

EXERCICES D'ELECTROMAGNÉTISME

Année 3000-3001

Christian Carimalo

Notions élémentaires relatives aux champs

I. Pour chacun des systèmes de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , cylindriques (ρ, φ, z) , sphériques (r, θ, φ) :

1°) Trouver l'expression correspondante du vecteur déplacement élémentaire \overrightarrow{dOM} .

2°) En déduire le volume du "pavé" élémentaire correspondant et des éléments de surface qui le délimitent.

3°) Exprimer la différentielle d'un champ scalaire et en déduire les composantes de son gradient.

II. Calculer le flux d'un champ de vecteurs \overrightarrow{A} à travers un cube élémentaire entourant le point $M(x, y, z)$. En déduire l'expression de $\operatorname{div} \overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes.

III. Soient $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ les vecteurs unitaires définissant une base locale en coordonnées sphériques.

a) Expliquer pourquoi les divergences de $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont a priori non nulles alors que celle de $\overrightarrow{e_\varphi}$ l'est certainement.

Vérifier ces affirmations en calculant directement les divergences de ces vecteurs à l'aide d'un formulaire.

IV. Soit le champ de vecteurs exprimé en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\sin \theta}{r^2} \overrightarrow{e_\varphi}$$

1°) Calculer sa circulation le long du cercle C de rayon R situé dans un plan parallèle au plan xOy et dont le centre H est sur l'axe $z'z$ à la cote $h > 0$.

2°) Soit le champ de vecteurs exprimé en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \overrightarrow{e_r} + \sin \theta \overrightarrow{e_\theta})$$

Calculer le flux de ce champ à travers le disque ayant le cercle C pour frontière.

3°) Que pourrait-on conclure de la comparaison des résultats obtenus au 1°) et au 2°) ?

4°) Calculer $\operatorname{rot} \overrightarrow{A}$.

V. On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\rho^2}{b} \overrightarrow{e_\varphi}$$

exprimé en coordonnées cylindriques ρ, φ, z .

1°) Calculer sa circulation le long du cercle C de centre O et de rayon R placé dans le plan xOy .

2°) Quelle est l'expression de son rotationnel ?

3°) Calculer les flux de $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ à travers la surface du disque limité par C et à travers la demi-sphère s'appuyant sur C . Interpréter les résultats obtenus.

VI. Pour positionner un point M de l'espace relativement à un repère cartésien d'origine O , on utilise ses coordonnées sphériques r, θ et φ . On pose $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ où $r = OM$. On considère

le champ scalaire $f(M) = \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}{r^2}$;

le champ de vecteurs $\vec{A}(M) = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z}{r^2}$;

le cercle C d'équations $\theta = \theta_0, r = r_0$, orienté dans le sens des φ croissants.

Sur ce contour C s'appuient : une calotte sphérique S de demi-angle au sommet θ_0 appartenant à la sphère de centre O et de rayon r_0 ; un disque S' .

1°) Calculer la circulation de \vec{A} le long de C .

2°) Déterminer $\vec{B} = -\text{grad } f$.

3°) Calculer $\text{div } \vec{B}$ pour $r \neq 0$.

4°) Montrer que les flux de \vec{B} à travers S et S' sont égaux.

5°) Que pourrait-on conclure en comparant les résultats obtenus en 1°) et en 4°) ? Calculer $\vec{\text{rot}} \vec{A}$.

VII. 1°) Soit \vec{c} un vecteur constant quelconque. Démontrer la relation

$$\vec{c} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} (\vec{c} \wedge \vec{OM})$$

2°) On considère un contour fermé quelconque C et une surface Σ quelconque s'appuyant sur C . En utilisant le résultat du 1°) démontrer la relation

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{2} \oint_C \vec{OM} \wedge d\vec{\ell}$$

VIII. (*) \vec{n} étant un vecteur unitaire quelconque, on considère la fonction

$$U(M) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{n}}{r^3}$$

le point M étant repéré au moyen de ses coordonnées sphériques $r = OM, \theta$ et φ .

1°) Déterminer $\vec{G} = \text{grad } U$.

2°) Montrer que $\operatorname{div} \vec{G} = 0$.

3°) Calculer $\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{OM} \wedge \vec{n}}{r^3} \right)$.

4°) Soit Σ une surface s'appuyant sur un contour fermé donné C et orientée suivant la règle du tire-bouchon à partir du sens de parcours de C . L'angle solide sous lequel depuis un point P on voit Σ est

$$\Omega(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} d\Sigma(M)$$

M étant un point courant sur Σ , \vec{n} la normale orientée de Σ en M , $r = PM$ et $\vec{u} = \vec{PM} / r$.

Démontrer que partout où la fonction $\Omega(P)$ est bien définie on a

$$\vec{\operatorname{grad}} \Omega(P) = \oint_C \frac{d\vec{\ell}(M) \wedge \vec{MP}}{MP^3}$$

IX. (*) Montrer que l'angle solide sous lequel depuis un point $M(x, y, z)$ on voit le demi-plan $y > 0$, $-\infty < z < +\infty$ orienté dans le sens opposé à Ox a pour expression

$$\Omega(M) = \frac{x}{|x|} \left(\pi + 2 \tan^{-1} \frac{y}{|x|} \right)$$

On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}, \quad \int_b^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} b$$

En déduire $\vec{\operatorname{grad}} \Omega$. Commenter.

X. (*) Calculer l'angle solide sous lequel, depuis l'origine O d'un repère cartésien $Oxyz$, on voit le carré défini par $z = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$:

1°) par intégration directe de l'angle solide élémentaire $d\Omega$ exprimé avec les angles θ et φ des coordonnées sphériques ; on donne

$$\int_0^{\Phi} \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1 + \cos^2 u}} = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \Phi}{\sqrt{2}} \right)$$

2°) en utilisant un argument géométrique simple.

XI. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2} \left(x^2 y^2 \vec{e}_x + y^2 z^2 \vec{e}_y + z^2 x^2 \vec{e}_z \right)$$

exprimé à l'aide des coordonnées cartésiennes x , y et z du point M relativement au repère $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

1°) Calculer $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et $\text{div } \vec{A}$.

2°) Calculer $\vec{V} = \text{rot } \vec{B}$ et $\vec{W} = \text{grad div } \vec{A}$.

3°) a) Calculer la circulation de \vec{A} le long du circuit $ABCD$ composé des arcs de courbe suivants :

$$AB : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \quad BC : x = 0, \quad y = 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$CD : x^2 + y^2 = 1, \quad \varphi \text{ variant de } \pi/2 \text{ à } 0; \quad DA : x = 1, \quad y = 0, \quad z \text{ variant de } 1 \text{ à } 0$$

b) Vérifier les résultats obtenus en appliquant la formule de Stokes.

4°) Calculer les flux sortants de \vec{A} et de \vec{W} à travers la surface fermée constituée par la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 1$ et les deux disques définis respectivement par $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$.

b) Vérifier les résultats obtenus en utilisant la formule de Green-Ostrogradski.

XII. Soit le champ de vecteurs exprimé en coordonnées sphériques

$$\vec{A}(M) = \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi$$

a) Calculer la circulation de ce champ le long du cercle C de rayon R situé dans un plan parallèle au plan xOy , dont le centre H est sur l'axe Oz à la cote $h > 0$ et orienté dans le sens des φ croissants.

b) Soit le champ de vecteurs

$$\vec{B}(M) = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Calculer son flux à travers le disque s'appuyant sur C et orienté conformément à la règle du tire-bouchon relativement à l'orientation de C .

c) Que peut-on conclure des résultats de a) et b)? Calculer $\text{rot } \vec{A}$.

- Exercices à part -

XIII. Soit le champ de vecteur, exprimé en coordonnées cylindriques ρ, φ et z :

$$\vec{A}(M) = k \rho \vec{e}_\varphi$$

k étant une constante.

1°) Trouver les lignes de champ de \vec{A} .

2°) Ce champ peut-il être un champ électrostatique ?

3°) Calculer $\text{rot } \vec{A}$.

4°) Calculer la circulation de \vec{A} le long du cercle C de centre O et de rayon R situé dans le plan xOy .

5°) Calculer le flux de $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ à travers le disque délimité par C et à travers la demi-sphère s'appuyant sur C . Interpréter les résultats obtenus.

6°) \vec{A} peut-il être un champ magnétique? Que représenterait alors son rotationnel?

XIV. On considère la forme différentielle $D = \vec{A} \cdot d\vec{M}$ avec

$$\vec{A}(M) = 2xz \vec{e}_x + 2yz \vec{e}_y + \phi(x, y, z) \vec{e}_z$$

1°) Quelle doit-être la forme générale de $\phi(x, y, z)$ pour que D soit la différentielle d'une fonction F ? Trouver alors une expression de F .

2°) Calculer le Laplacien de F . Trouver la condition sur $\phi(x, y, z)$ pour qu'il existe un champ de vecteurs \vec{V} tel que

$$\vec{\text{grad}} F = \vec{\text{rot}} \vec{V}$$

On choisira ϕ de telle sorte que $\phi(0, 0, 0) = 0$ et l'on pose $\vec{A} = \vec{\text{grad}} F$.

3°) Calculer le flux sortant de \vec{A} à travers la surface fermée constituée par la surface cylindrique $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, et les deux disques $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ et $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Pouvait-on prévoir le résultat?

XV. Un point M de l'espace étant repéré par ses coordonnées cartésiennes x , y et z , soit le champ scalaire

$$F(x, y, z) = a \frac{u}{a^2 + u^2} \quad \text{avec} \quad u = x + y + z$$

1°) Etudier les variations de $F(x, y, z) = H(u)$ en fonction de u .

2°) Déterminer les surfaces équipotentiels de F .

3°) a) Déterminer les composantes cartésiennes de $\vec{G} = \vec{\text{grad}} F$.

b) Trouver les lignes de champ de \vec{G} .

c) Pour quels points a-t-on $\vec{G} = \vec{0}$? Que peut-on en conclure pour F ? Comparer avec l'étude du 1°).

XVI. 1°) Trouver la condition sur le paramètre a pour que les courbes équipotentiels de

$$F(x, y) = \frac{x^a}{y}$$

coïncident avec les lignes de champ du gradient de

$$G(x, y) = x^2 + 3y^2$$

2°) Cette condition étant réalisée, caractériser les réseaux E et E' des courbes équipotentiels de F et G , respectivement. Que peut-on dire de E et E' ?

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes correspondant à $F = 4$ et $G = 16$, respectivement (poser $u = x^2/4$).

XVII.

- Partie A -

Dans le plan xOy , on considère le champ de vecteurs

$$\vec{A} = A_x(x, y) \vec{e}_x + A_y(x, y) \vec{e}_y$$

On note $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$ le vecteur unitaire normal au plan xOy .

1°) Donner, en fonction des dérivées partielles de A_x et de A_y , les expressions de $\text{div } \vec{A}$ et de $\text{rot } \vec{A}$.

2°) Soit le vecteur $\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \vec{A}$. Calculer $\text{div } \vec{B}$ et $\text{rot } \vec{B}$.

3°) a) Exprimer les circulations élémentaires respectives D_A et D_B de \vec{A} et \vec{B} le long de $dM = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$.

b) Quelles conditions doit satisfaire \vec{A} pour que D_A et D_B soient toutes deux des formes différentielles totales exactes ?

4°) Lorsque le point d'application M se déplace sur un arc de courbe (C) de longueur $d\ell$, exprimer D_B en fonction de \vec{A} , $d\ell$ et du vecteur \vec{n} normal à la courbe en M . Que représente D_B pour le champ \vec{A} ?

- Partie B -

On donne $A_x(x, y) = 3x$, $A_y(x, y) = 2y$.

5°) a) Trouver, en coordonnées cartésiennes, les équations des lignes de champ respectives de \vec{A} et de \vec{B} .

b) quelle est l'orientation des lignes de champ de \vec{B} vis-à-vis de celles de \vec{A} ?

c) Tracer qualitativement quelques lignes de champ de \vec{A} et de \vec{B} en précisant l'orientation des champs sur ces lignes.

6°) a) Calculer la circulation de \vec{B} le long de la ligne de champ passant par le point $M_1(1, 1)$, orientée dans le sens trigonométrique.

Indication : exprimer y en fonction de x sur cette ligne de champ et utiliser le résultat

$$\int_{-\beta}^{+\beta} \frac{1 + \alpha x^2}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} dx = \left(1 + \frac{\alpha \beta^2}{2} \right)$$

b) Vérifier le résultat obtenu en utilisant le théorème de Stokes et les résultats de la question 2°).

- Partie C -

On donne $A_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $A_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

7°) a) Exprimer \vec{A} en coordonnées polaires ρ, φ .

b) Démontrer que \vec{A} dérive d'un potentiel $U(M)$ que l'on déterminera, à une constante additive près (utiliser les coordonnées polaires).

c) Trouver les lignes équipotentielles de U et les lignes de champ de \vec{A} .

8°) a) Calculer $\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \vec{A}$ et l'exprimer en coordonnées polaires.

b) Que sont les lignes de champ de \vec{B} ?

c) Compte-tenu du résultat de 8°) b), \vec{B} peut-il ou non être le gradient d'une fonction ?

d) Calculer $\text{rot } \vec{B}$. Que conclure ici ?

9°) Calculer le flux sortant de \vec{A} à travers le cercle C de centre O et de rayon R ; il s'agit ici de l'intégrale

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\ell$$

\vec{n} étant la normale locale au cercle, orientée dans le sens sortant. Que se passe-t-il si $R \rightarrow 0$? Comparer avec 8°) c) et d) et conclure.

10°) Calculer le flux sortant de \vec{A} à travers le circuit fermé constitué par :

- le quart de cercle de centre O et de rayon R_1 d'origine $(R_1, 0)$ et d'extrémité $(0, R_1)$;
- le segment de droite sur Oy d'origine $(0, R_1)$ et d'extrémité $(0, R_2)$ avec $0 < R_2 < R_1$;
- le quart de cercle de centre O et de rayon R_2 d'origine $(0, R_2)$ et d'extrémité $(R_2, 0)$;
- le segment de droite sur Ox d'origine $(R_2, 0)$ et d'extrémité $(R_1, 0)$.

11°) Dédire de tous ces résultats que, à condition d'exclure de l'ensemble des circuits fermés dans le plan xOy ceux qui entourent O , le champ \vec{B} peut être considéré comme le gradient d'une fonction $V(M)$ que l'on déterminera en coordonnées polaires.

12°) Connaissant $V(M)$, réinterpréter les résultats des questions précédentes et montrer que $V(M)$ ne peut être défini de façon univoque qu'à la condition d'exclure les chemins fermés entourant O .

Symétries du champ électrostatique

I. Relativement à un repère cartésien $R(O, x, y, z)$, une distribution de charges est ainsi constituée :

- une charge ponctuelle $q > 0$ située au point $M_1(a, 0, a)$ ($a > 0$) ;
- une charge ponctuelle $-q$ située au point $M_2(a, 0, -a)$;
- une charge ponctuelle $-q$ située au point $M_3(-a, 0, -a)$;
- une charge ponctuelle q située au point $M_4(-a, 0, a)$.

1°) En tirant profit des symétries de cette distribution, préciser la direction du champ électrostatique qui lui est dû :

- a) en tout point du plan xOy ;
- b) en tout point du plan xOz ;
- c) en tout point de l'axe $z'z$.

2°) On veut obtenir une expression approchée du champ au voisinage du point O , en un point $M(x, z)$ du plan xOz ($|x|, |z| \ll a$). Pour cela, on effectue des développements de ses composantes E_z et E_x , limités au troisième ordre suivant les coordonnées x et z :

$$E_z(x, z) = a_1 + b_1z + b_2x + c_1z^2 + c_2xz + c_3x^2 + d_1z^3 + d_2z^2x + d_3zx^2 + d_4x^3$$

$$E_x(x, z) = a'_1 + b'_1z + b'_2x + c'_1z^2 + c'_2xz + c'_3x^2 + d'_1z^3 + d'_2z^2x + d'_3zx^2 + d'_4x^3$$

En étudiant les symétries du champ, montrer que ces développements doivent en fait se réduire aux suivants :

$$E_z(x, z) = a_1 + c_1z^2 + c_3x^2 \quad , \quad E_x(x, z) = c'_2xz$$

3°) Calculer a_1 , c_1 et c_3 .

Calculs directs de champs électrostatiques créés par des distributions continues de charges

I. Distribution linéique

Une spire d'axe Oz , de centre O et de rayon a porte une répartition linéique uniforme de charges de densité $\lambda > 0$.

- 1°) Préciser les éléments de symétrie de ce système de charges.
- 2°) Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point $M(z)$ de l'axe $z'z$.
- 3°) Donner une expression approchée du champ pour un point $M(z)$ de l'axe $z'z$ tel que $|z| \gg a$. Commenter.

II. Deux spires circulaires C_1 et C_2 de même rayon R et de même axe $z'z$ portent chacune une distribution linéique de charges de densité constante λ pour C_1 , $-\lambda$ pour C_2 . Le centre O_1 de C_1 est à la cote $a > 0$, le centre O_2 de C_2 est à la cote $-a$ et O est le milieu de O_1O_2 . Soit $M(x, z)$ un point du plan xOz .

- 1°) Que peut-on dire de l'orientation du champ électrostatique en ce point ?
- 2°) On veut obtenir une expression approchée du champ au voisinage du point O . On utilise pour cela les développements limités des composantes E_x et E_z du champ :

$$E_z(x, z) = a_1 + b_1z + b_2x + c_1z^2 + c_2xz + c_3x^2 + d_1z^3 + d_2z^2x + d_3zx^2 + d_4x^3$$

$$E_x(x, z) = a'_1 + b'_1z + b'_2x + c'_1z^2 + c'_2xz + c'_3x^2 + d'_1z^3 + d'_2z^2x + d'_3zx^2 + d'_4x^3$$

En étudiant les symétries du champ, montrer que ces développements doivent se réduire aux suivants :

$$E_z(x, z) = a_1 + c_1z^2 + c_3x^2, \quad E_x(x, z) = c'_2xz$$

- 3°) En utilisant le fait que le champ électrostatique est irrotationnel, trouver une relation entre c'_2 et c_3 .
- 4°) Calculer a_1 et c_1 .

III. Distributions surfaciques

Disque - Un disque d'axe Oz , de centre O , de rayon a et d'épaisseur négligeable est uniformément chargé avec la densité superficielle $\sigma > 0$.

- 1°) Préciser les éléments de symétrie de ce système de charges.

2°) Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point $M(z)$ de l'axe $z'z$ tel que $z \neq 0$. Calculer la discontinuité du champ en $z = 0$.

3°) Donner une expression approchée du champ pour un point $M(z)$ de l'axe $z'z$ tel que $|z| \gg a$. Commenter.

4°) Donner l'expression limite du champ en tout point de l'espace lorsqu'on fait tendre le rayon du disque vers l'infini.

Sphère - Une sphère de centre O et de rayon R est uniformément chargée en surface avec la densité surfacique σ .

1°) Préciser les éléments de symétrie de ce système de charges.

2°) Calculer le champ créé par cette sphère en tout point M de l'espace. Commenter le résultat.

Indications : choisir l'axe Oz suivant \vec{OM} ; dans l'expression intégrale du champ, utiliser des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centrées sur O ; poser ensuite $u = \cos \theta$ et intégrer par parties.

IV. La densité $\sigma(x, y, z)$ d'une distribution superficielle de charges est telle que

$$\begin{aligned}\sigma(x, y, z) &= 0 & \text{si } z \neq 0 \\ \sigma(x, y, 0) &= 0 & \text{si } x^2 + y^2 < R^2 \\ \sigma(x, y, 0) &= \sigma_0 & \text{si } x^2 + y^2 > R^2\end{aligned}$$

Déterminer le champ électrostatique créée par cette distribution en tout point de l'axe $z'z$.

Symétries et utilisation du théorème de Gauss pour des calculs de champs électrostatiques

I. Distribution linéique

Une ligne infinie coïncidant avec l'axe z'/z est uniformément chargée avec la densité linéique $\lambda > 0$.

1°) Préciser les éléments de symétrie de ce système de charges et indiquer quel système de coordonnées est le plus approprié pour l'étudier.

2°) Quelle est la direction du champ en tout point M de l'espace ? Quelles sont les variables sensibles dont dépend le module du champ ?

3°) Montrer que l'on peut utiliser le théorème de Gauss sous sa forme intégrale pour calculer le champ et justifier le choix de la surface de Gauss utilisée pour ce calcul.

4°) Déterminer alors le champ en tout point de l'espace.

II. Distributions surfaciques

1°) Retrouver l'expression en tout point du champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé, en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme intégrale. On suivra le même canevas que celui de l'exercice précédent.

2°) Retrouver l'expression en tout point du champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée, en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

III. Distribution volumique à symétrie sphérique

Trouver l'expression en tout point du champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée en volume, en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

IV. Distribution volumique à symétrie cylindrique

Un cylindre infiniment long, d'axe z'/z et de rayon R , contient une distribution volumique de charges de densité

$$\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$$

où r est la distance à l'axe du cylindre et $a > 0$.

Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en tout point M de l'espace. On précisera clairement toutes les étapes du calcul.

V. Distribution volumique à symétrie plane

Relativement à un repère cartésien $R(O, x, y, z)$, une distribution volumique de charges a pour densité

$$\rho(x) = A \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \quad \text{si } |x| \leq \frac{a}{2}, \quad \rho(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq \frac{a}{2}$$

La distribution est illimitée suivant les axes $y'y$ et $z'z$.

Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en tout point M de l'espace, en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

VI. Divergence du champ électrostatique

Une distribution de charges remplit une boule de centre O et de rayon R . En un point M situé à la distance $r \leq R$ du centre O , cette distribution produit le champ électrostatique (en coordonnées sphériques)

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \vec{e}_r$$

1°) Etudier les symétries de ce système de charges.

2°) On désigne par $\rho(r)$ la densité volumique de charges. En appliquant le théorème de Gauss à l'ensemble des charges contenues dans le volume élémentaire délimité par les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$ respectivement, déterminer l'expression de $\rho(r)$.

3°) Que deviennent le champ $\vec{E}(M)$ et son flux à travers une sphère de centre O et de rayon r , lorsque $r \rightarrow 0$?

4°) En conclure que la distribution est constituée d'une distribution volumique de charge entourant une charge ponctuelle au point O . Quelle est la charge totale de la distribution?

5°) Quel est le champ en dehors de la boule ($r \geq R$)?

VII. Retrouver les expressions des champs créés en tout point par les distributions étudiées aux exercices III, IV et V, en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme locale.

VIII.¹ Soit le champ

$$\vec{E}(M) = A \left(\frac{r^3}{R^3} \vec{e}_r + \frac{\cos \theta}{r} \vec{e}_\theta + \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \right) \quad \text{pour } r \leq R$$

le point M étant repéré par ses coordonnées sphériques r , θ et φ .

1°) Pour $r \leq R$, montrer que ce champ pourrait être un champ électrostatique. Quelle serait alors l'unité appropriée pour exprimer la constante A ?

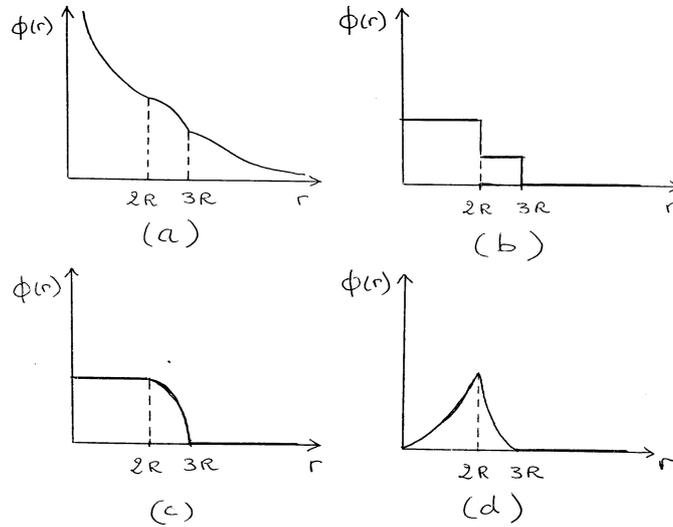
2°) Déterminer la densité volumique de charges $\rho(M)$, avec $r \leq R$, qui serait la source d'un tel champ?

3°) Calculer la charge Q contenue dans la sphère de centre O et de rayon R .

IX. Une charge ponctuelle $q > 0$ se trouve en O . S_1 et S_2 sont deux sphères de centre O et de rayons respectifs $2R$ et $3R$. Entre S_1 et S_2 se trouve une distribution volumique de

¹Exercice quelque peu à part.

charges de densité constante ρ . Ci-dessous, on a représenté les variations du flux $\Phi(r)$ du champ électrostatique à travers une sphère de centre O et de rayon r , en fonction de r . Parmi les courbes proposées, quelle est la plus vraisemblable? Quel est le signe de ρ ?



X. Deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ sont respectivement placées aux points $B(0, 0, -a)$ et $A(0, 0, a)$.

1°) Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cet ensemble en un point M du plan xOy .

2°) En utilisant cette expression du champ, calculer directement son flux à travers le plan xOy orienté suivant \vec{e}_z . Pouvait-on prévoir le résultat?

