi$.

c) Les deux figures ci-dessous permettent d'évaluer l'effet que provoque, sur la distribution en X de l'intensité lumineuse, l'introduction de la pellicule transparente.



On constate :

- que la largeur de la région centrale a augmenté de 50%, passant de 2π à 3π ;
- que les maxima secondaires sont notablement amoindris : la valeur des premiers passent de 0,045 pour $H(X)$ à 0,0049 pour $F(X)$, soit une diminution d'un facteur 10.

Ainsi, le "corps" de la distribution, représenté par la région centrale, a été élargi, tandis que le reste de la distribution, caractérisé par les maxima secondaires qualifiés de "pieds", a été quasiment supprimé. C'est pourquoi on parle "d'apodisation" de la distribution. Ceci peut présenter un avantage pour l'utilisation de certains instruments optiques. Cependant, à intensité lumineuse incidente donnée, l'intensité lumineuse maximum dans la figure de diffraction a été réduite d'un facteur $4/\pi^2$, soit d'environ 60%.

Diffraction et interférences - I

1°, 2°, 3°) Se reporter aux questions 1, 2 et 3 du problème sur l'apodisation.

4°) a) On prend encore l'origine des phases en O . Comme $\vec{OP}' = \vec{OO}' + \vec{O'P}'$, on a

$$E' = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{OO}' \cdot \vec{u}} \iint dx'_P dy'_P e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{O'P}' \cdot \vec{u}} = e^{j\varphi} E(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{où}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{OO}' \cdot \vec{u} = \frac{\pi h}{\lambda} \alpha \simeq \frac{\pi h}{\lambda f} x.$$

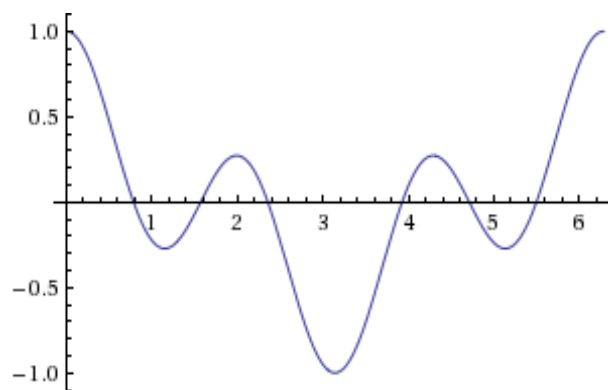
b) Puisque $|E'| = |E|$, la figure de diffraction est inchangée.

5°) a) Les ondes réémises par les quatre ouvertures étant cohérentes, l'amplitude totale de l'onde derrière l'écran est $E' = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ avec $E_1 = e^{j\varphi} E$ et $E_2 = e^{3j\varphi} E$, $E_3 = e^{-j\varphi} E$, $E_4 = e^{-3j\varphi} E$, soit $E' = 2[\cos \varphi + \cos 3\varphi] E$. Or, $\cos \varphi + \cos 3\varphi = 2 \cos \varphi \cos 2\varphi$ d'où $E' = G(Z)F(X)F(Y)$ avec $F(U) = \frac{\sin U}{U}$ et $G(Z) = 4abZ$, $Z = \cos \varphi \cos 2\varphi$.

b) $I(x, y) = |E'|^2 = 16a^2b^2 Z^2 F^2(X) F^2(Y)$; $\varphi/X = h/a$.

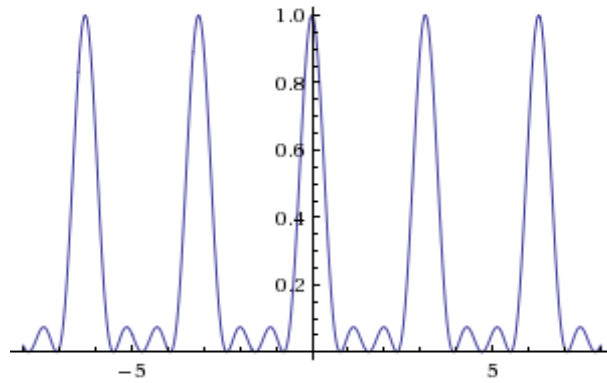
6°) a) $Z(\varphi)$ est une fonction périodique de période 2π ; de plus, $Z(2\pi - \varphi) = Z(\varphi)$. Posant $u = \cos \varphi$, on a $Z = u(2u^2 - 1)$; dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a :

