

GEOMETRIE SUR LES SURFACES EN 3D

Christian Carimalo

Chapitre 1

Etude locale d'une surface en 3D

1.1 Cadre général

1.1.1 Paramétrisation de la surface, vecteurs tangents

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère une surface S que l'on suppose ici posséder toutes les propriétés de régularité nécessaires. Notamment, on admet qu'en chacun de ses points il existe une normale variant de façon continue et qu'il est ainsi possible de distinguer les deux faces de la surface, l'une cataloguée de positive et l'autre de négative. La normale sera supposée orientée de la face négative vers la face positive. La position d'un point $M(x, y, z)$ sur la surface sera définie par la donnée de deux paramètres u et v , ceux-ci pouvant, l'un ou l'autre, ou les deux, ne pas être homogènes à une longueur. Ce sont les *coordonnées curvilignes* de M sur la surface. Les coordonnées cartésiennes de M sont exprimées au moyen de ces coordonnées :

$$x = \alpha(u, v) \quad y = \beta(u, v), \quad z = \gamma(u, v) \quad (1.1)$$

par des fonctions de u et v que l'on suppose continues et possédant des dérivées premières et secondes continues. L'équation de la surface peut toujours être exprimée sous la forme $F(x, y, z) = 0$ où F est supposée elle aussi présenter toutes les propriétés de régularité nécessaires. On sait que son gradient

$$\vec{V} = e_x \frac{\partial F}{\partial x} + e_y \frac{\partial F}{\partial y} + e_z \frac{\partial F}{\partial z} \quad (1.2)$$

en un point M de la surface est orthogonal à celle-ci et orienté dans le sens de croissance de $F(x, y, z)$. La normale \vec{N} à la surface sera prise égale à $\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$. On sait que tout déplacement élémentaire

\vec{dM} d'un point M sur la surface est orthogonal au gradient de F , donc situé dans le plan tangent à la surface en ce point. Ecrivait

$$\vec{dM} = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv \quad (1.3)$$

on en déduit que les deux vecteurs

$$\vec{E}_u = \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} e_x + \frac{\partial \beta}{\partial u} e_y + \frac{\partial \gamma}{\partial u} e_z \quad \text{et}$$

$$\vec{E}_v = \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \vec{e}_x + \frac{\partial \beta}{\partial v} \vec{e}_y + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \vec{e}_z \quad (1.4)$$

qui sont tangents aux courbes coordonnées correspondant à u et v respectivement, sont aussi dans ce plan tangent. Ils forment avec \vec{N} une base locale qui n'est généralement pas orthonormée. On a seulement

$$\vec{N}^2 = 1, \quad \vec{N} \cdot \vec{E}_u = 0, \quad \vec{N} \cdot \vec{E}_v = 0 \quad (1.5)$$

1.1.2 Tenseur métrique induit

Le carré de la distance séparant deux points de la surface infiniment voisins $M(x, y, z)$ et $(M + dM)(x + dx, y + dy, z + dz)$ s'écrit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{M}^2 = \left[\vec{E}_u du + \vec{E}_v dv \right]^2 = g_{uu} du^2 + 2g_{uv} dudv + g_{vv} dv^2$$

avec $g_{uu} = \vec{E}_u^2$, $g_{vv} = \vec{E}_v^2$, $g_{uv} = g_{vu} = \vec{E}_u \cdot \vec{E}_v$ (1.6)

Il s'exprime comme une forme quadratique en du et dv , couramment appelée *première forme fondamentale*. Les grandeurs g_{ij} ($i, j \equiv u, v$) sont les composantes du *tenseur métrique* induit sur la surface, paramétrisée au moyen des variables u et v . Ce sont bien des composantes d'un tenseur g de rang 2 car, la forme (1.6) étant par hypothèse un invariant (donc un *scalaire*), un changement de paramétrisation $(u, v) \rightarrow (u', v')$ transforme les composantes g_{ij} en

$$g'_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial u'_\ell} g_{k\ell}$$

(où l'on a utilisé ici la convention de sommation d'Einstein), ce qui est conforme à la loi de transformation des composantes *covariantes* d'un tenseur de rang 2. Rangeons les composantes du tenseur g dans le tableau matriciel

$$G = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{uu} & g^{uv} \\ g^{vu} & g^{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} g_{vv} & -g_{uv} \\ -g_{vu} & g_{uu} \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned} (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v)^2 &= (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \cdot (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) = \vec{E}_u \cdot \left[\vec{E}_v \wedge (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \right] \\ &= \vec{E}_u \cdot \left[\vec{E}_v \vec{E}_u - (\vec{E}_u \cdot \vec{E}_v) \vec{E}_v \right] = \vec{E}_u^2 \vec{E}_v^2 - (\vec{E}_u \cdot \vec{E}_v)^2 \end{aligned}$$

on trouve

$$\det G = g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 = (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v)^2 \quad (1.7)$$

Les deux vecteurs \vec{E}_u et \vec{E}_v étant dans le plan tangent à la surface en M , leur produit vectoriel, s'il est non nul, est orienté suivant la normale à la surface en M , donc parallèle au gradient $\vec{V} = \vec{\text{grad}} F$:

$$\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v = \chi \vec{V}, \quad \text{avec} \quad \chi^2 = \frac{\det G}{V^2} \quad (1.8)$$

On notera

$$P = \vec{N} \cdot \left[\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v \right] \quad (1.9)$$

le produit mixte des trois vecteurs de la base locale. En supposant la base orientée de telle sorte que $P \geq 0$, on a

$$P = \sqrt{\det G} \quad (1.10)$$

1.1.3 Les symboles de Christoffel¹

Lorsque M se déplace sur la surface, les vecteurs \vec{E}_u , \vec{E}_v et \vec{N} varient. Leurs variations peuvent être exprimées en fonction de ces mêmes vecteurs :

$$\begin{aligned} d\vec{E}_u &= \omega_u^u \vec{E}_u + \omega_u^v \vec{E}_v + \omega_u^n \vec{N}, & d\vec{E}_v &= \omega_v^u \vec{E}_u + \omega_v^v \vec{E}_v + \omega_v^n \vec{N} \\ d\vec{N} &= \omega_n^u \vec{E}_u + \omega_n^v \vec{E}_v + \omega_n^n \vec{N} \end{aligned} \quad (1.11)$$

De (1.5) on tire $\vec{N} \cdot d\vec{N} = 0$, d'où $\omega_n^n = 0$. Chacun des coefficients ω s'exprime en fait en fonction des différentielles du et dv . Ainsi

$$\begin{aligned} \omega_u^u &= \Gamma_{uu}^u du + \Gamma_{uv}^u dv, & \omega_u^v &= \Gamma_{uu}^v du + \Gamma_{vv}^v dv, & \omega_u^n &= \Gamma_{uu}^n du + \Gamma_{uv}^n dv \\ \omega_v^u &= \Gamma_{vu}^u du + \Gamma_{vv}^u dv, & \omega_v^v &= \Gamma_{vu}^v du + \Gamma_{vv}^v dv, & \omega_v^n &= \Gamma_{vu}^n du + \Gamma_{vv}^n dv \\ \omega_n^u &= \Gamma_{nu}^u du + \Gamma_{nv}^u dv, & \omega_n^v &= \Gamma_{nu}^v du + \Gamma_{nv}^v dv \end{aligned}$$

Les grandeurs Γ introduites ci-dessus sont les *symboles de Christoffel*². On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial u} &= \Gamma_{uu}^u \vec{E}_u + \Gamma_{uv}^u \vec{E}_v + \Gamma_{uu}^n \vec{N}, & \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v} &= \Gamma_{uv}^u \vec{E}_u + \Gamma_{vv}^u \vec{E}_v + \Gamma_{uv}^n \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial u} &= \Gamma_{vu}^u \vec{E}_u + \Gamma_{vv}^u \vec{E}_v + \Gamma_{vu}^n \vec{N}, & \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial v} &= \Gamma_{vv}^u \vec{E}_u + \Gamma_{vv}^v \vec{E}_v + \Gamma_{vv}^n \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} &= \Gamma_{nu}^u \vec{E}_u + \Gamma_{nu}^v \vec{E}_v, & \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} &= \Gamma_{nv}^u \vec{E}_u + \Gamma_{nv}^v \vec{E}_v \end{aligned} \quad (1.12)$$

1. E.B. Christoffel, "Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades", J. reine angew. Math. 70 (1869), 46-70.

2. En fait, seuls les Γ_{jk}^i avec $i, j, k = u, v$ sont les véritables symboles de Christoffel, mais, pour ne pas multiplier les notations, on a attribué le même nom et la même lettre Γ aux Γ_{ij}^n entrant dans les composantes normales de $d\vec{E}_u$ et de $d\vec{E}_v$, ainsi qu'aux Γ_{nj}^i entrant dans la décomposition de $d\vec{N}$.

1.1.4 Propriétés des symboles de Christoffel et leurs relations avec le tenseur métrique

- **Symétries - 1** Puisque $\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 M}{\partial v \partial u}$, on a $\frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v} = \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial u}$, ce qui impose les symétries

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u, \quad \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v, \quad \Gamma_{uv}^n = \Gamma_{vu}^n \quad (1.13)$$

- **Symétries - 2** Comme $\vec{E}_u \cdot \vec{N} = \vec{E}_v \cdot \vec{N} = 0$, on a

$$\vec{E}_u \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v} = -\Gamma_{uv}^n = -\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial u} = -\Gamma_{vu}^n = \vec{E}_v \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \quad (1.14)$$

et les deux membres extrêmes de cette égalité s'écrivent respectivement (voir plus haut)

$$g_{uu}\Gamma_{nv}^u + g_{uv}\Gamma_{nv}^v = -\Gamma_{uv}^n \quad \text{et} \quad g_{vu}\Gamma_{nu}^u + g_{vv}\Gamma_{nu}^v = -\Gamma_{vu}^n \quad (1.15)$$

où l'on retrouve l'égalité $\Gamma_{uv}^n = \Gamma_{vu}^n$. De

$$\vec{E}_u \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = -\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial u} \quad \text{et} \quad \vec{E}_v \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial v}$$

on tire aussi

$$g_{uu}\Gamma_{nu}^u + g_{uv}\Gamma_{nu}^v = -\Gamma_{uu}^n, \quad g_{vu}\Gamma_{nv}^u + g_{vv}\Gamma_{nv}^v = -\Gamma_{vv}^n \quad (1.16)$$

- Projétant les vecteurs (1.12) sur les produits vectoriels $\vec{E}_u \wedge \vec{N}$, $\vec{E}_v \wedge \vec{N}$, on peut exprimer les symboles de Christoffel comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{P} (\vec{E}_v \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial u}, & \Gamma_{uu}^v &= -\frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial u} \\ \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u &= \frac{1}{P} (\vec{E}_v \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v}, & \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v &= -\frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v} \\ \Gamma_{vv}^u &= \frac{1}{P} (\vec{E}_v \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial u}, & \Gamma_{vv}^v &= -\frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{N}) \cdot \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial v} \end{aligned} \quad (1.17)$$

où, rappelons-le, $P = (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \cdot \vec{N}$ est le produit mixte des trois vecteurs de la base locale. On note aussi les relations

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^n &= \frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial u}, & \Gamma_{uv}^n = \Gamma_{vu}^n &= \frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \cdot \frac{\partial \vec{E}_u}{\partial v} \\ \Gamma_{vv}^n &= \frac{1}{P} (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v) \cdot \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial v} \end{aligned} \quad (1.18)$$

- Il est possible d'exprimer les symboles de Christoffel impliquant les indices u et v au moyen des composantes du tenseur métrique et de leurs dérivées partielles. En effet, on a

$$dg_{ij} = d\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j + \vec{E}_i \cdot d\vec{E}_j \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{E}_i \cdot \frac{\partial \vec{E}_j}{\partial u^k} + \vec{E}_j \cdot \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial u^k}$$

Les vecteurs \vec{E}_u et \vec{E}_v étant orthogonaux à \vec{N} , les produits scalaires ne font intervenir que les symboles Γ_{st}^r avec $r, s, t = u, v$. Il vient

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{E}_i \cdot \left[\Gamma_{jk}^r \vec{E}_r \right] + \vec{E}_j \cdot \left[\Gamma_{ik}^r \vec{E}_r \right] = \Gamma_{jk}^r g_{ir} + \Gamma_{ik}^r g_{jr} \quad (1.19)$$

Utilisant la relation $g^{rt} g_{ts} = \delta_s^r$ où δ_s^r est un symbole de Kronecker, et tenant compte de $\Gamma_{st}^r = \Gamma_{ts}^r$ et de $g_{rs} = g_{sr}$, on déduit

$$\begin{aligned} g^{m\ell} \left[\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right] &= g^{m\ell} \left[\Gamma_{\ell j}^r g_{ir} + \Gamma_{ij}^r g_{\ell r} + \Gamma_{\ell i}^r g_{jr} + \Gamma_{ji}^r g_{\ell r} - \Gamma_{j\ell}^r g_{ir} - \Gamma_{i\ell}^r g_{jr} \right] \\ &= g^{m\ell} \left[\Gamma_{ij}^r g_{\ell r} + \Gamma_{ji}^r g_{\ell r} \right] = 2\Gamma_{ij}^m \quad \text{soit} \\ \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} g^{m\ell} \left[\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

• **Autres relations entre les Γ**

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial u^k \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^k} \left[\Gamma_{ij}^\ell \vec{E}_\ell + \Gamma_{ij}^n \vec{N} \right] = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\ell}{\partial u^k} \vec{E}_\ell + \Gamma_{ij}^\ell \frac{\partial \vec{E}_\ell}{\partial u^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^k} \vec{N} + \Gamma_{ij}^n \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left[\Gamma_{ik}^\ell \vec{E}_\ell + \Gamma_{ik}^n \vec{N} \right] = \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial u^j} \vec{E}_\ell + \Gamma_{ik}^\ell \frac{\partial \vec{E}_\ell}{\partial u^j} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial u^j} \vec{N} + \Gamma_{ik}^n \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^j} \end{aligned}$$

En exprimant la composante suivant \vec{E}_ℓ des expressions obtenues, il vient

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^\ell}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^\ell + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^\ell$$

∞ d'où une relation due à Gauss :

$$-\Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^\ell + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\ell}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^\ell \quad (1.21)$$

Or, de (1.15) et (1.16) on déduit $\Gamma_{nj}^k = -g^{kr} \Gamma_{rj}^n$, ce qui, combiné avec la relation de Gauss conduit au résultat remarquable

$$\Gamma_{ij}^n \Gamma_{qk}^n - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{qj}^n = g_{\ell q} \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^\ell}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^\ell \right] \quad (1.22)$$

∞ Puis, par projection sur \vec{N} , la relation de Mainardi-Codazzi :

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial u^j} = -\Gamma_{ij}^\ell \Gamma_{\ell k}^n + \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{\ell j}^n \quad (1.23)$$

• Calculons maintenant :

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\vec{\partial N}}{\partial u} \cdot [\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v] + \frac{\vec{\partial E}_u}{\partial u} \cdot [\vec{E}_v \wedge \vec{N}] + \frac{\vec{\partial E}_v}{\partial u} \cdot [\vec{N} \wedge \vec{E}_u] = \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v$$

On trouve de même $\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial v} = \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{vv}^v$

✂ Finalement, on peut donc écrire

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u^k} = \sum_i \Gamma_{ki}^i \quad (1.24)$$

Ce résultat peut aussi s'établir comme suit. La différentielle du déterminant de G est obtenue en multipliant la différentielle dg_{ij} de chaque élément par le mineur X^{ij} correspondant et en sommant. Or, l'élément g^{ij} de la matrice inverse est précisément égal à $X^{ij}/[\det G]$. On a donc :

$$d[\det G] = [\det G] g^{ij} dg_{ij}$$

Or, prenant dans (1.20) $j = m$ et en sommant sur m , on trouve

$$\Gamma_{im}^m = \frac{1}{2} g^{m\ell} \frac{\partial g_{m\ell}}{\partial u^i}$$

En comparant, on déduit

$$\Gamma_{im}^m = \frac{1}{2 \det G} \frac{\partial \det G}{\partial u^i} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u^i}$$

1.1.5 Application de Gauss et seconde forme quadratique fondamentale

La donnée de la normale unitaire $\vec{N}(M)$ pour chaque point M d'une surface Σ peut être envisagée comme le résultat d'une application N de Σ vers la sphère de rayon unité \mathbb{S}_2 de \mathbb{R}^3 , appelée *application de Gauss*. La différentielle de cette application en un point M de Σ , notée dN_M , est elle-même une application linéaire de l'espace tangent à Σ en M , noté $T_M \Sigma$, vers l'espace tangent correspondant de \mathbb{S}_2 , noté $T_{N(M)} \mathbb{S}_2$. Ces deux espaces étant identiques, cette différentielle est un endomorphisme de $T_M \Sigma$. Il est tel que

$$dN_M(\vec{E}_u) = \Gamma_{nu}^u \vec{E}_u + \Gamma_{nu}^v \vec{E}_v, \quad dN_M(\vec{E}_v) = \Gamma_{nv}^u \vec{E}_u + \Gamma_{nv}^v \vec{E}_v \quad (1.25)$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{E}_u \cdot dN_M(\vec{E}_u) &= g_{uu} \Gamma_{nu}^u + g_{uv} \Gamma_{nu}^v = -\Gamma_{uu}^n, & \vec{E}_u \cdot dN_M(\vec{E}_v) &= g_{uu} \Gamma_{nv}^u + g_{uv} \Gamma_{nv}^v = -\Gamma_{uv}^n \\ \vec{E}_v \cdot dN_M(\vec{E}_u) &= g_{vu} \Gamma_{nu}^u + g_{vv} \Gamma_{nu}^v = -\Gamma_{vu}^n, & \vec{E}_v \cdot dN_M(\vec{E}_v) &= g_{vu} \Gamma_{nv}^u + g_{vv} \Gamma_{nv}^v = -\Gamma_{vv}^n \end{aligned} \quad (1.26)$$

L'endomorphisme $L = -dN_M$ s'appelle *application de Weingarten*. D'après (1.26), il peut être représenté par la matrice symétrique

$$L = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^n & \Gamma_{uv}^n \\ \Gamma_{vu}^n & \Gamma_{vv}^n \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

et est lui-même symétrique. On note la relation

$$L = -G \Gamma_n, \quad \text{avec} \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} \Gamma_{nu}^u & \Gamma_{nv}^u \\ \Gamma_{nu}^v & \Gamma_{nv}^v \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

L'endomorphisme de Weingarten définit une seconde forme quadratique :

$$(du, dv) L \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = du^2 \Gamma_{uu}^n + 2 du dv \Gamma_{uv}^n + dv^2 \Gamma_{vv}^n = -\vec{dN} \cdot \vec{dM} \quad (1.29)$$

appelée *seconde forme fondamentale*, et que nous aurons à considérer plus loin.