3°) Utiliser la théorème de Gauss pour calculer le flux du champ créé par les deux charges à travers la sphère de centre O et de rayon $R > a$? Quelle propriété le résultat permet-il d'attribuer au champ sur la sphère?

Calculs de potentiels électrostatiques

I. Déterminer en tout point de l'espace les potentiels dûs :

- a) à une boule uniformément chargée en volume ;
- b) à une sphère uniformément chargée en surface ;
- c) à un fil rectiligne infini portant une densité linéique constante ;
- d) à un plan infini uniformément chargé en surface.

Pour chacun de ces cas, on choisira de façon judicieuse l'origine des potentiels et l'on précisera la nature des surfaces équipotentielles.

II. Soit $V(M)$ le potentiel électrostatique dû à une distribution de charges donnée \mathcal{D} . En dehors des charges, le potentiel satisfait l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

1°) Ecrire cette équation dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

2°) Montrer que cette équation permet de prévoir facilement la dépendance du potentiel vis-à-vis des coordonnées dans toute région en dehors des charges si :

- a) \mathcal{D} présente la symétrie sphérique autour d'un point O ;
- b) \mathcal{D} présente la symétrie cylindrique autour d'un axe $z'z$;
- c) \mathcal{D} présente l'invariance par translation parallèlement à un plan xOy .

3°) Si \mathcal{D} possède un plan d'antisymétrie, que représente celui-ci pour le potentiel ?

4°) Montrer que, pour un système de charges donné, la recherche de surfaces de Gauss appropriées au calcul du champ passe par celle des surfaces équipotentielles. Le vérifier pour chacun des cas envisagés à l'exercice I.

III. On considère le système de deux charges électriques opposées formant un *dipôle*, défini comme suit :

Une charge $q > 0$ au point $A(0, 0, a)$ ($a > 0$) et une charge $-q$ placée au point $B(0, 0, -a)$; O est le milieu de AB .

1°) Démontrer que le potentiel électrique créé par cet ensemble en un point M situé à très grande distance du point O est donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

où $\vec{r} = \vec{OM}$, $r = OM \gg a$, et où $\vec{p} = 2aq \vec{e}_z$ est le *moment dipolaire* de ce système de charges. Lorsque l'expression du potentiel donnée plus haut est applicable à tout point M tel que $r \neq 0$, ce système est appelé *dipôle ponctuel*.

2°) Donner l'équation des surfaces équipotentielles et représenter qualitativement ces dernières.

3°) Calculer les composantes sphériques du champ électrostatique créée par le dipôle ponctuel.

4°) Trouver les équations des lignes de champ et représenter qualitativement ces dernières en précisant leur orientation par rapport aux surfaces équipotentielles.

5°) Calculer directement le flux de \vec{E} à travers la sphère de centre O et de rayon $R \gg a$. Montrer que le résultat pouvait être prédit sans calcul.

IV. Une distribution volumique de charges à symétrie sphérique emplit la boule de centre O et de rayon R et produit au point M tel que $OM = r \leq R$ le potentiel

$$V(r) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{4r} + r^2 \right)$$

1°) Déterminer le champ électrostatique pour $r < R$.

2°) En appliquant le théorème de Gauss à l'ensemble des charges contenues dans le volume entre les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$ respectivement, trouver l'expression de la densité volumique de charges $\rho(r)$.

3°) Que deviennent le champ, le potentiel et le flux du champ à travers une sphère de centre O et de rayon r lorsque $r \rightarrow 0$? Conclure.

4°) Calculer le champ et le potentiel pour $r \geq R$.

V. Le potentiel électrostatique crée par une distribution de charges globalement neutre a pour expression

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left[-\frac{r}{2a}\right]$$

où r est la distance du point d'observation M au centre O de la distribution et q, a sont des grandeurs positives.

1°) Montrer que lorsque $r \rightarrow 0$, ce potentiel devient celui de la charge ponctuelle q située en O .

2°) En plus de cette charge ponctuelle, le distribution comporte une distribution volumique de charges de densité $\rho(r)$.

a) Calculer le champ électrostatique crée par l'ensemble des charges.

b) En déduire $\rho(r)$.

3°) Vérifier que la distribution est bien globalement neutre. Montrer que ce résultat pouvait être prévu, compte-tenu de l'expression du potentiel.

Théorème de superposition

I. Un système de charges Σ est constitué par deux lignes infinies parallèles, L_1 passant par le point $(d > 0, 0, 0)$ et L_2 passant par le point $(-d, 0, 0)$, et uniformément chargées avec les densités linéiques $\lambda > 0$ et $-\lambda$ respectivement.

1°) Pour tout point M en dehors des fils, calculer le champ et le potentiel électrostatiques créés par Σ .

2°) Trouver les surfaces équipotentielles. On conviendra de prendre le potentiel nul au point $(0, d, 0)$.

3°) Soit M un point de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) , tel que $\rho \gg 2d$. Trouver une expression approchée du potentiel $V(M)$ et en déduire les composantes cylindriques du champ $\vec{E}(M)$.

4°) Dans cette approximation, résoudre, en coordonnées cylindriques, les équations des lignes de champ. Passer ensuite aux coordonnées cartésiennes pour caractériser le réseau de lignes de champ.

II. Un plan infini coïncidant avec le plan xOy porte une densité surfacique de charges uniforme $\sigma > 0$. Ce plan est percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon a . Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par ce système de charges en tout point de l'axe $z'z$. On précisera soigneusement toutes les étapes du calcul.

III. On considère une sphère uniformément chargée (en surface). On "fige" cette distribution et l'on découpe la sphère suivant un grand cercle pour obtenir deux hémisphères. L'un est conservé, l'autre est éloigné à l'infini. Trouver la direction du champ électrostatique créé par l'hémisphère conservé en tout point du plan de découpe et situé sous cet hémisphère. Que peut-on dire du potentiel sur le plan de découpe sous l'hémisphère ?

IV. Soient deux boules B_1 et B_2 de même rayon R et centrées en O_1 et O_2 respectivement. Ces boules sont uniformément chargées en volume avec les densités $\rho > 0$ pour B_1 et $-\rho$ pour B_2 . On rapproche et on superpose les deux distributions de façon que O_1 et O_2 soient presque confondus : $O_1O_2 = \ell \ll R$.

1°) Montrer que la distribution ainsi obtenue apparaît comme une distribution superficielle sur une sphère de rayon R centrée au milieu O de O_1O_2 , de densité superficielle de charges

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

où $\sigma_0 = \rho \ell$ et où θ est l'angle $(\vec{OP}, \vec{OO_1})$, P étant un point de la sphère.

2°) En déduire, par superposition, que le champ créé par une distribution superficielle de charges répartie sur une sphère avec la densité $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ est :

- a) à l'intérieur de la sphère, un champ uniforme ;
- b) à l'extérieur de la sphère, le champ d'un dipôle dont on précisera les caractéristiques.

3°) Vérifier que la composante radiale E_r du champ présente une discontinuité au passage à travers la couche superficielle, alors que la composante orthoradiale E_θ reste continue.

V. Dans le plan xOz , un ruban rectiligne, de longueur infinie, d'axe $z'z$, d'épaisseur négligeable et de largeur a est chargé uniformément avec la densité surfacique $\sigma > 0$.

1°) Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point de l'espace en dehors du ruban. Indication : envisager le ruban comme une superposition de fil rectilignes infinis chargés.

2°) Vérifier les résultats en considérant les cas particuliers suivants :

a) on fait l'hypothèse que a est très petit devant les coordonnées du point M considéré ;

b) on fait l'hypothèse que a est très grand devant les coordonnées du point M .

VI. Un ensemble de charges (Σ) comprend les deux distributions suivantes :

- une distribution linéique de charges réparties uniformément tout le long de l'axe $z'z$ avec la densité λ ;

- une distribution surfacique de charges réparties uniformément sur toute la surface d'un cylindre d'axe $z'z$ et de rayon a avec la densité $\sigma = -\lambda/(2\pi a)$.

1°) Démontrer que le champ électrostatique total $\vec{E}(M)$ créé en M par cet ensemble est porté par \vec{HM} où H est le projeté orthogonal de M sur $z'z$.

2°) En déduire les lignes de champ et les surfaces équipotentielles. Que peut-on en déduire pour le potentiel ?

3°) Dire pourquoi on peut ici utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ.

4° a) Déterminer le champ puis le potentiel en tout point, en convenant celui-ci s'annule pour $HM = a$.

b) Donner une représentation graphique des variations du potentiel.

5°) On suppose maintenant que l'axe portant la distribution linéique n'est plus $z'z$ mais un axe Δ parallèle à $z'z$ et à la distance d de celui-ci.

a) Déterminer les nouvelles expressions du champ et du potentiel.

b) Trouver les surfaces équipotentielles correspondantes.

c) Donner les formes approchées du champ et du potentiel à l'extérieur du cylindre lorsque $d \ll a$.

VII. Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés en tout point de l'espace par la distribution de charges constituée par :

- une distribution volumique de charges de densité constante ρ dans la boule de centre O et de rayon R ;

- une distribution surfacique de charges de densité constante $\sigma = -\rho R/12$ sur la surface de la sphère de centre O et de rayon $2R$.

VIII. Un ensemble de charges (Σ) est constitué par les deux distributions suivantes :

- une distribution volumique à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon R dont la densité en un point P tel que $OP = r \leq R$ est

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

- une charge ponctuelle q en O .

1°) A quelle condition la charge totale de (Σ) est-elle nulle? On supposera cette condition réalisée dans la suite.

2°) Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point à l'exception du point O , en convenant que le potentiel s'annule pour $r = OM = 2R$.

3°) Comment calculer le champ électrostatique en un point M tel que $OM = r > R$ si la charge q était située non pas en O mais à la distance a de O telle que $0 < a < R$?

IX. Une distribution de charges comprend :

- une charge ponctuelle q placée au point $(0, 0, a > 0)$;
- une boule de centre O et de rayon $R > a$ uniformément chargée avec la densité volumique ρ .

1°) A quelle condition la charge totale de la distribution est-elle nulle? Dans la suite, on supposera cette condition réalisée.

2°) Calculer, en tout point où cela est possible, le champ et le potentiel électrostatiques créés par cette distribution. On prendra l'origine du potentiel au point $(\sqrt{R^2 - a^2/4}, 0, a/2)$.

3° a) Caractériser l'équipotentielle E_0 de potentiel nul, en dehors de la boule $B(o, R)$.

b) Que peut-on dire du champ sur E_0 ? Vérifier par le calcul.

4°) Que deviennent le champ et le potentiel à l'extérieur de la boule $B(O, R)$ lorsque $a \ll R$?

5°) Dans ces conditions, calculer directement le flux du champ à travers la sphère de centre O et de rayon $2R$. Pouvait-on prévoir le résultat?

X. 1°) Rappeler la formule générale permettant de calculer le potentiel électrostatique créé en un point M par une distribution linéique de charges d'extension finie, en convenant que le potentiel s'annule à distance infinie de la distribution.

2°) Calculer le potentiel électrostatique créé au point origine O par une distribution de charges réparties uniformément avec la densité λ le long d'un cercle de rayon a situé dans un plan parallèle au plan xOy , à la cote z , et dont le centre C est sur l'axe Oz .

3°) On considère ensuite une répartition de cercles, lesquels, comme celui de la question 2°), portent chacun une distribution linéique uniforme de charges de densité λ . Ces cercles sont centrés sur Oz dans des plans parallèles à xOy . Le rayon a d'un cercle à la cote z vérifie la relation $(z - h)^2 + a^2 = R^2$, h et R étant des constantes positives. Les centres des cercles sont répartis le long de $z'z$ depuis $z = h - R$ jusque $z = h + R$ avec la densité $n(z) = N/a$, N étant une constante ($n(z)dz$ est le nombre de cercles compris entre z et $z + dz$).

a) Calculer le potentiel électrostatique créé en O par cette nouvelle répartition de charges, pour $h < R$ et pour $h \geq R$. Indication : poser $z = h + R \cos \theta$, $a = R \sin \theta$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$, puis $u = \cos \theta$.

b) En déduire le champ électrostatique en O .

b) Identifier la distribution de charges ainsi obtenue.

XI. 1°) Un cylindre d'axe $z'z$, de rayon R et de hauteur illimitée contient en son volume une distribution de charges Σ_1 de densité volumique constante μ . Calculer le champ et le potentiel électrostatiques créés par Σ_1 en tout point M repéré par ses coordonnées cylindriques ρ, φ, z .

2°) On considère une distribution Σ_2 similaire à la précédente : elle a pour densité $-\mu$ et est contenue à l'intérieur du cylindre de rayon R dont l'axe Δ parallèle à $z'z$ passe par le point de coordonnées cartésiennes $(x = -a, y = 0, z = 0)$. Calculer en tout point $M(\rho, \varphi, z)$ le champ et le potentiel électrostatiques créés par l'ensemble $\Sigma_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

3°) On suppose maintenant que $a \ll R$, tandis que la grandeur $\sigma_0 = \mu a$ reste finie. Trouver les expressions approchées du champ et du potentiel créés en tout point par Σ_3 et identifier la distribution de charges obtenue dans cette limite.

4°) A l'ensemble défini au 3°) on superpose le champ uniforme $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$.

a) Déterminer en tout point M le champ et le potentiel résultants. On prendra le potentiel nul au point $(x = 0, y = R, z = 0)$.

b) Trouver l'équipotentielle de potentiel nul.

c) Calculer les composantes cylindriques du champ sur cette équipotentielle.

XII. Pour tout point où cela est possible, trouver le champ et le potentiel électrostatiques créés par deux plans infinis, perpendiculaires et uniformément chargés avec la même densité superficielle σ . Trouver les surfaces équipotentielles.

XIII. 1°) Trouver, en tout point de l'espace où ils sont définis, le champ et le potentiel électrostatiques créés par deux plans infinis, perpendiculaires et uniformément chargés avec la même densité superficielle σ .

2°) Trouver les surfaces équipotentielles.

Les conducteurs en électrostatique

I. Influence électrostatique

• La région $x < 0$ est remplie d'un milieu conducteur (\mathcal{C}). Ce conducteur est soumis à un champ extérieur uniforme $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$. Des charges apparaissent alors sur la surface du conducteur définie par $x = 0$ et l'on se propose de calculer leur densité surfacique, à l'équilibre.

1°) Quel champ crée alors, à l'équilibre, cette distribution superficielle (Σ) ?

2°) Montrer que le plan $x = 0$ est pour (Σ) un plan de symétrie positive.

3°) En déduire le champ créé par (Σ) dans la région $x > 0$, puis la densité surfacique de charges à la surface du conducteur en appliquant le théorème de Gauss au champ total.

• Au lieu d'être plongé dans un champ uniforme, le conducteur précédent \mathcal{C} est maintenant soumis à l'influence d'une charge ponctuelle q située au point $A(h > 0, 0, 0)$ et l'on se propose de calculer la nouvelle densité surfacique de charges qui apparaît, à l'équilibre, à la surface $x = 0$ du conducteur.

1°) En utilisant comme précédemment un argument de symétrie, montrer que pour tout point M de la région $x > 0$, l'effet du plan chargé est équivalent à celui d'une charge ponctuelle $-q$ située au point $B(-h, 0, 0)$.

2°) En déduire le champ total dans la région $x > 0$, puis la densité surfacique des charges sur le plan chargé ainsi que la charge totale apparue sur celui-ci.

3°) Quelle est la force s'exerçant sur la charge ponctuelle en A ?

• Une sphère conductrice de centre O , de rayon R et reliée à la masse (potentiel zéro) est soumise à l'influence d'une charge ponctuelle $q > 0$ située à la distance $h > R$ de son centre.

1°) Calculer le potentiel créé en O par la distribution superficielle de charges apparue sur la sphère. Quel est le potentiel total en O ? En déduire la valeur de la charge totale Q de la sphère.

2°) Expliquer pourquoi on a $|Q| < q$.

II. Condensateur plan

• Un condensateur plan est constitué de deux plaques conductrices planes identiques parallèles et dont la surface S est supposée très grande devant le carré de la distance ℓ les séparant. L'une des plaques est portée au potentiel V_0 , l'autre est reliée à la masse. On admettra ici que le champ \vec{E} dans l'espace interconducteur est uniforme.

1°) Calculer la densité surfacique de charges portée par chacune des plaques.

2°) En déduire la capacité de ce condensateur.

3°) Déterminer la force qui s'exerce entre les deux plaques.

4°) Quelle est l'énergie électrostatique emmagasinée ?

- Les armatures d'un condensateur plan ont une surface S , sont distantes de e et sont séparées par de l'air.

Que devient la capacité lorsqu'on introduit entre les armatures et parallèlement à celles-ci une lame métallique d'épaisseur $\ell < e$?

III. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique (âme) d'axe $z'z$ et de rayon extérieur R_1 entouré d'un conducteur cylindrique de même axe et de rayon intérieur $R_2 > R_1$. Les deux conducteurs sont séparés d'un espace vide. La longueur h du câble est considérée comme infiniment grande devant R_2 . La gaine est reliée à la masse tandis que le conducteur central est porté au potentiel V_0 . L'ensemble constitue un condensateur cylindrique dont l'armature centrale porte la charge Q que l'on admettra être distribuée symétriquement (symétrie cylindrique).

- 1°) Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace. Quelles sont les densités surfaciques de charges sur chacun des conducteurs ?
- 2°) Trouver l'expression de la capacité C du câble.
- 3°) Donner une expression approchée de C lorsque $R_2 - R_1 \ll R_1$.
- 4°) Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le câble :
 - a) à partir de sa définition faisant intervenir les charges et les potentiels ;
 - b) en utilisant son expression faisant intervenir la densité d'énergie électrostatique.

IV. Condensateurs sphériques

- Déterminer les coefficients capacité-influence d'un condensateur sphérique constitué de deux sphères conductrices concentriques de rayons R_1 et R_2 respectivement, avec $R_2 > R_1$.
- Une sphère conductrice de rayon R_1 porte une charge q_1 et se trouve initialement concentrique avec une autre sphère conductrice creuse de rayon intérieur R_2 , portant une charge q_2 . On approche A de B jusqu'à ce que les deux sphères soient en contact. Calculer alors les charges de A et B à l'équilibre.
- Trois sphères conductrices creuses A , B et C , concentriques et de rayons respectifs a , b et c ($a < b < c$) sont placés dans le vide. A et C sont reliées à la masse et B porte la charge Q . Calculer le potentiel V_B de B ainsi que les charges q_i et q_e portées par les faces interne et externe de B respectivement, en fonction de Q , a , b et c .

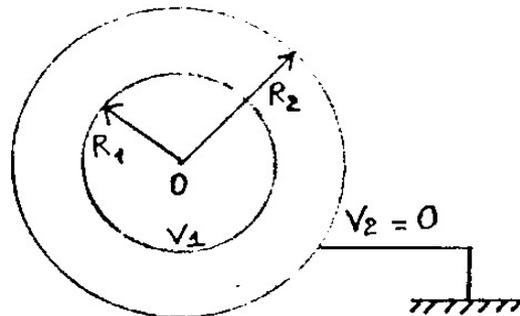
V. Partiel DEUG A 2ème année, décembre 1994.

Partie A

Les armatures d'un condensateur sphérique sont deux sphères métalliques, concentriques, de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. A l'équilibre, l'armature intérieure est au potentiel V_1 tandis que l'armature extérieure est à la Terre (potentiel 0).

- 1°) Montrer que les charges portées par les armatures sont égales en valeur absolue et de signes opposés. Dans la suite, on notera Q la charge de l'armature intérieure.
- 2°) En utilisant les symétries de ce système de conducteurs, préciser la forme du champ

électrostatique \vec{E} en tout point de l'espace.



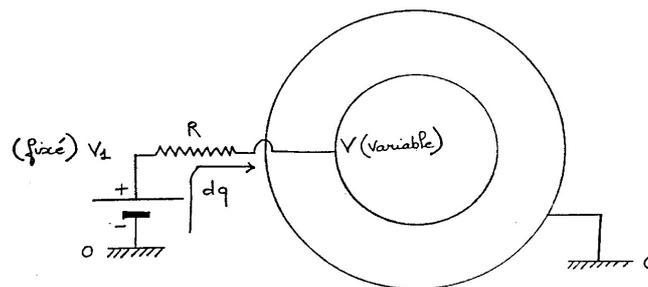
3°) Déterminer ce champ en tout point M , en fonction de Q , ϵ_0 et de la distance $r = OM$.

4°) Déterminer la charge Q en fonction de V_1 , R_1 , R_2 et ϵ_0 . En déduire la capacité C de ce condensateur sphérique.

5°) Rappeler l'expression de la densité d'énergie électrostatique. En déduire celle de l'énergie électrostatique U emmagasinée par le condensateur, d'abord en fonction de Q^2 , R_1 , R_2 et ϵ_0 , puis en fonction de Q^2 et C uniquement.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bilan énergétique associé au processus de charge du condensateur. Initialement, le condensateur n'est pas chargé. Par l'intermédiaire d'un fil conducteur de résistance R , on relie son armature interne au pôle positif d'un générateur de tension fixe égale à V_1 . Le pôle négatif du générateur est au potentiel 0. Le potentiel de l'armature intérieure va alors croître progressivement de 0 à V_1 .



6°) A partir d'un état intermédiaire caractérisé par le potentiel V , on envisage une transformation infinitésimale au cours de laquelle le générateur transporte une charge dq de sa borne négative à sa borne positive, cette charge s'écoulant ensuite le long du fil de liaison jusqu'à l'armature interne du condensateur. Calculer, en fonction des seules grandeurs V_1 , V et dq :

- le travail électrique dW_g fourni par le générateur ;
- l'énergie électrostatique dU emmagasinée par le condensateur.

7°) Faire un bilan énergétique pour cette transformation infinitésimale. Donner l'expression de l'énergie dissipée par Effet Joule dans le fil de liaison.

8°) Introduire la capacité C dans les expressions précédentes, remplacer dq , puis intégrer les équations depuis l'état initial $V = 0$ jusque l'état final $V = V_1$ pour obtenir :

- a) le travail électrique W_g fourni par le générateur ;
- b) l'énergie électrostatique U emmagasinée par le condensateur ;

Expliquer physiquement pourquoi $W_g = 2U$.

VI. DST DEUG A 2ème année, novembre 1989.

On considère trois cylindres creux métalliques C_1, C_2, C_3 coaxiaux et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3 , avec $R_1 < R_2 < R_3$ (figure 1). Leur longueur commune h est très grande devant R_3 . Les cylindres C_1 et C_3 sont reliés entre eux et à une borne A que l'on porte au potentiel $V_A > 0$. Le cylindre intermédiaire C_2 est maintenu au potentiel $V = 0$ (figure 2).

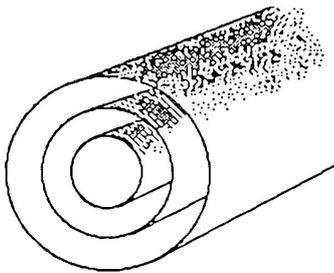


Figure 1

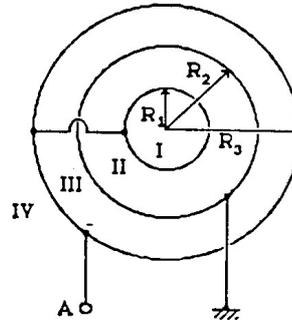


Figure 2

1°) Soit Q_1 la charge portée par la surface externe de C_1 , Q_2 et Q'_2 les charges portées respectivement par les surfaces interne et externe de C_2 , Q_3 la charge portée par la surface interne de C_3 . Quelles équations vérifient ces grandeurs ? En déduire les relations entre les densités surfaciques de charges σ_1 sur C_1 , σ_2 sur la surface interne de C_2 , et entre les densités surfaciques de charges σ'_2 sur la surface externe de C_2 et σ_3 sur C_3 .

2°) Déterminer le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V dans les quatre régions délimitées par les surfaces cylindriques (figure 2).

3°) Exprimer, en fonction des rayons des cylindres et du potentiel V_A , les densités $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_2$ et σ_3 .

4°) Déterminer la charge totale $Q = Q_1 + Q_3$ et en déduire la capacité du condensateur constitué par l'ensemble des trois cylindres. Commenter le résultat.

VII. Une sphère conductrice A de rayon R_1 porte une charge q_1 et se trouve initialement concentrique avec une autre sphère conductrice B , creuse, de rayon intérieur $R_2 > R_1$, portant une charge q_2 . On approche A de B jusqu'à ce que les deux sphères soient en contact. A l'équilibre final, déterminer la charge de A et celle de B .

VIII. (★) On considère deux sphères conductrices concentriques, de centre O , de rayon respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, toutes deux reliées à la Terre. Une charge ponctuelle q se trouve dans la région entre les deux sphères, à la distance r de O ($R_1 < r < R_2$). Déterminer les charges portées par l'une et l'autre sphère, en fonction de q , R_1 , R_2 et r .

Forces, Pression et Energie électrostatiques

I. Une sphère métallique creuse seule dans l'espace est portée au potentiel V_0 . Calculer la résultante des forces s'exerçant sur une calotte sphérique dont le rayon est vu sous l'angle α du centre de la sphère. On donne $V_0 = 10 \text{ kV}$, $\alpha = 45^\circ$.