- $Z = 1$ pour $u = 1$, soit $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$; $Z = -1$ pour $u = -1$, soit $\varphi = \pi$;
- $Z = 0$ pour $u = 0$ et pour $u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit pour $\varphi = \pi/4$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/4$, $\varphi = 5\pi/4$, $\varphi = 3\pi/2$ et $\varphi = 7\pi/4$;
- $Z'(\varphi) = -\sin \varphi [6 \cos^2 \varphi - 1]$; cette dérivée est nulle pour $\varphi = 0, \pi, 2\pi$, et pour $\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, soit $\varphi = \phi_0 = 1,15 \text{ rd} = 65,9^\circ$ (minimum négatif), $\varphi = \pi - \phi_0 = 1,99 \text{ rd} = 114^\circ$ (maximum positif), $\varphi = \pi + \phi_0 = 4,29 \text{ rd} = 245,9^\circ$ (maximum positif), $\varphi = 2\pi - \phi_0 = 5,13 \text{ rd} = 294^\circ$ (minimum négatif).



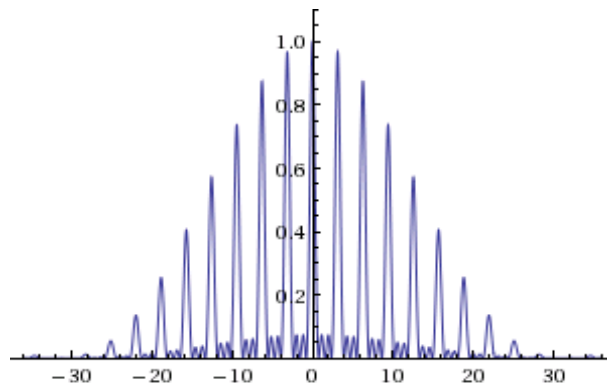
Z en fonction de φ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$

b)



Z^2 en fonction de φ

7°) a)



$Z^2 F^2(X)$ en fonction de φ

b) La distance séparant deux maxima principaux consécutifs est telle que $\Delta_i \varphi = \pi = \pi \frac{h \Delta_i x}{f \lambda}$,
soit $\Delta_i x = \frac{\lambda f}{h} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

c) La largeur suivant $x'Fx$ de la région centrale de la figure de diffraction est $\Delta_d x = \frac{2\lambda f}{a}$ et
l'on a $\frac{\Delta_d x}{\Delta_i x} = \frac{2h}{a} = 20$: il y a donc dans cette zone 19 maxima principaux correspondant à des franges d'interférence brillantes, celles-ci étant par ailleurs de moins en moins lumineuses à mesure qu'on approche des bords.

Diffraction et interférences - II

1°) Voir le cours.

2°) a) Le calcul est similaire à celui de la question 2°) du problème sur l'apodisation, en remplaçant α et β par $\alpha - \alpha_0$ et $\beta - \beta_0$, respectivement. On trouve donc $E(\alpha, \beta, \gamma) = a b F(X) F(Y)$ où $F(U) = \frac{\sin U}{U}$ et $X = \frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)$, $Y = \frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta_0)$.

$$b) \alpha = \vec{e}_x \cdot \vec{u} = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{O'M}}{O'M} = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{FM}}{O'M} = \frac{x}{O'M} \simeq \frac{x}{f}.$$

De même, $\alpha_0 = \vec{e}_x \cdot \vec{u}_0 = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{O'M_0}}{O'M_0} = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{FM_0}}{O'M_0} = \frac{x_0}{O'M_0} \simeq \frac{x_0}{f}$, d'où $X \simeq \frac{\pi a}{f\lambda}(x - x_0)$.

Avec la même approximation, $Y \simeq \frac{\pi b}{f\lambda}(y - y_0)$.

c) $I(x, y) = |E|^2 = a^2 b^2 F^2(X) F^2(Y)$. La figure de diffraction est ici centrée sur le point M_0 . Pour sa représentation schématique en deux dimensions, voir 2°) c) du problème sur l'apodisation.

$$3°) \Delta x = \frac{2\lambda f}{a} = 1,2 \text{ mm}, \quad \Delta y = \frac{2\lambda f}{b} = 0,04 \text{ mm}.$$

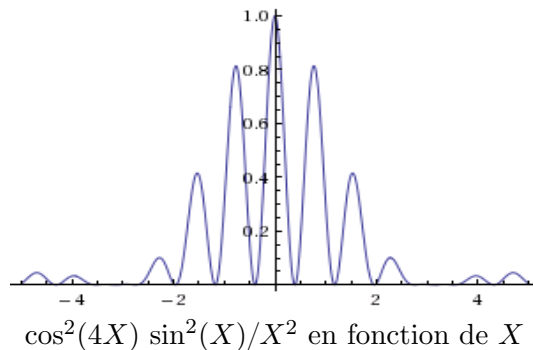
4°) a) L'origine des phases est prise en O . Comme $\vec{OP}' = \vec{OO}' + \vec{O'P}'$, on a

$$E' = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{OO}' \cdot \vec{\Delta u}} \iint dx'_P dy'_P e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{O'P}' \cdot \vec{\Delta u}} = e^{j\varphi} E(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{où } \vec{\Delta u} = \vec{u} - \vec{u}_0,$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{OO}' \cdot \vec{\Delta u} = \frac{\pi h}{\lambda}(\alpha - \alpha_0) \simeq \frac{\pi h}{\lambda f}(x - x_0).$$

b) Puisque $|E'| = |E|$, la figure de diffraction est inchangée.

