$\boxed{\text{Volume de l'hyperboule}}$

Christian Carimalo

1 Préliminaires : coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$

Dans l'espace (affine) $\mathbb{R}^n$, les coordonnées cartésiennes $x_1, \cdots, x_n$ d'un point M relativement à un repère orthonormé $\{O, \overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ d'origine O peuvent être exprimées comme suit au moyen de la distance $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et de $n-1$ angles $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$:

$$
\begin{gathered}
x_1 = r\cos\theta_1, \quad \text{avec} \;\; 0 \le \theta_1 \le \pi \\
x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \quad \text{avec} \;\; 0 \le \theta_2 \le \pi \\
x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \quad \text{avec} \;\; 0 \le \theta_3 \le \pi \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \quad \text{avec} \;\; 0 \le \theta_{n-1} \le \boldsymbol{2}\pi \\
x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}
\end{gathered}
$$

Il s'agit là d'une simple généralisation des coordonnées sphériques dans l'espace à trois dimensions. A l'aide de cette paramétrisation, cherchons à exprimer l'élément de volume $d\Gamma = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de $\mathbb{R}^n$. Nous procèderons pas à pas.

On a $x_n = x_{n-1}\tan\theta_{n-1}$ et donc, pour x_{n-1} fixé, $dx_n = x_{n-1}\dfrac{d\theta_{n-1}}{\cos^2\theta_{n-1}}$, d'où

$$d\Gamma = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge d\theta_{n-1}\frac{x_{n-1}}{\cos^2\theta_{n-1}}$$

Puis, comme $x_{n-1} = x_{n-2}\cos\theta_{n-1}\tan\theta_{n-2}$, pour x_{n-2} et θ_{n-1} fixés, on a

$$dx_{n-1} = x_{n-2}\cos\theta_{n-1}\frac{d\theta_{n-2}}{\cos^2\theta_{n-2}}, \quad \text{d'où}$$

$$d\Gamma = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-2} \wedge d\theta_{n-2} \wedge d\theta_{n-1}\frac{x_{n-2}\,x_{n-1}}{\cos^2\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}}$$

On passe ensuite à x_{n-2} : comme $x_{n-2} = x_{n-3}\cos\theta_{n-2}\tan\theta_{n-3}$, à x_{n-3} et θ_{n-2} fixés, on a

$$dx_{n-2} = x_{n-3}\cos\theta_{n-2}\frac{d\theta_{n-3}}{\cos^2\theta_{n-3}}, \quad \text{et}$$

$$d\Gamma = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-3} \wedge d\theta_{n-3} \wedge d\theta_{n-2} \wedge d\theta_{n-1}\frac{x_{n-3}\,x_{n-2}\,x_{n-1}}{\cos^2\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}}$$

On poursuit ainsi progressivement jusqu'à trouver

$$d\Gamma = dx_1 \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1}\frac{x_1\,x_2\cdots x_{n-1}}{\cos^2\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1}}$$

A cette dernière étape, on écrit qu'à θ_1 fixé on a $dx_1 = \cos\theta_1 dr$. Remplaçant les x_i par leurs expressions en fonction de r et des angles, on obtient finalement

$$d\Gamma = r^{n-1} dr \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (\sin\theta_k)^{n-1-k}$$

ce que nous récrirons sous la forme simplifiée

$$d\Gamma = r^{n-1} dr d\Omega_n, \quad \text{avec} \quad d\Omega_n = \prod_{k=1}^{n-1} (\sin\theta_k)^{n-1-k} d\theta_k$$

La grandeur $d\Omega_n$, qui ne dépend que des angles, est l'analogue dans $\mathbb{R}^n$ de l'angle solide dans $\mathbb{R}^3$.