1.1.6 Différentielle d'un champ vectoriel sur la surface³

Considérons un champ de vecteur $\vec{A}(M)$ et envisageons sa variation infinitésimale lorsque le point M se déplace infinitésimalement de \vec{dM} sur la surface. Décomposant ce champ sur la base locale :

$$\vec{A} = A^u \vec{E}_u + A^v \vec{E}_v + A^n \vec{N} = A^i \vec{E}_i + A^n \vec{N}$$

($i = u, v$) on obtient

$$\vec{dA} = dA^i \vec{E}_i + A^i d\vec{E}_i + dA^n \vec{N} + A^n d\vec{N}$$

où l'on voit que les composantes de \vec{dA} sur la base locale ne sont généralement pas les différentielles des composantes sur cette base du vecteur \vec{A} . Il vient, explicitement,

$$\vec{dA} = \vec{E}_i \left[dA^i + \Gamma_{jk}^i A^j du^k + \Gamma_{nk}^i A^n du^k \right] + \vec{N} \left[dA^n + \Gamma_{jk}^n A^j du^k \right] \quad (1.30)$$

Les grandeurs

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{jk}^i A^j du^k + \Gamma_{nk}^i A^n du^k, \quad DA^n = dA^n + \Gamma_{jk}^n A^j du^k \quad (1.31)$$

sont les *différentielles covariantes* des composantes de \vec{A} dans la base locale. Ce sont elles qui constituent les véritables composantes du vecteur \vec{dA} dans la base locale. On note que

$$\frac{DA^i}{\partial u^k} = \frac{\partial A^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^i A^j + \Gamma_{nk}^i A^n, \quad \frac{DA^n}{\partial u^k} = \frac{\partial A^n}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^n A^j \quad (1.32)$$

et que, même si $A^n = 0$ (cas d'un champ vectoriel constamment tangent à la surface), \vec{dA} peut avoir une composante suivant la normale à la surface, lorsque cette surface présente des courbures.

Voyons comment se comportent les grandeurs introduites ci-dessus vis-à-vis d'un changement de paramétrisation $(u, v) \rightarrow (u', v')$. Il est clair qu'une composante normale d'un vecteur quelconque doit être insensible à un tel changement et donc constituer un scalaire vis-à-vis de cette transformation : il en est ainsi de A^n et de DA^n . D'un autre côté, DA^i et DA^i doivent représenter des composantes contravariantes de vecteur, c'est-à-dire, se transformer comme du^i . Au regard des formules précédentes, cela impose aux grandeurs Γ_{nk}^i de se comporter comme les composantes mixtes d'un tenseur de rang deux et aux grandeurs Γ_{jk}^n de se comporter comme les composantes deux fois covariantes d'un tenseur de rang deux.

Définissons maintenant des composantes *covariantes* $A_i = g_{ij} A^j$ ($i, j = u, v$) et différencions-les :

3. G. Ricci, T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", Math. Ann. 54 (1900), 125-201.

$$dA_i = (dg_{ij})A^j + g_{ij}dA^j = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} du^k A^j + g_{ij} \left[DA^j - \Gamma_{\ell k}^j A^\ell du^k - \Gamma_{nk}^j A^n du^k \right] \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} g_{ij}DA^j &= dA_i + g_{ij}\Gamma_{\ell k}^j A^\ell du^k - \left[\Gamma_{\ell k}^j g_{ij} + \Gamma_{ik}^j g_{\ell j} \right] A^\ell du^k + g_{ij}\Gamma_{nk}^j A^n du^k \\ &= dA_i - \Gamma_{ik}^j A_j du^k + g_{ij}\Gamma_{nk}^j A^n du^k \end{aligned}$$

Or, les grandeurs $g_{ij}DA^j$ sont le résultat d'une contraction simple des composantes covariantes g_{ij} du tenseur g de rang deux et des composantes contravariantes DA^j . Ce sont donc des composantes covariantes d'un vecteur, que l'on note DA_i et l'on a

$$DA_i = g_{ij}DA^j = dA_i - \Gamma_{ik}^j A_j du^k + g_{ij}\Gamma_{nk}^j A^n du^k \quad (1.33)$$

A partir de ces composantes, on construit le tenseur antisymétrique de rang deux : $\frac{DA_i}{\partial u^k} - \frac{DA_k}{\partial u^i}$. Comme $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$, on a

$$\frac{DA_i}{\partial u^k} - \frac{DA_k}{\partial u^i} = \frac{\partial A_i}{\partial u^k} - \frac{\partial A_k}{\partial u^i} + A^n \left[g_{ij}\Gamma_{nk}^j - g_{kj}\Gamma_{ni}^j \right]$$

Montrons que $g_{ij}\Gamma_{nk}^j - g_{kj}\Gamma_{ni}^j = 0$. C'est évident pour $i = k$. Prenons donc $i = u$ et $k = v$. On doit montrer que

$$g_{uu}\Gamma_{nv}^u + g_{uv}\Gamma_{nv}^v = g_{vu}\Gamma_{nu}^u + g_{vv}\Gamma_{nv}^v$$

et cette égalité a déjà été démontrée, voir (1.15). On a donc finalement

$$\frac{DA_i}{\partial u^k} - \frac{DA_k}{\partial u^i} = \frac{\partial A_i}{\partial u^k} - \frac{\partial A_k}{\partial u^i} \quad (1.34)$$

et ce tenseur ne possède en fait qu'une seule composante : $\frac{DA_u}{\partial v} - \frac{DA_v}{\partial u}$. C'est d'ailleurs cette composante qui apparaît lorsqu'on applique le théorème de Stokes à une portion Σ de la surface, délimitée par un contour fermé C . Etant donné un champ de vecteurs \vec{A} , sa circulation élémentaire le long dudit contour est

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot d\vec{M} &= \left[A^u \vec{E}_u + A^v \vec{E}_v + A^n \vec{N} \right] \cdot \left[\vec{E}_u du + \vec{E}_v dv \right] \\ &= du \left[g_{uu}A^u + g_{uv}A^v \right] + dv \left[g_{vu}A^u + g_{vv}A^v \right] = duA_u + dvA_v \end{aligned}$$

et le théorème de Stokes appliqué à Σ donne⁴

$$\oint_C [duA_u + dvA_v] = \iint_{\Sigma} dudv \left[\frac{\partial A_v}{\partial u} - \frac{\partial A_u}{\partial v} \right] \quad (1.35)$$

Comme $\vec{d\Sigma} = dudv \vec{E}_u \wedge \vec{E}_v = P \vec{N} dudv$, ceci conduit d'ailleurs à faire l'identification

$$\frac{\partial A_v}{\partial u} - \frac{\partial A_u}{\partial v} = P \vec{N} \cdot \text{rot } \vec{A} \quad (1.36)$$

laquelle formule peut être directement vérifiée après un calcul un peu long.

4. Voir : L. Landau et E. Lifchitz, "Cours de Physique Théorique", Tome II, Théorie du champ, Ed. Mir, Moscou (1966), p 30.

- Rappelons également que les symboles Γ_{jk}^i ($i, j, k = u, v$) ne constituent pas en général des composantes de tenseur car dans une transformation des coordonnées u, v , on a

$$\Gamma_{jk}^{ri} = \frac{\partial u^{ri}}{\partial u^r} \frac{\partial u^s}{\partial u^j} \frac{\partial u^t}{\partial u^k} \Gamma_{st}^r + \frac{\partial u^{ri}}{\partial u^r} \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}}$$
 (1.37)

Utilisons (1.33) pour définir les différentielles covariantes des composantes covariantes C_{ij} d'un tenseur de rang deux. Celles-ci doivent être définies indépendamment de la forme de ces composantes. Aussi, nous prendrons tout d'abord celles-ci comme les produits $A_i B_j$ de composantes covariantes de deux vecteurs. On a

$$\begin{aligned} d(A_i B_j) &= A_i dB_j + dA_i B_j = A_i [DB_j + \Gamma_{jk}^\ell B_\ell du^k - g_{j\ell} \Gamma_{nk}^\ell B^n du^k] \\ &+ [DA_i + \Gamma_{ik}^\ell A_\ell du^k - g_{i\ell} \Gamma_{nk}^\ell A^n du^k] B_j \quad \text{donc} \\ A_i (DB_j) + (DA_i) B_j &= d(A_i B_j) - \Gamma_{jk}^\ell A_i B_\ell du^k - \Gamma_{ik}^\ell A_\ell B_j du^k \\ &+ g_{i\ell} \Gamma_{nk}^\ell A^n B_j du^k + g_{j\ell} \Gamma_{nk}^\ell A_i B^n du^k \end{aligned}$$

⌘ En imposant à la différentiation covariante la même règle que celle de la différentiation ordinaire, à savoir, $A_i (DB_j) + (DA_i) B_j = D(A_i B_j)$, il vient

$$\begin{aligned} D(A_i B_j) &= d(A_i B_j) - \Gamma_{jk}^\ell A_i B_\ell du^k - \Gamma_{ik}^\ell A_\ell B_j du^k \\ &+ g_{i\ell} \Gamma_{nk}^\ell A^n B_j du^k + g_{j\ell} \Gamma_{nk}^\ell A_i B^n du^k \end{aligned}$$

On en déduit, pour un tenseur quelconque,

$$\begin{aligned} DC_{ij} &= dC_{ij} - \Gamma_{jk}^\ell C_{i\ell} du^k - \Gamma_{ik}^\ell C_{\ell j} du^k \\ &+ g_{i\ell} \Gamma_{nk}^\ell C_j^n du^k + g_{j\ell} \Gamma_{nk}^\ell C_i^n du^k \end{aligned}$$
 (1.38)

et notamment pour le tenseur métrique qui ne possède pas de composantes normales :

$$Dg_{ij} = dg_{ij} - \Gamma_{jk}^\ell g_{i\ell} du^k - \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} du^k$$
 (1.39)

Or, d'après (1.20), on a

$$\begin{aligned} Dg_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} du^k - \frac{1}{2} g_{i\ell} g^{\ell r} \left[\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right] du^k \\ &- \frac{1}{2} g_{j\ell} g^{\ell r} \left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r} \right] du^k \quad \text{soit} \\ Dg_{ij} &= 0 \end{aligned}$$
 (1.40)

⌘ La différentielle covariante du tenseur métrique est nulle.

Ce résultat est cohérent avec la définition (1.33), puisque

$$DA_i = D(g_{ij} A^j) = g_{ij} DA^j + (Dg_{ij}) A^j \equiv g_{ij} DA^j$$

1.1.7 Différentielle covariante et transport parallèle⁵

Comme nous l'avons vu, les différentielles covariantes des composantes d'un vecteur qui constituent les véritables composantes dans la base locale de la différentielle d'un vecteur et non pas les différentielles ordinaires de ces composantes. Bien entendu, ceci provient de ce que la base locale varie de point en point, et que les formules de transformation des composantes d'un vecteur en un point donné sont généralement différentes d'un point à un autre.

En un point donné, un vecteur est défini par ses composantes relativement à la base locale attachée à ce point. Ce vecteur évolue selon la position du point, non seulement de façon "intrinsèque" s'il s'agit d'un champ de vecteur, mais aussi parce que la base locale évoluant elle aussi, les composantes sont vues différemment d'un point à un autre, même si ledit champ de vecteurs est en fait intrinsèquement constant. En coordonnées cartésiennes, pour comparer les valeurs prises par un champ de vecteurs \vec{A} en deux points distincts M et M' , on translate par exemple $\vec{A}(M')$ en M et on effectue la différence $\vec{A}(M') - \vec{A}(M)$. Les composantes cartésiennes de cette différence sont bien les différences $A^i(M') - A^i(M)$ des composantes cartésiennes des deux vecteurs. Ce processus de *transport parallèle* ne pose ici aucun problème car les bases cartésiennes locales étant les mêmes aux deux points, les composantes sont transportées sans modification d'un point à l'autre. Par contre, en coordonnées curvilignes, le même processus de transport parallèle ne conserve généralement pas les composantes des vecteurs. En effet, dans le transport parallèle de $\vec{A}(M') = A^k \vec{e}'_k + A^n \vec{N}'$ de M' vers M par exemple, ce vecteur reste le même dans l'absolu. En M , il s'exprime comme $A^k \vec{e}_k$ et cette seconde expression doit coïncider avec la première. Pour deux points infiniment voisins, on a

$$\vec{e}'_k = \vec{e}_k + \Gamma_{ki}^\ell du^i \vec{e}_\ell + \Gamma_{ki}^n du^i \vec{N}, \quad \vec{N}' = \vec{N} + \Gamma_{ni}^\ell du^i \vec{e}_\ell, \quad \text{d'où}$$

$$A^k \left[\vec{e}_k + \Gamma_{ki}^\ell du^i \vec{e}_\ell + \Gamma_{ki}^n du^i \vec{N} \right] + A^n \left[\vec{N} + \Gamma_{ni}^\ell du^i \vec{e}_\ell \right] = A^k \vec{e}_k + A^n \vec{N}$$

soit, en identifiant et en négligeant des termes d'ordres supérieurs,

$$\delta A^k = A'^k - A^k = -\Gamma_{\ell i}^k A^\ell du^i - \Gamma_{ni}^k A^n du^i, \quad \delta A^n = A'^n - A^n = -\Gamma_{\ell i}^n A^\ell du^i$$

Pour obtenir la variation totale des composantes telle qu'observée en un point donné, il faut retrancher celle obtenue par ce transport parallèle aux différentielles ordinaires, retrouvant ainsi les différentielles covariantes :

$$\begin{aligned} dA^k - \delta A^k &= dA^k + \Gamma_{\ell i}^k A^\ell du^i + \Gamma_{ni}^k A^n du^i \equiv DA^k \\ dA^n - \delta A^n &= dA^n + \Gamma_{\ell i}^n A^\ell du^i \equiv DA^n \end{aligned}$$

Un fait important est que, sur une surface non plane, la variation des composantes d'un vecteur à la suite d'un transport parallèle dépend du chemin suivi. Il s'ensuit que sur une telle surface, le transport parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé donne généralement une variation totale non nulle de ses composantes. Ceci est illustré par le schéma de la figure (1.1).

Les symboles de Christoffel définissent la *connexion*⁶ selon laquelle s'effectue ce transport parallèle. Il est facile de montrer que ce processus conserve le produit scalaire de deux vecteurs, et donc aussi les normes, les angles, et les distances évaluées selon $\sqrt{ds^2}$.

5. T. Levi-Civita, "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque et conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana", Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917), 173-204.

6. H. Weyl, "Reine Infinitesimalgeometrie", Math. Z. 2 (1918), 384-411 ; "Raum, Materie, Zeit", Springer, Berlin (1918).

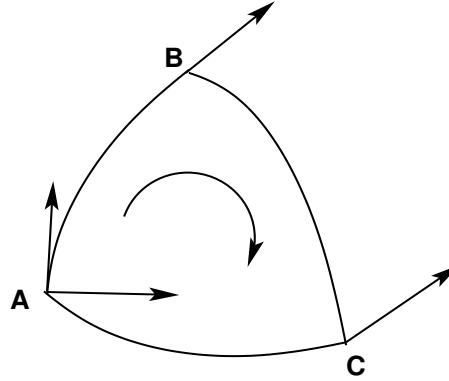


FIGURE 1.1 – En coordonnées curvilignes, le transport parallèle d'un vecteur le long du contour ABCA ne redonne pas le même vecteur en A.