5°) a) Voir le cours. b) Les ondes réémises par les deux ouvertures étant cohérentes, l'amplitude totale de l'onde derrière l'écran est $E' = E (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = 2 \cos \varphi E$, et l'intensité de l'éclairement dans le plan \mathcal{F} est $I'(x, y) = 4a^2 b^2 \cos^2 \varphi F^2(X) F^2(Y)$.



c) d) Dans la zone centrale de la figure de diffraction où l'éclairement est le plus important,

on observe des franges d'interférence, l'interfrange, distance entre deux franges voisines étant $\ell = \frac{\lambda f}{h}$. On a ici $\varphi/X = h/a = 4$, et $\Delta x/\ell = 2\frac{h}{a} = 8$: il y a donc 7 franges d'interférence brillantes à l'intérieur de la zone centrale (voir figure). On note que plus h est grand, plus il y a de franges d'interférences dans la zone centrale de diffraction.

6°) a) b) Les lumières émises par les deux étoiles étant incohérentes, l'intensité lumineuse dans le plan \mathcal{F} est $\mathcal{I} = I + I' = 4a^2b^2 [\cos^2 \varphi F^2(X) + \cos^2 \varphi' F^2(X')] F^2(Y)$. On supposera ici que h est grand devant a , et que le nombre de franges d'interférence dans chacune des deux zones centrales de diffraction est donc grand. Admettant aussi que ces deux zones sont proches l'une de l'autre et en portant l'observation au voisinages de leurs centres qui sont les plus lumineux, on peut négliger l'influence de la diffraction et écrire $F^2(X) \simeq 1$, $F^2(X') \simeq 1$. En outre, b est supposé suffisamment grand pour que l'on puisse aussi faire l'approximation $F^2(Y) \simeq 1$. La partie intéressante de l'intensité totale est donc $\mathcal{I}' = \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi'$. Dans cette situation, on constate que les deux systèmes de franges se brouillent lorsque φ et φ' diffèrent de $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ où k est un entier relatif, puisqu'alors $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi'$ et $\mathcal{I}' = 1$, c'est-à-dire que dans ce cas, l'intensité lumineuse devient uniforme dans la région étudiée. Concrètement, ce brouillage apparaît lorsque les franges brillantes de l'un des deux systèmes d'interférence viennent à la place des franges sombres de l'autre. Par exemple, les franges brillantes dues à la lumière provenant de S correspondent à $\varphi = k_1\pi = 2k_1\frac{\pi}{2}$ où k_1 est un entier relatif, tandis que les franges sombres dues à la lumière provenant de S' correspondent à $\varphi' = (2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}$ où k_2 est aussi un entier relatif. Si ces valeurs de φ et de φ' sont effectivement prises au même point M du plan \mathcal{F} , on a $\alpha - \alpha_0 = \frac{\lambda}{2h}(2k_1)$ et $\alpha - \alpha'_0 = (2k_2 + 1)\frac{\lambda}{2h}$, soit $\alpha'_0 - \alpha_0 = \frac{\lambda}{2h} [2(k_1 - k_2) + 1] = \frac{\lambda}{2h} [2k + 1]$ où k est un entier relatif. Cette circonstance intervient lorsque la distance h entre les ouvertures, supposée variable, prend l'une des valeurs $\frac{\lambda}{2} \left| \frac{2k + 1}{\alpha'_0 - \alpha_0} \right|$, la plus petite étant $h_m = \frac{\lambda}{2|\alpha'_0 - \alpha_0|}$. On en déduit $|\alpha'_0 - \alpha_0| = \frac{\lambda}{2h_m} = 6 \cdot 10^{-6}$ rd. En fait, le brouillage effectivement observé peut se manifester bien avant que h ne prenne exactement l'une des valeurs critiques, car, selon la sensibilité de l'appareil de mesure utilisé, le contraste de la figure résultante peut vite s'avérer trop faible pour qu'on puisse déceler avec précision les faibles variations d'intensité lumineuse. Pour finir, on notera qu'ici $\Delta x/\ell = 2h/a$ et que chaque zone centrale de diffraction contient au minimum une centaine de franges brillantes plus ou moins lumineuses dès que $h \geq h_m$.