II. Quel est l'ordre de grandeur de la pression qui tendrait à faire éclater un électron, en supposant que celui-ci peut être assimilé à une sphère conductrice de rayon $R = 10^{-15} \text{ m}$?

III. On considère une boule uniformément chargée en volume. Quelle est la fraction d'énergie électrostatique se trouvant à l'extérieur de la boule ?

IV. Une sphère conductrice de rayon R , éloignée de tout autre conducteur, est portée au potentiel V_0 .

1°) Quelle est alors sa charge Q ? Le résultat est-il différent selon que la sphère est creuse ou pleine ?

2°) Exprimer la densité d'énergie électrostatique en un point M quelconque et en déduire l'énergie électrostatique emmagasinée par le conducteur chargé.

V. Deux dipôles électriques élémentaires sont situés aux points fixes P_1 et P_2 respectivement. Leurs moments dipolaires respectifs \vec{p}_1 et \vec{p}_2 peuvent tourner tout en restant coplanaires. A l'équilibre, quelle est la relation entre les angles θ_1 et θ_2 que font les dipôles avec l'axe $\vec{P_1P_2}$ si \vec{p}_1 est fixe et \vec{p}_2 libre de tourner ?

VI. Soit une sphère imaginaire de rayon a centrée sur un dipôle ponctuel de moment p . En intégrant la densité d'énergie depuis $r = a$ jusque r infini, montrer que l'énergie électrostatique associée à l'extérieur de cette sphère a pour expression

$$W_e = \frac{p^2}{12\pi\epsilon_0 a^3}$$

VII. On considère deux sphères métalliques concentriques S_1 et S_2 , de rayons respectifs R_1 et R_2 , S_1 étant au potentiel V_1 , S_2 au potentiel V_2 . Calculer l'énergie électrostatique de ce système par deux méthodes différentes.

Problèmes

I. D'après un examen partiel du DEUG A PM2 - janvier 1992.

On considère une solution diluée de N molécules NaCl occupant un volume V et complètement dissociées en ions Na^+ et Cl^- . Comme les charges de signes opposés s'attirent, chaque ion de la solution est entouré d'ions de charge opposée formant autour de lui un nuage à symétrie sphérique appelé cosphère. En prenant un ion Na^+ comme ion central, le potentiel électrostatique produit par cet ion et sa cosphère en un point P situé à la distance r de l'ion s'écrit

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp -r/r_0}{r}$$

où $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C est la charge de Na^+ , r_0 est la *longueur de Debye* telle que $r_0^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T V}{2Nq^2}$, k_B étant la constante de Boltzmann, T la température de la solution. Pour simplifier, la permittivité du milieu a été assimilée à celle du vide, ϵ_0 . Le problème consiste à étudier l'Electrostatique de l'ion et de sa cosphère.

1°) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(P)$ de l'ion et de sa cosphère en un point P à la distance r de l'ion central.

2°) Quelle est la charge $Q(r)$ globale contenue dans une boule de rayon r centrée sur l'ion central? En donner les valeurs limites pour $r \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$. Interpréter les résultats.

3°) Quelle est la charge dQ contenue dans le volume compris entre les deux sphères ayant pour centre l'ion central et dont les rayons respectifs sont r et $r + dr$ avec $|dr| \ll r$? En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ de la cosphère.

4°) Déterminer la champ électrostatique $\vec{E}_c(P)$ produit au point P par la seule cosphère. En donner les valeurs limites pour $r \rightarrow \infty$ et pour $r \rightarrow 0$ à l'aide d'un développement limité. Interpréter les résultats obtenus.

II. Image électrique.

Une distribution superficielle de charges est répartie sur tout le plan xOy avec la densité

$$\sigma(P) = \sigma_0 \frac{a^3}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$$

où P est un point de xOy tel que $\rho = OP$.

1°) Calculer la charge totale q de cette distribution.

2°) Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$ créée par la distribution en un point M de l'axe $z'z$ de cote z . Par convention, on prendra $V \rightarrow 0$ pour $|z| \rightarrow \infty$. Pour faire ce calcul, on posera $u = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ et l'on utilisera le résultat

$$\int \frac{du}{(\alpha + \beta u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\alpha \sqrt{\alpha + \beta u^2}} + \text{constante}$$

3°) Que peut-on dire sur l'orientation du champ électrostatique au point $M(0, 0, z)$? Déduire alors du calcul précédent l'expression du champ en ce point.

4°) Montrer que l'effet de la répartition en $M(0, 0, z)$ est équivalent à celui d'une charge ponctuelle dont on précisera la position et la valeur. On distinguera les deux cas $z > 0$ et $z < 0$.

5°) On admet que ce résultat est applicable à tout autre point M en dehors du plan xOy . Déterminer alors le champ électrostatique créée par la distribution en un point M quelconque en dehors du plan xOy . On distinguera à nouveau les cas $z < 0$ et $z > 0$.

6°) On place alors une charge $-q$ au point $Q(0, 0, a)$, et l'on admet que la répartition des charges dans le plan xOy ne s'en trouve pas modifiée. Déterminer le champ électrostatique créée par cette nouvelle distribution en tout point en dehors du plan xOy . Quel système physique cette répartition peut-elle représenter?

7°) Vérifier le théorème de Coulomb au passage à travers le plan xOy .

III. On considère une infinités de droites Δ_n situées dans le plan yOz et parallèles à $z'z$. Leurs intersections respectives avec le plan xOy sont les points M_n de coordonnées cartésiennes $x_n = 0, y_n = na, z_n = 0$ où n est un entier relatif courant de $-\infty$ à $+\infty$. Chacune de ces droites porte une distribution linéique de même densité constante λ .

1°) Montrer que tout plan parallèle à xOy est un plan de symétrie pour le champ électrostatique de cette distribution et que de ce fait il suffit d'étudier celui-ci dans le plan xOy .

2°) a) Montrer sans calcul que dans le plan xOy le champ est une fonction périodique de y à x fixé.

b) Pour quelles valeurs de y le champ est-il parallèle à Ox ?

3°) On se place maintenant à une distance $x = d$ du plan yOz . On suppose démontré que lorsque $d \gg a$, la composante $E_x(d, y)$ du champ devient indépendante de y et égale à une grandeur finie $E_x(d)$. Calculer $E_x(d)$ en choisissant judicieusement une surface de Gauss en tenant compte du résultat du 2°) b).

4°) Déterminer la composante $E_y(d, y)$ du champ en appliquant le théorème de Gauss à la surface fermée entourant le volume délimité par les plans :

$$y = \frac{na}{2}, \quad y = \frac{na}{2} + Y \quad \text{avec } Y < a, \quad x = d \gg a, \quad x = d + \eta \quad \text{avec } \eta \ll d, \quad z = 0, \quad z = \ell$$

5°) Montrer que pour $d \gg a$ la distribution est vue comme un plan infini uniformément chargé dont on demande de calculer la densité superficielle.

IV. Une distribution volumique de charges a pour densité

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \rho_0 \exp\left[\frac{z+d}{\delta}\right] \quad \text{pour } z < -d \\ \rho(z) &= 0 \quad \text{pour } -d < z < d \\ \rho(z) &= -\rho_0 \exp\left[-\frac{z-d}{\delta}\right] \quad \text{pour } z > d\end{aligned}$$

où ρ_0 , d et δ sont des grandeurs positives. La distribution est illimitée dans les directions perpendiculaires à $z'z$. On admettra que le champ électrostatique de cette distribution s'annule dans les régions $|z| \rightarrow \infty$.

1°) Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace en convenant que le potentiel est nul pour $z = 0$.

2°) Que deviennent les résultats précédents lorsque $\delta \rightarrow 0$ tandis que d et le produit $\sigma = \rho_0 \delta$ restent finis ?

3°) Calculer alors l'énergie électrostatique emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe $z'z$, de longueur infinie et de section droite unité.

V. Un conducteur porté au potentiel zéro occupe la région de l'espace définie par $x < -d < 0$. Le demi-espace $x > 0$ contient une distribution volumique de charges de densité

$$\rho(x) = \rho_0 \exp\left[-\frac{x}{a}\right]$$

où ρ_0 et a sont deux constantes positives. La région $-d < x < 0$ est totalement vide. On admettra que

- la densité superficielle de charges σ apparaissant par influence sur la surface du conducteur est constante ;
- le champ électrostatique s'annule dans la région $x \rightarrow +\infty$.

1°) Donner une représentation graphique en fonction de x de la densité de charges de la distribution complète \mathcal{D} incluant la distribution volumique et le conducteur.

2°) a) En étudiant les symétries de la distribution \mathcal{D} , montrer que le champ électrostatique qui lui est dû est parallèle à $x'x$ et indiquer de quelles variables il dépend réellement.

b) Que vaut le champ pour $x < -d$?

3°) Soit $\mathcal{C}(x)$ un volume cylindrique de base S , infiniment allongé de long de $x'x$ et dont une base est dans le plan d'abscisse x , l'autre base étant à l'abscisse $x = +\infty$.

a) Que vaut le flux du champ à travers $\mathcal{C}(x)$ si $x < -d$?

b) Par application du théorème de Gauss, en déduire l'expression de la densité σ sur la surface du conducteur.

4°) Calculer la charge contenue dans $\mathcal{C}(x)$ pour

a) $-d < x \leq 0$;

b) $x \geq 0$.

c) En déduire l'expression du champ électrostatique en tout point où cela est possible.

5°) Déterminer le potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point M .

6°) Calculer l'énergie électrostatique W emmagasinée dans $\mathcal{C}(x)$ pour $x < -d$.

VI. LP203 juin 2005 La répartition de la charge du noyau d'un atome léger peut être modélisée par une distribution volumique à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon a dont la densité est

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

- 1°) Donner une représentation graphique qualitative des variations de $\rho(r)$ en fonction de r .
- 2°) Calculer la charge totale Q_T du noyau en fonction de ρ_0 et a .
- 3°) Déterminer la charge $Q(r)$ contenue dans une boule de centre O et de rayon $r < a$.
- 4°) Énoncer le théorème de Gauss, donner les symétries de la distribution de charge et en déduire les propriétés du champ électrostatique.

Dans les deux questions suivantes on se propose de déterminer le champ électrostatique en différents points de l'espace, en appliquant le théorème de Gauss. Pour cela, on définira avec précision la surface de Gauss utilisée.

5°) Déterminer le champ électrostatique \vec{E} en tout point M extérieur au noyau ; en déduire le potentiel électrostatique V . Par convention, on prendra $V = 0$ à l'infini.

6°) Déterminer \vec{E} en tout point M intérieur au noyau.

7°) On se propose de tracer la courbe représentant les variations de $|\vec{E}|$ en fonction de r pour $r \in [0, \infty[$.

- a) Montrer que cette courbe ne présente pas de discontinuité pour $r = a$ et donner la raison physique de cette continuité.
- b) Montrer que la courbe passe par un maximum et donner la valeur de r correspondante.
- c) Tracer l'allure de la courbe.

8°) Quel est, pour ce noyau, la valeur approximative du nombre Z de ses protons ? On donne : $\rho_0 = 4 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3$; $a = 4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $\sqrt{5} \simeq 2,25$.

VII. Un dépoussiérateur électrostatique est un système permettant d'éliminer des particules de poussière présentes dans des gaz industriels. Son principe de fonctionnement consiste à ioniser le gaz en le soumettant à un champ électrique élevé. Les ions produits viennent se coller sur les poussières qui seront entraînées dans le champ électrique jusqu'à une électrode qui les collecte.

L'anode du système est un cylindre creux conducteur de rayon intérieur $r_1 = 150$ mm, et relié à la terre (potentiel zéro). La cathode est un fil positionné sur l'axe de l'anode, de rayon $r_2 = 0,25$ mm. Le potentiel de ce fil est maintenu à la valeur $V = -50$ kV. On admettra que l'ensemble est de longueur infinie.

1°) Déterminer le champ électrique entre anode et cathode juste après l'application de la tension V , c'est-à-dire sans tenir compte de l'ionisation du gaz. Expliquer pourquoi le gaz est préférentiellement ionisé près du fil.

Les ions positifs créés sont rapidement collectés par la cathode et évacués, tandis que les ions négatifs dérivent lentement vers l'anode, formant ainsi une distribution volumique de charges de densité $\rho(M)$. On constate qu'à l'équilibre le champ électrique résultant, de direction radiale, a un module indépendant des coordonnées d'espace.

2°) a) Déterminer le module E_0 de ce champ et en donner la valeur numérique.

b) Calculer $\rho(M)$ en fonction de E_0 .

On considère une poussière de forme sphérique de rayon $a \ll r_1$ se trouvant entre l'anode et la cathode. Elle est conductrice et initialement neutre.

3°) Montrer que cette poussière va acquérir une distribution superficielle de charge. Représenter qualitativement cette dernière sur un dessin.

4°) Expliquer pourquoi la poussière va alors capter des ions. Quelle est la nature de ces ions et vers quelle électrode la poussière va-t-elle se diriger ?

On donne, en coordonnées cylindriques (r, φ, z) :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

VIII. Examen de janvier 2010.

- Partie I -

On rappelle ci-dessous l'expression du potentiel électrostatique créé en un point M par un ensemble de charges distribuées continuellement le long d'une courbe \mathcal{C} avec une densité linéique $\lambda(P)$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda(P)d\ell(P)}{PM} + \text{constante}$$

où P est un point courant sur la courbe, $d\ell(P)$ l'élément de longueur en P .

Relativement à un repère cartésien $R(O, x, y, z)$, la courbe \mathcal{C} considérée ici est un segment de droite de longueur $2a$ ayant O pour milieu et qui se trouve sur l'axe $z'z$ de ce repère. Ses extrêmités sont $A(0, 0, a)$ et $B(0, 0, -a)$. Le long de ce segment de droite, des charges électriques sont distribuées uniformément avec la densité linéique $\lambda > 0$ (figure 1).

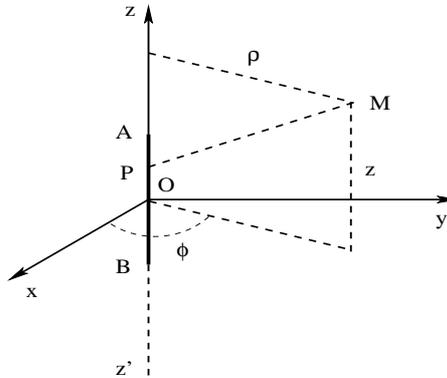


Figure 1

1°) Montrer que, à une constante près, le potentiel électrostatique créé par cette distribution en un point M en dehors du segment AB et ayant les coordonnées cylindriques ρ, ϕ, z relativement au repère R , a pour expression

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2+\rho^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}} \right] \quad (1)$$

On rappelle la formule

$$\frac{1}{\sqrt{(z+u)^2+\rho^2}} = \frac{d}{du} \ln \left[z+u+\sqrt{(z+u)^2+\rho^2} \right]$$

2°) On effectue le changement de variables suivant

$$z = a \cosh \alpha \cos \psi, \quad \rho = a \sinh \alpha \sin \psi \quad (2)$$

α étant un paramètre variant entre 0 et $+\infty$ et ψ un angle variant entre 0 et π . On rappelle que

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

Montrer qu'avec ces nouvelles variables le potentiel (??) prend la forme

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\cosh \alpha + 1}{\cosh \alpha - 1} \right] \quad (3)$$

3°) En déduire que les surfaces équipotentielles (qui seront donc définies de façon équivalente par $\alpha = \text{constante}$) sont des ellipsoïdes ayant l'axe $z'z$ pour axe de révolution et dont on précisera les longueurs b et c des demi-axes en fonction de α (on choisira $b > c$).

4°) A partir de l'expression (??) du potentiel, trouver les expressions des composantes cylindriques E_ρ et E_z du champ électrostatique en M .

5°) Montrer qu'avec le changement de variables (??) ces composantes s'écrivent

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\tanh \alpha \sin \psi}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \psi}, \quad E_z = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\cos \psi}{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \psi} \quad (4)$$

où $\tanh \alpha = (\sinh \alpha)/(\cosh \alpha)$.

6°) Montrer qu'en un point M de l'équipotentielle $\alpha = \alpha_0 > 0$, la normale à cette surface a pour vecteur unitaire

$$\vec{N} = \frac{c \cos \psi \vec{e}_z + b \sin \psi \vec{e}_\rho}{\sqrt{c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} \quad (5)$$

où

$$\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y$$

7°) Que vaut le flux sortant du champ électrostatique à travers cette surface équipotentielle ?

- Partie II -

Dans cette partie, on considère un conducteur dont la surface externe a la forme d'un ellipsoïde ayant l'axe $z'z$ pour axe de révolution. Son demi grand axe suivant $z'z$ a pour longueur b et son demi petit axe (perpendiculairement à $z'z$) a pour longueur $c < b$ (figure 2). Il est porté au potentiel $V_0 > 0$. On posera

$$b = a \cosh \alpha_0, \quad c = a \sinh \alpha_0$$

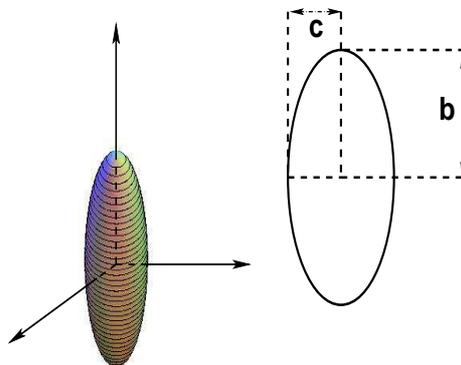


Figure 2 : le conducteur et ses dimensions

On admettra que, en un point M qui lui est extérieur, le potentiel électrostatique créé par le conducteur chargé, à l'équilibre, est donné par l'expression (??) avec $\alpha \geq \alpha_0$ (α étant implicitement défini par (??)).

8°) Déterminer λ en fonction de V_0 , b et a .

9°) Exprimer les composantes du champ électrostatique au voisinage immédiat de la surface du conducteur, en fonction de ψ et des données du problème.

10°) Utilisant (??), en déduire la densité superficielle de charge σ en fonction de ψ , λ , a , b et c .

11°) Quelle est la charge totale Q portée par la surface du conducteur ?

12°) Montrer que la capacité du conducteur est donnée par

$$C = \frac{8\pi\epsilon_0 a}{\ln \left[\frac{b+a}{b-a} \right]}$$

IX. Examen de décembre 2007.

L'espace est repéré par un repère cartésien (O, x, y, z) , dont les axes Ox , Oy et Oz ont pour vecteurs unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z , respectivement.

I Des charges sont réparties uniformément avec la densité linéique λ tout le long d'un axe infini Δ parallèle à l'axe $z'Oz$ et à la distance R de celui-ci.

Etablir que le potentiel électrostatique créé par ces charges en un point M à la distance $h \neq 0$ de Δ a pour expression

$$V_1(M) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{h}{R}$$

en convenant de prendre ce potentiel nul en tout point de l'axe $z'Oz$.

II On considère un conducteur plein C dont la surface a la forme d'un cylindre C d'axe $z'Oz$ et de rayon R . La longueur du conducteur étant très grande devant R peut être considérée comme infinie.

Ce conducteur, qui ne porte aucune charge excédentaire et n'est relié à aucune source de charges, est soumis à l'influence d'un champ électrostatique uniforme d'expression

$$\vec{E}_e = - E_0 \vec{e}_x$$

avec $E_0 > 0$.

1°) Décrire brièvement le phénomène d'influence qui en résulte.

2°) Lorsque l'équilibre électrostatique est atteint, l'influence a fait apparaître sur la surface C du conducteur une nouvelle distribution de charges dont la densité en un point $P(R, \psi, z)$ de cette surface s'exprime sous la forme (voir figure)

$$\sigma(P) = f(\psi)$$

- a) Justifier le fait que σ ne dépende pas de z .
- b) Quelle est la charge contenue sur un élément de surface $Rd\psi dz$ autour d'un point P de C ?
- c) Expliquer pourquoi on a

$$\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi = 0$$

3°) Utilisant de façon appropriée le principe de superposition, le résultat en (I) et en modélisant le cylindre C comme un ensemble de lignes parallèles à $z'z$, montrer que le potentiel électrostatique créé par les charges sur C en un point $M(\rho, \phi, z)$ en dehors de C (à l'intérieur ou à l'extérieur) peut être exprimé comme

$$V_c(M) = F(\rho, \phi, z) = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} f(\psi) R d\psi \log \frac{h}{R}$$

avec

$$h = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\psi - \phi)}$$

et où ρ , ϕ et z sont les coordonnées cylindriques de M dans le repère $Oxyz$.

4°) Soit $M'(\rho', \phi, z)$ un point dans la région $\rho' \leq R$, c'est-à-dire celle intérieure au cylindre C . On lui fait correspondre un point $M(\rho, \phi, z)$ par la transformation définie par

$$\rho = \frac{R^2}{\rho'}$$

a) Vérifier que tout point M' à l'intérieur de C a un transformé à l'extérieur de C .

c) Etablir la relation

$$h' = \frac{R}{\rho} h$$

où h' est la distance séparant $M'(\rho', \phi, z)$ d'un point $P(R, \psi, z)$ de C ayant la même cote z , et h la distance séparant son transformé $M(\rho, \phi, z)$ de ce même point P .

c) Compte-tenu du résultat du 2° c), en déduire que si la distribution de charges de C créé en tout point $M'(\rho', \phi, z)$ à l'intérieur de ce conducteur, le potentiel $F_i(\rho', \phi, z)$, elle créé en tout point à l'extérieur du conducteur le potentiel

$$V_c(M) = F_i\left(\frac{R^2}{\rho}, \phi, z\right)$$

III 5°) a) Montrer que la distribution de charges apparue sur C par influence créé à l'intérieur du conducteur C le champ

$$\vec{E}_c = E_0 \vec{e}_x$$

b) En déduire qu'à l'intérieur de C on a

$$F_i(\rho', \phi, z) = -E_0 \rho' \cos \phi$$

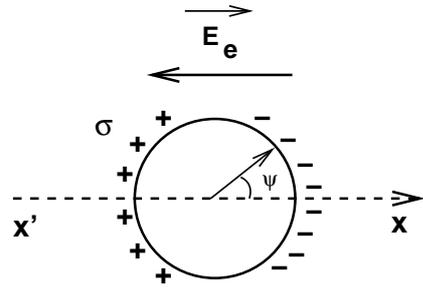
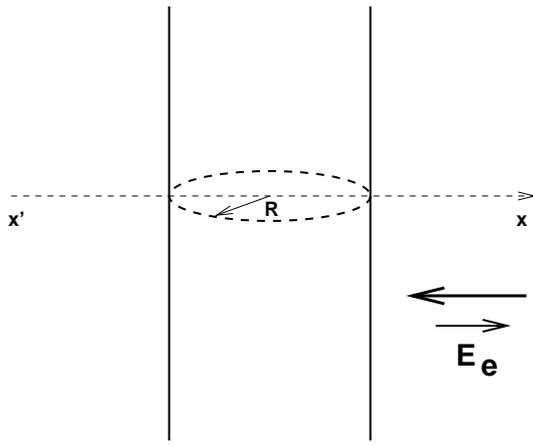
c) Trouver alors l'expression du potentiel $V_c(M)$ créé par la distribution de charges de C à l'extérieur de ce conducteur.

6°) Donner l'expression du potentiel électrostatique total en tout point de l'espace. On conviendra que ce potentiel est nul sur C .

7°) a) Exprimer les composantes cylindriques E_ρ , E_ϕ et E_z du champ électrostatique total en tout point M à l'extérieur du conducteur.

b) Que deviennent ces expressions lorsque $\rho \rightarrow R$?

c) En déduire la densité superficielle de charges $\sigma(\psi)$ et vérifier le résultat du 2°) c).



X. Examen de janvier 2007.

Dans ce qui suit, l'abréviation p.u.l. signifie "par unité de longueur parallèlement à $z'z$ ".

- Partie A -

Des charges sont uniformément réparties avec la densité linéique $\lambda > 0$ tout le long d'une droite Δ_1 , parallèle à l'axe $z'Oz$ d'un repère cartésien et située à l'abscisse $x = a$.

On rappelle que l'expression du potentiel électrostatique créé par cette distribution D_1 en un point $M(x, y, z)$ en dehors de Δ_1 est donnée par

$$V_1(x, y, z) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x-a)^2 + y^2}{a^2} \right] \quad (6)$$

en convenant que $V_1(M)$ est nul au point origine des coordonnées.

A cette distribution D_1 on adjoint une distribution de charges D_2 uniformément réparties avec la densité linéique $-\lambda$ tout le long de la droite Δ_2 parallèle à $z'z$ et située dans le plan xOz à l'abscisse $x = -a$.

1°) a) Pour tout point $M(x, y, z)$ en dehors de Δ_1 ou de Δ_2 , montrer que le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par l'ensemble D de ces deux distributions s'écrit

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \quad (7)$$

en convenant ici encore que $V(M)$ est nul à l'origine.

b) Calculer le potentiel en tout point du plan yOz .