1.2 Courbe sur une surface 3D

1.2.1 Normale principale, rayon de courbure, géodésiques

Sur une surface 3D, envisageons une courbe C paramétrée sous la forme $u = u(s)$, $v = v(s)$, s étant l'abscisse curviligne du point M sur cette courbe. Le vecteur unitaire tangent à la courbe en M est

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{du}{ds} \vec{E}_u + \frac{dv}{ds} \vec{E}_v, \quad \text{donc} \quad T^u = \frac{du}{ds}, \quad T^v = \frac{dv}{ds}$$

En tout point de la courbe, ce vecteur est dans le plan tangent en ce point à la surface. Le vecteur *normale principale* \vec{n} de la courbe en M est le vecteur *unitaire* tel que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} est le rayon de courbure de la courbe en M , pris toujours positif, ce qui fixe l'orientation de \vec{n} ; $\frac{1}{\mathcal{R}}$ est la *courbure*. Comme $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$, on a $\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ et \vec{n} est orthogonal à \vec{T} . Le plan (M, \vec{T}, \vec{n}) est appelé *plan osculateur*. D'après les développements du paragraphe (1.1.6), on a, puisque $T^n = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \vec{E}_i \left[dT^i + \Gamma_{jk}^i T^j du^k \right] + \vec{N} \Gamma_{jk}^n T^j du^k \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= \vec{E}_i \left[\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right] + \vec{N} \Gamma_{jk}^n \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \end{aligned} \quad (1.41)$$

La partie tangentielle de ce vecteur s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{T}}{ds} \right|_{\text{tan}} = \vec{E}_i \xi^i \quad \text{avec} \quad \xi^i = \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \quad (1.42)$$

⌘ Les deux équations $\xi^i = 0$ ($i = u, v$) définissent les *courbes géodésiques* de la surface. A ce stade, ces courbes peuvent donc être définies comme celles dont la normale principale \vec{n} coïncide en chaque point avec la normale \vec{N} à la surface. On a alors

$$\frac{\vec{dT}}{ds} = \vec{N} \Gamma_{jk}^n \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \quad (1.43)$$

et le rayon de courbure correspondant est tel que

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \Gamma_{jk}^n \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = \Gamma_{ij}^n T^i T^j \quad (1.44)$$

On remarquera que d'après (1.31) et puisque $T^n = 0$, les ξ^i dans (1.42) s'expriment comme des dérivées covariantes :

$$\xi^i = \frac{DT^i}{ds} \quad (1.45)$$

✂ *Le long d'une courbe géodésique, les différentielles covariantes DT^i sont nulles.*

1.2.2 Les géodésiques, plus courts chemins

Etant donnés deux points M_1 et M_2 situés sur une surface, la distance pour aller du premier au second en suivant une courbe C toute entière sur la surface est donnée par l'intégrale

$$\mathcal{D}(M_1, M_2, C) = \int_C ds \quad (1.46)$$

s étant l'abscisse curviligne du point courant sur ladite courbe. Considérons une courbe C' joignant aussi les deux points, et infiniment voisine de la précédente. L'écart entre les distances mesurées selon l'une et l'autre courbe est

Comme $ds^2 = (\vec{dM})^2$, on a $\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = 2\delta(\vec{dM}) \cdot \vec{dM} = 2ds \vec{T} \cdot \delta(\vec{dM})$, soit

$$\delta(ds) = \vec{T} \cdot \delta(\vec{dM}) = \vec{T} \cdot d(\delta\vec{M})$$

Ici, $\delta\vec{M}$ est un vecteur infinitésimal joignant deux points courant l'un, M , sur C , l'autre, M' , sur C' , et donc contenu dans le plan tangent à la surface en M . Ecrivant $\vec{T} \cdot d(\delta\vec{M}) = d[\vec{T} \cdot \delta\vec{M}] - \delta\vec{M} \cdot \vec{dT}$ et tenant compte du fait que, les deux points extrêmes M_1 et M_2 étant fixés, $\delta\vec{M}$ est nul en ces deux points, il vient

$$\delta\mathcal{D} = - \int_C \delta\vec{M} \cdot \vec{dT} = - \int_C ds \delta\vec{M} \cdot \frac{\vec{dT}}{ds}$$

D'après le calcul des variations, la courbe C correspond à un extremum de la distance exprimée selon (1.46), si $\delta\mathcal{D} = 0$, ce qui revient à annuler $\delta\vec{M} \cdot \frac{\vec{dT}}{ds}$. La courbe C' étant arbitrairement voisine de C , le vecteur infinitésimal $\delta\vec{M}$ est quelconque, tout en étant dans le plan tangent. On en conclut que sur la courbe C , le vecteur $\frac{\vec{dT}}{ds}$ ne peut qu'être orienté suivant la normale à la surface. La courbe C est alors qualifiée de *géodésique*, et, comme il a été vu précédemment, on doit avoir le long de celle-ci

$$\xi^i = \frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\vec{dT}}{ds} = \vec{N} \Gamma_{jk}^n \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \quad (i, j, k = u, v) \quad (1.47)$$

On notera que les relations (1.47), d'une part, ne renseignent aucunement sur une éventuelle unicité de la solution ; d'autre, part, la distance n'ayant aucune limite supérieure⁷, elles correspondent à des minimas de distance : les géodésiques représentent donc les plus courts chemins pour aller d'un point à un autre, sur une surface donnée.

Pour montrer qu'il s'agit bien de minimas, on peut procéder de la façon suivante. Dans (1.46), utilisons plutôt l'une des coordonnées cartésiennes du point courant pour paramétriser la courbe C , ce qui en passant évite le problème des bornes d'intégration différente lorsqu'on passe d'une courbe à une autre. Ecrivons, pour la courbe $C : x = f(z), y = g(z)$, et pour la courbe $C' : x = f(z) + \epsilon k(z), y = g(z) + \epsilon \ell(z)$, avec $\epsilon \ll 1$, puis, au point $M_1(x_1, y_1, z_1) : x_1 = f(z_1), y_1 = g(z_1), k(z_1) = \ell(z_1) = 0$, et de même au point $M_2(x_2, y_2, z_2) : x_2 = f(z_2), y_2 = g(z_2), k(z_2) = \ell(z_2) = 0$. Considérons alors l'intégrale

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{1 + (f' + \epsilon k')^2 + (g' + \epsilon \ell')^2}$$

dont nous effectuerons un développement limité au second ordre en ϵ :

$$\mathcal{D}(\epsilon) \simeq \mathcal{D}(0) + \epsilon \frac{d\mathcal{D}}{d\epsilon}(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d^2\mathcal{D}}{d\epsilon^2}(0)$$

Posons $Q = 1 + f'^2 + g'^2$. On trouve

$$\frac{d\mathcal{D}}{d\epsilon}(0) = - \int_{z_1}^{z_2} \left[k \frac{d}{dz} \left[\frac{f'}{\sqrt{Q}} \right] + \ell \frac{d}{dz} \left[\frac{g'}{\sqrt{Q}} \right] \right] dz$$

et, pour k et ℓ arbitraire, cette grandeur est nulle si et seulement si

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f'}{\sqrt{Q}} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{g'}{\sqrt{Q}} \right] = 0 \tag{1.48}$$

équations qui définissent une géodésique. Puis

$$\frac{d^2\mathcal{D}}{d\epsilon^2}(0) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{Q^{3/2}} \left[k'^2 + \ell'^2 + (k'g' - \ell'f')^2 \right] > 0$$

La positivité de cette dernière grandeur montre qu'une courbe vérifiant (1.48) correspond bien à un minimum de la distance joignant les deux points considérés.

1.2.3 Géodésiques sur une surface de révolution, relation de Clairaut

Dans le repère 3D cartésien $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, on considère une surface invariante par rotation autour de l'axe $z'z$. Utilisant les coordonnées cylindriques r, φ, z , la position d'un point M de la surface est définie par

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = f(r) \tag{1.49}$$

et le carré de la longueur d'un élément d'arc de la surface est

$$ds^2 = (1 + f'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{1.50}$$

7. On peut toujours choisir de prendre le chemin des écoliers le plus long possible !

où $f' = \frac{df}{dr}$. Choisisant r comme la variable de base, l'angle azimutal sera considéré comme fonction de r : $\varphi = \varphi(r)$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{dr}$. La longueur d'un arc de courbe quelconque joignant deux points M_1 et M_2 de la surface peut être exprimée sous la forme

$$\mathcal{D}(M_1, M_2) = \int_{M_1}^{M_2} dr L(\varphi, \varphi', r) \quad \text{où} \quad L(\varphi, \varphi', r) = \sqrt{1 + f'^2 + r^2 \varphi'^2} \quad (1.51)$$

La fonction $L(\varphi, \varphi', r)$ sera prise comme fonction de Lagrange pour la recherche des géodésiques de ladite surface. L'équation des géodésiques est alors obtenue à partir de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right] = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

Or, l'invariance par rotation autour de $z'z$ fait que la fonction de Lagrange est indépendante de l'angle φ . Il s'ensuit que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + f'^2 + r^2 \varphi'^2}} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} \quad (1.52)$$

est *constant* le long d'une géodésique. La grandeur p est aussi appelée *invariant de Clairaut*. Rappelons l'expression du vecteur tangent :

$$\vec{T} = \frac{dr}{ds} \left[\vec{e}_r + f' \vec{e}_z \right] + r \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_\varphi \quad (1.53)$$

Notons χ l'angle entre ce vecteur tangent et \vec{e}_φ :

$$\cos \chi = \vec{T} \cdot \vec{e}_\varphi = T_\varphi = r \frac{d\varphi}{ds}$$

Avec ces définitions, le résultat de Clairaut est usuellement présenté sous la forme $p = r \cos \chi =$ constante.

On vérifie aisément qu'une fonction $\varphi_g(r)$ correspondant à une géodésique minimise l'intégrale (1.51) à limites fixées. Soit en effet $\varphi = \varphi_g(r)$ l'équation de la géodésique joignant les deux points M_1 et M_2 et considérons une fonction $\varphi = \varphi_g + \epsilon \chi$ infiniment voisine de celle-ci, telle que $|\epsilon| \ll 1$ et $\chi(M_1) = \chi(M_2) = 0$. Développant la fonction de Lagrange jusqu'à l'ordre 2 en ϵ ,

$$L(\varphi, \varphi', r) \simeq L(\varphi_g, \varphi'_g, r) + \epsilon \chi p_g + \frac{1}{2} \epsilon^2 \chi^2 \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi'^2} \right|_g$$

et tenant compte du fait que p_g est constant et que par conséquent

$$\int_{M_1}^{M_2} dr \epsilon \chi p_g = \epsilon p_g [\chi(M_2) - \chi(M_1)] = 0,$$

on obtient

$$\mathcal{D}(M_1, M_2) \simeq \mathcal{D}_g(M_1, M_2) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \int_{M_1}^{M_2} dr \chi^2 \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi'^2} \right|_g \quad (1.54)$$

Or,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi'^2} = \frac{r^2(1+f'^2)}{[1+f'^2+r^2\varphi'^2]^{3/2}}$$

est une grandeur positive. Le terme du second ordre en ϵ dans (1.54) étant positif, la fonction $\varphi_g(r)$ correspond bien au (seul) minimum de $\mathcal{L}(M_1, M_2)$.

Dans le formalisme hamiltonien, p est le moment conjugué de φ et son action sur une fonction $F(p, \varphi, r)$ est caractérisée par le crochet de Poisson⁸ :

$$\{p, F\} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \quad (1.55)$$

De ce point de vue, le moment p constitue bien le générateur des rotations autour de z' .

Notons que ($p^2 \leq r^2$)

$$\varphi' = \frac{p\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2-p^2}} \quad (1.56)$$

Dans ce contexte, la fonction de Hamilton associée est

$$H = p\varphi' - L = -\frac{\sqrt{1+f'^2}}{r}\sqrt{r^2-p^2} \quad (1.57)$$

Elle dépend explicitement de r et n'est donc pas une constante. On vérifie cependant que

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \varphi'$$

La fonction φ_g est obtenue par intégration de (1.56) par rapport à r , p étant pris égal à une constante.

1.2.4 Binormale, trièdre de Frenet

Comme $\vec{n}^2 = 1$, le vecteur \vec{dn} est orthogonal à \vec{n} , et comme $\vec{n} \cdot \vec{T} = 0$, on a $\vec{T} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{R}}$. On est amené à poser

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{b}}{\mathcal{T}} \quad (1.58)$$

où \vec{b} est un vecteur unitaire orthogonal au plan osculateur, appelé *binormale*, et \mathcal{T} est le *rayon de torsion* de la courbe en M ; $\frac{1}{\mathcal{T}}$ est la *torsion*. Le plan (M, \vec{n}, \vec{b}) est le *plan normal*, le plan (M, \vec{T}, \vec{b})

est le *plan rectifiant*. Le trièdre orthonormé $(M, \vec{T}, \vec{n}, \vec{b})$ est appelé *trièdre de Frenet*. Il est supposé d'orientation directe. Notons que \vec{db} est orthogonal à la fois à \vec{b} ($\vec{b}^2 = 1$) et à \vec{T} car $\vec{T} \cdot \vec{db} = -\vec{b} \cdot \vec{dT} = 0$. Comme $\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{T}}$, on a donc

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\mathcal{T}} \quad (1.59)$$

8. $\{G, F\} = \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial G}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial p}$.

Pour concrétiser ce que représentent la courbure et la torsion de la courbe, on peut imaginer celle-ci comme un fil de fer que l'on peut courber et tordre à la fois. Le rayon de courbure est le rayon d'un cercle de rayon \mathcal{R} , situé dans le plan osculateur, tangent en M à la courbe et dont le centre C est tel que $\vec{MC} = \mathcal{R} \vec{n}$ ⁹.

Exprimons les rayons de courbure et de torsion à l'aide des dérivées par rapport à s des coordonnées cartésiennes de M . On a $\vec{n} = \mathcal{R} \frac{d^2M}{ds^2} = \mathcal{R} \left[x'' \vec{e}_x + \dots \right]$, avec $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$, etc. D'où

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \quad (1.60)$$

Puis, utilisant la relation $\vec{b} = \vec{T} \wedge \vec{n}$,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\mathcal{T}} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{T} \wedge \frac{d}{ds} \left[\mathcal{R} \frac{d\vec{T}}{ds} \right] = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{ds} \vec{T} \wedge \vec{n} + \mathcal{R} \vec{T} \wedge \frac{d^2\vec{T}}{ds^2}$$

En projetant sur \vec{n} , on trouve

$$\frac{1}{\mathcal{T}} = \mathcal{R}^2 D, \quad \text{avec} \quad D = \vec{T} \cdot \left[\frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{T}}{ds^2} \right] = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \quad (1.61)$$

On remarque que le calcul de la courbure requiert la connaissance des dérivées secondes des coordonnées et que celui de la torsion exige de plus celle des dérivées troisièmes des coordonnées. On remarque aussi que la torsion peut être positive ou négative¹⁰.

1.2.5 Résolution approchée locale des formules de Frenet

On note ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport au trièdre de Frenet centré sur M , d'un point M' de la courbe très voisin de M , et s l'abscisse curviligne de M' comptée à partir de M . Effectuons le développement

$$\begin{aligned} \vec{MM}' &\approx s \frac{d\vec{M}}{ds}(M) + \frac{s^2}{2} \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}(M) + \frac{s^3}{6} \frac{d^3\vec{M}}{ds^3}(M) \\ &= s \vec{T} + \frac{s^2}{2\mathcal{R}} \vec{n} + \frac{s^3}{6} \left[-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}^2} + \vec{n} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right)' + \frac{\vec{b}}{\mathcal{R}\mathcal{T}} \right] \end{aligned}$$

On a donc

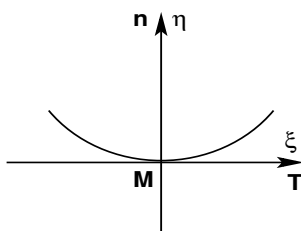
$$\xi \approx s, \quad \eta \approx \frac{s^2}{2\mathcal{R}}, \quad \zeta \approx \frac{s^3}{6\mathcal{R}\mathcal{T}}$$

• **Projection dans le plan osculateur** (\vec{T}, \vec{n}) .

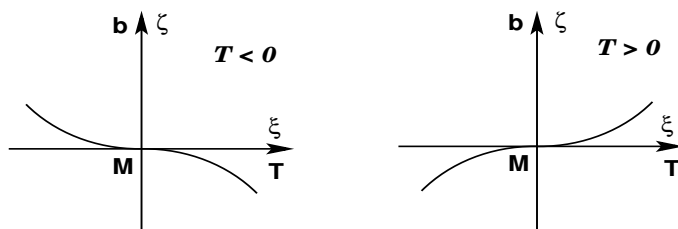
On a $\eta = \frac{\xi^2}{2\mathcal{R}}$: on obtient l'équation d'une parabole qui ne traverse pas la tangente.