2 Angle solide total

L'angle solide total Ω_n, obtenu en intégrant sur tous les angles dans leur domaine de variation, peut s'exprimer au moyen de la fonction eulérienne $B(p, q)$, définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt$$

et liée à la fonction Γ par la formule bien connue

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

En faisant le changement de variable $t = \cos^2\theta$ et en prenant $p = 1/2$, on obtient

$$B(\frac{1}{2}, q) = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2q-1} \, d\theta$$

intégrale qui apparaît effectivement dans l'expression

$$\Omega_n = 2\pi \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^{\pi} (\sin\theta_k)^{n-1-k} d\theta_k$$

On obtient

$$\Omega_n = 2\pi \left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^{n-2} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{\Gamma(\dfrac{n-k}{2})}{\Gamma(\dfrac{n-k+1}{2})}$$

soit, puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$\Omega_n = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Comme $\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2$, on vérifie que $\Omega_3 = 4\pi$.

3 Volume d'une hyperboule de rayon R

Ce volume est simplement donné par $V_n = \omega_n \displaystyle\int_0^R r^{n-1} dr = \frac{R^n}{n}\Omega_n$. En tenant compte de la relation $\dfrac{n}{2}\Gamma(\dfrac{n}{2}) = \Gamma(\dfrac{n}{2}+1)$, on aboutit à

$$V_n = \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

4 Calcul par récurrence

Le volume V_n de l'hyperboule est donnée par l'intégrale multiple

$$V_n = \int dx_1 \cdots dx_n$$

étendue au domaine défini par $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$. Un premier changement de variables $x_k = R u_k$ permet de ramener le calcul à celui d'une hyperboule de rayon 1 :

$$V_n/R^n = v_n = \int du_1 \cdots du_n, \quad \text{avec} \quad u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq 1$$

Pour calculer v_n, on commence tout d'abord à intégrer sur $u_1, \cdots, u_{n-2}$ dans le domaine défini par $u_1^2 + \cdots + u_{n-2}^2 \leq 1 - u_{n-1}^2 - u_n^2$. Or, cette intégration donne le volume de l'hyperboule de rayon $\sqrt{1 - u_{n-1}^2 - u_n^2}$ en dimension $n-2$, égal à $v_{n-2}\left(1 - u_{n-1}^2 - u_n^2\right)^{\frac{n-2}{2}}$. Il reste ensuite à intégrer sur u_{n-1} et u_n dans le domaine $u_{n-1}^2 + u_n^2 \leq 1$. Ainsi

$$v_n = v_{n-2} \iint \left(1 - u_{n-1}^2 - u_n^2\right)^{\frac{n-2}{2}} du_{n-1} du_n$$

Pour calculer l'intégrale double, on passe en coordonnées polaires : $u_n = r\cos\theta$, $u_{n-1} = r\sin\theta$ et l'on obtient

$$\iint \left(1 - u_{n-1}^2 - u_n^2\right)^{\frac{n-2}{2}} du_{n-1} du_n = 2\pi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr = \pi \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-2}{2}} dt$$
$$= \pi \int_0^1 z^{\frac{n}{2}-1} dz = \frac{2\pi}{n}, \quad \text{et donc} \quad v_n = v_{n-2} \frac{2\pi}{n}$$

Dans le cas de la droite, la "boule" est le segment $[-1, +1]$, dont la longueur est 2, donc $v_1 = 2$. Pour $n = 2$, la "boule" est le disque de rayon 1 dont la surface est π. On en conclut, suivant la parité de n :

$$v_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}, \quad v_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}\,\pi^p}{(2p+1)!}$$

5 Calcul astucieux

On considère l'intégrale multiple

$$I_n = \int \exp\left[-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right] dx_1 \cdots dx_n$$

étendue à tout l'espace $\mathbb{R}^n$: $-\infty < x_k < +\infty$. On calcule tout d'abord l'intégrale double

$$I_2 = I_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \pi, \quad \text{ce qui donne} \quad I_1 = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad I_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

D'un autre côté,

$$I_n = \Omega_n \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\Omega_n \int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{2}\Omega_n \Gamma(\frac{n}{2}), \quad \text{d'où}$$

$$\Omega_n = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$