2°) a) Montrer que l'équation $V(x, y, z) = V_0$ revient à écrire une équation de la forme

$$(x-d)^2 + y^2 = R^2 \quad (8)$$

et exprimer d et R en fonction de a et de $k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$. On prendra ici $V_0 > 0$, de sorte que $k > 1$.

b) En déduire les surfaces équipotentielles.

3°) On effectue le changement de coordonnées $x' = x - d$. Montrer que le potentiel s'écrit

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x' + \alpha)^2 + y^2}{(x' + \beta)^2 + y^2} \right] \quad (9)$$

où (à montrer)

$$\alpha = d + \sqrt{d^2 - R^2}, \quad \beta = d - \sqrt{d^2 - R^2} \quad (10)$$

4°) Déterminer la force résultante p.u.l. que les charges de Δ_1 exercent sur Δ_2 .

- Partie B -

Dans un repère cartésien O, x, y, z on envisage le système suivant de deux conducteurs métalliques à l'équilibre électrostatique.

- Le premier conducteur C_1 , de grandes dimensions, est supposé emplir toute la région définie par $x \leq -d$. Sa surface est donc modélisée par le plan parallèle au plan yOz et situé à l'abscisse $x = -d$. Il est porté au potentiel zéro.
- Le second conducteur C_2 est un cylindre d'axe $z'z$, de rayon $R < d$, et dont la très grande longueur sera supposée infinie. Ce conducteur est porté au potentiel $V_0 > 0$.

On admettra que la fonction $V(x, y, z)$ définie par

$$V(x, y, z) = K \ln \left[\frac{(x + \alpha)^2 + y^2}{(x + \beta)^2 + y^2} \right] \quad (11)$$

représente le potentiel électrostatique dans l'espace entre les deux conducteurs (c'est-à-dire pour tout point M en dehors des conducteurs, ou sur leurs surfaces), où α et β sont donnés dans l'équation (5) plus haut.

5°) a) Montrer que $V = 0$ pour $x = -d$.

b) Montrer que la surface de C_2 est une équipotentielle de cette fonction. Pour cela, on démontrera préalablement que pour $x^2 + y^2 = R^2$, on a

$$(x + \alpha)^2 + y^2 = 2\alpha(d + x) \quad , \quad (x + \beta)^2 + y^2 = 2\beta(d + x) \quad (12)$$

c) Déterminer K pour que l'on ait $V = V_0$ sur C_2 .

6°) a) Déterminer les composantes cartésiennes E_x , E_y et E_z du champ électrostatique en tout point en dehors des conducteurs.

b) Que deviennent-elles pour $x = -d$?

c) En déduire la densité superficielle de charges $\sigma_1(y)$ à la surface de C_1 .

d) Calculer la charge p.u.l, q_1 , portée par C_1 . On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + u^2} = \frac{\pi}{|u|} \quad (13)$$

7°) a) Exprimer le potentiel $V(M)$ en fonction des coordonnées cylindriques $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ de M .

b) En déduire les composantes cylindriques E_ρ , E_ϕ et E_z du champ électrostatique en M .

c) Que deviennent ces composantes pour $\rho = R$? En se servant de l'équation (7), on montrera en particulier que

$$E_\rho = \frac{2Ka}{R} \frac{1}{d + R \cos \phi} \quad (14)$$

d) En déduire la densité superficielle de charges $\sigma_2(\phi)$ sur C_2 .

e) Calculer la charge p.u.l, q_2 , portée par C_2 et interpréter le résultat. On donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{d + R \cos \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - R^2}} = \frac{2\pi}{a} \quad (15)$$

8°) Définir la capacité C p.u.l. du condensateur constitué par les deux conducteurs et montrer que

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \quad (16)$$

9°) a) A quelle pression électrostatique sont soumises les charges de C_1 ?

b) En déduire la force p.u.l. que les charges de C_2 exercent sur les charges de C_1 . On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y^2 + u^2)^2} = \frac{\pi}{2|u|^3} \quad (17)$$

Comparer au résultat de la question 4°) si l'on pose $K = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}$ et commenter.

XI. Le potentiel électrostatique crée par une distribution de charges est défini en coordonnées cylindriques ρ, φ, z par

$$V(\rho, \varphi, z) = E_0 \frac{R^2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \cos \varphi \quad \text{si } \rho \geq R$$

$$V(\rho, \varphi, z) = 0 \quad \text{si } \rho \leq R$$

E_0 et R étant deux grandeurs positives.

1°) Préciser les dimensions respectives de E_0 et R .

2°) a) Etudier les symétries de ce potentiel en tant que fonction des coordonnées *cartésiennes* x, y, z .

b) Préciser quelles sont les régions où le potentiel est positif et celles où le potentiel est négatif.

3°) a) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par cette distribution.

b) Vérifier que l'orientation générale du champ est conforme au résultat du 2°) b).

4°) Montrer que le champ $\vec{E}(M)$ est la superposition d'un champ *uniforme* $\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x$ et d'un champ $\vec{E}_2(M)$ dont on précisera soigneusement les caractéristiques, notamment la direction en un point donné M .

5°) Soient \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- les équipotentiels correspondant, respectivement, aux valeurs $V = E_0 R$ et $V = -E_0 R$ du potentiel. Chercher les équations de leurs intersections avec le plan xOy et donner une représentation graphique qualitative de ces dernières.

6°) a) Que représente pour le potentiel la surface cylindrique \mathcal{C} définie par $\rho = R$?

b) Calculer le champ en tout point du voisinage de \mathcal{C} . Qu'observe-t-on? Que peut-on en conclure?

7°) Montrer que \mathcal{C} est porteur d'une distribution superficielle de charges de densité $\sigma = 2\varepsilon_0 E_0 \cos \varphi$.

XII. Extrait d'un examen de DEUG 1ère année, juin 1991.

Trois charges électriques ponctuelles q sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté b . Soit G le barycentre de ABC . On note $a = GA$.

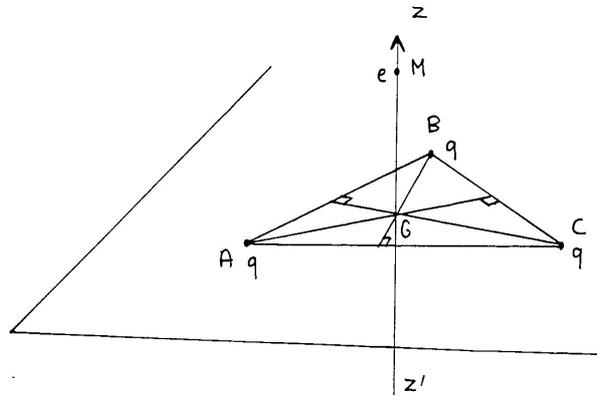


Figure 1

On étudie le mouvement d'une charge électrique ponctuelle positive e astreinte à se déplacer sur la droite $z'Gz$ perpendiculaire au plan ABC (figure 1). Soit M un point de l'axe $z'Gz$ de cote $\overline{GM} = z$ et soit $E_z(z)$ la composante suivant cet axe du champ électrostatique \vec{E} créé par les trois charges q .

- 1°) Quelle est la limite de $E_z(z)$ lorsque $z \rightarrow \pm\infty$?
- 2°) Que vaut E_z au point G ?
- 3°) Déterminer le potentiel électrostatique $V(z)$ créé par les trois charges au point M , en fonction de a , q , z et ε_0 .
- 4°) En déduire l'expression de $E_z(z)$ et tracer la courbe de ses variations en fonction de z .
- 5°) La position G est-elle une position d'équilibre stable pour la charge positive e ? Justifier la réponse.
- 6°) La charge e est maintenant astreinte à se déplacer dans le plan ABC , suivant l'axe $x'GBx$ (figure 2).

Montrer que dans le plan ABC le champ électrostatique créé par les trois charges présente une symétrie par rapport à trois axes que l'on précisera.

7°) Soit M un point de l'axe $x'GBx$, d'abscisse $\overline{GM} = x$, et soit $E_x(x)$ la composante du champ électrostatique suivant $x'GBx$.

- a) Que vaut E_x au point G ?
 - b) Quels sont les signes et les limites de E_x lorsque $x \rightarrow \pm\infty$?
 - c) Quelles sont les limites de E_x lorsque $x \rightarrow a$, soit par valeurs supérieures, soit par valeurs inférieures ?
- 8°) Exprimer en fonction de x , a , q et ε_0 le potentiel électrostatique $V(x)$ créé par les trois charges en M .

9°) Montrer qu'au voisinage immédiat de G , le potentiel $V(x)$ prend la forme $V(x) = \alpha + \beta x^2$ où α et β sont deux constantes positives.

10°) Compte tenu du signe de la dérivée dV/dx au voisinage de G et des résultats de la question 7°), donner l'allure des variations de $E_x(x)$ en fonction de x quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. En déduire qu'il existe sur $x'Gx$ une autre position K où $E_x = 0$.

11°) Discuter la stabilité des positions d'équilibre G et K pour la charge e se déplaçant sur $x'Gx$. Si la charge e pouvait se déplacer suivant les trois dimensions, G serait-elle une position d'équilibre stable?

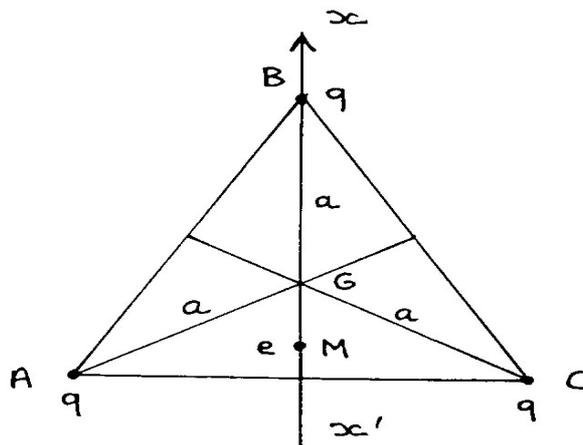


Figure 2

XIII. Extrait d'un examen pour cumulatifs de DEUG SSM2, juin 1992. Potentiel de contact entre deux conducteurs

Deux métaux ont initialement des concentrations en charges mobiles (nombre d'électrons de conduction par unité de volume) différentes n_1 et n_2 avec $n_1 > n_2$, chaque conducteur étant toutefois électriquement neutre. On les met en contact suivant le plan $x = 0$ (jonction). On peut résumer de la façon suivante ce qu'il se passe alors au niveau de la surface de jonction.

- L'existence d'un gradient de concentration (puisque $n_1 \neq n_2$) va créer un mouvement de diffusion des électrons d'un métal vers l'autre, caractérisé par un vecteur densité volumique de courant de diffusion \vec{J}_D (on suppose que les électrons peuvent circuler librement entre les deux métaux).
- Ce mouvement va provoquer un gradient de densité de charge électrique, ce qui va faire apparaître un champ électrique \vec{E} qui à son tour va provoquer un courant d'électrons en sens inverse, caractérisé par un vecteur densité volumique de courant de conduction \vec{J}_C .
- Il va ensuite s'établir entre les deux métaux un "potentiel de contact" qu'on se propose de calculer en régime permanent.

La densité de courant électrique de diffusion est donné par la "loi de Fick" :

$$\vec{J}_D = -D(-e) \vec{\text{grad}} n$$

où $n = n(x)$ est la concentration en électrons mobiles en un point d'abscisse x et D est le coefficient de diffusion des électrons. La densité de courant de conduction s'écrit

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$$

où σ est la conductivité électrique du milieu considéré. On notera que l'on a affaire à un problème à une seule dimension.

1°) Rappeler l'équation de conservation de la charge (ou "équation de continuité"). Comment s'écrit-elle en régime permanent ?

2°) Sachant que le vecteur densité de courant total est $\vec{J} = \vec{J}_D + \vec{J}_C$, écrire l'équation différentielle vérifiée par $n(x)$. On précise que pour chaque milieu la densité volumique de charges est

$$\rho_i(x) = -e(n(x) - n_i) \quad i = 1, 2$$

3°) En déduire l'équation différentielle vérifiée dans chaque milieu par la fonction $G(x) = n_i - n(x)$ ($i = 1, 2$) est de la forme

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k^2 G = 0$$

Exprimer k en fonction des données du problème.

4°) Résoudre cette équation différentielle dans chacun des deux milieux et déterminer les constantes d'intégration par les conditions aux limites. On précise qu'à $x = 0$, la concentration $n(x)$ ainsi que sa dérivée doivent être continues.

5°) Trouver $n(x)$ pour tout x et représenter l'allure de cette fonction.

6°) Ecrire l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel électrique $V(x)$ dans chaque milieu. Déterminer $V(x)$. Pour cela, on pourra éventuellement comparer les équations différentielles vérifiées par $n(x)$ et $V(x)$. En déduire l'expression du "potentiel de contact"

$$U = V(+\infty) - V(-\infty)$$

XIV. Examen DEUG1 1973-1974.

Un condensateur plan, constitué de deux armatures planes, parallèles, distantes de $a = 1 \text{ cm}$, de surface $S = 100 \text{ cm}^2$, est placé dans le vide de permittivité $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ SI}$.

On établit entre les armatures de ce condensateur une différence de potentiel $V = V_1 - V_2 = 10^3 \text{ V}$, avec $V_1 = -V_2 = V/2$.

1°) Calculer l'intensité et déterminer la direction du champ uniforme dû au condensateur plan.

2°) Quelle est la charge qui apparaît sur chacune des armatures : donner le signe et la valeur absolue de chacune de ces charges. En déduire la densité surfacique σ de charge sur chacune de ces armatures. Que donne le théorème de Coulomb ?

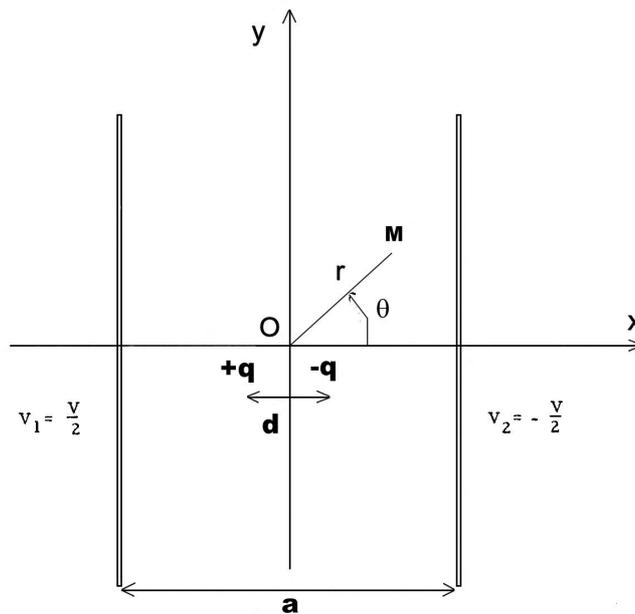
3°) On dispose au centre O du condensateur, sur l'axe Ox perpendiculaire aux armatures et symétriquement par rapport à l'axe Oy un dipôle électrique constitué de deux charges $+q$ et $-q$ avec $q = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ et distantes de $d = 10^{-3} \text{ mm}$. On admettra que la présence du dipôle ne perturbe pas la répartition uniforme de charges sur les armatures (voir figure).

a) Donner l'expression du potentiel créé par le dipôle en un point $M(r, \theta)$ situé à une distance r supposée grande devant d .

b) En déduire les composantes radiale et tangentielle du champ créé par ce dipôle en M . On rappelle que celles-ci sont données à partir du potentiel correspondant par les relations

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

4°) Quel est le potentiel en $M(r, \theta)$ produit par l'ensemble des armatures du condensateur et du dipôle ? Montrer que la surface équipotentielle de potentiel nul se compose du plan d'abscisse $x = 0$ et d'une sphère de rayon R dont on calculera la valeur.



A - Formule de Biot et Savart

I. Fil conducteur rectiligne

D'un point M , on voit les extrémités A et B d'un fil conducteur rectiligne parcouru par un courant d'intensité constante I sous les angles $\alpha_a = (\vec{MH}, \vec{MA})$ et $\alpha_b = (\vec{MH}, \vec{MB})$ respectivement, H étant la projection orthogonale de M sur l'axe du conducteur.

- 1°) Calculer le champ \vec{B} créé en tout point M par le conducteur AB . On posera $r = MH$.
- 2°) a) En déduire le champ \vec{B} créé par un fil infini F en tout point en dehors de son axe.
b) Vérifier sur cet exemple les propriétés de symétrie du champ magnétostatique.
- c) Quelles particularités présentent les lignes de champ de \vec{B} ? Calculer la circulation de \vec{B} le long d'une ligne de champ.

II. Spire circulaire

Une spire conductrice circulaire d'axe Oz , de centre O et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité constante I .

- 1°) Etudier les éléments de symétrie de cette distribution de courants et leurs conséquences sur le champ \vec{B} qu'elle créé. En particulier, démontrer, sans le calculer explicitement, que le champ magnétique en tout point $M(z)$ de l'axe $z'z$ prend la forme $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z$.
- 2°) Calculer $B(z)$.
- 3°) Calculer la circulation de \vec{B} le long de l'axe $z'z$.

III. Bobines de Helmholtz

Deux spires conductrices S_1 et S_2 circulaires, de même axe $z'z$, de même rayon R , sont parcourues par des courants continus d'intensités I_1 et I_2 respectivement. Les centres de S_1 et S_2 sont situés aux points $O_1(0, 0, a > 0)$ et $O_2(0, 0, -a)$ respectivement.

- 1°) a) Etudier les éléments de symétrie de cette distribution de courants et leurs conséquences sur le champ \vec{B} qu'elle créé.
b) Calculer le champ $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$ en tout point $M(z)$ de l'axe $z'z$.
- 2°) On suppose dorénavant que $I_1 = I_2 = I$.

Au voisinage du point O , on peut approximer $B(z)$ par un développement de la forme

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

- a) Montrer, sans calcul, que $b_1 = 0$.

b) Calculer b_0 et b_2 .

c) Trouver la condition pour que, au voisinage de O , $B(z)$ ne dépende de z que par des termes du 4ème ordre en z/a (Helmholtz).

3°) On considère maintenant un point $M(x, z)$ dans le plan xOz , perpendiculaire à $y'y$ et contenant O . On veut obtenir une expression approchée du champ au voisinage de O . On utilise alors les développements limités de B_x et B_z :

$$B_z(x, z) = A_1 + B_1z + B_2x + C_1z^2 + C_2xz + C_3x^2 + D_1z^3 + D_2z^2x + D_3zx^2 + D_4x^3$$

$$B_x(x, z) = A'_1 + B'_1z + B'_2x + C'_1z^2 + C'_2xz + C'_3x^2 + D'_1z^3 + D'_2z^2x + D'_3zx^2 + D'_4x^3$$

a) En étudiant les symétries du champ, démontrer que ces développements doivent se réduire à

$$B_z(x, z) = A_1 + C_1z^2 + C_3x^2 \quad , \quad B_x(x, z) = C'_2xz$$

b) A partir des équations locales du champ magnétique, trouver les relations entre C_1 , C_3 et C'_2 (prendre garde au fait que x représente ici la coordonnée cylindrique ρ !)

IV. Le solénoïde

On réalise un solénoïde en enroulant un fil conducteur fin sur un support isolant de forme cylindrique. L'enroulement est supposé être très serré de sorte qu'on puisse l'assimiler à un empilement de spires circulaires identiques, de rayon a et de même axe $z'z$. Chaque spire est parcourue par le même courant d'intensité constante I .

1°) Calculer le champ $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ créé en tout point $M(z)$ de son axe par le solénoïde ainsi modélisé. On exprimera $B(z)$ en fonction des angles sous lesquels depuis $M(z)$ on voit les deux extrémités du solénoïde, et du nombre n de spires par unité de longueur du solénoïde.

2°) La longueur h du solénoïde est supposée très grande ($h \gg a$).

a) Donner l'expression de $B(z)$ au voisinage de l'un des bords du solénoïde, supposé placé dans le plan xOy . Faire une étude du rapport $B(z)/B(0)$ en fonction de z .

b) Donner l'expression de $B(z)$ en un point très à l'intérieur du solénoïde. En déduire l'expression du champ \vec{B} créé en tout point de son axe par un solénoïde infiniment long.

V. Un fil conducteur est constitué de deux demi-axes d'origine commune O formant entre eux l'angle 2α . Il est parcouru par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétique qu'il produit en un point M situé sur la bissectrice à la distance r de O .

VI. Un fil conducteur mince est bobiné sur une sphère isolante de rayon R , de telle sorte que les spires formées soient parallèles et jointives, formant une couche de N spires recouvrant uniformément la moitié de la sphère. Déterminer le champ magnétique au centre de la sphère lorsque le fil est parcouru par un courant d'intensité I .

VII. Un fil conducteur est enroulé en spirale, à spires jointives en nombre N , entre deux cercles concentriques et coplanaires de rayons respectifs a et $b > a$. Calculer le champ magnétique au centre lorsque le fil est parcouru par un courant d'intensité I .

B - Utilisation du théorème d'Ampère

Pour chacun des exemples de I à V ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

- 1°) Quels sont les éléments de symétrie de la répartition de courants ?
- 2°) Quelle est la direction du champ magnétique en tout point de l'espace ?
- 3°) Après avoir fait le choix d'un repère, dire quelles sont les variables sensibles.
- 4°) Expliquer pourquoi on peut utiliser le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale pour calculer le champ magnétique en tout point.
- 5°) Justifier le choix du contour utilisé.

I. Fil infini

Retrouver l'expression du champ magnétique créé par un fil infini F en tout point en dehors de son axe.

II. Solénoïde infini

Dans un système de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , le vecteur densité de courant d'une distribution surfactive de courants est donné par

$$\begin{aligned} \vec{J}(\rho, \varphi, z) &= J_0 \vec{e}_\varphi & \text{si } \rho = R \\ \vec{J}(\rho, \varphi, z) &= \vec{0} & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

- a) Montrer que cette distribution peut représenter le courant circulant dans un solénoïde infini modélisé comme dans l'exercice A-IV. On exprimera notamment J_0 en fonction du nombre n de spires par unité de longueur du solénoïde et de l'intensité I du courant circulant dans chaque spire.
- b) Calculer le champ magnétique créé en tout point par cette distribution.
- c) Montrer que le champ subit une discontinuité au passage à travers la surface du solénoïde.

III. Conducteur cylindrique creux

Dans un système de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , le vecteur densité de courant d'une distribution volumique de courants est donné par

$$\begin{aligned} \vec{J}(\rho, \varphi, z) &= J_0 \vec{e}_z & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ \vec{J}(\rho, \varphi, z) &= \vec{0} & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

- a) Montrer que cette distribution peut représenter le courant circulant dans un conducteur cylindrique creux, et calculer le champ magnétique créé en tout point par cette distribution, en fonction de l'intensité I de ce courant.
- b) Etudier le cas limite où $R_2 - R_1 \ll R_1$, le produit $J_0(R_2 - R_1) = J_s$ restant fini.

IV. Courant surfacique

Une plaque conductrice plane parallèle au plan xOy , d'épaisseur $2a$ suivant $z'z$ et de dimensions quasi-infinies suivant les axes $x'x$ et $y'y$, est parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{J} = J \vec{e}_x$. Calculer le champ en tout point. Examiner la limite $a \rightarrow 0$, l'intensité totale restant constante.

V. Enroulement torique à section rectangulaire

Un fil conducteur de section négligeable est enroulé sur un tore d'axe $z'z$ en un très grand nombre N de spires jointives. Un demi plan contenant $z'z$ coupe ce tore suivant un rectangle dont les deux cotés parallèles à $z'z$ ont pour longueur a , les autres ayant pour longueur $b < a$. Le centre du rectangle est à la distance R de $z'z$. Calculer le champ en tout point dû à cet enroulement dans lequel circule un courant d'intensité I .

VI. Une couronne circulaire d'axe $z'z$, de centre O , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , porte une distribution superficielle de charges uniforme, de densité σ . Elle tourne autour de son axe à la vitesse angulaire constante ω .

1°) Déterminer le vecteur densité superficielle de courants $\vec{J}_s(P)$ en un point P de la couronne.

2°) Que dire du champ magnétique $\vec{B}(M_z)$ en un point M_z de l'axe $z'z$, de cote z ? Le calculer.

3°) Trouver l'expression asymptotique de $\vec{B}(M_z)$ lorsque $|z| \gg R_2$.

4°) Calculer la circulation du champ magnétique le long de $z'z$.

VII. Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie est placé dans le plan yOz d'un repère cartésien $Oxyz$, parallèlement à $z'z$, à la distance D de cet axe. Il transporte un courant d'intensité constante I , dans le sens $z'z$. Une aiguille aimantée \vec{SN} de centre O est disposée parallèlement à $z'z$ (\vec{SN} est de même sens que $z'z$).

1°) Que se passe-t-il si l'aiguille est laissée libre de se mouvoir, tout en étant cependant fixée en O :

a) l'aiguille reste immobile ?

b) elle pivote dans le plan yOz autour de $x'x$; dans quel sens ?

c) elle pivote dans le plan xOz autour de $y'y$; dans quel sens ?

2°) \vec{SN} étant maintenu parallèle à $z'z$, quelle est la circulation du champ magnétique créé par ce petit aimant le long d'un cercle de centre $(0, D, 0)$, de rayon $D/2$, placé dans le plan xOy ?