9. Avec la convention $\mathcal{R} > 0$, la normale principale est toujours orientée vers le centre de courbure, c'est-à-dire, dans le sens de la concavité de la courbe.

10. Ceci est dû au choix $\vec{b} = \vec{T} \wedge \vec{n}$ qui confère une orientation directe au trièdre de Frenet.



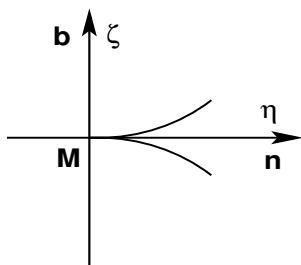
- **Projection dans le plan rectifiant** (\vec{T}, \vec{b}) .



On a $\zeta = \frac{\xi^3}{6R\mathcal{T}}$: la courbe obtenue traverse la tangente dans un sens qui dépend du signe de la torsion.

- **Projection dans le plan normal** (\vec{n}, \vec{b}) .

On a $\eta = \frac{s^2}{2R}$, $\zeta = \frac{s^3}{6R\mathcal{T}}$. La projection obtenue présente un rebroussement en M . Cette forme ne dépend pas du signe de la torsion, seul son sens de parcours en dépend.



1.2.6 Trièdre de Darboux-Ribaucour

Ce trièdre, d'origine M , est construit comme suit. Un premier vecteur de base est constitué par un vecteur tangent à la surface : $\vec{e}_1 = \vec{T}$. Le troisième vecteur de base est la normale à la surface, orientée dans le sens positif : $\vec{e}_3 = \vec{N}$. Le second est pris égal à $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ de façon à donner une orientation directe à ce repère. On note que celui-ci est différent du trièdre de Frenet et ne dépend en fait que des caractéristiques de la surface au voisinage de M . Envisageant à nouveau une courbe C passant par M , et notant θ l'angle que fait la normale principale \vec{n} de cette courbe avec la normale \vec{N} à la surface, on a

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_2 \quad \text{et}$$

$$\vec{b} = \vec{e}_1 \wedge \vec{n} = -\cos \theta \vec{e}_2 + \sin \theta \vec{e}_3 \quad (1.62)$$

et inversement

$$\vec{e}_2 = \sin \theta \vec{n} - \cos \theta \vec{b}, \quad \vec{e}_3 = \cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{b} \quad (1.63)$$

Les formules de Frenet

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{b}}{\mathcal{T}}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\mathcal{T}} \quad (1.64)$$

conduisent à

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{ds} &= \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}} \vec{e}_3 + \frac{\sin \theta}{\mathcal{R}} \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_3}{\mathcal{R}_n} + \frac{\vec{e}_2}{\mathcal{R}_g} \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} &= \left[\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\mathcal{T}} \right] \vec{e}_3 - \frac{\sin \theta}{\mathcal{R}} \vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_3}{\mathcal{T}_g} - \frac{\vec{e}_1}{\mathcal{R}_g} \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} &= -\frac{\cos \theta}{\mathcal{R}} \vec{e}_1 - \left[\frac{1}{\mathcal{T}} + \frac{d\theta}{ds} \right] \vec{e}_2 = -\frac{\vec{e}_1}{\mathcal{R}_n} - \frac{\vec{e}_2}{\mathcal{T}_g} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dans (1.65), on a défini :

$$\begin{aligned} \text{la courbure normale} \quad \frac{1}{\mathcal{R}_n} &= \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}} \\ \text{la courbure géodésique} \quad \frac{1}{\mathcal{R}_g} &= \frac{\sin \theta}{\mathcal{R}} \\ \text{la torsion géodésique} \quad \frac{1}{\mathcal{T}_g} &= \frac{1}{\mathcal{T}} + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Utilisant (1.42), on note que

$$\frac{1}{\mathcal{R}_g} = \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} \equiv \xi^i \vec{e}_2 \cdot \vec{E}_i \quad \text{et donc} \quad (1.67)$$

✂ la courbure géodésique est nulle le long d'une géodésique.

Montrons que la courbure normale est une notion qui dépend essentiellement des caractéristiques propres à la surface considérée. Utilisant (1.41), on a

$$\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \Gamma_{ij}^n T^i T^j \quad (i, j = u, v) \quad (1.68)$$

Les grandeurs Γ_{ij}^n ne dépendent que des caractéristiques propres à la surface. Ainsi, la courbure normale ne dépend de la courbe C envisagée que par les composantes T^u et T^v , c'est-à-dire, uniquement via l'orientation de la tangente à la courbe en ce point. On en conclut que

• deux courbes tracées sur la surface et passant par M ont même courbure normale en ce point si leurs tangentes y sont identiques.

Si, de plus, les deux courbes ont le même plan osculateur, l'angle θ est le même pour les deux, et l'on peut alors énoncer que (premier théorème de Meusnier)

• Si deux courbes tracées sur la surface sont tangentes en un point M et y ont le même plan osculateur, elles ont alors le même centre de courbure en ce point.

1.2.7 Rayons de courbure principaux

La relation (1.68) peut s'exprimer sous la forme matricielle

$$\frac{1}{\mathcal{R}_n} = (T^u, T^v) L \begin{pmatrix} T^u \\ T^v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^n & \Gamma_{uv}^n \\ \Gamma_{vu}^n & \Gamma_{vv}^n \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

où L est la matrice symétrique de Weingarten. Le produit scalaire $A^u B^u + A^v B^v$ associé de façon naturelle à ce formalisme matriciel, n'est pas directement relié au produit scalaire cartésien $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de l'espace à trois dimensions. En considérant uniquement des champs de vecteurs constamment parallèles à la surface, donc pour lesquels $A^n = 0$, on a plutôt, avec $(i, j = u, v)$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i B^j = (A^u, A^v) G \begin{pmatrix} B^u \\ B^v \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

La matrice G est réelle, symétrique, et définie positive. Elle peut être utilisée pour définir un autre produit scalaire, défini positif, dans l'espace à deux dimensions des vecteurs matrices unicolonnes, de sorte que :

$$\langle A | B \rangle = (A^u, A^v) G \begin{pmatrix} B^u \\ B^v \end{pmatrix} = \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (1.71)$$

Notant g_1 et g_2 les valeurs propres de G , celles-ci sont positives et l'on a

$$\det G = g_1 g_2 = (\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v)^2 \geq 0$$

Nous admettrons que g_1 et g_2 sont strictement positives¹¹. La matrice $Q = \sqrt{G}$ est alors bien définie. Elle est définie positive, symétrique, inversible et vérifie $Q^2 = G$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} {}^t A L B &= {}^t A Q Q^{-1} L Q^{-1} Q B = \langle A' | M | B' \rangle \quad \text{où} \\ A' &= Q A, \quad B' = Q B, \quad M = Q^{-1} L Q^{-1} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Par ce changement, la relation matricielle (1.69) peut être réécrite comme un produit scalaire :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \langle T' | M | T' \rangle \quad (1.73)$$

La matrice M est symétrique par rapport au produit scalaire (1.71). En effet, comme ${}^t L = L$,

$${}^t(A L B) = {}^t B L A = {}^t A L B, \quad \text{donc} \quad \langle A' | M | B' \rangle = \langle B' | M | A' \rangle$$

Elle est diagonalisable et ses valeurs propres λ vérifient

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda \mathbb{I}_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(L - \lambda G) = 0 \quad \text{ou encore} \\ \det(\Gamma_n + \lambda \mathbb{I}_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

où \mathbb{I}_2 est la matrice unité 2×2 et Γ_n la matrice définie en (1.28). Notons-les λ_1 et λ_2 ; elles sont réelles, distinctes ou non. Les vecteurs propres $|V'_1\rangle$ et $|V'_2\rangle$ qui leur sont respectivement associés, nécessairement distincts et orthogonaux, seront supposés unitaires :

$$\langle V'_1 | V'_2 \rangle = 0, \quad \langle V'_1 | V'_1 \rangle = \langle V'_2 | V'_2 \rangle = 1$$

11. Cette assertion pourrait être mise en défaut pour certains points particuliers, que nous excluons ici.

et l'on a

$$M = \lambda_1 |V'_1 \rangle \langle V'_1| + \lambda_2 |V'_2 \rangle \langle V'_2|, \quad |V'_1 \rangle \langle V'_1| + |V'_2 \rangle \langle V'_2| = \mathbb{I}_2 \quad (1.75)$$

Utilisons ces relations pour réexprimer (1.73) :

$$\langle T' | M | T' \rangle = \lambda_1 \langle V'_1 | T' \rangle^2 + \lambda_2 \langle V'_2 | T' \rangle^2$$

Or,

$$\langle V'_1 | T' \rangle = {}^t V'_1 T' = {}^t V_1 Q Q T = {}^t V_1 G T = \vec{V}_1 \cdot \vec{T} \quad \text{et} \quad \langle V'_2 | T' \rangle = \vec{V}_2 \cdot \vec{T}$$

d'où

$$\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \lambda_1 (\vec{T} \cdot \vec{V}_1)^2 + \lambda_2 (\vec{T} \cdot \vec{V}_2)^2$$

Les deux vecteurs propres orthogonaux et unitaires \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont dans le plan tangent à la surface en M et définissent deux *directions principales* de la surface en ce point. Notant ϕ l'angle entre \vec{T} et \vec{V}_1 , on a $\vec{T} \cdot \vec{V}_1 = \cos \phi$, $\vec{T} \cdot \vec{V}_2 = \sin \phi$, et posant $\lambda_1 = \frac{1}{R_1}$, $\lambda_2 = \frac{1}{R_2}$, on aboutit à la *formule d'Euler* :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \frac{\cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\sin^2 \phi}{R_2} \quad (1.76)$$

Les valeurs absolues $|R_1|$ et $|R_2|$ sont les *rayons principaux* de la surface en M . Ce sont les rayons de courbure des sections normales de la surface par des plans contenant les directions principales. On note

$$\frac{1}{R_1 R_2} : \text{la courbure totale ou courbure de Gauss}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) : \text{la courbure moyenne}$$

Ces grandeurs ne dépendent que des propriétés de la surface. On a en fait

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} M = -\text{Tr} \Gamma_n, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \lambda_1 \lambda_2 = \det M = \frac{\det L}{\det G} = \det \Gamma_n \quad (1.77)$$

Posant $i = j = u$ et $q = k = v$ dans (1.22), on obtient

$$\det L = \Gamma_{uu}^n \Gamma_{vv}^n - \Gamma_{uv}^n \Gamma_{vu}^n = g_{\ell v} \left[\frac{\partial \Gamma_{uu}^\ell}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{uv}^\ell}{\partial u} + \Gamma_{uu}^m \Gamma_{mv}^\ell - \Gamma_{uv}^m \Gamma_{mu}^\ell \right] = \frac{\det G}{R_1 R_2} \quad (1.78)$$

✂ (*Theorema Egregium de Gauss*) Ce dernier résultat est remarquable car il établit que la courbure de Gauss est entièrement déterminée par le tenseur métrique et ses dérivées, et est donc une propriété intrinsèque de la surface.

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans un changement de paramétrisation laissant ds^2 invariant (isométrie), les Γ_{ij}^n , comme les g_{ij} , se transforment comme des composantes covariantes d'un tenseur de rang deux. Dans une telle transformation, $G \rightarrow G' = {}^t \Upsilon G \Upsilon$, $L \rightarrow L' = {}^t \Upsilon L \Upsilon$ où Υ est la matrice de transformation :

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

On a ainsi $\det G' = \det G [\det \Upsilon]^2$ et $\det \Gamma' = \det \Gamma [\det \Upsilon]^2$, de sorte que

$$\frac{\det L'}{\det G'} = \frac{\det L}{\det G} \quad (1.80)$$

✂ On en conclut que la courbure de Gauss est invariante par isométrie.

- Montrons comment cette invariance peut être mise en évidence dans la relation (1.78).

Contrairement aux dérivées partielles usuelles $\partial_k = \frac{\partial}{\partial u^k}$ des composantes de vecteurs, leurs dérivées partielles covariantes $D_k = \frac{D}{\partial u^k}$ ne commutent pas entre elles. Ignorant les composantes d'indice "n", on trouve

$$[D_k D_j - D_j D_k] A_i = R^m_{.ijk} A_m \quad (1.81)$$

où les $R^m_{.ijk}$ sont des composantes mixtes d'un tenseur de rang 4, appelé *tenseur de Riemann* ou *tenseur de courbure*, ayant pour expressions

$$R^m_{.ijk} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ik} \Gamma^m_{sj} - \Gamma^s_{ij} \Gamma^m_{sk} \quad (1.82)$$

Elles possèdent les propriétés suivantes :

$$R^m_{.ijk} = -R^m_{.ikj}, \quad R^m_{.ijk} + R^m_{.jki} + R^m_{.kij} = 0$$

Déterminons les composantes complètement covariantes $R_{\ell ijk}$:

$$\begin{aligned} g_{\ell m} R^m_{.ijk} &= \frac{\partial}{\partial u^j} [g_{\ell m} \Gamma^m_{ik}] - \Gamma^m_{ik} \frac{\partial g_{\ell m}}{\partial u^j} - \frac{\partial}{\partial u^k} [g_{\ell m} \Gamma^m_{ij}] + \Gamma^m_{ij} \frac{\partial g_{\ell m}}{\partial u^k} + g_{\ell m} [\Gamma^s_{ik} \Gamma^m_{sj} - \Gamma^s_{ij} \Gamma^m_{sk}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \left[\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\ell} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^k} \left[\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right] \\ &\quad + \Gamma^m_{ij} \left[\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial u^k} - g_{r\ell} \Gamma^r_{mk} \right] - \Gamma^m_{ik} \left[\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial u^j} - g_{r\ell} \Gamma^r_{mj} \right] \end{aligned}$$

Tous développements effectués, on trouve

$$\begin{aligned} R_{\ell ijk} = g_{\ell m} R^m_{.ijk} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^\ell} + \frac{\partial^2 g_{k\ell}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^\ell} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial u^i \partial u^k} \right] \\ &\quad + g_{rs} [\Gamma^r_{ij} \Gamma^s_{k\ell} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^s_{j\ell}] \end{aligned} \quad (1.83)$$

Ces composantes ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R_{\ell ijk} = -R_{\ell ikj}, \quad R_{\ell ijk} = -R_{i\ell jk}, \quad R_{\ell ijk} = R_{kj\ell} \quad ([i, j] \rightarrow [k, \ell]), \quad \text{et} \\ R_{\ell ijk} + R_{\ell jki} + R_{\ell kji} = 0 \end{aligned} \quad (1.84)$$

Il en résulte que les composantes pour lesquelles $i = \ell$ ou bien $j = k$ sont nulles. On démontre qu'en dimension d , le nombre de composantes covariantes indépendantes est $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$, ce qui fait que pour les surfaces en $3D$, pour lesquelles $d = 2$, une seule composante covariante décrit entièrement le tenseur de Riemann, par exemple

$$R_{vuvu} = g_{v\ell} R^{\ell}_{.uvu} = g_{v\ell} \left[\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{uu}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{uv}}{\partial u} + \Gamma^m_{uu} \Gamma^{\ell}_{mv} - \Gamma^m_{uv} \Gamma^{\ell}_{mu} \right] \quad (1.85)$$

qui est exactement celle apparaissant dans (1.78). Pour préciser le lien entre (1.85) et (1.78), introduisons d'abord le *tenseur de Ricci*, issu d'une contraction du tenseur de Riemann avec le tenseur métrique inverse :

$$R_{ik} = g^{\ell j} R_{\ell ijk} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ik} \Gamma^r_{sr} - \Gamma^s_{ir} \Gamma^r_{ks}, \quad R_{ik} = R_{ki} \quad (1.86)$$

et dont les composantes sont symétriques en leurs deux indices. Sa trace, au sens de la métrique, s'appelle la *courbure scalaire* :

$$\mathcal{R}_s = g^{ik} R_{ik} \quad (1.87)$$

C'est manifestement un invariant vis-à-vis des transformations des coordonnées. Dans le cas des surfaces ordinaires qui nous intéressent ici, on a

$$\mathcal{R}_s = 2 \det[G^{-1}] R_{vuvu}$$

On obtient donc

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\mathcal{R}_s}{2} \quad (1.88)$$

✂ Dans le cas des surfaces bi-dimensionnelles, la courbure de Gauss est la moitié de la courbure scalaire.

1.2.8 Forme locale d'une surface

Pour examiner la forme d'une surface au voisinage d'un point M_0 , on effectue le développement limité

$$\vec{MM}_0 \simeq \sum_i u^i \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i}(M_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} u^i u^j \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^i \partial u^j}(M_0)$$

où les u^i sont les coordonnées curvilignes de M par rapport à M_0 , pris comme origine. On a

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i}(M_0) = \vec{E}_i(M_0) \quad \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^i \partial u^j}(M_0) = \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial u^j}(M_0) = \left[\Gamma^{\ell}_{ij} \vec{E}_{\ell} + \Gamma^n_{ij} \vec{N} \right](M_0)$$

Pour faciliter l'étude, on choisit un référentiel centré sur M_0 dont l'axe des z est la normale $\vec{N}(M_0)$. Le plan tangent à la surface en M_0 jouant alors le rôle de plan (x, y) . En projetant la relation précédente sur cette normale, on obtient l'équation

$$z = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u^i u^j \Gamma^n_{ij} \quad (1.89)$$

On y reconnaît la forme quadratique apparaissant dans (1.68), laquelle peut être réécrite comme en (1.72) sous la forme $U^i U^j M_{ij}$, avec $U = Qu$. Diagonalisant la matrice M , on obtient finalement

$$z = \frac{1}{2} \left[\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} \right] \quad (1.90)$$

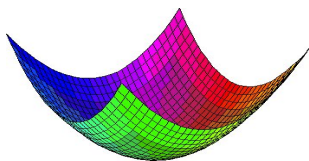
où X et Y sont les coordonnées de M (vis-à-vis de M_0) par rapport aux deux directions principales, lesquelles, rappelons-le, sont orthogonales. En prenant $z = \text{constante}$, c'est-à-dire, en se plaçant dans un plan parallèle au plan tangent à la surface en M_0 , (1.90) fournit l'équation d'une courbe dans ce plan, laquelle, d'une façon générale est celle d'une conique. La structure de cette courbe, appelée *indicatrice* ou *indicatrice de Dupin*¹², renseigne sur la forme de la surface au voisinage de M_0 . Pour compléter l'étude, on considère la section normale de la surface par le plan (\vec{T}, \vec{N}) . Celui-ci fait un angle ϕ avec le plan ZM_0X (voir (1.76)). En faisant varier ϕ , on obtient les variations du rayon de courbure \mathcal{R}_n . Dans ce plan, la courbe géodésique passant par M_0 est telle que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$: sa normale principale \vec{n} est égale à \vec{N} ou opposée à \vec{N} . Pour cette courbe, $\frac{1}{\mathcal{R}_g} = 0$, $\mathcal{R}_n = \pm \mathcal{R}$.

• **Point elliptique**

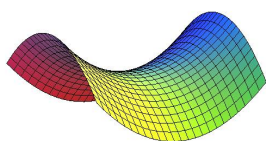
Supposons $K = \frac{1}{R_1 R_2} > 0$: les courbures principales sont de même signe. Selon qu'elles sont positives ou négatives, on a $z \geq 0$ ou $z \leq 0$, respectivement. Supposons par exemple $R_1 > R_2 > 0$. On a alors $z \geq 0$. L'indicatrice est dans ce cas une ellipse, dont les demi-axes sont $\sqrt{2zR_1}$ et $\sqrt{2zR_2}$.

Le point M_0 est dit *elliptique*. Le rayon de courbure \mathcal{R}_n est positif et est sur \vec{N} la cote du centre de courbure de la section normale, correspondant à l'angle ϕ . Pour la géodésique, l'angle θ doit être pris égal à 0 et l'on a alors $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}$. En faisant varier ϕ , ce rayon de courbure passe de la valeur R_1 ($\phi = 0$) à R_2 ($\phi = \pi/2$). Au voisinage de M_0 , la surface ressemble à un *paraboloïde elliptique*.

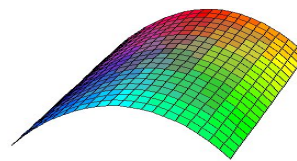
Si $R_1 = R_2$, l'indicatrice est un cercle et l'on dit que M_0 est un *ombilic*. La courbure normale est alors la même dans toutes les directions : $\mathcal{R}_n = R_1 = R_2$.



Point elliptique



Point hyperbolique



Point parabolique

• **Point hyperbolique**

On a ici $K < 0$: les courbures principales sont de signes opposés. Supposons $R_1 > 0$, $R_2 < 0$. L'indicatrice est un couple d'hyperboles dont la disposition dépend du signe de z . Le point M_0 est dit *hyperbolique*. Pour $z > 0$, les hyperboles ont $X'M_0X$ pour axe de symétrie. Pour $X > 0$, $Y > 0$, l'angle ϕ peut varier de 0 à α , angle de l'asymptote par rapport à M_0X , tel que $\tan \alpha = \sqrt{\frac{|R_2|}{R_1}}$. La courbure normale devient nulle pour $\phi = \alpha$. Pour $\phi = 0$, $\mathcal{R}_n = R_1$. A noter qu'ici, $\theta = 0$.

Pour $z < 0$, les hyperboles ont cette fois l'axe $Y'M_0Y$ comme axe de symétrie et ϕ peut varier de α , où $\mathcal{R}_n = 0$, à $\pi/2$ où $\mathcal{R}_n = -R_2$, et l'on a $\theta = \pi$.

Au voisinage de M_0 , la surface ressemble à un paraboloïde hyperbolique (ou à une selle de cheval).

12. Dupin, François Pierre Charles, "Développements de Géométrie", Ed. Courcier, Paris (1813).

• **Point parabolique**

Supposons que l'une des courbures principales soit nulle, par exemple $\frac{1}{R_2} = 0$, et que $R_1 > 0$. Dans ce cas, l'indicatrice a pour équation $2z = \frac{X^2}{R_1}$ et l'on a nécessairement $z > 0$. L'indicatrice est formée de deux droites parallèles à $Y'M_0Y$ et symétriques par rapport à cet axe. On a ici $\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \frac{\cos^2 \phi}{R_1}$ et $\theta = 0$. Lorsque ϕ varie de 0 à $\pi/2$, la courbure normale varie de $\frac{1}{R_1}$ à 0.

Le point M_0 est dit *parabolique* et dans son voisinage, la surface ressemble à un cylindre.

• **Méplat**

Lorsque les deux courbures principales sont nulles, on qualifie le point M_0 de *méplat* (ou point plane). Une surface entièrement constituée de méplats est nécessairement plane.

1.2.9 Lignes asymptotiques, torsion géodésique et lignes de courbure

• **Lignes asymptotiques**

Une ligne asymptotique sur une surface est une courbe tracée sur cette surface, pour laquelle la courbure normale est nulle en tout point.

La courbure normale $\frac{1}{\mathcal{R}_n} = \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}}$ est nulle si $\cos \theta = 0$, donc si *le plan osculateur est tangent à la surface*. La formule (1.76) montre aussi que cette courbure ne peut être nulle que si $R_1 R_2 < 0$, auquel cas l'indicatrice présente des asymptotes, et celles-ci correspondent à $\tan^2 \phi = \left| \frac{R_2}{R_1} \right|$: *une ligne asymptotique en un point est tangente à l'une des asymptotes de l'indicatrice en ce point*.

• **Torsion géodésique et lignes de courbures**

Une ligne de courbure d'une surface est une courbe de cette surface, pour laquelle la torsion géodésique est nulle en tout point.

Nous exprimons ci-après la torsion géodésique. Tout d'abord, on montre facilement que

$$\begin{aligned} \vec{N} \wedge \vec{E}_u &= \frac{1}{P} \left[-g_{uv} \vec{E}_u + g_{uu} \vec{E}_v \right], \quad \vec{N} \wedge \vec{E}_v = \frac{1}{P} \left[-g_{vv} \vec{E}_u + g_{uv} \vec{E}_v \right] \quad \text{et} \\ \vec{e}_2 &= \vec{N} \wedge \vec{T} = \frac{1}{P} \left[-T_v \vec{E}_u + T_u \vec{E}_v \right], \quad \text{donc} \quad e_2^u = -\frac{T_v}{P}, \quad e_2^v = \frac{T_u}{P} \end{aligned} \quad (1.91)$$

où $T_u = \vec{E}_u \cdot \vec{T}$ et $T_v = \vec{E}_v \cdot \vec{T}$ sont les composantes *covariantes* (et non pas contravariantes) de \vec{T} .

On a $\frac{1}{\mathcal{T}_g} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_3}{ds} = \vec{T} \cdot \left[\vec{N} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} \right]$ avec $\frac{d\vec{N}}{ds} = \Gamma_{nk}^\ell T^k \vec{E}_\ell$. Explicitons :

$$\begin{aligned} \vec{N} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} &= \frac{T^k}{P} \left\{ \Gamma_{nk}^u \left[-g_{uv} \vec{E}_u + g_{uu} \vec{E}_v \right] + \Gamma_{nk}^v \left[-g_{vv} \vec{E}_u + g_{uv} \vec{E}_v \right] \right\} \\ &= \frac{T^k}{P} \left\{ \Gamma_{vk}^n \vec{E}_u - \Gamma_{uk}^n \vec{E}_v \right\}, \quad \text{d'où} \\ \frac{1}{\mathcal{T}_g} &= \frac{1}{P} T^k \left[\Gamma_{vk}^n T_u - \Gamma_{uk}^n T_v \right] = \Gamma_{\ell k}^n T^k e_2^\ell \end{aligned} \quad (1.92)$$

D'après (1.73) cette expression peut être écrite comme le produit scalaire $\langle T' | M | e'_2 \rangle$. Or, ϕ étant dans le plan tangent l'angle du vecteur \vec{T} avec le vecteur propre \vec{v}_1 définissant la direction principale associée à R_1 , on a

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \cos \phi \vec{v}_1 + \sin \phi \vec{v}_2, & \vec{e}_2 &= -\sin \phi \vec{v}_1 + \cos \phi \vec{v}_2, & \text{soit} \\ |T' \rangle &= \cos \phi |v'_1 \rangle + \sin \phi |v'_2 \rangle, & |e'_2 \rangle &= -\sin \phi |v'_1 \rangle + \cos \phi |v'_2 \rangle \end{aligned}$$

Effectuant les produits scalaires, on en déduit la torsion géodésique

$$\frac{1}{\mathcal{T}_g} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \cos \phi \sin \phi \quad (1.93)$$

Comme la courbure normale, la torsion géodésique ne dépend pas de l'angle θ du plan osculateur avec la normale à la surface : elle est la même pour toutes les courbes ayant même tangente au point considéré (même valeur de ϕ). On peut aussi déduire les faits suivants.

✂ Si $R_1 \neq R_2$, la torsion géodésique est nulle pour les directions principales, celles-ci correspondant à $\phi = 0$ ou $\phi = \pi/2$: une ligne de courbure est donc une courbe de la surface dont le vecteur tangent est en tout point orienté suivant une direction principale en ce point. Le cas $R_1 = R_2$ correspond à un ombilic pour lequel les directions principales sont indéterminées.

D'après (1.65), sur une ligne de courbure on a $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{R}_n} \vec{T}$, ce qui peut être récrit comme

$$\frac{d}{ds} \left[\vec{OM} + \mathcal{R}_n \vec{N} \right] = \vec{N} \frac{d\mathcal{R}_n}{ds}$$

Notons C_0 le centre de courbure de la section normale à la surface, ayant même tangente que la ligne de courbure. Il est défini par $\vec{OC}_0 = \vec{OM} + \mathcal{R}_n \vec{N}$. Ce point décrit une certaine courbe dont la tangente est portée par $\frac{d\vec{OC}_0}{ds}$. D'après la relation précédente, \vec{N} est parallèle à ce vecteur. On en déduit :

✂ Les normales à la surface le long d'une ligne de courbure sont les tangentes à une même courbe enveloppe.

- On notera que les directions asymptotiques et les lignes de courbure sont des propriétés intrinsèques de la surface et ne dépendent donc pas de la paramétrisation choisie.

1.3 Le théorème de Gauss-Bonnet

1.3.1 Construction d'une base locale orthonormée

La base locale définie par les vecteurs \vec{E}_u et \vec{E}_v tangents aux courbes coordonnées n'est généralement pas orthonormée, mais il est possible de construire à partir de ces deux vecteurs une base locale orthonormée, indépendante de toute courbe tracée sur la surface, et qui est donc propre à la surface elle-même. Définissons un premier vecteur unitaire par¹³

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{E}_u}{\sqrt{g_{uu}}} \quad (1.94)$$

En chaque point de la surface il est dans le plan tangent correspondant, donc orthogonal à la normale locale \vec{N} . Il est alors facile de construire un troisième vecteur unitaire \vec{v}_2 orthogonal à \vec{v}_1 et à \vec{N} (donc aussi dans ledit plan tangent) via le produit vectoriel de ces deux derniers vecteurs :

$$\vec{v}_2 = \vec{N} \wedge \vec{v}_1 = \frac{1}{P\sqrt{g_{uu}}} \left[-g_{uv} \vec{E}_u + g_{uu} \vec{E}_v \right] \quad (1.95)$$

Le triplet $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{N}\}$, ordonné ainsi, constitue une base locale orthonormée d'orientation directe.

Etant donnée une courbe C tracée sur la surface, son vecteur tangent \vec{T} au point considéré peut être développé suivant cette base comme

$$\vec{T} = \vec{e}_1 = \cos \alpha \vec{v}_1 + \sin \alpha \vec{v}_2$$

et l'on a

$$\vec{e}_2 = \vec{N} \wedge \vec{T} = -\sin \alpha \vec{v}_1 + \cos \alpha \vec{v}_2$$

Notons pour la suite que l'angle α , angle entre \vec{T} et \vec{v}_1 , est mesuré en chaque point *dans le plan tangent à la surface*. Par déplacement le long de la courbe C , on a

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \alpha' \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{v}'_1 + \sin \alpha \vec{v}'_2$$

où les signes *primes* représentent des dérivations par rapport à s . On en tire :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_g} = \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \alpha' + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}'_1 \quad (1.96)$$

où l'on a tenu compte de $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$, puisque $\vec{v}_1^2 = \vec{v}_2^2 = 1$, et de $\vec{v}'_2 \cdot \vec{v}_1 = -\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}_2$, puisque $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$.

13. $g_{uu} = E_u$ est supposé différent de zéro !

1.3.2 Théorème des tangentes tournantes

Evaluons la variation totale $\Delta\alpha$ de l'angle α pour une courbe fermée C tracée sur la surface. On la suppose homotope à un point et parcourue une seule fois. Son sens de parcours est celui donné par la règle du tire-bouchon, en se référant à l'orientation de la normale à la surface dans le domaine où se trouve cette courbe. Nous envisagerons le cas général où C comporte des points anguleux (des *vertex*) en lesquels la tangente subit des discontinuités. Nous prendrons pour exemple simple le contour représenté à la figure (1.2).

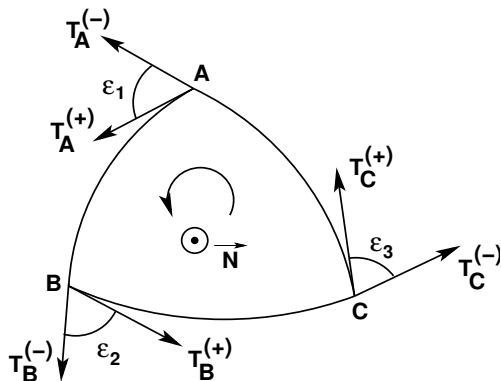


FIGURE 1.2 – Illustration du théorème des tangentes tournantes

Il comporte trois arcs de courbes \widehat{AB} , \widehat{BC} et \widehat{CA} . On a indiqué sur la figure les directions prises par la tangente aux trois vertex. Par exemple, $\vec{T}_A^{(+)}$ et $\vec{T}_B^{(-)}$ sont les tangentes respectives en A et B correspondant à l'arc \widehat{AB} , tandis que $\vec{T}_C^{(+)}$ et $\vec{T}_A^{(-)}$ sont les tangentes respectives en C et A correspondant à l'arc \widehat{CA} . En A , le vecteur tangent subit ainsi la discontinuité $\vec{T}_A^{(-)} - \vec{T}_A^{(+)}$. Sont aussi indiqués les *angles extérieurs* ϵ_k . Dans le plan tangent à la surface en un point de vertex, par exemple en A , c'est à 2π près, l'angle entre $\vec{T}_A^{(+)}$ et $\vec{T}_A^{(-)}$. Si la courbe possède en chacun de ses points une tangente continue, ces angles extérieurs doivent tous être pris égaux à 0. L'intégrale de α' le long de C doit être décomposée selon les trois intégrales correspondant chacune à l'un des arcs constituant C . On a ainsi

$$\Delta\alpha = \alpha_B^{(-)} - \alpha_A^{(+)} + \alpha_C^{(-)} - \alpha_B^{(+)} + \alpha_A^{(-)} - \alpha_C^{(+)}$$

Il faut noter ici que l'orientation de \vec{v}_1 est indépendante de la forme du contour et comme ce vecteur varie, par hypothèse, de façon continue, l'angle total qu'il balaye, *dans les plans tangents*, au long de ce contour fermé, est strictement nul. Autrement dit, $\Delta\alpha$ peut être calculé indépendamment des variations de \vec{v}_1 et représente finalement l'angle de rotation de la tangente seule. Ecrivons alors

$$\Delta\alpha = \alpha_A^{(-)} - \alpha_A^{(+)} + \alpha_B^{(-)} - \alpha_B^{(+)} + \alpha_C^{(-)} - \alpha_C^{(+)}$$

Chacune des différences $\alpha_A^{(-)} - \alpha_A^{(+)}$, etc, représente, à 2π près, la discontinuité de l'angle de la tangente au vertex considéré, que l'on évalue dans le plan tangent à la surface en ce point, puisque les tangentes (+) et (-) sont toutes deux dans ce même plan. Il devient alors évident que l'on a $\alpha_B^{(-)} - \alpha_B^{(+)} = -\epsilon_2$ et $\alpha_C^{(-)} - \alpha_C^{(+)} = -\epsilon_3$. En A , considéré ici à la fois comme point de départ et comme

point d'arrivée, il faut tenir compte du fait que la tangente a déjà presque effectué un tour complet autour de la normale et que l'on a cette fois $\alpha_A^{(-)} - \alpha_A^{(+)} = 2\pi - \epsilon_1$. Au final, on obtient

$$\Delta\alpha = 2\pi - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 \quad (1.97)$$

Ce résultat constitue le *théorème des tangentes tournantes*¹⁴, ici très sommairement abordé. Généralisant au cas où le contour présente n vertex, on a :

$$\Delta\alpha = 2\pi - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (1.98)$$

en supposant le contour décrit dans le sens positif, au regard de l'orientation de la surface.