C - Forme locale du théorème d'Ampère

I. Utiliser la forme locale du théorème d'Ampère pour trouver l'expression en tout point de l'espace du champ magnétique créé par un conducteur cylindrique plein.

II. On se propose d'étudier les courants qui sont la source d'un champ magnétique, lequel, exprimé en coordonnées cylindriques ρ, φ, z , est orthoradial, $\vec{B} = B(\rho) \vec{e}_\varphi$ avec

$$B = B_1(\rho) = k_1 \rho \quad \text{pour } \rho \leq R_1 \quad (\text{région 1})$$

$$B = B_2(\rho) = \frac{k_2}{\rho} \quad \text{pour } R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad (\text{région 2})$$

$$B = B_3(\rho) = \frac{k_2}{\rho} - k_3 \left(\rho - \frac{R_2^2}{\rho} \right) \quad \text{pour } R_2 \leq \rho \leq R_3 \quad (\text{région 3})$$

$$B = B_4(\rho) = 0 \quad \text{pour } \rho \geq R_3 \quad (\text{région 4})$$

1°) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $B(\rho)$, sachant qu'elle est partout continue, positive ou nulle.

2°) Utiliser des arguments de symétrie pour déterminer la direction du vecteur densité volumique de courants $\vec{J}(M)$ correspondant. Indiquer sur un schéma l'allure des lignes de champ de \vec{J} et de \vec{B} .

3°) Trouver l'expression de $\vec{J}(M)$ en tout point M de l'espace.

4°) On note I l'intensité du courant total circulant dans la région 1. Calculer les intensités totales des courants circulant dans les trois autres régions. Déterminer k_1, k_2 et k_3 en fonction de I .

D - Théorème de superposition

I. Solénoïde

Dans un modèle plus élaboré d'un solénoïde, on tient compte du fait que les vecteurs densité de courant dans le bobinage ont une composante selon la direction de l'axe $z'z$ du solénoïde : l'enroulement est hélicoïdal. On admet ainsi que la densité surfacique de courants a une composante J_z non nulle et uniforme. Le flux total de \vec{J} à travers un plan perpendiculaire à $z'z$ est égal à I . Déterminer en tout point de l'espace le champ dû à cette distribution.

II. Conducteur massif avec cavité

Un conducteur cylindrique rectiligne d'axe $z'z$ et de longueur infinie est parcouru par un courant de densité volumique uniforme $J \vec{e}_z$. Ce conducteur comporte une cavité cylindrique excentrée dont l'axe est à la distance d de $z'z$. Calculer le champ dans la cavité.

III. 1°) On considère le circuit "demi-circulaire" de la figure 1. Calculer le champ magnétique créée par ce circuit en tout point de l'axe $z'z$, hormis le point O .

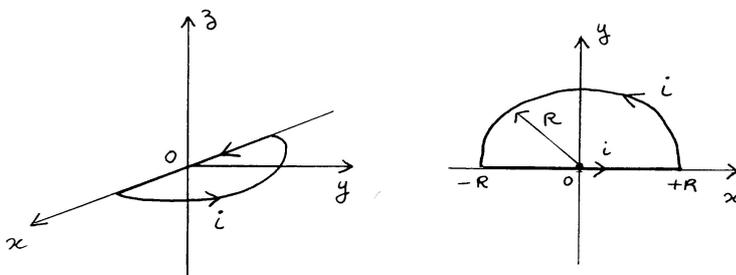
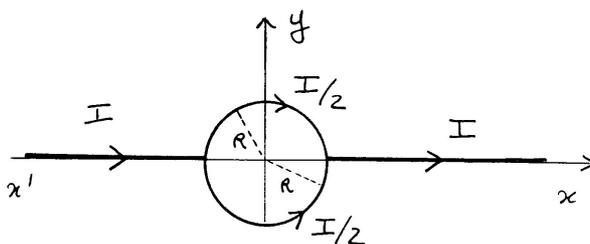


Figure 1

2°) Quel lien existe-t-il entre le calcul précédent et le calcul du champ magnétique $\vec{B}(M_z)$ créée en un point M_z de l'axe $z'z$ par le circuit de la figure 2? Faire le calcul de $\vec{B}(M_z)$.



IV. Ruban conducteur

Une feuille métallique de longueur infinie selon $y'y$, de largeur a selon $x'x$ et d'épaisseur négligeable est parcourue par un courant continu d'intensité I . Elle est placée dans le plan xOy de telle sorte que l'axe $y'y$ se trouve à mi-chemin de ses bords. Pour calculer le champ magnétique produit par ce ruban conducteur, on envisage le courant qui y circule comme la superposition de courants élémentaires, chacun circulant dans une bande étroite de largeur

dx du ruban avec l'intensité $dI = I \frac{dx}{a}$, x allant de $-a/2$ à $a/2$, chaque bande étant assimilée à un courant rectiligne de longueur infinie.

1°) Rappeler l'expression du champ magnétique \vec{b} produit par un courant rectiligne de longueur infinie.

2°) Utiliser ce résultat pour déterminer les composantes élémentaires dB_x et dB_z du champ magnétique produit en un point $M(X, Y, Z)$ en dehors du ruban par la bande élémentaire d'abscisse x .

3°) En déduire, par intégration sur x , les composantes B_x et B_z du champ total en M . On donne²

$$\tan^{-1} u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2}$$

4°) Que deviennent ces composantes au voisinage du point $O(0, 0, 0)$? Commenter.

V. Une feuille métallique très fine en forme de demi-cylindre illimité de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I uniformément réparti. Calculer le champ magnétique sur l'axe.

²Éventuellement, faire le lien avec la fonction de la variable complexe z : $f(z) = \ln z = \ln |z| + j \arg(z)$.

E - Dipôle magnétique

I. On considère une spire circulaire C d'axe Oz , de rayon a , parcourue par un courant d'intensité I .

1°) Montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ au point $M(x, 0, z)$ est perpendiculaire au plan xOz .

2°) On rappelle qu'une expression possible du potentiel vecteur est fournie par l'intégrale

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I \, d\vec{\ell}(P)}{PM}$$

Montrer que lorsque $r = OM \gg a$, cette expression prend la forme approchée

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{OM}}{r^3}$$

où $\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2 \vec{e}_z$ est le moment magnétique de la spire.

3°) En déduire l'expression correspondante de $\vec{B}(M)$, puis trouver l'équation des lignes de champ de \vec{B} . Comparer avec le réseau de lignes de champ d'un dipôle électrostatique.

4°) Vérifier que le moment magnétique d'un circuit filiforme C parcouru par un courant d'intensité I peut être obtenu par la formule générale

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_C I \, \vec{OP} \wedge d\vec{\ell}(P)$$

II. Rapport gyromagnétique

- On assimile une particule chargée à une sphère creuse de rayon R , de masse m , portant une charge électrique q . On suppose que la masse et la charge sont uniformément réparties en surface. La sphère tourne autour de l'un de ses diamètres à la vitesse angulaire constante ω . Calculer le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de cette particule et le comparer à son moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$.

- Une charge q tourne sur une orbite elliptique autour d'un centre de forces attractif. Calculer le moment magnétique orbital de la charge en fonction de son moment cinétique orbital.

III. Une bobine enroulée sur une sphère de rayon R comporte n spires par unité de longueur selon son axe $z'z$. Elle est parcourue par un courant d'intensité I . Calculer son moment magnétique.

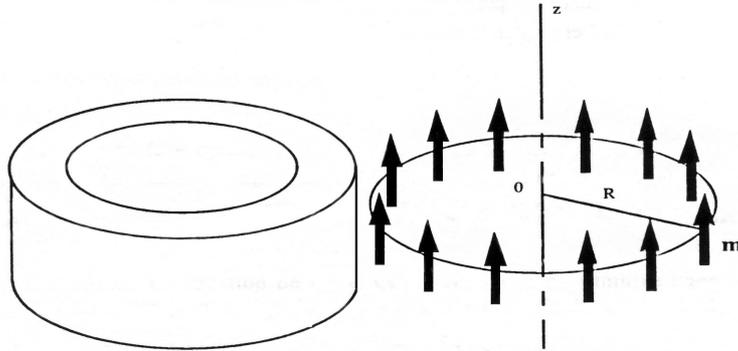
IV (★). Un tore de ferrite est aimanté parallèlement à son axe. On le modélise comme un assemblage de dipôles magnétiques en nombre N grand et pair, disposés de façon régulière sur un cercle de rayon R , de centre O et d'axe $z'Oz$ (figure ci-dessous). Tous les moments magnétiques sont parallèles à Oz . On admet que R est assez grand pour pouvoir appliquer les formules relatives aux grandes distances.

1°) Etudier les symétries de cette distribution de dipôles magnétiques et leurs conséquences sur le champ magnétique qu'elle crée.

2°) Calculer le champ magnétique en un point M_z de l'axe $z'Oz$ et en étudier les variations en fonction de z .

3°) Quel est le moment magnétique total de la distribution ? En déduire une expression du champ à grande distance du point O .

4°) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe $z'z$. Montrer que l'on pouvait prévoir le résultat.

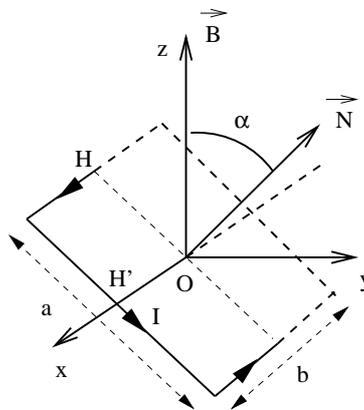


V. On admet qu'en première approximation le champ magnétique terrestre est celui d'un dipôle placé au centre de la Terre et dont le moment magnétique, orienté vers l'hémisphère sud, fait un angle de 11° avec l'axe de rotation de la Terre. A l'équateur géomagnétique (à $r = 6371$ km dans le plan perpendiculaire au moment magnétique), le champ magnétique terrestre vaut approximativement $3,2 \cdot 10^{-5}$ T. En déduire la norme du moment magnétique correspondant. Donner un ordre de grandeur du champ magnétique terrestre en un point dans le plan équatorial terrestre, à la distance $r = 42000$ km du centre de la Terre.

Forces magnétiques

I. Dipôle rigide dans un champ magnétique uniforme

Une spire conductrice rectangulaire de côtés a et b est parcourue par un courant constant d'intensité I . On note H et H' les milieux des côtés de longueur a . La direction \vec{HH}' définit l'axe $x'Ox$, O étant le centre de la spire. On suppose que le seul mouvement possible de la spire est une rotation autour de $x'Ox$. La spire est placée dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} dont la direction $z'Oz$ est perpendiculaire à $x'Ox$. On note α l'angle que fait la normale orientée de la spire avec l'axe $z'Oz$.



1°) Montrer que la résultante des forces magnétiques s'exerçant sur la spire est nulle.

2°) Calculer le moment résultant au point O de ces forces, noté $\vec{\Gamma}$. Retrouver la relation

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique de la spire.

3°) Exprimer le travail dW des forces magnétiques correspondant à une variation infinitésimale $d\alpha$ de l'angle α , I étant maintenu constant. Retrouver la relation

$$dW = Id\Phi$$

où Φ est le flux de \vec{B} à travers la surface orientée de la spire.

4°) Définir l'énergie potentielle magnétique U de la spire plongée dans le champ \vec{B} . Retrouver la relation

$$U = - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

5°) Trouver les positions d'équilibre de la spire dans le champ \vec{B} et en discuter la stabilité.

6°) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la spire en rotation autour de $x'Ox$ (on introduira le moment d'inertie J de la spire par rapport à l'axe de rotation).

II - Effet Hall dans un semi-conducteur

On veut étudier la conductivité du Silicium, due à des porteurs de charge $q = \pm e$ et de masse m et notamment déterminer la densité n de ces porteurs ainsi que le signe de leur charge.

Entre les deux électrodes disposées aux deux extrémités d'un barreau de Silicium de forme parallélépipédique, on applique une tension continue V_0 (voir figure). Le barreau est supposé long ($c \gg a, b$). Il est parcouru par un courant d'intensité constante I , avec une densité volumique de courant uniforme J_y .

Dans le modèle classique de la conduction électrique, en plus de l'effet du champ électrique appliqué, les porteurs de charges subissent des collisions dont on admet qu'elles sont équivalentes à une force de frottement $\vec{f}_c = -m \vec{v} / \tau$, opposée à la vitesse \vec{v} des porteurs.

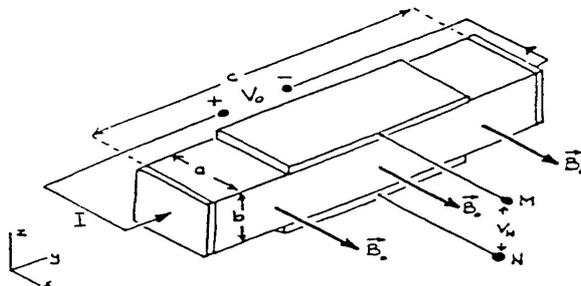
1°) Montrer qu'en régime permanent la vitesse d'entraînement \vec{u} des porteurs s'écrit sous la forme $\vec{u} = \mu \vec{E}$, où \vec{E} est le champ électrique appliqué. Le paramètre μ est la mobilité des porteurs.

2°) Exprimer la conductivité électrique γ du Silicium en fonction de μ , puis de τ . La mesure de γ permet-elle de déterminer le signe de la charge des porteurs ?

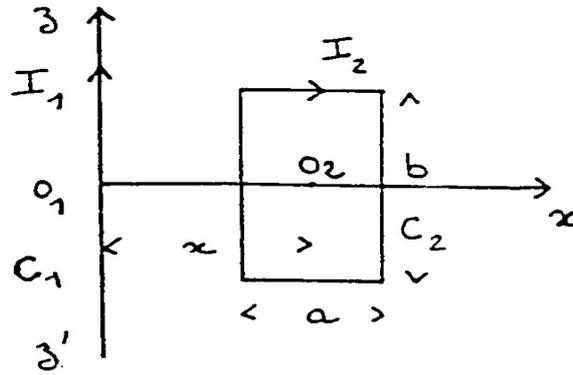
3°) Le barreau de Silicium est maintenant plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$. Le champ magnétique dû au courant I est négligeable devant B_0 .

a) Montrer qu'il apparaît alors un champ électrique transversal $\vec{E}_h = E_h \vec{e}_z$ et une tension correspondante V_h , appelée tension de Hall, entre les électrodes M et N . Montrer que la mesure de cette tension permet de déterminer n et le signe de la charge des porteurs.

b) A.N. On donne $I = 10 \text{ mA}$, $V_0 = 4 \text{ V}$, $B_0 = 0,1 \text{ T}$, $a = b = 0,2 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ cm}$, $V_N - V_M = 0,21 \text{ mV}$; calculer γ , n et μ . Indiquer la nature des porteurs (électrons ou trous).



III - Cadre dans un champ magnétique non uniforme



Un conducteur rectiligne filiforme C_1 de longueur pratiquement infinie est confondu avec l'axe $z'O_1z$ d'un repère cartésien O_1xyz . On place à proximité de C_1 , dans le plan O_1xz , un circuit conducteur C_2 ayant la forme d'un cadre rigide rectangulaire de côtés a et b ($b > a$) et ne comportant qu'une spire de fil conducteur. Le centre O_2 de C_2 est sur l'axe O_1x à la distance x de O_1 et ses deux côtés de longueur b sont parallèles à $z'O_1z$. Les circuits C_1 et C_2 sont parcourus par des courants constants d'intensité I_1 et I_2 respectivement. Leurs sens sont précisés sur la figure.

1°) a) Calculer les forces magnétiques s'exerçant sur chacun des côtés du cadre C_2 , puis en déterminer la résultante \vec{R} .

b) Trouver l'expression de \vec{R} lorsque $x \gg a$.

2°) Calculer le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ magnétique \vec{B}_1 dû à C_1 à travers la surface de C_2 :

a) en utilisant l'expression de \vec{B}_1 ;

b) en utilisant l'expression du potentiel vecteur \vec{A}_1 associé à \vec{B}_1 .

3°) a) Quelle est la variation élémentaire $d\Phi_{1 \rightarrow 2}$ correspondant à un déplacement élémentaire dx parallèle à O_1x du centre O_2 de C_2 ?

b) Dédire de l'expression de $d\Phi_{1 \rightarrow 2}$ le travail élémentaire dW de la résultante \vec{R} au cours du déplacement considéré et retrouver l'expression de \vec{R} obtenue au 1° a).

4°) Calculer le coefficient d'induction mutuelle \mathcal{M} de C_1 et C_2 :

a) lorsque les deux côtés de longueur b de C_2 sont parallèles à $z'O_1z$;

b) lorsque les deux côtés de longueur a de C_2 sont parallèles à $z'O_1z$.

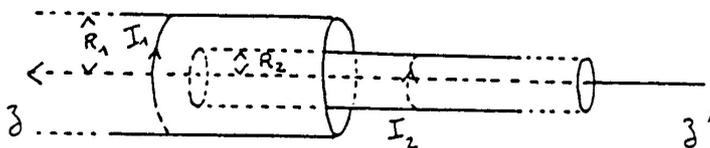
c) En justifiant la réponse, dire quelle est la plus stable de ces deux configurations, lorsque $x = b = 2a$.

IV - Solénoïde “plongeur”

Un solénoïde mince S_1 de longueur h_1 très grande devant son rayon R_1 comporte n_1 spires jointives filiformes par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant continu d'intensité I_1 .

On introduit dans ce solénoïde un autre solénoïde S_2 de rayon $R_2 < R_1$ et de longueur h_2 très grande devant R_2 . Ce second solénoïde comporte n_2 spires jointives filiformes par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant continu d'intensité I_2 de même sens que I_1 . Les deux solénoïdes sont coaxiaux. L'une des extrémités de S_2 est nettement à l'intérieur de S_1 , tandis que l'autre est nettement à l'extérieur de S_1 (voir figure). On note Σ_2 la surface fermée limitant S_2 (surface latérale + surface des bases).

- 1°) Quel est le flux du champ \vec{B}_1 créé par S_1 à travers Σ_2 ?
- 2°) a) Quel est le flux de \vec{B}_1 à travers la surface de base de S_2 intérieure à S_1 ?
b) Quel est le flux de \vec{B}_1 à travers la surface de base de S_2 extérieure à S_1 ?
c) Dédire de ces résultats le flux Φ_ℓ de \vec{B}_1 à travers la surface latérale de S_2 . Que peut-on en conclure ?
- 3°) Pour des points M proches des extrémités de S_1 , le champ $\vec{B}_1(M)$ a deux composantes : l'une B_{1z} parallèlement à l'axe $z'z$ de S_1 , l'autre radiale $B_{1\rho}$ perpendiculairement à cet axe.
 - a) Préciser de quelles variables dépendent effectivement ces deux composantes.
 - b) Donner l'expression de la force résultante élémentaire $d\vec{F}$ qu'exerce S_1 sur une tranche de hauteur dz de S_2 située à proximité d'un bord de S_1 , en supposant connues les composantes de \vec{B}_1 dans cette région.
 - c) Quel est le flux $d\Phi_\ell$ de \vec{B}_1 à travers la surface latérale de la tranche de solénoïde S_2 considérée ?
 - d) Ecrire $d\vec{F}$ en fonction de $d\Phi_\ell$ et en déduire la force résultante \vec{F}_1 qu'exerce le solénoïde S_1 sur la totalité du solénoïde S_2 . Quelle est son orientation ? Comparer ce résultat à celui prévu par la règle du flux maximum.
- 4°) Retrouver l'expression de \vec{F}_1 à partir du coefficient d'induction mutuelle des deux solénoïdes.



- Partie I -

On considère un fil conducteur ayant la forme d'un cylindre \mathcal{C}_1 de rayon a , de longueur infinie, et dont l'axe se confond avec l'axe $z'z$ d'un repère cartésien $Oxyz$. Ce conducteur transporte un courant électrique d'intensité I . Le vecteur densité volumique de courant correspondant est *uniforme* et donné par $\vec{J} = J \vec{e}_z$ avec $J > 0$, \vec{e}_z étant le vecteur unitaire de l'axe $z'z$.

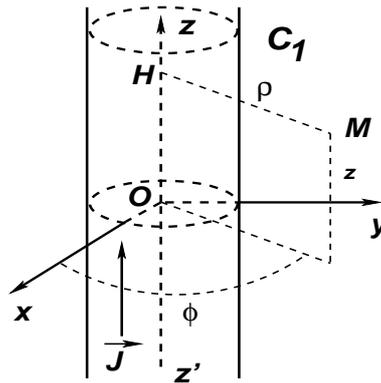


Figure 1

On rappelle les expressions, en coordonnées cylindriques, du rotationnel et de la divergence d'un champ de vecteurs \vec{V} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{V} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned}$$

1°) Exploiter les symétries de cette distribution de courant et appliquer judicieusement le Théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par ce courant en tout M de l'espace, en repérant celui-ci par ses coordonnées cylindriques ρ , φ et z .

2°) Déterminer un potentiel vecteur $\vec{A}_1(M)$ associé satisfaisant la jauge de Coulomb ($\text{div } \vec{A} = 0$) et en convenant que celui-ci s'annule sur la surface de \mathcal{C}_1 .

3°) Montrer que le champ magnétique peut s'exprimer sous la forme

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM} F(\rho), \text{ avec } F(\rho) = \frac{1}{a^2} \text{ si } \rho \leq a \text{ et } F(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \text{ si } \rho \geq a$$

H étant le point projection orthogonale de M sur $z'z$ (voir figure 1).

- Partie II -

Un circuit est constitué de deux fils conducteurs cylindriques parallèles à $z'z$, tels que celui étudié dans la première partie (figure 2). Ils sont distants de $h > 2a$. Le premier conducteur C_1 dont l'axe Δ_1 est situé dans le plan xOz à l'abscisse $x_1 = h/2$ transporte un courant d'intensité I dans le sens $z'z$. Le second conducteur C_2 , dont l'axe Δ_2 est aussi dans le plan xOz à l'abscisse $x_2 = -h/2$, transporte un courant de même intensité I , mais dans le sens inverse zz' . Ici encore, les densités volumiques de courant dans les conducteurs sont uniformes.

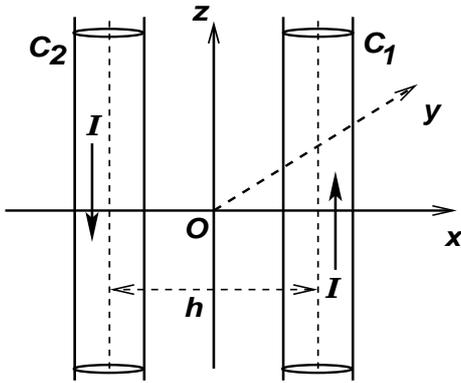


Figure 2

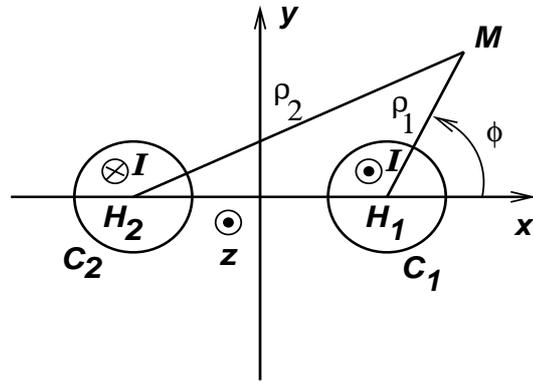


Figure 3

4°) Utiliser le résultat du 3°) pour exprimer le champ magnétique total $\vec{B}(M)$ créé par cette nouvelle distribution en un point M , en fonction des distances $\rho_1 = H_1M$ et $\rho_2 = H_2M$ de ce point par rapport à Δ_1 et Δ_2 , H_1 et H_2 étant les projections orthogonales de M sur Δ_1 et Δ_2 , respectivement (figure 3). On distinguera les trois régions : région (1) extérieure à C_1 et à C_2 ; région (2) intérieure à C_1 ; région (3) intérieure à C_2 .

5°) Déterminer, en fonction de ρ_1 et ρ_2 , un potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ associé à ce champ magnétique, qui satisfait la jauge de Coulomb et qui s'annule en tout point équidistant de Δ_1 et Δ_2 (c'est-à-dire, pour $\rho_1 = \rho_2$). On en donnera l'expression pour chacune des trois régions (1), (2) et (3) précitées, en s'attachant à respecter la continuité de ce potentiel vecteur au passage d'une région à l'autre.

6°) On utilise un système de coordonnées cylindriques défini par rapport à Δ_1 . La position d'un point un point M est défini par : sa distance $\rho_1 = H_1M$ à l'axe Δ_1 , l'angle azimutal φ qui est l'angle de $\vec{H_1M}$ par rapport à $x'x$, et sa cote z le long de Δ_1 . Exprimer ρ_2^2 en fonction de ρ_1 , φ et a .

- Partie III -

7°) On considère une portion de longueur ℓ du conducteur C_1 . Calculer la force de Laplace

$$\vec{F}_{2/1} = \int_{V_1} \vec{J}_1 \wedge \vec{B}_2 d\tau_1$$

que le conducteur C_2 exerce sur cette portion. Il s'agit d'une intégrale *triple* sur tout le volume V_1 de ladite portion. Pour effectuer ce calcul, utiliser le système de coordonnées cylindriques définies par rapport à Δ_1 . On donne, pour $\rho_1 < h$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{h + \rho_1 \cos \varphi}{h^2 + \rho_1^2 + 2h\rho_1 \cos \varphi} = \frac{2\pi}{h} \quad , \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin \varphi}{h^2 + \rho_1^2 + 2h\rho_1 \cos \varphi} = 0$$

8°) Cette force est-elle attractive ou répulsive? Pouvait-on prévoir le résultat?

9°) On rappelle l'expression de l'énergie magnétique propre d'un circuit (intégrale triple) :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} \, d\tau$$

\vec{J} étant le vecteur densité volumique de courant en un point du circuit et \vec{A} le potentiel vecteur créé par le circuit en ce point. L'intégrale est en principe étendue à tout le volume du circuit. Cependant, ici, on n'envisagera que la contribution W_ℓ à cette énergie d'une portion de longueur ℓ du circuit, constituée par une portion de longueur ℓ de \mathcal{C}_1 et une portion de longueur ℓ de \mathcal{C}_2 , symétriques l'une de l'autre par rapport au plan yOz .

a) Calculer W_ℓ/ℓ en fonction de a et h . On donne

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \ln [h^2 + \rho_1^2 + 2h\rho_1 \cos \varphi] = 4\pi \ln h \quad \text{pour} \quad \rho_1 \leq h$$

Conseil : tenir compte de la symétrie par rapport au plan yOz .

b) Montrer que le coefficient d'auto-induction par unité de longueur \mathcal{L} du circuit est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{h}{a} \right) \right]$$

c) Exprimer W_ℓ/ℓ en fonction de \mathcal{L} , puis retrouver l'expression de $\vec{F}_{2/1}$ calculée au 7°).

VI. 1°) Montrer que le champ magnétique dû en un point P à un dipôle magnétique de moment \vec{M} situé en O peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{M}}{r^3} + 3(\vec{M} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5} \right)$$

où $\vec{r} = \vec{OP}$.

2°) Déterminer l'énergie potentielle du système formé de deux dipôles magnétiques de moments magnétiques respectifs \vec{M}_1 et \vec{M}_2 séparés de la distance $r = O_1O_2$.

3°) Montrer que la force \vec{F}_1 s'exerçant sur \vec{M}_1 s'écrit sous la forme

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(a \vec{r} + b \vec{M}_1 + c \vec{M}_2 \right)$$

avec $\vec{r} = \vec{O_1O_2}$ et expliciter a , b et c en fonction de \vec{M}_1 , \vec{M}_2 et \vec{r} .

VII. Electro-dynamomètre. Une petite bobine plane comportant N spires identiques de surface S est fixée à l'extrémité du fléau d'une balance. Le fléau ainsi que la plan de la bobine sont maintenus horizontaux en plaçant une masse m_0 sur le plateau de la balance. La bobine est alors placée à l'intérieur d'un très long solénoïde d'axe horizontal. Quelle masse m faut-il ajouter sur le plateau de la balance si l'on veut que celle-ci reste en équilibre lorsqu'on établit un courant continu de même intensité I dans le solénoïde et la bobine ?

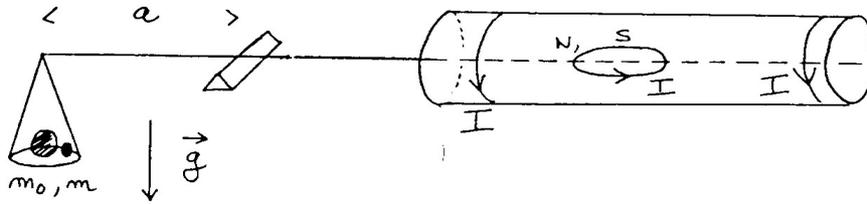


Schéma d'un électrodynamomètre

VIII. Champs d'un faisceau d'électrons.

Tout point de l'espace est repéré au moyen de ses coordonnées *cylindriques* r (attention à la notation), φ et z . Des électrons de charges $-e$ formant un faisceau se déplacent dans le vide suivant le sens positif de l'axe des z avec une vitesse constante et uniforme $\vec{v} = v \vec{e}_z$. Le nombre d'électrons par unité de volume ne dépend que de r et est noté $n(r)$.

1°) Déterminer en un point quelconque de l'espace la densité volumique de charges $\rho(r)$ et la densité volumique de courant $\vec{J}(r)$.

2°) Donner, en les justifiant, les directions respectives du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace, en supposant le faisceau infini suivant $z'z$.

3°) On donne

$$n(r) = n_0 e^{-r^2/r_0^2}$$

Déterminer \vec{E} et \vec{B} en tout point de l'espace, puis le rapport des modules E/B . Montrer que ce rapport est indépendant de l'expression de $n(r)$.

4°) Déterminer la force de Lorentz subie par un électron du faisceau. Montrer que l'hypothèse d'une vitesse \vec{v} uniforme et constante ne peut être strictement vérifiée que pour une condition limite bien précise. Laquelle ?

IX. Une particule de charge q est immobile dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Quelles forces subit-elle, respectivement, dans le référentiel du laboratoire et dans un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au laboratoire ? Ce résultat est-il compatible avec l'invariance galiléenne ?

X. Un fil parcouru par un courant continu d'intensité I traverse une région de longueur ℓ où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} , orthogonal au fil. Donner l'expression de la force agissant sur le fil dans cette région. En déduire quelle serait la densité de courant

nécessaire pour faire léviter une tige de cuivre à l'équateur, sachant que le champ magnétique terrestre y est horizontal et a pour intensité $B = 10^{-4}$ T. La masse volumique du cuivre est $\rho = 9 \text{ g/cm}^3$. La résistivité du cuivre étant de $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, quelle serait alors la puissance électrique dissipée par unité de volume du cuivre ?

XI. Montrer que deux fils conducteurs parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent sous l'action de forces magnétiques. Le même effet d'attraction pourrait-il se manifester entre les filets infinitésimaux de courant à l'intérieur d'un fil conducteur, modifiant ainsi la répartition du courant, usuellement supposée uniforme sur toute la section du fil ? Doit-on s'attendre à ce que la densité de courant :

- a) soit tout de même uniforme ?
- b) soit plus concentrée vers le cœur du fil ?
- c) soit plus concentrée vers la surface ?

XII. Vélocimètre électromagnétique. Faraday, 1832. Un fluide conducteur circule avec la vitesse \vec{u} dans un tube de verre placé entre les pôles d'un électroaimant. Le fluide est électriquement neutre : les concentrations en ions positifs et ions négatifs sont égales. Ces ions, dont les charges sont opposées, ont la vitesse \vec{u} du fluide. De part et d'autre du tube, on place des électrodes en contact avec le fluide.

1°) Le tube est de forme parallélépipédique avec une section droite rectangulaire (figure 1). La vitesse d'écoulement $\vec{u} = u \vec{e}_y$ est uniforme et est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_x$.

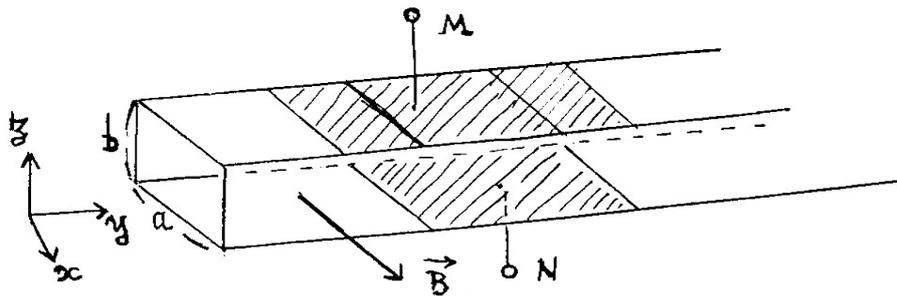


Figure 1

A quelles forces sont soumis les ions ? Montrer qu'il apparaît un champ électrique transversal et que l'on mesure une tension entre les électrodes M et N . Montrer qu'en régime permanent la mesure de cette tension permet en principe de déterminer la vitesse d'écoulement du fluide.

2°) Le tube est un cylindre de rayon a . La vitesse du fluide est de la forme

$$\vec{u} = u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \vec{e}_z$$

où ρ est la coordonnée radiale. Les électrodes sont ponctuelles et placées aux extrémités d'un diamètre, perpendiculairement au champ \vec{B} (figure 2).

Déterminer le champ électrique qui apparaît en chaque point du diamètre MN et en déduire la tension $V_M - V_N$. Exprimer cette dernière en fonction du débit volumique D du fluide.

3°) En fait, le résultat établi au 2°) est incorrect comme expliqué ci-après.

a) Représenter par des flèches le champ de vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{B}$ en différents points d'une section droite du tube. Ce champ est-il uniforme ? Montrer qualitativement que des courants électriques apparaissent dans le fluide, ce qui entraîne une chute de potentiel, modifiant ainsi le résultat du 2°).

b) Tracer les lignes de courant correspondantes dans une section droite du tube.

c) Calculer le rotationnel de $\vec{u} \wedge \vec{B}$. Quel est son lien avec le dessin du b) ?

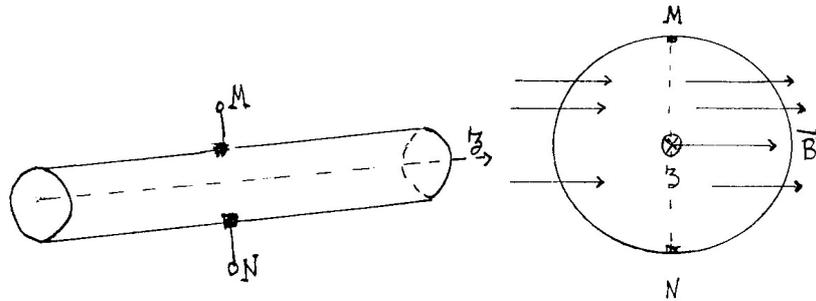
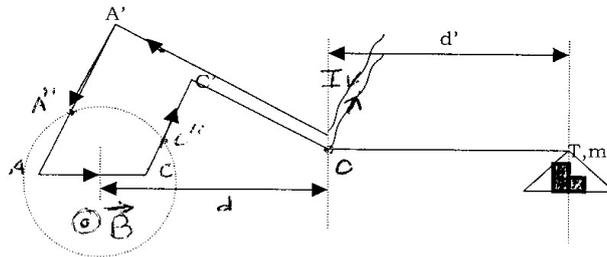


Figure 2

XIII. Balance de Cotton.



La balance de Cotton est un appareil permettant de mesurer la norme d'un champ magnétique. Il comprend un levier coudé rigide, mobile autour d'un axe horizontal passant par O (voir figure). Un courant électrique d'intensité I circule le long du bras OA' , dans les arcs de cercle AA' et CC' et dans la partie rectiligne $AC' = \ell$. Un champ magnétique uniforme \vec{B} uniforme, normal au plan de la figure, agit dans le domaine délimité par le cercle en traits pointillés. En l'absence de courant, l'équilibre mécanique est réalisé par une tare T sur la balance. Au passage du courant, l'équilibre est rétabli en y rajoutant une masse m .

Donner la relation entre $B = || \vec{B} ||$, I , m et les caractéristiques géométriques du système.

Calculer numériquement B dans le cas suivant : $d = d'$, $\ell = 3 \text{ cm}$, $m = 0,2 \text{ g}$, $I = 8 \text{ A}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

XIV. Un métal, considéré comme parfaitement conducteur, occupe le demi-espace $x > 0$. Dans le plan yz circulent des courants superficiels de densité surfacique uniforme $\vec{J}_s = J \vec{e}_z$.

On se propose de déterminer la force magnétique \vec{dF} qui s'exerce sur un élément de surface $dS = dydz$ autour d'un point M situé sur la surface yz du métal. On admettra que

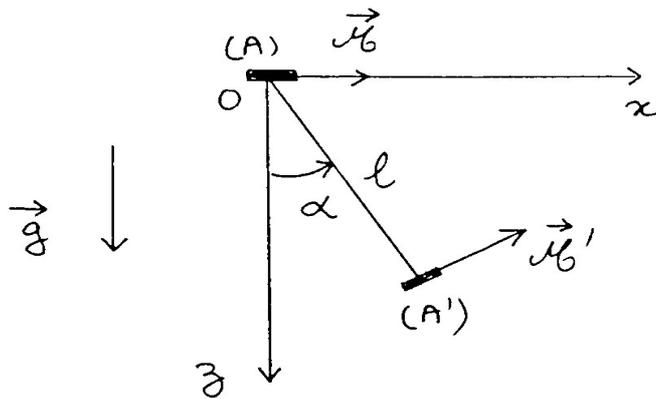
- la perméabilité du métal est celle du vide μ_0 ;
- le champ magnétique dans le métal ($x > 0$) est nul ;
- le champ magnétique \vec{B}' agissant sur la surface dS est la moitié du champ \vec{B} créé en M par la totalité de la nappe de courant.

1°) Utiliser les symétries de la nappe de courant pour déterminer la direction et le sens du champ total \vec{B} et préciser de quelles variables il dépend réellement. Calculer \vec{B} et donc \vec{B}' .

2°) Calculer \vec{dF} et en déduire la force par unité de surface subie par la surface métallique (pression de radiation magnétique). Quel est le sens de cette force ? Que dire de ce résultat par rapport à celui obtenu en Electrostatique ?

XV. On considère le dispositif suivant (voir figure). Un petit aimant (A) est fixé en un point O . Son moment magnétique \vec{M} est orienté suivant un axe horizontal Ox . L'axe Oz est selon la verticale descendante. Un deuxième petit aimant (A') de masse m est relié au point O par un fil de longueur $OA' = \ell$, non conducteur, rigide, inextensible et de masse négligeable. On se limite aux mouvements du fil ayant lieu dans le plan xOz . On note α l'angle (\vec{Oz}, \vec{OA}') . Le moment magnétique \vec{M}' de (A') est situé dans le plan xOz , perpendiculairement à \vec{OA}' , de telle sorte que pour $\alpha = 0$, \vec{M}' est parallèle à \vec{M} . On admet que l'on peut négliger tout frottement, ainsi que le champ magnétique terrestre.

A la date $t = 0$, le fil OA' , écarté d'un angle $\alpha_0 > 0$ de la verticale, est lâché sans vitesse initiale.

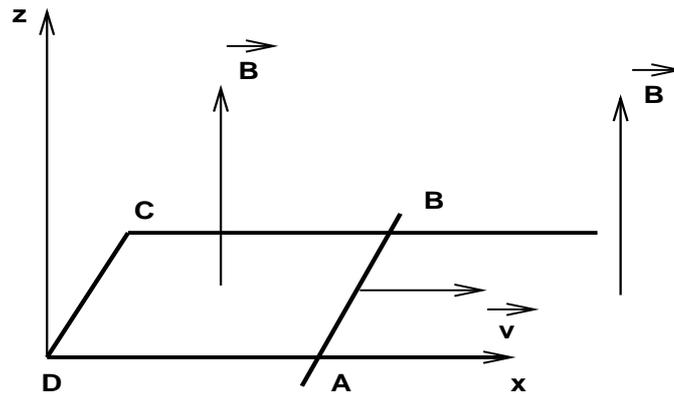


1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'aimant (A') entre les dates t et $t + dt$, établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $\alpha(t)$ au cours du temps.

2°) Discuter la nature du mouvement de (A') suivant la valeur de M' .

Phénomènes d'induction électromagnétique

I. On considère un pont roulant constitué d'une barre métallique mobile AB pouvant se déplacer sans frottement sur deux rails métalliques parallèles horizontaux, en restant toujours perpendiculaires à ceux-ci. Les rails sont espacés d'une distance L et reliés à une des extrémités du pont par une barre métallique CD . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique statique uniforme et vertical $\vec{B} = B \vec{e}_z$ (voir figure).



On suppose que la barre AB se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

1°) Montrer que l'action de la force de Lorentz \vec{f}_{Lo} s'exerçant sur chacun des électrons de conduction à l'intérieur de la barre AB suffit à expliquer l'apparition d'un courant induit dans le circuit du pont roulant. Préciser le sens de déplacement des électrons et le sens du courant correspondant.

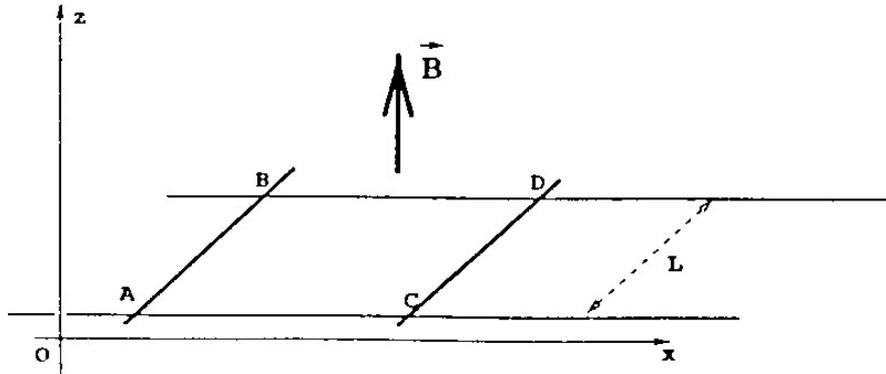
2°) Déterminer la force de Laplace agissant sur chaque élément du circuit parcouru par le courant induit. Montrer que le sens de cette force est conforme à la loi de Lenz (règle de modération).

3°) Déterminer le champ électrique électromoteur \vec{E}_m , puis la force électromotrice d'induction \mathcal{E} . Comment cette fem est-elle liée à la variation du flux de \vec{B} à travers la surface du circuit (Loi de Faraday) ?

4°) Le courant induit est lui-même source d'un champ magnétique induit \vec{B}_i . Montrer que le sens de ce champ à l'intérieur comme à l'extérieur du circuit est conforme à la loi de Lenz.

II. Deux rails rectilignes conducteurs sont disposés parallèlement à la distance L l'un de l'autre dans un plan horizontal. Sur ces deux rails sont posées deux barres conductrices AB et CD pouvant se déplacer sans frottement sur les rails tout en restant perpendiculaires à ceux-ci. On supposera que le circuit rectangulaire $ABCD$ ainsi formé a, quelles que soient les positions des barres AB et CD , une résistance égale à R et un coefficient d'auto-induction négligeable.

L'ensemble se trouve dans un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$ orienté suivant la verticale ascendante Oz . L'axe Ox est défini par la direction des rails. Initialement, les deux barres sont immobiles, AB à l'abscisse $x = 0$ et CD à l'abscisse $x = d > 0$. A la date $t = 0$, on lance AB vers CD avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.



1°) a) Expliquer pourquoi un courant apparaît dans le circuit $ABCD$; dans quel sens circule ce courant ?

b) Expliquer pourquoi la barre CD se met en mouvement et déterminer le sens de ce mouvement.

2°) On désigne par $\vec{v}_A(t) = v_A(t) \vec{e}_x$ et $\vec{v}_C(t) = v_C(t) \vec{e}_x$ les vitesses respectives de AB et CD à la date t . Exprimer en fonction de B , L , $v_A(t)$ et $v_C(t)$ la variation, entre les deux dates t et $t + dt$, du flux de \vec{B} à travers la surface du circuit $ABCD$, orientée suivant \vec{e}_z .

3°) Exprimer en fonction de B , L , $v_A(t)$, $v_C(t)$ et R l'intensité $i(t)$ du courant induit circulant dans le circuit $ABCD$.

4°) Calculer les forces magnétiques s'exerçant sur AB et CD . Préciser leur direction et sens respectifs.

5°) Les deux barres ont même masse m . Etablir les équations différentielles satisfaites par $v_A(t)$ et $v_C(t)$, décrivant les mouvements de AB et CD .

6°) On pose $u = v_A - v_C$.

a) trouver l'équation différentielle satisfaite par u .

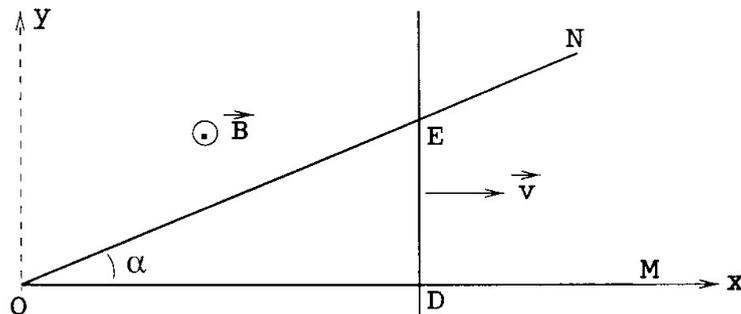
b) Intégrer cette équation et trouver $u(t)$, compte-tenu des conditions initiales. En déduire $i(t)$.

7°) Trouver ensuite $v_A(t)$ et $v_C(t)$. En admettant que les barres AB et CD restent toujours séparées, quelles sont les vitesses limites v_A^∞ et v_C^∞ lorsque t tend vers l'infini? Quelle est alors l'intensité du courant induit ?

8°) Calculer l'énergie dissipée par effet Joule et la variation d'énergie cinétique entre les instants initial $t = 0$ et final $t \rightarrow \infty$. Interpréter les résultats.

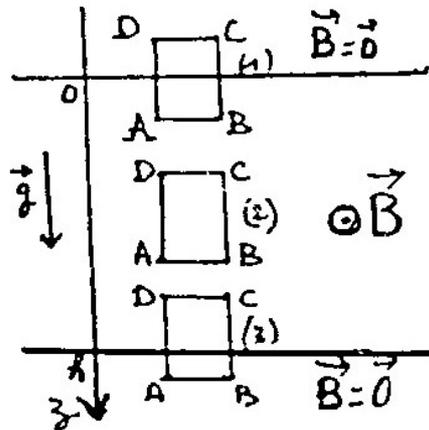
III. Deux fils conducteurs rectilignes semi-infinis OM et ON forment un angle α . Le circuit est fermé par une barre métallique DE , de grande longueur, pouvant glisser sans frottement en restant toujours perpendiculaire à OM chois comme axe des x (voir figure). L'ensemble du circuit se trouve dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B \vec{e}_z$. A la date $t = 0$, D est en x_0 et on impose à la barre un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

Les deux fils conducteurs semi-infinis ont une résistance électrique négligeable tandis que la barre DE a une résistance électrique *par unit'e de longueur* r (donc $R_{DE} = r DE$).



- 1°) Expliquer pourquoi un courant électrique apparaît dans le circuit. Préciser son sens.
- 2°) Trouver l'expression de la force électromotrice \mathcal{E} induite dans le circuit.
- 3°) Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant. Application numérique : $B = 0,5 \text{ T}$; $v_0 = 2 \text{ m/s}$; $r = 7 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m}$.
- 4°) Quelle force faut-il exercer sur la barre DE pour maintenir sa vitesse constante ? Calculer la puissance développée par cette force et la puissance dissipée par effet Joule. Comparer les valeurs obtenues.
- 5°) Calculer la quantité de charge qui a traversé une section droite de la barre lorsque celle-ci a été déplacée de 1 m. Application numérique.

IV. Dans la zone de l'espace comprise entre les plans $z = 0$ et $z = h$ règne un champ magnétique \vec{B} uniforme et horizontal (voir figure). Dans la région $z < 0$ se trouve un cadre métallique rectangulaire, indéformable, de masse m et de résistance électrique R . Les côtés AB et CD sont horizontaux et de longueur a , les côtés BC et AD sont verticaux et de longueur $b < h$. Le plan du cadre est perpendiculaire au champ. Le cadre, abandonné sans vitesse initiale, traverse dans sa chute la région où règne le champ \vec{B} .



1°) Pour chacun des cas (1), (2) et (3) indiqués dans la figure, établir, en explicitant les étapes du raisonnement, l'équation du mouvement du cadre. Dans chaque cas, on précisera sur un schéma le sens des grandeurs électriques et mécaniques qui interviennent. On considère que le champ magnétique induit reste négligeable et l'on néglige aussi la résistance de l'air. L'accélération de la pesanteur est constante dans tout le domaine envisagé.

2°) Résoudre l'équation du mouvement dans le cas (1), le cadre étant abandonné à la date $t = 0$ sans vitesse initiale alors que son côté AB est à la cote $z = 0$. Tracer la graphie de la vitesse $v(t)$ dans le cas où $B^2 a^2 \gg mR$.

3°) Application numérique.

$a = b = 20 \text{ cm}$; $m = 10 \text{ g}$; $B = 1 \text{ T}$; $R = 0,1 \Omega$; $g = 10 \text{ m/s}^2$. Calculer la vitesse prise par le cadre au bout de $t = 0,5 \text{ s}$. Comparer avec ce que l'on obtient en l'absence de champ magnétique.

V. Pince ampèremétrique.

Un solénoïde torique est constitué par N spires jointives de section rectangulaire d'aire $S = ab$, dont les centres sont à la distance r de l'axe Δ du solénoïde. Un fil conducteur confondu avec Δ est parcouru par un courant d'intensité variable $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Le solénoïde est fermé sur une résistance R .