1.3.3 Intégration de $\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_1$ le long d'une courbe fermée

Tenant compte de $\vec{E}_u \cdot \vec{v}_2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_1 &= \vec{v}_2 \cdot d \left[\frac{\vec{E}_u}{\sqrt{g_{uu}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{g_{uu}}} \vec{v}_2 \cdot d\vec{E}_u = \frac{1}{\sqrt{g_{uu}}} \vec{v}_2 \cdot \Gamma_{uk}^j \vec{E}_j du^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{uu}}} \vec{v}_2 \cdot \vec{E}_v \Gamma_{uk}^v du^k = \frac{1}{Pg_{uu}} [g_{vv}g_{uu} - g_{uv}^2] \Gamma_{uk}^v du^k = \frac{P}{g_{uu}} [\Gamma_{uu}^v du + \Gamma_{uv}^v dv] \\ &= \Psi_u du + \Psi_v dv \end{aligned}$$

Intégrons cette expression sur le contour C considéré dans le précédent paragraphe et appliquons à celui-ci le théorème de Stokes¹⁵. Il vient

$$\oint_C \Psi_u du + \Psi_v dv = \iint_{\mathcal{A}} \left[\frac{\partial \Psi_v}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_u}{\partial v} \right] du dv$$

où \mathcal{A} est le morceau de surface délimité par C . On est ainsi conduit à évaluer l'expression

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{P}{g_{uu}} \Gamma_{uv}^v \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{P}{g_{uu}} \Gamma_{uu}^v \right]$$

On a

$$\Lambda = \frac{P}{g_{uu}} \left[\frac{\partial \Gamma_{uv}^v}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{uu}^v}{\partial v} \right] + \frac{P}{g_{uu}} \left[\Gamma_{uv}^v \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u} - \Gamma_{uu}^v \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial v} \right] - \frac{P}{g_{uu}^2} \left[\Gamma_{uv}^v \frac{\partial g_{uu}}{\partial u} - \Gamma_{uu}^v \frac{\partial g_{uu}}{\partial v} \right]$$

Calculons séparément chacun des trois termes de l'expression ci-dessus.

$$\begin{aligned} \bullet \Lambda_1 &= \frac{P}{g_{uu}} \left[\frac{\partial \Gamma_{uv}^v}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{uu}^v}{\partial v} \right] \\ &= \frac{P}{g_{uu}} \{ g^{vv} [\Gamma_{uv}^n \Gamma_{vu}^n - \Gamma_{uu}^n \Gamma_{vv}^n] - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u \} \end{aligned}$$

où (1.22) a été utilisé.

14. H. Hopf "Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven", Compositio Mathematica, tome 2 (1935), 50-62.

15. Lequel théorème prend ici la forme du *théorème de Green ou de Green-Riemann*.

$$\bullet \Lambda_2 = \frac{P}{g_{uu}} \left[\Gamma_{uv}^v \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial u} - \Gamma_{uu}^v \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial v} \right] = \frac{P}{g_{uu}} \{ \Gamma_{uv}^v [\Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v] - \Gamma_{uu}^v [\Gamma_{vu}^u + \Gamma_{vv}^v] \}$$

où l'on a utilisé (1.24).

$$\begin{aligned} \bullet \Lambda_3 &= -\frac{P}{g_{uu}^2} \left[\Gamma_{uv}^v \frac{\partial g_{uu}}{\partial u} - \Gamma_{uu}^v \frac{\partial g_{uu}}{\partial v} \right] \\ &= 2 \frac{P}{g_{uu}^2} \{ \Gamma_{uu}^v [\Gamma_{uv}^u g_{uu} + \Gamma_{uv}^v g_{uv}] - \Gamma_{uv}^v [\Gamma_{uu}^u g_{uu} + \Gamma_{uu}^v g_{uv}] \} = 2 \frac{P}{g_{uu}} \{ \Gamma_{uu}^v \Gamma_{uv}^u - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uu}^u \} \end{aligned}$$

en tenant compte de (1.19). En additionnant les trois termes, on trouve

$$\Lambda = \frac{P}{g_{uu}} g^{vv} [\Gamma_{uv}^n \Gamma_{vu}^n - \Gamma_{uu}^n \Gamma_{vv}^n]$$

Or, d'une part, $g^{vv} = \frac{g_{uu}}{\det G}$ et, d'autre part, $\det G = P^2$. En outre, $\Gamma_{uu}^n \Gamma_{vv}^n - \Gamma_{uv}^n \Gamma_{vu}^n = \det \Gamma = K \det G$, d'après (1.78), où, rappelons-le, K est la courbure de Gauss. On obtient finalement

$$\Lambda = -KP \tag{1.99}$$

1.3.4 Théorème de Gauss-Bonnet

L'intégration de (1.96) sur le contour fermé C conduit à une première formule exprimant le *théorème de Gauss-Bonnet* :

$$\oint_C \frac{ds}{\mathcal{R}_g} = \Delta\alpha - \iint_{\mathcal{A}} K d\mathcal{A} \tag{1.100}$$

où $d\mathcal{A} = P du dv = \sqrt{\det G} du dv$ est l'élément de surface sur \mathcal{A} , et $\Delta\alpha$ est la variation totale de l'angle α , dont la valeur dépend de la forme du contour C . Considérant le cas général où le contour est une suite d'arcs de courbes reliés par des vertex (points anguleux), d'une part, l'intégrale dans le membre de gauche de la relation ci-dessus doit être décomposée de façon appropriée compte tenu de cette suite, d'autre part $\Delta\alpha$ est alors donné par (1.98). La relation (1.100) prend ainsi la forme

$$\oint_C \frac{ds}{\mathcal{R}_g} + \iint_{\mathcal{A}} K d\mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 2\pi \tag{1.101}$$

qui exprime le théorème de Gauss-Bonnet, ici qualifié de *local*.

• Si le contour possède en tout point une tangente continue, et ne présente donc aucun point anguleux, le vecteur tangent aura subi une rotation totale de 2π si, rappelons-le, le contour est homotope à un seul point et si, bien sûr, il est parcouru une seule fois. Dans ce cas, (1.101) devient

$$\oint_C \frac{ds}{\mathcal{R}_g} + \iint_{\mathcal{A}} K d\mathcal{A} = 2\pi \tag{1.102}$$

S'il apparaît de plus qu'un tel contour fermé peut s'appuyer sur des géodésiques, étant donné que sur chacune d'elles la courbure géodésique est nulle, le résultat (1.102) se simplifie en donnant

$$\iint_{\mathcal{A}} K d\mathcal{A} = 2\pi \tag{1.103}$$

Vérifions cette formule en considérant une sphère de rayon R pour laquelle $K = 1/R^2$. Les géodésiques de la sphère sont des arcs de grands cercles. Appliquant la formule (1.103) à un grand cercle, on obtient

$$\iint_{\mathcal{A}} d\mathcal{A} = 2\pi R^2$$

qui est bien l'aire d'un hémisphère.

1.3.5 Théorème de Poincaré-Hopf, théorème de Gauss-Bonnet global

Considérons une surface Σ et un champ de vecteurs \vec{X} en tout point tangent à Σ et ne présentant que des zéros isolés comme seules singularités. En tout point où $\vec{X} \neq \vec{0}$, on peut définir les vecteurs unitaires

$$\vec{x} = \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|}, \quad \text{et} \quad \vec{y} = \vec{N} \wedge \vec{x} \quad (1.104)$$

et développer ces derniers vecteurs sur la base définie par (1.94) et (1.95) :

$$\vec{x} = \cos \psi \vec{v}_1 + \sin \psi \vec{v}_2, \quad \vec{y} = -\sin \psi \vec{v}_1 + \cos \psi \vec{v}_2 \quad (1.105)$$

Soit C une courbe tracée sur la surface et sur laquelle $\vec{X} \neq \vec{0}$. On a

$$\vec{x}' = \psi' \vec{y} + \cos \psi \vec{v}_1' + \sin \psi \vec{v}_2'$$

où les signes *primes* représentent des dérivations par rapport à l'abscisse curviligne s définie sur C , et

$$\vec{y} \cdot \vec{x}' = \psi' + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1' \quad (1.106)$$

Intégrons cette relation sur la courbe C en supposant que celle-ci soit *fermée*, homotope à un point, et parcourue une seule fois dans le sens positif, selon le sens de la normale à Σ dans le voisinage. Utilisant (1.99), on obtient

$$\oint_C \vec{y} \cdot d\vec{x} = \Delta\psi - \iint_{\sigma} K d\sigma \quad (1.107)$$

où σ est la surface délimitée par C et $\Delta\psi$ la variation totale le long de C de l'angle entre le champ de vecteur \vec{X} et le vecteur de référence \vec{v}_1 ¹⁶. La formule (1.107) est remarquable pour la raison suivante.

L'intégrale du membre de gauche ne dépend que du contour C et du champ de vecteurs \vec{X} : elle est donc complètement indépendante de la paramétrisation de la surface. Comme on sait, il en va de même de l'intégrale de la courbure de Gauss apparaissant au second membre. On en conclut que $\Delta\psi$ est en fait indépendant de la paramétrisation et ne dépend que des propriétés de \vec{X} et des propriétés locales de Σ . On a bien sûr $\Delta\psi = 0$ si \vec{X} est non nul à l'intérieur de σ . Par contre, dans les deux situations représentées dans la figure (1.3), on a $\Delta\psi = 2\pi$ pour celle de gauche et $\Delta\psi = -2\pi$ pour celle de droite. L'*indice de singularité*, défini par $\frac{\Delta\psi}{2\pi}$ est égal à $+1$ dans le premier cas, égal à -1 dans le second.

16. Supposé partout bien défini 1

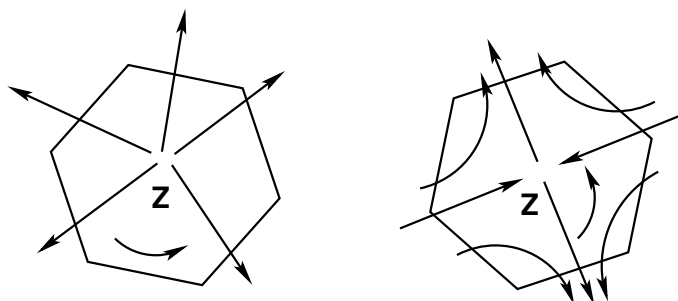


FIGURE 1.3 – Indices de singularités ± 1

Supposons maintenant que la surface Σ soit *fermée*. Il est toujours possible d'effectuer un *pavage* (ou *triangulation*) de Σ au moyen de polygones (courbes), réguliers ou non. En outre, ce pavage peut être réalisé de telle sorte que chaque zéro (éventuel) de \vec{X} soit strictement entouré par un de ces polygones (afin que ce zéro ne se trouve pas sur un arc de courbe du pavage). Rappelons que dans un pavage, un polygone n'a qu'un seul arc en commun avec l'un de ses voisins.

Sommons (1.107) sur tout le pavage de Σ , chaque polygone étant parcouru dans le sens positif défini plus haut. Deux polygones voisins ont un et un seul arc de courbe en commun et celui-ci est parcouru dans un sens pour l'un des polygones et dans le sens inverse pour son voisin. Il en résulte que la somme des intégrales telles que celle du membre de gauche de (1.107) est strictement nulle. On obtient ainsi la formule

$$[\Delta\psi]_{\text{tot}} = \iint_{\Sigma} K d\Sigma \quad (1.108)$$

qui traduit le *Théorème de Poincaré-Hopf*, ici dans le cas des surfaces fermées de l'espace euclidien à trois dimensions. Il s'agit ici aussi d'un résultat remarquable pour les raisons suivantes.

✂ Il ne dépend pas de la décomposition polygonale choisie, car le second membre, courbure de Gauss totale de la surface n'en dépend pas ;

✂ Il ne dépend pas non plus du champ de vecteurs \vec{X} considéré : pour une surface fermée donnée, l'indice de singularité $\frac{[\Delta\psi]_{\text{tot}}}{2\pi}$ est le *même* pour tous les champs de vecteurs tels que \vec{X} , définis dans le plan tangent et dont les seules singularités sont des zéros isolés. C'est donc encore une caractéristique de la surface elle-même.

Pour tenter de comprendre ce résultat, revenons au théorème de Gauss-Bonnet local et appliquons (1.101) à l'ensemble des polygones du pavage de la surface fermée Σ introduit plus haut. On aboutit cette fois à la formule

$$\iint_{\Sigma} K d\Sigma = \sum_{\text{pavage}} \left\{ 2\pi - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right\} \quad (1.109)$$

dans laquelle le membre de droite semble dépendre directement du pavage, alors que nous savons déjà qu'il n'en est rien. Eclaircissons ce point. 7

Selon l'usage (en français), notons F le nombre de faces polygonales du pavage, S le nombre de ses sommets (ou vertex) et A le nombre de ses arêtes (ou arcs communs à deux polygones voisins). On appelle *caractéristique d'Euler* de ce pavage la grandeur

$$\chi = F - A + S \quad (1.110)$$

Par définition, c'est un nombre entier (relatif). Manifestement, il ne dépend pas de la forme exacte du pavage. En outre, il ne dépend pas du nombre de polygones entrant dans le recouvrement. En effet, considérons le pavage de la figure (1.4). Supprimons l'arête AB . Le nombre de faces diminue d'une unité, puisqu'une arête appartient à deux faces et deux seulement : $\Delta F = -1$. En supprimant une arête, ses extrémités peuvent perdre leur statut de sommets. C'est le cas pour les deux sommets A et B et dans ce cas $\Delta S = -2$. Mais dans ce cas, AD et BC ne sont plus des arêtes et au final $\Delta A = -3$. Dans cette opération, χ n'a pas changé. Si c'est l'arête AE qui est supprimée, E reste un sommet et l'on a $\Delta S = -1$ et $\Delta A = -2$, ce qui laisse χ inchangé. Enfin, si l'on supprime CD , $\Delta S = 0$, $\Delta A = -1$ et χ reste encore une fois inchangé. Compte tenu de ce fait, on peut d'ailleurs se restreindre uniquement à des recouvrement de surfaces par des triangles (courbes).

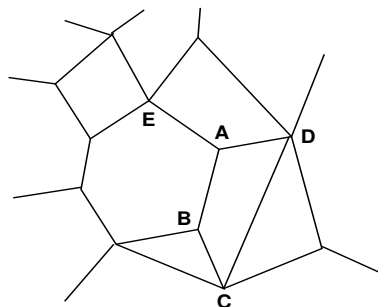


FIGURE 1.4 – Pavage polygonal

A titre d'illustration, considérons le pavage de la sphère représenté à la figure (1.5), par les huit triangles sphériques ADE , ADF , AEC , ACF , BDE , BDF , BEC , BCF , pour lequel $F = 8$, $S = 6$ et $A = 12$, qui nous donne $\chi = 2$. Pour la sphère, on trouve ainsi

$$\iint_{\text{sphère}} K d\Sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{\text{sphère}} d\Sigma = 4\pi = 2\pi \chi_{\text{sphère}} \quad (1.111)$$

Ce résultat, liant la courbure de Gauss totale d'une surface fermée à sa caractéristique d'Euler, n'est pas fortuit comme nous allons le montrer maintenant en analysant le second membre de (1.109). Le pavage d'une surface n'étant pas directement lié à la forme exacte de cette surface, on peut d'ailleurs s'attendre à ce que la caractéristique d'Euler soit *la même* pour toutes les surfaces *homotopes*.