1°) Calculer le coefficient d'auto-induction L du solénoïde ainsi que le coefficient d'induction mutuelle M du fil et de la bobine en effectuant des calculs de flux magnétiques.

2°) Déterminer en régime permanent l'intensité $i(t)$ du courant induit dans la bobine.

VI. Principe du transformateur.

Une bobine torique est réalisée par l'enroulement régulier de N_1 spires d'un fil conducteur très fin sur un tore de rayon moyen r et de section carrée de côté a . On réalise autour de cet enroulement un second enroulement de N_2 spires du même fil très fin. Le fil étant très fin, le volume torique ne change pratiquement pas (mêmes spires de côté a et de rayon moyen r).

1°) Calculer les coefficients d'auto-induction respectifs L_1 et L_2 des deux enroulements ainsi que leur coefficient d'induction mutuelle M . Pour cela, on envisagera le cas où chacune des deux bobines est parcourue par un courant d'intensité constante. Puis on calculera l'énergie magnétique correspondante de l'ensemble par intégration de la densité d'énergie magnétique. Enfin, on identifiera les coefficients cherchés à partir de l'expression obtenue pour cette énergie. Trouver une relation entre L_1 , L_2 et M .

2°) La première bobine est alimentée par un générateur délivrant une tension variable $U_1(t)$, tandis que la seconde bobine est fermée sur une résistance R_2 . On supposera les résistances des deux enroulements négligeables.

a) En considérant le flux du champ magnétique total à travers chaque circuit, établir les équations différentielles couplées régissant les évolutions des intensités $I_1(t)$ et $I_2(t)$ des courants circulant dans la première et dans la seconde bobine respectivement.

b) Calculer le rapport U_2/U_1 , où U_2 est la tension aux bornes de la résistance R_2 .

3°) La tension du générateur est représentée par l'expression complexe $\underline{U}_1(t) = \exp(i\omega t)$.

a) Déterminer $I_1(t)$ et $I_2(t)$ en régime permanent.

b) Calculer la puissance instantanée $P(t)$ fournie par le générateur puis sa valeur moyenne dans le temps.

VII. Moteur asynchrone. Une petite bobine plate de résistance R est constituée de N spires d'aire S . Sa normale \vec{n} tourne dans le plan xOy autour de l'axe \vec{Oz} avec la vitesse angulaire constante ω . Autour du même axe \vec{Oz} un champ magnétique \vec{B} de module constant B tourne aussi parallèlement au plan xOy à la vitesse angulaire constante ω_0 .

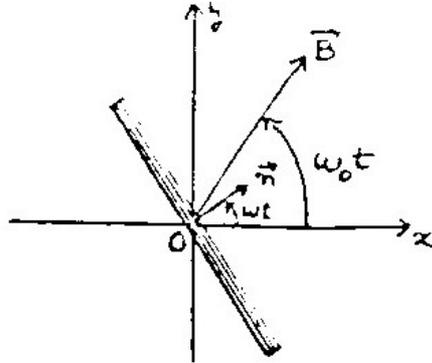
1°) Montrer que la bobine est le siège d'une force électromotrice induite $e(t)$ que l'on calculera.

2°) Calculer l'intensité $i(t)$ du courant induit dans la bobine de coefficient d'auto-induction L .

3°) Calculer la valeur instantanée du moment $\vec{\Gamma}$ du couple de forces auquel est soumise la

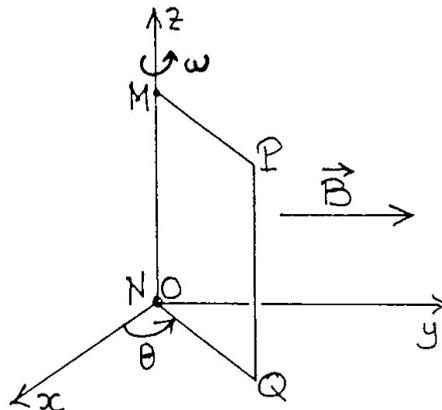
bobine, puis sa moyenne temporelle.

4°) Quelle condition doivent remplir ω et ω_0 pour que ce dispositif puisse fonctionner en moteur ?



VIII. Cadre métallique tournant dans un champ magnétique. Extrait d'examen de DEUG SSM2, janvier 1993.

Un cadre métallique carré peut tourner autour d'un de ses côtés MN (voir figure). Il est placé dans un champ magnétique uniforme et statique \vec{B} perpendiculaire à MN . La position du cadre est repérée dans un repère cartésien $Oxyz$, les axes étant orientés suivant les indications de la figure (en particulier, \vec{B} est parallèle à Oy). On note θ l'angle entre le plan du cadre et le plan xOz . La résistance électrique du cadre est négligeable. On note L son coefficient d'auto-induction et $a = MN$.



1°) A la date $t = 0$, le cadre étant dans la position $\theta = 0$, on le lance avec une vitesse angulaire ω_0 . Décrire brièvement les fem induites dans le cadre.

2°) Ecrire l'équation électrique reliant $\theta(t)$ à l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le cadre et/ou leurs dérivées par rapport au temps. On posera $\Phi_0 = Ba^2$.

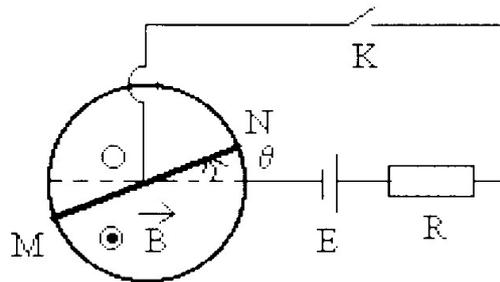
3°) En déduire une relation entre $\theta(t)$ et $i(t)$ en admettant que $i(0) = 0$.

4°) Exprimer le moment Γ par rapport à Oz des forces magnétiques agissant sur le cadre en fonction de θ . Tracer le graphe des variations de Γ en fonction de θ pour θ variant entre 0 et 2π . Indiquer dans quelles positions le couple de forces correspondant est soit résistant soit moteur.

5°) On note m la masse du côté PQ du cadre. On rappelle que l'expression de l'énergie cinétique de rotation du cadre est $T = ma^2\omega^2(t)/2$. Quelle est l'énergie totale du cadre à la date t ? En déduire une relation entre $i(t)$ et $\omega(t)$.

6°) A partir des résultats du 3° et du 5°, montrer qu'il existe une valeur critique ω_c de ω telle que si $\omega_0 > \omega_c$, la vitesse du cadre ne s'annule jamais. Calculer ω_c . Décrire qualitativement le mouvement du cadre lorsque $\omega_0 < \omega_c$.

IX. Une tige métallique homogène MN , de longueur $2a$, de résistance électrique $2r$, de masse m , peut être mise en rotation autour de son centre O tout en restant dans le plan xOy . Ses extrémités M et N glissent sur une spire métallique circulaire de centre O et de rayon a . La résistance électrique de la spire est négligeable. Le centre O et un point de la spire sont reliés à un circuit électrique comportant un générateur délivrant une tension constante E et dont la résistance électrique totale est R . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, perpendiculaire au plan de la spire (voir figure).



A la date $t = 0$, la barre MN étant immobile dans la position $\theta = 0$, on ferme l'interrupteur K . On se propose de déterminer $\theta(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant électrique dans la branche du générateur, sachant que la tige est soumise à un couple de frottement de moment $\vec{\Gamma}_f = -h\dot{\theta} \vec{e}_z$.

1°) (*) Etablir l'équation électrique du circuit et l'équation mécanique du mouvement de MN .

2°) Résoudre les équations obtenues pour obtenir $\theta(t)$ et $i(t)$.

3°) Faire un bilan énergétique.

X. Champ électrique induit. Un solénoïde (rayon a , nombre de spires par unité de longueur n) est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de basse fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$.

1°) Calculer le champ électrique induit \vec{E}_i à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

2°) Calculer la fem induite le long d'une boucle circulaire de rayon r et de même axe que le solénoïde, dans les deux cas $\rho \leq a$ et $\rho \geq a$.

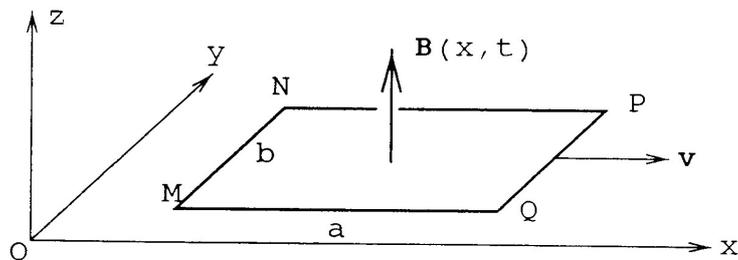
XI. Moteur linéaire. Un ensemble d'électroaimants disposés le long d'un axe Ox crée un champ magnétique $\vec{B}(x, t) = B(x, t) \vec{e}_z$ variant simultanément en fonction de la variable d'espace x et du temps t selon la loi

$$B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx)$$

où ω et k sont des paramètres caractérisant la structure spatio-temporelle du champ.

Une spire conductrice rectangulaire est plongée dans ce champ et s'y déplace dans le plan xOy , le long de l'axe Ox avec la vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$. La spire a pour côtés a et b (voir figure), a une résistance électrique R et son coefficient d'auto-induction est négligeable.

A la date $t = 0$, le côté MN de la spire se trouve à l'abscisse $x = 0$. Les calculs seront effectués pour une date t quelconque, sauf dans la question 6. La position de M est repérée par son abscisse $x = vt$.



1°) Représenter sur deux schémas, respectivement,

- a) l'allure du champ en un point au cours du temps ;
- b) pour une date donnée t , sa variation le long de l'axe Ox .

2°) Expliquer qualitativement pourquoi la spire va être soumise à une force magnétique.

3°) Calculer le flux de \vec{B} à travers la spire.

4°) Calculer la fem et le courant induits dans la spire.

5°) Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur la spire.

6°) En calculer la valeur moyenne temporelle.

Problèmes

I. Examen du 30 janvier 2003

PROBLÈME A. Barème indicatif : 35/60

Un cylindre d'axe $z'z$, de rayon R et de longueur infinie contient un fluide conducteur. Le vecteur densité de courants volumiques du fluide est orienté suivant l'axe $z'z$ et a pour expression, en un point M de coordonnées cylindriques r, ϕ, z

$$\begin{aligned}\vec{j}(M) &= j(r) \vec{e}_z \quad \text{pour } r \leq R \\ \vec{j}(M) &= \vec{0} \quad \text{pour } r > R\end{aligned}$$

où r est la distance du point M à l'axe $z'z$.

1°) Quels sont la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution de courants en ce point M ? Justifier le fait que l'intensité $B(r)$ de ce champ ne dépende que de r .

2°) Déterminer $\vec{B}(M)$.

3°) Soit un volume infinitésimal d'extension $d\tau$ construit au voisinage de M .

a) Donner l'expression de $d\tau$ en coordonnées cylindriques.

b) L'élément de volume $d\tau$ transportant un courant, quelle est la force magnétique s'exerçant sur lui ?

4°) Outre les forces magnétiques, il existe aussi dans le fluide des forces de pression : si $P(M)$ est la pression en M , l'élément de volume $d\tau$ est ainsi soumis à la force de pression

$$\vec{dF}_P(M) = - \vec{\text{grad}} P(M) d\tau$$

N.B. On négligera toute répulsion électrostatique.

a) Ecrire l'équation vectorielle qui doit être satisfaite en chaque point M du fluide lorsque celui-ci est en équilibre hydrostatique, ce que l'on supposera dans la suite.

b) En déduire une expression de $\frac{dP}{dr}$ en fonction de $B(r)$.

5°) En fait, le fluide se déplace dans le vide à l'intérieur d'un tuyau cylindrique de rayon $R' > R$: il peut s'agir d'un faisceau de plasma. On considère donc la situation où $P(R) = 0$.

Exprimer $P(r)$, pour $r \leq R$, en fonction de l'intégrale

$$\int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr$$

6°) On définit la pression moyenne à l'intérieur du fluide par l'expression

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r P(r) dr$$

Montrer que l'on a

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$$

où I est l'intensité totale du courant transporté par le fluide. Indication : intégrer par parties l'expression donnant $\langle P \rangle$.

7°) A titre d'exemple, on envisage une distribution de courant uniforme $j(r) = \text{constante} = j_0$. Trouver les expressions correspondantes de $B(r)$ et de $P(r)$ et en donner des représentations graphiques.

8°) Application numérique. Pour réaliser la fusion nucléaire à l'intérieur d'un tel faisceau de plasma, on envisage une pression moyenne de $1,6 \cdot 10^6$ Pa. Quelle doit être la valeur correspondante de l'intensité I , si $R = 10^{-3}$ m ?

PROBLÈME B. Barème indicatif : 25/60

Un long solénoïde cylindrique d'axe $z'z$ et de rayon R comporte, sur une longueur $h \gg R$, N tours d'un fil conducteur très fin. A l'intérieur de ce solénoïde on dispose un tube conducteur de forme cylindrique de grande longueur, de même axe $z'z$, de rayon intérieur a et d'épaisseur $\ell \ll a$ ($a + \ell < R$). On notera σ la conductivité du matériau constituant le tube conducteur.

Le solénoïde est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

1°) Rappeler, sans démonstration, l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par le courant $I(t)$, à l'intérieur du solénoïde.

2°) Trouver, en première approximation, l'expression du champ électrique induit \vec{E} , à l'intérieur du solénoïde.

3°) En déduire une expression du vecteur \vec{J} , densité volumique des courants induits dans la masse du tube conducteur.

4°) Quelle est, par unité de volume, la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le matériau conducteur ?

5°) a) Déterminer, en première approximation, le champ magnétique induit \vec{B}_i dans la région $r < a$.

b) Selon cette évaluation, à partir de quelles fréquences l'amplitude de \vec{B}_i peut-elle devenir égale, voire supérieure à celle du champ inducteur \vec{B} ?

c) On donne $a = 2 \cdot 10^{-2}$ m ; $\ell = 10^{-3}$ m ; $\sigma = 5 \cdot 10^7$ S.I. ; estimer numériquement le domaine de fréquences dont il est question au b).

Ci-dessous on donne, dans le système de coordonnées cylindriques r, ϕ, z , les expressions du gradient d'un champ scalaire U , et les expressions du rotationnel et de la divergence d'un champ de vecteurs \vec{V} :

$$\vec{\text{grad}} U = \vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e_r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) + \overrightarrow{e_\phi} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \overrightarrow{e_z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \right)$$

$$\text{div} \overrightarrow{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

II. Examen du 19 janvier 2009

- Partie I -

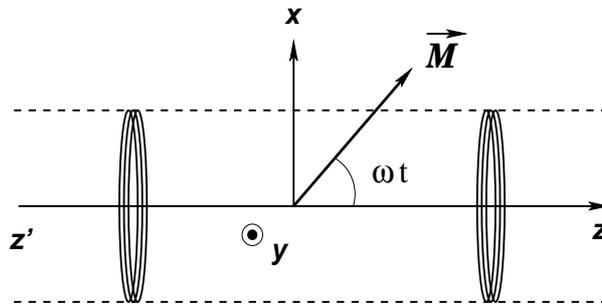
Un solénoïde S de forme cylindrique d'axe $z'z$, supposé très long et mince, a les caractéristiques suivantes : longueur h , section πa^2 , nombre de spires par unité de longueur n , résistance électrique R . On rappelle qu'en première approximation, le champ magnétique créé par le solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant électrique d'intensité I vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur de celui-ci, \vec{e}_z étant le vecteur unitaire de $z'z$.

1°) Calculer le coefficient d'auto-induction de ce solénoïde :

a) En calculant le flux magnétique propre lorsque le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I .

b) En calculant de deux façons différentes l'énergie magnétique alors disponible.

- Partie II -



Dans la suite, le solénoïde S n'est plus alimenté par une source de courant et ses deux bornes sont court-circuitées. Un dipôle magnétique rigide et permanent D de moment \vec{M} est placé au centre de S et tourne avec une vitesse angulaire constante ω . L'axe de ce mouvement de rotation est perpendiculaire à l'axe $z'z$ de S : le vecteur \vec{M} reste donc dans un plan contenant $z'z$. L'écart angulaire de \vec{M} avec cet axe est noté ωt . Le but du problème est de déterminer l'intensité $i(t)$ du courant induit qui circule alors dans S .

2°) Exprimer le flux $\Phi_{S \rightarrow D}$ du champ magnétique créée par $i(t)$ à travers le dipôle tournant en assimilant ce dernier à une spire de courant circulaire de rayon b parcourue par un courant d'intensité I_0 .

3°) Dédire du résultat précédent le flux $\Phi_{D \rightarrow S}$ du champ magnétique du dipôle tournant à travers le circuit du solénoïde.

4°) Calculer la fem induite dans le solénoïde.

5°) Ecrire l'équation différentielle que vérifie l'intensité $i(t)$ du courant induit dans S et déterminer $i(t)$ en régime permanent.

6°) Calculer la moyenne temporelle du moment des forces magnétiques qui s'exercent sur le dipôle D .

III. Examen du 14 janvier 2010

Partie A

Un fil conducteur \mathcal{F} , rectiligne, de section droite négligeable et de longueur pratiquement infinie est disposé le long de l'axe $z'z$ d'un repère cartésien $R(O, x, y, z)$. Il est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I , dans le sens $z'z$.

1°) Par une méthode laissée au choix, déterminer le champ magnétique $\vec{B}_F(M)$ créé par ce courant en un point M quelconque en dehors du fil.

2°) Déterminer un potentiel vecteur associé à ce champ magnétique. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\vec{A}_F(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left[\frac{\rho}{b} \right] \vec{e}_z \quad (18)$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et où b est une constante positive, homogène à une longueur et telle que le potentiel vecteur soit nul pour $\rho = b$.

Partie B

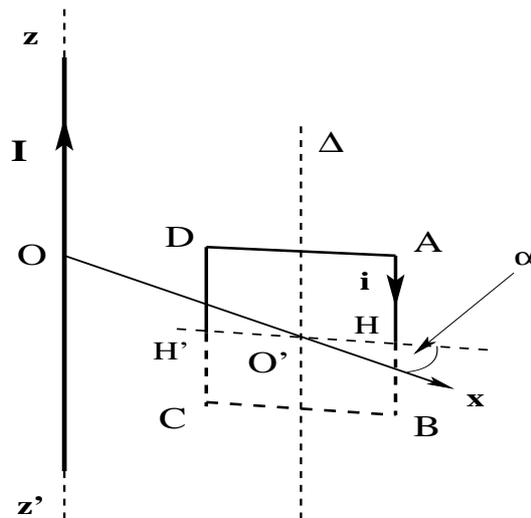


Figure 1 : le fil \mathcal{F} et la spirale \mathcal{S}

En face du fil précédent, on place une spirale conductrice \mathcal{S} ayant la forme d'un carré de côté $2a$, indéformable. Elle est constituée d'un fil conducteur de section droite négligeable elle aussi. La spirale est disposée perpendiculairement au plan xOy . Son centre O' est sur l'axe Ox , à la distance $b > a$ de O . On note AB et CD les deux côtés parallèles à $z'z$, et H et H' leurs milieux respectifs, situés dans le plan xOy (voir figure 1). On admettra que le seul mouvement possible de la spirale est une rotation autour de l'axe Δ parallèle à $z'z$ et passant par son centre O' .

La spirale est parcourue par un courant continu d'intensité i , dans le sens $ABCD$. On note α l'angle entre le plan de la spirale et le plan xOz .

3°) Déterminer les forces qui s'exercent sur chacune des branches de la spire, dûes à l'action sur celle-ci du champ magnétique créé par le fil \mathcal{F} .

4°) Quelle force \vec{F} doit-on exercer sur la spire pour maintenir fixe son axe Δ ?

5°) Déterminer le moment résultant $\vec{\Gamma}$ par rapport à O' des forces magnétiques subies par la spire. Quel est son sens ? Quelle est son action sur la spire ?

6°) Montrer que le coefficient d'induction mutuelle M_{FS} du fil et de la spire a pour expression

$$M_{FS} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \left[\frac{\rho_H}{\rho_{H'}} \right] \quad (19)$$

où $\rho_H = \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab \cos \alpha}$ et $\rho_{H'} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha}$.

7°) Définir une énergie potentielle E_p décrivant l'interaction magnétique entre le fil \mathcal{F} et la spire \mathcal{S} .

8°) A partir de E_p , retrouver l'expression de $\vec{\Gamma}$.

On rappelle ci-dessous les expressions, en coordonnées cylindriques, du rotationnel et de la divergence d'un champ de vecteurs \vec{V} :

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- Partie C -

Dans cette partie, la spire est fixée de telle sorte que son plan coïncide avec le plan xOz ($\alpha = 0$).

- Dans un premier temps, la spire est reliée à un générateur de tension sinusoïdale qui lui délivre en régime permanent un courant d'intensité $i = i_0 \cos \omega t$ (figure 2). Le fil \mathcal{F} n'est quant à lui relié à aucune source de tension ou de courant : il est simplement refermé sur lui-même dans la région où $|z| \gg b$, qui peut être considérée comme infiniment éloignée de la spire (comme précédemment, on ne prend donc en compte que la partie rectiligne, infiniment longue, du fil).

9°) Montrer que le fil \mathcal{F} est le siège d'une force électromotrice d'induction \mathcal{E}_{SF} . Etablir son expression en fonction du temps.

10°) Le fil possède un coefficient d'auto-induction L_F et sa résistance peut être négligée. Déterminer, en régime permanent, l'intensité $I_F(t)$ du courant induit dans le fil \mathcal{F} .

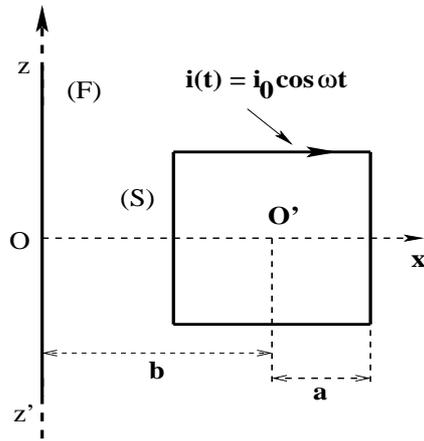


Figure 2 : courant sinusoïdal dans la spire \mathcal{S}

- Dans un deuxième temps, la spire n'est reliée à aucune source électrique extérieure, tandis qu'un courant d'intensité constante I circule dans le fil \mathcal{F} , dans le sens $z'z$. Le fil \mathcal{F} se déplace en bloc dans le plan xOz de part et d'autre de l'axe $z'z$ d'un mouvement sinusoïdal de très faible amplitude, dont l'équation horaire est donnée par

$$\overrightarrow{OP} = b \epsilon \cos \omega t \overrightarrow{e_x}$$

avec $\epsilon \ll 1$, et où P est le point d'intersection du fil avec le plan xOy . La spire \mathcal{S} a un coefficient d'auto-induction L et une résistance R . Déterminer, au premier ordre en ϵ , l'intensité $i'(t)$ du courant induit qui circule alors dans la spire en régime permanent.

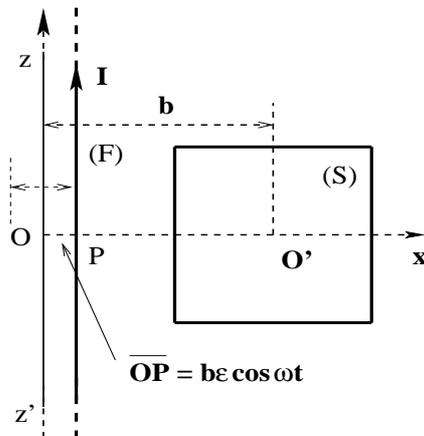


Figure 3 : Le fil \mathcal{F} est aminé d'un petit mouvement sinusoïdal transversal

IV. Examen du 10 janvier 2011

- Partie A -

Dans un repère cartésien O, x, y, z , on considère une spire conductrice C , circulaire, de rayon a et de centre O . La spire C est supposée fixée dans le plan xOy . Une seconde spire conductrice D , circulaire et de rayon b , a pour centre le point $P(0, 0, z)$ de l'axe $z'Oz$. Le plan de la spire D peut avoir une orientation quelconque (figure 1).

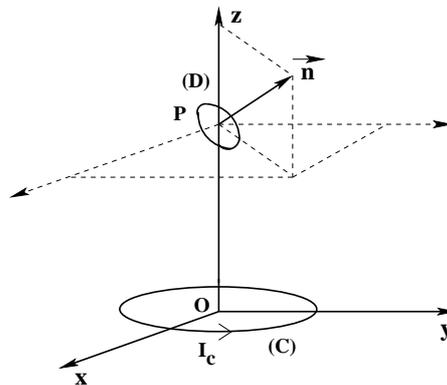


Figure 1

1°) a) Calculer le champ magnétique $\vec{B}_C(P)$ créé au point $P(0, 0, z)$ par la spire C , lorsque celle-ci est parcourue par un courant électrique d'intensité constante I_C .

b) Le rayon b de la spire D peut être considéré comme infiniment petit. Trouver alors l'expression du flux Φ_{CD} du champ magnétique de C à travers la surface de D .

c) En déduire le coefficient d'induction mutuelle M de C et D .