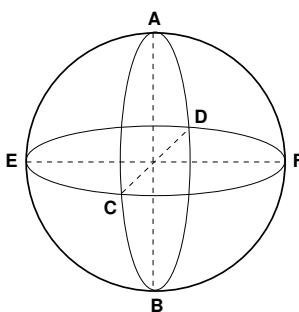


FIGURE 1.5 – Pavage de la sphère par 8 triangles sphériques

Procédons au pavage d'une surface fermée au moyen de triangles, appelé *triangulation*¹⁷. Pour ce pavage, le second membre de (1.109) s'écrit

17. Toute surface admet une triangulation.

$$X = 2\pi F - \sum_{\text{pavage}} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i$$

Pour chaque triangle, introduisons les angles *intérieurs* $\eta_i = \pi - \epsilon_i$, de sorte que

$$X = -\pi F + \sum_{\text{pavage}} \sum_{i=1}^3 \eta_i$$

La somme apparaissant dans cette formule peut maintenant être réécrite comme une somme sur tous les vertex de tous les angles présents à un vertex donné. Or, la somme des angles à un vertex donné est clairement égale à 2π . On obtient donc

$$X = 2\pi S - \pi F$$

D'un autre côté, dans ce pavage, une face nécessite trois arêtes et une arête est commune à deux faces. Les nombres F et A doivent donc vérifier $\frac{F}{2} = \frac{A}{3}$, soit $3F = 2A$. Cette égalité indique qu'une telle triangulation nécessite un nombre pair de faces, en fait supérieur à 4, et que le nombre d'arêtes correspondant est multiple de 3. Il vient alors $X = 2\pi S + 2\pi F - 3\pi F = 2\pi(F - A + S)$, comme attendu. La formule (1.109) s'écrit donc

$$\iint_{\Sigma} K d\Sigma = 2\pi \chi \tag{1.112}$$

Cette formule traduit le *théorème de Gauss-Bonnet global*. Sa célébrité tient au fait qu'il fait le lien entre une donnée géométrique, la courbure de Gauss totale d'une surface fermée, et un invariant topologique, la caractéristique d'Euler de cette surface ou de toute autre qui lui est homotope. A cet égard, étant homéomorphes à une sphère, les polyèdres convexes ont tous une caractéristique d'Euler égale à 2. Par contre, les caractéristiques du cylindre, du ruban de Möbius, du tore et de la bouteille de Klein sont égales à 0.

✂ *La caractéristique d'une surface fermée est aussi égale à la somme des indices de singularité d'un champ de vecteurs tracé sur la surface, où il a un nombre fini de singularités* (théorème de Hopf).

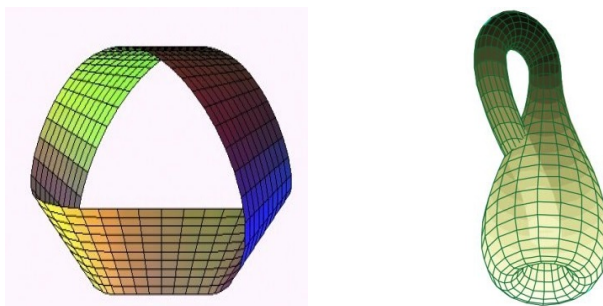


FIGURE 1.6 – Ruban de Moebius (à gauche), bouteille de Klein (à droite)

1.3.6 Sur les caractéristiques d'Euler des surfaces homotopes à une sphère

Montrons tout d'abord que

$$K P = \vec{N} \cdot \left(\frac{\vec{\partial N}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial v} \right) \quad (1.113)$$

En effet, d'après (1.12), on a

$$\frac{\vec{\partial N}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial v} = \left[\Gamma_{mu}^u \vec{E}_u + \Gamma_{mu}^v \vec{E}_v \right] \wedge \left[\Gamma_{mv}^u \vec{E}_u + \Gamma_{mv}^v \vec{E}_v \right] = \det \Gamma_n \vec{E}_u \wedge \vec{E}_v = \det \Gamma_n P \vec{N} \quad \text{et} \quad K = \det \Gamma_n$$

Soit maintenant une surface fermée Σ homotope à une sphère. En un point M de cette surface, on définit une base locale, orthonormée et d'orientation directe, de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{N}$, où \vec{N} est le vecteur unitaire normal à la surface en M , celle-ci étant orientée depuis son intérieur vers son extérieur. Ladite base locale peut être obtenue à partir d'une base de référence orthonormée et d'orientation directe $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, la même pour tous les points de l'espace, au moyen d'une rotation appropriée R_M , *autour du point M*, dont l'axe et l'angle dépendent de la position de M . Une telle rotation peut bien entendu être réalisée pour tout point de la surface. Mais on peut aussi bien imaginer le même processus pour des points en dehors de la surface, ce qui équivaut à envisager un champ de vecteurs unitaires $\vec{N}(M)$ ayant pour propriété de représenter la normale unitaire de Σ lorsque M appartient à cette surface. A cet égard, notant (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de M par rapport au repère cartésien de référence $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et représentant la surface Σ par l'équation implicite $F(x, y, z) = 0$, on sait que le champ de vecteurs $\vec{V} = \text{grad } F$ est normal à la surface en tout point de celle-ci. Considérant la fonction $F(x, y, z)$ comme un champ scalaire, en supposant que celui-ci puisse être bien défini en tout point, l'idée est d'associer ledit champ de normales $\vec{N}(M)$ à $\text{grad } F$.

Considérons alors le champ de vecteurs $\vec{U}(M)$ de composantes cartésiennes

$$U_x = \vec{N} \cdot \left(\frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \right), \quad U_y = \vec{N} \cdot \left(\frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \right), \quad U_z = \vec{N} \cdot \left(\frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \right) \quad (1.114)$$

en supposant non nulles les dérivées partielles. On calcule aisément

$$\text{div } \vec{U} = 3 \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \right)$$

Or, \vec{N} étant unitaire, les trois vecteurs $\frac{\vec{\partial N}}{\partial x}, \frac{\vec{\partial N}}{\partial y}$ et $\frac{\vec{\partial N}}{\partial z}$ lui sont orthogonaux. Par conséquent, ces vecteurs sont certainement liés et leur déterminant est nul, sauf peut-être en certains points singuliers comme expliqué ci-après. On en conclut

$$\text{div } \vec{U} = 0 \quad (1.115)$$

sauf en certains points isolés. En dehors de ceux-ci, le champ \vec{U} est donc à *flux conservatif*. Evaluons maintenant (1.113), en considérant la normale unitaire comme un champ de vecteurs. Sur la surface Σ , on a $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ et $z = z(u, v)$, donc

$$\frac{\vec{\partial N}}{\partial u} = \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\vec{\partial N}}{\partial v} = \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\partial N}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial v} &= \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \left[\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right] + \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \left[\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right] \\ &\quad + \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right] \end{aligned}$$

Or, $\vec{E}_u \wedge \vec{E}_v = P \vec{N}$ et $\vec{E}_u = \frac{\vec{\partial M}}{\partial u} = \vec{e}_x \frac{\partial x}{\partial u} + \dots$, $\vec{E}_v = \frac{\vec{\partial M}}{\partial v} = \vec{e}_x \frac{\partial x}{\partial v} + \dots$, d'où l'on tire

$$PN_x = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad PN_y = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad PN_z = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Ainsi,

$$\frac{\vec{\partial N}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial v} = P \left[N_x \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} + N_y \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} + N_z \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \right]$$

On en déduit le résultat remarquable

$$K = \vec{N} \cdot \vec{U} \quad (1.116)$$

On peut en déduire immédiatement que (1.115) ne peut être valable en tout point intérieur à Σ . Supposons en effet que pour cette surface K soit strictement positif en tout point. Appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on devrait avoir

$$\iint_{\Sigma} K d\Sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{U} dV > 0$$

où V est le volume délimité par Σ . En conséquence, la relation (1.115) ne peut être vérifiée en tout point du volume V . Ce fait provient naturellement de ce que la définition de \vec{U} implique des dérivées partielles *par rapport aux coordonnées cartésiennes* de M et non pas *par rapport aux variables angulaires* de \vec{N} vis-à-vis desquelles ce vecteur possède certainement suffisamment de régularité.

Prenons l'exemple de la sphère pour laquelle $\vec{N} = \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$, avec $r = OM$. Pour $r \neq 0$, on trouve

$$\frac{\vec{\partial N}}{\partial y} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{x}{r^3}, \quad \frac{\vec{\partial N}}{\partial z} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} = \vec{e}_r \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\vec{\partial N}}{\partial x} \wedge \frac{\vec{\partial N}}{\partial y} = \vec{e}_r \frac{z}{r^3},$$

et, comme on pouvait s'y attendre,

$$\vec{U}_{\text{sphère}} = \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad (1.117)$$

vecteur qui présente une singularité en $r = 0$. Comme on sait, ce vecteur est apparenté au champ électrostatique d'une charge ponctuelle située en $r = 0$, lequel champ a le même flux, non nul, à travers toute surface fermée entourant cette charge, ce qui provient du fait que l'on a

$$\operatorname{div} \vec{U}_{\text{sphère}} = 4\pi \delta(\vec{OM}) \quad (1.118)$$

où δ est la distribution de Dirac. On peut d'ailleurs rapprocher la présente étude de celle de l'équilibre des conducteurs en Electrostatique, ou, d'un point de vue plus mathématique, de l'étude de l'équation de Laplace avec les conditions de Dirichlet ou celles de Neumann. Considérons, à l'équilibre électrostatique, un conducteur isolé portant une charge Q sur sa surface extérieure Σ . Le potentiel $V(x, y, z)$ que crée ce conducteur en tout point à l'extérieur de Σ doit satisfaire l'équation de Laplace, prendre une valeur donnée V_0 dans le conducteur et sur sa surface Σ , et s'annuler au moins comme $\frac{1}{r}$ lorsque r tend vers l'infini. On montre que la solution à ce problème est *unique*¹⁸. Les lignes du champ électrostatique \vec{E} correspondant à ce potentiel sont perpendiculaires à toutes les surfaces équipotentielles, notamment Σ . Pour la présente étude, en posant $\vec{N} = \vec{E}/E$ où $E = |\vec{E}|$, on en tire un moyen exceptionnel d'associer la normale unitaire sur Σ à un champ de vecteurs défini en dehors de cette surface, et, qui plus est, un processus bien défini selon lequel ce champ de normale tend continument vers la normale unitaire d'une sphère, à savoir, \vec{e}_r , lorsque $r \rightarrow \infty$.

Illustrons ceci en considérant l'exemple d'un conducteur isolé portant la charge Q et dont la surface extérieure est un ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{avec } c > a \quad (1.119)$$

et qui est donc centré sur l'origine O et a $z'z$ pour axe de révolution. On montre que la fonction potentiel correspondante s'écrit¹⁹

$$V(\xi) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \ln \left[\frac{\sqrt{\xi + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{\xi + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}} \right] \quad (1.120)$$

où ξ est défini par

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi + a^2} + \frac{z^2}{\xi + c^2} = 1 \quad (1.121)$$

La surface du conducteur correspond à $\xi = 0$. Lorsque r tend vers l'infini, $\xi \simeq r$ et le potentiel prend la forme

$$V(\xi) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.122)$$

Le champ électrostatique à la surface du conducteur est

$$\vec{E} = - \left[\vec{\operatorname{grad}} V \right]_{\xi=0} = - \left[\frac{dV}{d\xi} \vec{\operatorname{grad}} \xi \right]_{\xi=0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 c} \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}} \left[\frac{x}{a^2} \vec{e}_x + \frac{y}{a^2} \vec{e}_y + \frac{z}{c^2} \vec{e}_z \right]$$

qui donne bien sur cette surface la normale unitaire

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left[\frac{x}{a^2} \vec{e}_x + \frac{y}{a^2} \vec{e}_y + \frac{z}{c^2} \vec{e}_z \right] \quad (1.123)$$

18. La question de l'existence d'une solution ne se pose même pas pour un physicien, car ce problème correspond à des situations physiques bien réelles, et les lois de l'Electrostatique macroscopique sont bien vérifiées expérimentalement.

19. Voir E. Durand, "Electrostatique, Tome II", Ed. Masson et Cie, Paris, 1966, p.416.

Le lecteur vérifiera que sur l'ellipsoïde, le vecteur défini en (1.114) prend la forme

$$\vec{U} = \frac{\vec{OM}}{N^3 a^4 c^2}, \quad \text{où } N = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}} \quad (1.124)$$

Utilisant la paramétrisation $x = a \sin \theta \cos \varphi$, $y = a \sin \theta \sin \varphi$ et $z = c \cos \theta$, on en déduit la courbure de Gauss de l'ellipsoïde :

$$K = \vec{N} \cdot \vec{U} = \frac{c^2}{[c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta]^2} \quad (1.125)$$

L'élément de surface de l'ellipsoïde est donné par

$$d\Sigma = \left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi = a d\theta d\varphi \sin \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}$$

et l'on trouve

$$\iint_{\Sigma} K d\Sigma = 4\pi \quad (1.126)$$

Mais ce résultat peut aussi être obtenu comme suit. Ignorant le volume à l'intérieur de l'ellipsoïde, le vecteur \vec{U} défini à l'extérieur de cette surface n'a aucune singularité dans cette dernière région et satisfait (1.115), sans restriction. Lorsque r tend vers l'infini, \vec{N} s'identifie à \vec{e}_r et \vec{U} prend alors la forme (1.117). Appliquant le théorème de Green-Ostrogradski au volume \mathcal{V} entre l'ellipsoïde Σ et la sphère S_{∞} de centre O et de rayon r tendant vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned} - \iint_{\Sigma} \vec{N} \cdot \vec{U} d\Sigma + \iint_{S_{\infty}} \vec{N} \cdot \vec{U} dS_{\infty} &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{U} d\mathcal{V} = 0, \quad \text{soit} \\ \iint_{\Sigma} K d\Sigma &= \iint_{S_{\infty}} [r^2 K]_{S_{\infty}} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \end{aligned} \quad (1.127)$$

On en déduit ainsi que la caractéristique d'Euler de l'ellipsoïde est égale à celle de la sphère, c'est-à-dire, 2.

De façon évidente, le même développement peut aussi bien être appliqué à toute autre surface homotope à une sphère : toute surface homotope à une sphère a donc une caractéristique d'Euler égale à 2.

1.3.7 Courbure de Gauss et angle solide

L'application de Gauss associe à tout point M d'une surface la normale $\vec{N}(M)$ à cette surface en ce point, ou encore un point N sur la sphère \mathbb{S}_2 de centre O et de rayon unité. Définissons la position du point N par les angles sphériques θ et φ , de sorte que

$$\vec{N} = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) \quad (1.128)$$

Il est alors facile de montrer que

$$\vec{N} \cdot \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} \right) = \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \quad (1.129)$$

et que

$$d\theta \wedge d\varphi = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\theta}{\partial v} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) du \wedge dv \quad (1.130)$$

Utilisant (1.113), on en déduit

$$K d\Sigma = KP dudv = \sin\theta d\theta d\varphi = d\Omega \quad (1.131)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire balayé par la normale \vec{N} lorsque M varie à l'intérieur de l'élément de surface $d\Sigma$.

✂ *La courbure de Gauss totale d'une surface est donc l'angle solide total, compté algébriquement, balayé par la normale orientée de cette surface, en donnant au point courant toutes les positions possibles sur cette surface.*

A la lumière de la relation (1.131), que l'on pouvait pressentir au vu des relations (1.126) et 1.127), les résultats précédents se comprennent aisément. En effet, pour une surface fermée homotope à une sphère, le vecteur \vec{N} prend une direction donnée un nombre impair de fois, une fois dans le sens \vec{ON} , les autres fois, à égalité, dans le sens de \vec{ON} ou dans le sens opposé à ce vecteur. Au final, l'angle solide balayé est aussi celui sous lequel depuis O on voit la sphère \mathbb{S}_2 , soit 4π . Pour le tore, une direction donnée (θ, φ) est prise deux fois par \vec{N} , dans des sens opposés. Au final, l'angle solide balayé correspondant est nul.

1.3.8 Le cas du Tore

Envisageons un tore engendré par la rotation autour de $z'z$ d'un cercle de rayon a , placé dans un plan contenant $z'z$, et dont le centre est à la distance b de $z'z$. La projection du centre du cercle sur $z'z$ est choisie comme origine des coordonnées. La surface de ce tore peut être paramétrisée au moyen de deux angles variant entre 0 et 2π : l'un, φ est l'angle azimutal habituel, l'autre, ψ , est tel que

$$x = (b + a \cos\psi) \cos\varphi, \quad y = (b + a \cos\psi) \sin\varphi, \quad z = a \sin\psi \quad (1.132)$$

La distance d'un point de la surface à l'axe $z'z$ est donc $\rho = b + a \cos\psi$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \psi} &= -a \sin\psi \vec{e}_\rho + a \cos\psi \vec{e}_z, & \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} &= (b + a \cos\psi) \vec{e}_\varphi, & \text{avec} \\ \vec{e}_\rho &= \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y, & \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \psi} = a(b + a \cos\psi) \vec{N}, \quad \text{où} \quad \vec{N} = \sin\psi \vec{e}_z + \cos\psi \vec{e}_\rho$$

Puis

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \psi} = -\sin\psi \vec{e}_\rho + \cos\psi \vec{e}_z, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} = \cos\psi \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial \psi} = \cos\psi \vec{N}$$

On en déduit la courbure de Gauss

$$KP = \vec{N} \cdot \left[\frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial \psi} \right] = \cos \psi, \quad \text{soit } K = \frac{\cos \psi}{a(b + a \cos \psi)} \quad (1.133)$$

et la courbure totale

$$\iint_{\text{Tore}} K d\Sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi KP = 0 \quad (1.134)$$

ce qui implique que la caractéristique d'Euler du tore est nulle, conformément à ce qui a été énoncé précédemment.

Ici aussi, on peut faire un rapprochement avec un problème connu d'Electrostatique, consistant à étudier le potentiel et le champ électrostatiques créés à l'extérieur de sa masse par un conducteur en forme de tore, que l'on suppose isolé et portant la charge totale Q que nous supposons positive.

Les variables adaptées à ce problème sont les *coordonnées toroidales* ξ et η telles que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = c \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad z = c \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad \text{où } c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad (1.135)$$

Dans un demi-plan $\varphi = \text{constante}$, les courbes coordonnées correspondantes ont pour équations

$$\begin{aligned} (\rho - c \coth \xi)^2 + z^2 &= \frac{c^2}{\sinh^2 \xi} \quad \text{pour } \xi \text{ constant} \\ (z - c \cot \eta)^2 + \rho^2 &= \frac{c^2}{\sin^2 \eta} \quad \text{pour } \eta \text{ constant} \end{aligned} \quad (1.136)$$

Les premières sont des cercles de centres $z = 0, \rho = c \coth \xi$ et de rayons $\frac{c}{\sinh \xi}$; les secondes sont des demi-cercles de centres $\rho = 0, z = c \cot \eta$ et de rayons $\frac{c}{\sin \eta}$. En faisant varier φ de 0 à 2π , les premières engendrent des tores d'axe de révolution $z'z$, tandis que les secondes engendrent des sphères centrées sur $z'z$.

La surface du tore correspond à $\xi = \xi_0$, avec $\cosh \xi_0 = \frac{b}{a}, \sinh \xi_0 = \frac{c}{a}$, et l'on a alors

$$\cos \psi = \frac{b \cos \eta - a}{b - a \cos \eta}, \quad \sin \psi = c \frac{\sin \eta}{b - a \cos \eta} \quad (1.137)$$

A l'extérieur du tore, les domaines de variation de ces coordonnées sont $0 \leq \xi \leq \xi_0, -\pi \leq \eta \leq \pi$.

La distance d'un point par rapport à l'origine est

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = c \sqrt{\frac{\cosh \xi + \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}} \quad (1.138)$$

où l'on voit que les distances infinies correspondent à $\xi = 0$ et $\eta = 0$.

Compte tenu de l'invariance par rotation autour de $z'z$ et de l'invariance par symétrie par rapport au plan xOy , on montre que le potentiel à l'extérieur du tore s'écrit comme une série²⁰ :

20. Voir : P.M. Morse, H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", Mc Graw-Hill, New York, 1953 ; W. R. Smythe, "Static and Dynamix Electricity", MacGraw-Hill, 1950 ; N.N. Lebedev, "Special functions and their applications", Prentice-Hall Inc., N.J. (1965) p. 225.

$$V(\xi, \eta) = V_0 \sqrt{\cosh \xi - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_{n-1/2}^0(\cosh \xi)}{P_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0)} \cos n\eta \quad (1.139)$$

où les fonctions $P_{n-1/2}^0$, fonctions de Legendre de seconde espèce d'indices demi-entiers, appelées aussi *fonctions toroidales* ou encore *harmoniques toriques*, ont pour représentation intégrale²¹

$$P_{n-1/2}^0(\cosh \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{(\cosh \xi + \sinh \xi \cos \eta)^{n+1/2}} \quad (1.140)$$

Les coefficients A_n sont choisis de telle sorte que V_0 soit la valeur du potentiel à la surface et à l'intérieur du tore conducteur. Ils vérifient donc

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\eta, \quad (1.141)$$

On a ainsi

$$A_n = \epsilon_n \frac{\sqrt{2}}{\pi} Q_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0) \quad \text{où} \quad Q_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{\cos n\eta}{\sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta}} d\eta \quad (1.142)$$

est un autre type de fonctions toroidales²², et $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ pour $n \geq 1$. Rappelons deux propriétés importantes de ces harmoniques, notant $P_n = P_{n-1/2}^0$, $Q_n = Q_{n-1/2}^0$:

$$\begin{aligned} \text{leur équation différentielle :} \quad & \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \coth \xi \frac{dw}{d\xi} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) w = 0 \\ \text{leur wronskien :} \quad & Q_n \frac{dP_n}{d\xi} - P_n \frac{dQ_n}{d\xi} = \frac{1}{\sinh \xi} \end{aligned} \quad (1.143)$$

Notons ici les matrices jacobiennes de changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho, z \rightarrow \xi, \eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{c}{(\cosh \xi - \cos \eta)^2} \begin{pmatrix} 1 - \cosh \xi \cos \eta & -\sin \eta \sinh \xi \\ -\sin \eta \sinh \xi & \cosh \xi \cos \eta - 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}_{\xi, \eta \rightarrow \rho, z} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \rho} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 - \cosh \xi \cos \eta & -\sin \eta \sinh \xi \\ -\sin \eta \sinh \xi & \cosh \xi \cos \eta - 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.144)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\cosh \xi \cos \eta - 1}{c} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\sin \eta \sinh \xi}{c} \frac{\partial V}{\partial \eta} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sin \eta \sinh \xi}{c} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1 - \cosh \xi \cos \eta}{c} \frac{\partial V}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.145)$$

A la surface du tore, on a

21. Voir : M. Abramowitz, I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Pub, New-York, 9ème édition (1970) p. 336.

22. N.N. Lebedev, loc. cit., p. 188.

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi_0, \eta) = V_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\eta \right] = 0 \quad (1.146)$$

Vérifions que la composante tangentielle E_ψ du champ est nulle sur le tore. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} E_\psi &= -\frac{1}{a} \left[-\sin \psi \frac{\partial V}{\partial \rho} + \cos \psi \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) \left[-\sin \psi \frac{\cosh \xi_0 \cos \eta - 1}{c} + \cos \psi \frac{\sin \eta \sinh \xi_0}{c} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) \left[-\frac{\sin \eta (b \cos \eta - a)}{b - a \cos \eta} + \frac{\sin \eta (b \cos \eta - a)}{b - a \cos \eta} \right] = 0 \end{aligned}$$

La composante normale, quant à elle, est

$$\begin{aligned} E_N &= - \left[\cos \psi \frac{\partial V}{\partial \rho} + \sin \psi \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) \left[\cos \psi \frac{\cosh \xi_0 \cos \eta - 1}{c} + \sin \psi \frac{\sin \eta \sinh \xi_0}{c} \right] \\ &= \frac{b - a \cos \eta}{ac} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = \frac{\cosh \xi_0 - \cos \eta}{c} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) \end{aligned} \quad (1.147)$$

Comme

$$\frac{d}{d\xi} [P_{n-1/2}^0] = \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\pi} \sinh \xi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \eta d\eta}{(\cosh \xi + \sinh \xi \cos \eta)^{n+3/2}} = P_{n-1/2}^1(\cosh \xi) \quad (1.148)$$

il vient, compte tenu de (1.141),

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = V_0 \left[\frac{\sinh \xi_0}{2(\cosh \xi_0 - \cos \eta)} + \sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\eta \frac{P_{n-1/2}^1(\cosh \xi_0)}{P_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0)} \right] \quad (1.149)$$

Pour simplifier l'écriture, nous noterons dans la suite $p_n = P_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0)$, $p'_n = [P_{n-1/2}^0]'(\cosh \xi_0) = P_{n-1/2}^1(\cosh \xi_0)$, $q_n = Q_{n-1/2}^0(\cosh \xi_0)$, $q'_n = [Q_{n-1/2}^0]'(\cosh \xi_0)$. Notant que

$$d\psi = \frac{cd\eta}{b - a \cos \eta} \quad \text{et} \quad d\Sigma = \rho d\varphi a d\psi = \frac{c^3}{a(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} d\varphi d\eta$$

on en déduit la charge totale Q répartie sur la surface du tore :

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon_0 \iint_{\text{Tore}} E_N d\Sigma = 4\pi \epsilon_0 V_0 \frac{c^2}{a} \int_0^\pi d\eta \left[\frac{\sinh \xi_0}{2(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\eta \frac{p'_n}{p_n} \right] = 4\pi \epsilon_0 V_0 \frac{c^2}{a} \left[\int_0^\pi d\eta \frac{\sinh \xi_0}{2(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} + \right. \\ &\left. \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n q_n^2 \frac{p'_n}{p_n} \right] \end{aligned} \quad (1.150)$$

L'expression (1.150) peut être réarrangée comme suit. Utilisant (1.141), écrivons

$$\int_0^\pi \frac{d\eta}{\cosh \xi_0 - \cos \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\eta}{\sqrt{\cosh \xi_0 - \cos \eta}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n q_n^2$$

Dérivant cette expression par rapport à ξ_0 , on obtient

$$\int_0^\pi d\eta \frac{\sinh \xi_0}{(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n q'_n q_n$$

On peut ainsi récrire (1.150) comme

$$Q = 8 \epsilon_0 V_0 \frac{c^2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{q_n}{p_n} [q_n p'_n - p_n q'_n]$$

ce qui, compte tenu de l'expression du wronskien dans (1.143) et de $\sinh \xi_0 = c/a$, se réduit à

$$Q = 8 \epsilon_0 V_0 c \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{q_n}{p_n} \quad (1.151)$$

D'un autre côté, l'expression de la charge peut aussi être obtenue en observant qu'à grande distance r , le potentiel prend la forme du potentiel créé par une charge Q située à l'origine, soit

$$V(\xi, \eta) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.152)$$

Or, comme observé précédemment les grandes distances correspondent au domaine où ξ et η sont petits tous les deux. D'après (1.138), on a alors

$$r = c \frac{\cosh \xi + \cos \eta}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} \simeq \frac{2c}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad \text{soit} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \simeq \frac{2c}{r} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{\cosh \xi - \cos \eta} \simeq \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} \simeq \frac{c\sqrt{2}}{r}$$

Comme $P_{n-1/2}^0(1) = 1$ ($\xi = 0$), il vient

$$V(\xi, \eta) \simeq V_0 \frac{c\sqrt{2}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{p_n}, \quad \text{d'où}$$

$$Q = V_0 4\pi\epsilon_0 c \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{p_n} = 8\epsilon_0 c V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{q_n}{p_n} \quad (1.153)$$

On obtient bien le même résultat, ce qui confirme la cohérence entre les diverses formules et expressions utilisées. Notons en passant que pour les grandes valeurs de n , on a²³

$$q_n \simeq e^{-n\xi_0} \sqrt{\frac{\pi}{(2n-1) \sinh \xi_0}}, \quad p_n \simeq e^{n\xi_0} \sqrt{\frac{1}{(2n-1) \pi \sinh \xi_0}}, \quad \frac{q_n}{p_n} \simeq \pi e^{-2n\xi_0} \quad (1.154)$$

de sorte que la série dans (1.153) est bien convergente.

Rappelons ici les éléments de symétrie du conducteur torique. L'invariance par rotation autour de $z'z$ fait que l'angle azimutal φ n'est pas une variable sensible. Tout plan contenant $z'z$ est un plan de symétrie positive et le plan xOy est aussi un plan de symétrie positive. Il en résulte que le potentiel doit être une fonction paire vis-à-vis à la fois de ρ et de z , et donc aussi vis-à-vis de ξ et de η . On vérifie que l'expression (1.139) est comme il se doit conforme à ces symétries. Les composantes cylindriques du champ vérifient donc

23. N.N. Lebedev, loc. cit, p 191.

$$\begin{aligned}
 E_\rho(-\rho, z) &= -E_\rho(\rho, z), & E_\rho(\rho, -z) &= E_\rho(\rho, z) & \text{ou} \\
 E_\rho(-\xi, \eta) &= -E_\rho(\xi, \eta), & E_\rho(\xi, -\eta) &= E_\rho(\xi, \eta) & \text{et} \\
 E_z(-\rho, z) &= E_z(\rho, z), & E_z(\rho, -z) &= -E_z(\rho, z) & \text{ou} \\
 E_z(-\xi, \eta) &= E_z(\xi, \eta), & E_z(\xi, -\eta) &= -E_z(\xi, \eta)
 \end{aligned}
 \tag{1.155}$$

On en déduit

$$E_\rho(\rho, 0) = 0, \quad E_\rho(0, z) = 0, \quad \vec{E}(0, 0) = \vec{0} \tag{1.156}$$

Pour étudier la topographie du potentiel, il suffit, grâce aux symétries, de se placer dans le demi-plan $\varphi = 0$ et de ne considérer que la région $z \geq 0$. La charge du conducteur étant positive, la composante E_z du champ est positive ou nulle dans cette région. Dans cette même région, la composante E_ρ a pour propriétés :

$$E_\rho \geq 0 \text{ pour } \rho \geq b, \quad E_\rho \leq 0, \text{ pour } 0 < \rho \leq b, \quad E_\rho = 0, \text{ pour } \rho = b \tag{1.157}$$

Sur une surface équipotentielle, les variables z et ρ sont liées et l'on a

$$dV = -E_\rho d\rho - E_z dz = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{E_z}{E_\rho} \tag{1.158}$$

On a donc

$$\frac{d\rho}{dz} \leq 0 \text{ pour } \rho \geq b, \quad \frac{d\rho}{dz} \geq 0 \text{ pour } 0 < \rho \leq b, \quad \frac{d\rho}{dz} = 0 \text{ pour } \rho = b \tag{1.159}$$

Certaines équipotentielles entourent ainsi le conducteur en étant homotopes à celui-ci. Leurs intersections avec le quart de plan $x \geq 0, z \geq 0$ coupent l'axe Ox perpendiculairement²⁴, chacune en deux points. L'un, situé à une abscisse $0 < x_1 < b - a$ où $x(z)$ présente un minimum, l'autre situé à une abscisse $x_2 > b + a$ où $x(z)$ présente un maximum.

L'origine présente la particularité que les deux composantes du champ y sont nulles. Le potentiel y a la valeur

$$V(O) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n \frac{q_n}{p_n} \tag{1.160}$$

qui doit être comprise entre 0 et V_0 . En effet, sur l'axe Ox , une ligne de champ part du conducteur de potentiel positif pour atteindre l'origine, tandis qu'une autre branche, l'axe Oz , part de l'origine pour atteindre la région des distances infinies où le potentiel est nul.

A l'origine, la pente $\frac{d\rho}{dz}$ est singulière. En effet, elle est nulle pour $z = 0$ et $\rho \neq 0$, et infinie pour $z \neq 0$ et $\rho = 0$. Sur l'axe Oz , pour $z > 0$, on a

$$\frac{dz}{d\rho} > 0 \text{ pour } 0 < \rho \leq b, \quad \frac{dz}{d\rho} \geq 0 \text{ pour } \rho \geq b, \quad \frac{dz}{d\rho} = 0 \text{ pour } \rho = 0 \text{ ou } \rho = b \tag{1.161}$$

De ces observations on déduit que d'autres équipotentielles entourent également le tore, mais d'une autre manière. Chacune n'intercepte plus l'axe Ox qu'en un point d'abscisse x_2 dans la région $x \geq b + a$.

24. Cet axe porte des lignes de champ.

Leurs profils respectifs $z(x)$ présentent un minimum en $x = 0$ et leurs pentes deviennent $-\infty$ pour un $x = x_2$. Ces surfaces ne sont plus homotopes au tore, mais plutôt à une sphère.

La topographie du potentiel est assez semblable à celle correspondant à un cercle uniformément chargé. Pour cette distribution, la dérivée de $z(\rho)$ au voisinage de l'axe Oz est

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\rho}{2z} \frac{a^2 - 2z^2}{a^2 + z^2} \quad (1.162)$$

où a est le rayon du cercle. Pour $z < a/\sqrt{2}$ cette pente est positive et s'annule pour $\rho = 0$: le profil présente un minimum sur l'axe Oz . Pour $z = a/\sqrt{2}$, le profil est plat dans un plus large domaine au voisinage de l'axe car pour cette valeur de z , le potentiel n'est sensible aux variations de ρ qu'au 4ème ordre en ρ/a . Pour $z > a/\sqrt{2}$, le profil a un maximum sur l'axe Oz . La carte du champ et du potentiel dans un plan contenant $z'z$ est schématiquement représentée à la figure (1.7).

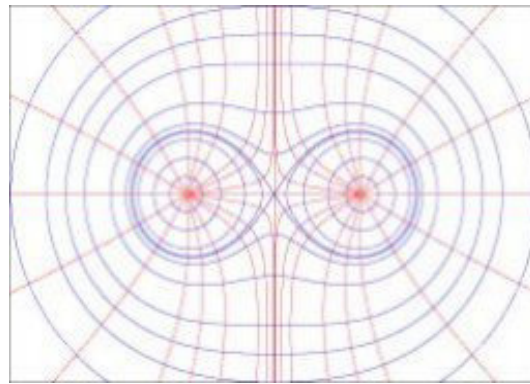


FIGURE 1.7 – Cartographie schématique du champ et du potentiel d'un cercle uniformément chargé

===== à suivre =====