2°) Son rayon étant très petit, la spire D , parcourue par un courant électrique d'intensité constante I_D , est assimilable à un dipôle ponctuel de moment magnétique \vec{M} placé au point $P(0, 0, z)$.

a) Quelle est l'expression de \vec{M} ?

b) On admettra que le potentiel vecteur créé par D en un point Q est donné par

$$\vec{A}_D(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{PQ}}{PQ^3}$$

A partir de cette expression du potentiel vecteur, calculer le flux Φ_{DC} du champ magnétique de D à travers la surface de C (**indication** : pour ce calcul, définir un plan XOz comme celui contenant l'axe Oz et \vec{M}).

c) Montrer que l'on pouvait trouver l'expression de Φ_{DC} directement à partir du résultat du 1°) c).

3°) La spire D est maintenant remplacée par un aimant de très petites dimensions et possédant un moment magnétique \vec{M} dont la norme M est constante mais qui peut prendre

une orientation quelconque. La spire C est parcourue par un courant d'intensité constante I_C .

- a) Définir l'énergie potentielle de l'aimant dans le champ magnétique de C .
 - b) Quelle force faut-il exercer sur l'aimant D pour maintenir celui-ci à la position $P(0, 0, z)$?
 - c) Préciser le sens de cette force selon l'orientation de I_C et de \vec{M} . Les conclusions sont-elles conformes à la règle du flux maximum ?
- 4°) Calculer le moment résultant $\vec{\Gamma}$ des forces magnétiques s'exerçant sur D . Quel est l'effet de ce moment sur l'orientation de \vec{M} ?

- Partie B -

Dans cette partie, le circuit de C ne comporte aucun générateur de tension ou de courant. On note R et L la résistance et le coefficient d'auto-induction de l'ensemble de ce circuit.

On envisage les conséquences sur l'état électrique de C de divers mouvements de l'aimant D .

5°) Son centre P étant fixé en $O(0, 0, 0)$, l'aimant D a un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω autour de l'axe \vec{Ox} , tel que

$$M_x = 0 \quad , \quad M_y = M \cos \omega t \quad , \quad M_z = M \sin \omega t$$

Le régime permanent, sinusoïdal, étant supposé établi, déterminer

a) l'intensité $i(t)$ du courant induit dans C par ce mouvement. Il sera commode de poser

$$E_0 = \frac{\mu_0 M \omega}{2a}$$

b) la valeur moyenne temporelle du moment $\vec{\Gamma}$ des forces agissant sur l'aimant, dû au champ magnétique produit par le courant induit $i(t)$ dans le circuit C .

6°) Le moment magnétique de l'aimant garde maintenant la direction de l'axe \vec{Oz} , mais le centre P de l'aimant est animé, au voisinage du point $(0, 0, a)$, d'un mouvement d'oscillations suivant \vec{Oz} , d'équation horaire

$$z(t) = a [1 + \epsilon \sin \omega t]$$

où ϵ est une constante telle que $\epsilon \ll 1$.

a) Trouver, en régime permanent établi, l'expression approchée, au premier ordre en ϵ , de la force électromotrice d'induction agissant alors dans C , puis celle de l'intensité $i(t)$ du courant induit dans C .

b) Montrer que la valeur moyenne temporelle de la force que le circuit C exerce par réaction sur l'aimant D est d'ordre ϵ^2 .

V. Examen du 26 janvier 2011

Un échantillon conducteur de forme cylindrique, de rayon R , de longueur $\ell \gg R$ et de conductivité γ , est suspendu à un point fixe O_1 par un fil de torsion, dans le sens de son axe $z'z$ (figure 1). Il est placé dans un champ magnétique $\vec{B}(t)$ uniforme mais variable dans le temps, dont les lignes de champ sont perpendiculaires à l'axe $z'z$. Ce champ est produit par un aimant auquel on communique un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire constante ω autour de $z'z$, de sorte que

$$\vec{B} = \vec{B}(t) = B_0 (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t)$$

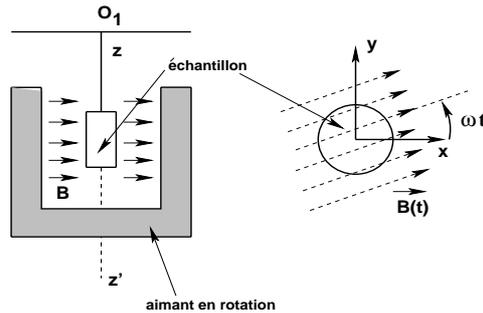


Figure 1

- 1°) Montrer que ce champ donne naissance à un champ électrique.
- 2°) Utilisant un système de coordonnées cylindriques ρ, φ, z , on cherche l'expression de ce champ électrique sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{e}_z E_z(\rho, \varphi, t)$$

Justifier ce choix.

Dans ce qui suit, on négligera le champ magnétique induit

- 3°) a) Déterminer $E_z(\rho, \varphi, t)$ en utilisant la relation de Maxwell-Faraday sous sa forme locale. On admettra alors que $E_z(\rho, \varphi, t)$ est nul pour $\rho = 0$.
- b) Retrouver le résultat obtenu en appliquant la forme intégrale de la relation de Maxwell-Faraday à un contour judicieusement choisi, en admettant toujours que E_z est nul pour $\rho = 0$.
- 4°) Montrer que l'expression obtenue pour E_z peut être également trouvée en se plaçant dans un référentiel lié au champ tournant et dans lequel l'échantillon conducteur est animé d'un mouvement de rotation inverse autour de $z'z$.
- 5°) a) Montrer que des courants prennent naissance dans l'échantillon et en déterminer le vecteur densité volumique \vec{J} , à partir de l'expression locale de la loi d'Ohm.
- b) Décrire, en coordonnées cylindriques, la répartition de ces courants induits.
- 6°) Déterminer l'intensité du courant dI circulant à travers un élément $dS = \rho d\rho d\varphi$ d'une section droite de l'échantillon.

7°) Déterminer la force électromagnétique élémentaire $d\vec{F}$, due au champ tournant $\vec{B}(t)$, qui s'exerce sur l'élément de courant $\vec{e}_z dz dI$. En déduire la force totale correspondante qui s'exerce sur l'échantillon conducteur.

8°) Déterminer le moment résultant Γ , par rapport à z' z , des forces s'exerçant sur l'échantillon. On négligera tout effet de bord ainsi que le champ magnétique induit, dû aux courants induits dans l'échantillon.

9°) Pour mesurer ce moment Γ , on accroche au fil de suspension un cadre rectangulaire comportant n spires conductrices de surface S' (figure 2).

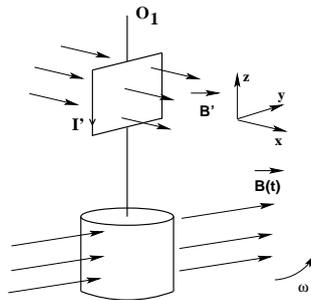


Figure 2

Le cadre est lui-même placé dans un champ magnétique \vec{B}' parallèle au plan du cadre, qui, en l'absence de rotation de l'aimant est le plan xOz (on a alors $\vec{B}' = B' \vec{e}_x$). La rotation de l'aimant étant établie, on fait circuler dans le cadre un courant continu dont on règle l'intensité I' jusqu'à compenser la déviation angulaire du système échantillon-cadre. Montrer que la mesure de I' permet, en principe, de déterminer la conductivité γ de l'échantillon.

On rappelle ci-dessous les expressions, en coordonnées cylindriques, du rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{V} :

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

VI. Examen de DEUG A 2ème année 1979-1980. Principe de la dynamo acyclique

Un conducteur cylindrique tourne autour de son axe $z'z$ dans un champ magnétique \vec{B}_0 statique et uniforme, parallèle à $z'z$.

1°) Expliquer pourquoi une force électromotrice induite apparaît dans le conducteur en rotation.

Ce système peut donc constituer un générateur (dynamo) dont on se propose d'étudier le fonctionnement. Cette dynamo est schématisée dans les figures 1 et 2. Les deux collecteurs ("charbons") assurent le contact électrique entre les cylindres de rayons respectifs a_1 et a_2 et le reste du circuit. On admettra que ce contact s'effectue sans frottement.

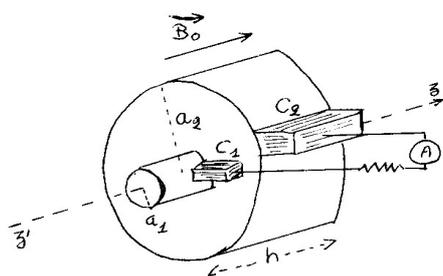


Figure 1

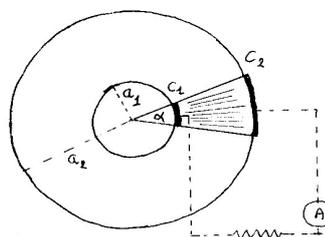


Figure 2

La figure 2 schématise la situation dans toute section droite de la dynamo. Les collecteurs sont représentés par les arcs de cercles C_1 et C_2 , de rayons respectifs a_1 et a_2 . Entre ceux-ci, les lignes de courant sont radiales. Le champ magnétique créé par les courants induits sera négligé. L'intensité du courant est notée i , la résistance électrique totale du circuit (résistance interne de la dynamo et résistance extérieure) est notée R .

Le rayon a_1 sera supposé petit devant a_2 , de sorte que les calculs seront effectués au premier ordre selon a_1/a_2 .

2°) Trouver l'expression du champ électrique électromoteur \vec{E} en tout point du conducteur cylindrique. En déduire la force électromotrice induite \mathcal{E} disponible entre les collecteurs C_1 et C_2 , puis l'intensité i .

3°) Trouver l'expression de la force magnétique $d\vec{F}$ s'exerçant sur un tube de courant élémentaire de longueur $d\ell$.

On précisera sur une figure analogue à la figure 2 le sens de rotation choisi, le sens de \vec{B}_0 , le sens du courant i et enfin la direction et le sens de $d\vec{F}$.

4°) Calculer le moment, par rapport à l'axe de rotation, des forces magnétiques s'exerçant sur le conducteur cylindrique. Calculer le travail élémentaire de ces forces pendant un intervalle de temps dt .

5°) Vérifier que l'expression de la puissance déduite du résultat précédent permet de retrouver celle de \mathcal{E} .

6°) On note M la masse totale du conducteur, supposé homogène et limité par deux sections droites distantes de h . Trouver l'expression du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation d'un élément de volume $d\tau$ du conducteur en rotation. En déduire le moment cinétique total L_z du conducteur par rapport à son axe de rotation.

7°) Ecrire l'équation différentielle du mouvement du conducteur dans le cas où l'on impose un couple de forces de moment $\vec{\Gamma}_0$, constant, parallèle à l'axe et de même sens que \vec{B}_0 . Montrer que ce couple extérieur est nécessaire si l'on veut assurer un courant d'intensité i constante dans le circuit. Déterminer la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ et i en supposant qu'au moment où l'on impose $\vec{\Gamma}_0$, la vitesse angulaire initiale est nulle. Donner l'allure de la courbe $i(t)$ et montrer que i tend vers une limite i_0 .

8°) Application numérique.

On donne $B_0 = 1 \text{ T}$, $a_2 = 50 \text{ cm}$, $R = 10^{-3} \Omega$. La vitesse de rotation limite est de 1500 t/mn. Calculer la force électromotrice \mathcal{E} et l'intensité i_0 .

De telles dynamos, dont le principe remonte à Faraday, sont utilisées dans des installations d'électrolyse pour obtenir des courants intenses.

9°) Calcul de la résistance électrique interne de la dynamo.

On rappelle que les collecteurs C_1 et C_2 délimitent la partie du conducteur où circule le courant i : α est l'angle du dièdre définissant les limites du tube de courant ; h est l'épaisseur du conducteur cylindrique ; γ est sa conductivité électrique (conducteur ohmique).

a) Montrer qu'en tout point du tube de courant et repéré par ses coordonnées cylindriques ρ , φ et z , la conservation de la charge électrique en régime permanent impose un vecteur densité volumique de courant de la forme

$$\vec{J} = \frac{\lambda}{\rho} \vec{e}_\rho$$

où λ est une constante. On rappelle ci-dessous l'expression, en coordonnées cylindriques, de la divergence d'un champ de vecteurs \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

b) Exprimer i en fonction de λ , α et h .

c) Ecrire la relation entre le champ électrique \vec{E} et la densité de courant \vec{J} . Exprimer en fonction de λ et γ et des dimensions du conducteur la différence de potentiel électrique entre les collecteurs.

d) En déduire la valeur R_0 de la résistance électrique interne R_0 de la dynamo.

Application numérique. On donne $a_1/a_2 = 2 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 50 \text{ cm}$, $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ SI}$, $h = 1 \text{ cm}$; la longueur de l'arc délimité par le collecteur C_2 est de 10 cm.

Calculer R_0 . Quelle est la puissance maximale que peut fournir cette dynamo ?

VII. Extrait de l'examen de LP203, juin 2005

Le circuit (C) de la figure 1 est constitué de deux conducteurs rectilignes illimités et connectés par une demi-spire circulaire de rayon a . Ce circuit, lorsqu'il est parcouru par un courant continu d'intensité I_0 , crée un champ magnétique \vec{B} au centre O de la partie circulaire.

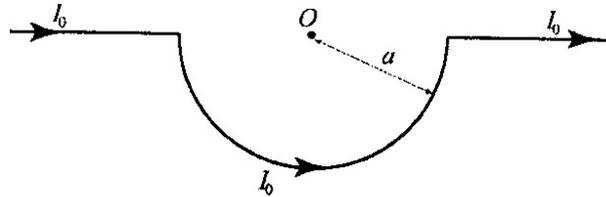


Figure 1

1°) Quelle(s) transformation(s) géométriques laisse(nt) cette distribution de courant invariant (symétries)? En déduire que \vec{B} est perpendiculaire au plan du circuit et que $B = \frac{\mu_0 I_0}{4a}$.

2°) On place en O un petit cadre conducteur carré (C') de côté $b \ll a$, de résistance totale R et comportant N entoulements (on considèrera que \vec{B} est pratiquement constant à l'intérieur du cadre (C')). Comment faut-il orienter le plan du cadre pour que le flux magnétique Φ créée par (C) à travers (C') soit maximal? Calculer Φ dans ce cas.

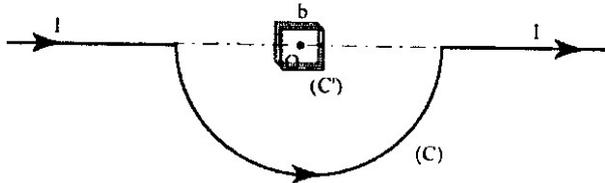


Figure 2

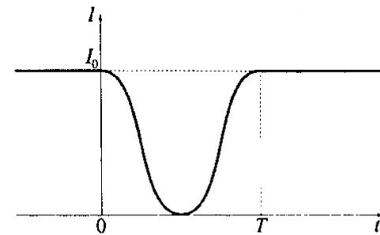


Figure 3

3°) Le cadre (C'), toujours centré en O , est situé dans le plan du circuit (C) (figure 2). On modifie le courant dans (C) à partir de la date $t = 0$ pendant une durée T suivant la loi (figure 3)

$$I(t) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right)$$

On négligera l'auto-induction dans le cadre.

a) Pour chaque phase de modification du courant dans (C), représenter sur un schéma le sens du courant i induit dans le cadre (C'), le sens du champ magnétique induit \vec{B}_i et celui de \vec{B} . On justifiera les sens indiqués.

b) Calculer $i(t)$ circulant pendant la durée T et représenter son graphe.

A.N. Déterminer les instants auxquels l'intensité du courant induit est maximale et calculer la valeur maximale correspondante si $a = 10$ cm, $b = 2$ cm, $N = 20$, $R = 0,02 \Omega$, $I_0 = 80$ A, $T = 2$ s. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI.

Le courant $i(t)$ persiste-t-il après la date $t = T$? Expliquer pourquoi.

VIII. Problème de synthèse facile.

- Partie A -

1°) Déterminer le champ électrostatique entre les armatures A et B d'un condensateur plan C_0 auquel est appliqué la tension $V_A - V_B = V_0 > 0$. Les deux armatures ont pour surface S et sont distantes de h . Le milieu ambiant est de l'air dont la permittivité sera prise égale à celle du vide, soit ϵ_0 .

2°) a) Calculer la capacité C_0 de ce condensateur.

b) On place en parallèle n condensateurs de même capacité C_0 . Montrer que cet ensemble est équivalent à un condensateur C dont on déterminera la capacité C .

c) Calculer numériquement C en picroFarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$), sachant que $S = 84,5 \text{ cm}^2$, $h = 3 \text{ mm}$, $n = 10$.

- Partie B -

Une bobine \mathcal{B} est réalisée par l'enroulement régulier de N spires d'un fil conducteur très fin sur un tore d'axe $z'z$, de rayon moyen b et de section droite carrée de côté a . On admettra que chaque spire appartient à un plan méridien du tore. Le fil est parcouru par un courant d'intensité i supposée constante dans cette partie.

1°) Déterminer le champ magnétique créé par \mathcal{B} en tout point de l'espace où il est défini (utiliser des coordonnées cylindriques).

2°) a) Déterminer le coefficient d'auto-induction L de \mathcal{B} .

b) Calculer numériquement L en milliHenry, sachant que $b = a = 10 \text{ cm}$, $N = 5000$.

3°) On place sur l'axe $z'z$ un fil conducteur \mathcal{F} très long, faisant partie d'un circuit parcouru par un courant d'intensité constante I . Calculer le coefficient d'induction mutuelle M de \mathcal{B} et \mathcal{F} .

- Partie C -

On constitue un circuit Γ en mettant en série uniquement la bobine \mathcal{B} de la partie B et le condensateur C de la partie A. Le fil \mathcal{F} est maintenant parcouru par un courant d'intensité variable dans le temps t selon la loi $I = I_0 \cos \omega t$, avec $I_0 > 0$. On admettra que dans le domaine de fréquences considéré la résistance électrique de \mathcal{B} peut être négligée.

1°) Explique pourquoi un courant induit apparaît dans le circuit Γ .

2°) On suppose le régime permanent établi. L'intensité du courant induit dans Γ est alors de la forme

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Calculer i_0 et α en fonction de I_0 , N , et $x = \omega/\omega_0$ où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

3°) a) En déduire, à l'intérieur du tore, le rapport $r = |B_{\mathcal{B}}|/|B_{\mathcal{F}}|$ des modules du champ magnétique induit et du champ magnétique du fil \mathcal{F} .

b) Calculer numériquement ce rapport pour la fréquence $f = \omega/(2\pi) = 6800 \text{ Hz}$.

- c) Préciser et expliquer l'orientation de \vec{B}_B par rapport à \vec{B}_F à l'intérieur du tore, selon que $x > 1$ ou $x < 1$.
- 4°) a) Déterminer la tension v aux bornes du condensateur C et en calculer numériquement la valeur maximum.
- b) Quel est le champ électrique à l'intérieur d'un des condensateurs C_0 ?
- 5°) Montrer qu'il existe un champ magnétique induit à l'intérieur de ce condensateur.

Champs induits, courants de Foucault, courant de déplacement

I. Boule conductrice dans un four à induction

Une boule sphérique de rayon a faite d'un métal de conductivité électrique γ est placée dans un champ uniforme et dépendant du temps $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$.

1°) Calculer la densité volumique de courants induits qui apparaissent dans la boule, en supposant que le champ \vec{B}_i induit par ces courants est négligeable devant \vec{B} .

2°) Quelle est la puissance moyenne dissipée dans la boule ?

3°) Déterminer le champ induit \vec{B}_i au centre de la boule. A quelle condition ce champ est-il négligeable devant \vec{B} ?

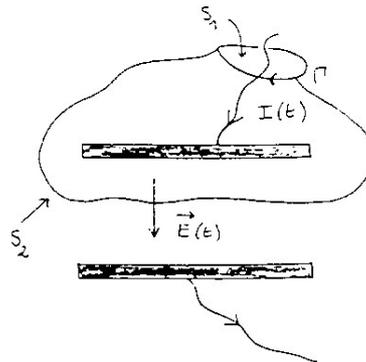
II. Courant de déplacement

On considère un condensateur plan idéal. Lorsque ses armatures sont chargées, le champ électrique est uniforme entre celles-ci et nul à l'extérieur du condensateur. On se place dans le régime transitoire où le condensateur est en train d'être chargé par un courant d'intensité variable $I(t)$.

1°) Appliquer le théorème d'Ampère à un contour fermé Γ entourant l'un des fils conducteurs amenant les charges sur l'une des armatures (voir figure).

2°) Le second membre de l'équation obtenue fait intervenir un flux à travers une surface *quelconque* s'appuyant sur Γ . Quel est le résultat si cette surface est S_1 ?

3°) Même question si la surface choisie est S_2 . Montrer qu'on élimine la contradiction si l'on tient compte du courant de déplacement de Maxwell.



III. On considère un condensateur plan à armatures circulaires de rayon a , perpendiculaires à $z'z$ et distantes de h . L'espace entre les armatures est le vide. Ce condensateur est relié

à un générateur délivrant un courant sinusoïdal dont on peut faire varier la fréquence. Aux faibles fréquences, le champ électrique entre les armatures s'écrit

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos \omega t \vec{e}_z$$

On fait l'hypothèse que, pour toutes les fréquences, le champ électrique en tout point $M(\rho, \varphi, z)$ entre les armatures s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = E_z(\rho, t) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad E_z(0, t) = E_0 \cos \omega t$$

- 1°) Déterminer le champ magnétique \vec{B}_1 associé au champ \vec{E}_1 .
- 2°) Au champ magnétique \vec{B}_1 correspond un champ électrique \vec{E}_2 que l'on déterminera.
- 3°) Définir, à ce niveau d'approximation, le champ électrique total entre les armatures.
- 4°) Application numérique. Calculer l'ordre de grandeur de la fréquence en deçà de laquelle on peut considérer que le champ électrique reste uniforme entre les armatures, à 10^{-4} près. On donne $a = 3$ cm.

IV. Un solénoïde de section droite circulaire de rayon a , d'axe $z'z$, de longueur h très grande devant a , constitué d'un enroulement de n spires jointives par unité de longueur, est alimenté par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Montrer que si ω est grand, de telle sorte que a n'est plus négligeable devant $\frac{2\pi c}{\omega}$ (c étant la célérité de la lumière), le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde n'est plus rigoureusement donné par $\mu_0 n I(t) \vec{e}_z$.

Milieux diélectriques

I. Une boule de rayon R faite d'un matériau diélectrique de permittivité ϵ est polarisée uniformément dans la direction $z'z$.

1°) Déterminer la densité de charges équivalente à cette polarisation.

2°) En déduire le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace.

II. Une charge ponctuelle $q > 0$ est placée au centre O d'une cavité sphérique de rayon R_1 creusée dans une boule diélectrique de même centre O et de rayon R_2 . La permittivité du diélectrique est ϵ .

Calculer le champ électrostatique en tout point, le vecteur polarisation du diélectrique et les densités de charge équivalentes.

III. Entre les armatures d'un condensateur plan de surface S et distantes de d , on introduit parallèlement à ces armatures une grande plaque d'épaisseur h d'un diélectrique homogène de permittivité ϵ .

1°) Que devient la capacité du condensateur ?

2°) L'espace entre les armatures est maintenant entièrement rempli par trois couches parallèles de diélectriques différents d'épaisseur d_1 , d_2 , d_3 et de constantes diélectriques ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 respectivement. Quelle est la capacité du condensateur ainsi constitué ?

IV. On considère deux sphères métalliques S_1 et S_2 concentriques de centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$. La sphère centrale S_1 portant la charge Q , la sphère S_2 porte la charge $-Q$ sur sa face intérieure. La couronne sphérique entre les deux sphères est partagée en deux demi-couronnes sphériques séparées par un plan diamétral P et renfermant chacune un matériau diélectriques de permittivité ϵ_1 pour l'un, ϵ_2 pour l'autre.

1°) Déterminer les champs \vec{E} et \vec{D} en tout point, ainsi que les densités surfaciques de charges sur S_1 et S_2 . On admettra que le potentiel est à symétrie sphérique.

2°) Calculer la force s'exerçant sur S_1 .

Milieux magnétiques

I. Déterminer le champ magnétique d'une boule uniformément aimantée.

II. Un échantillon magnétique en forme de barreau cylindrique est fixé verticalement au plateau d'une balance. Après équilibrage, l'une des extrémités A est alors placée dans une zone de champ magnétique intense $\vec{B}_0(A)$ tandis que l'autre extrémité C se trouve dans une zone de faible champ magnétique $\vec{B}_0(C)$. Quelle masse doit-on ajouter ou enlever du plateau de la balance pour rétablir l'équilibre ?

III. Un fil conducteur rectiligne de très grande longueur transporte un courant d'intensité constante I . Le fil est entouré d'un manchon cylindrique coaxial de rayon R fait d'un matériau magnétique homogène et isotrope de perméabilité μ . Calculer le champ magnétique \vec{B} en tout point, l'aimantation \vec{M} du manchon et la densité surfacique \vec{J}_s de courants équivalents. Vérifier les conditions de passage.

IV. Un barreau cylindrique d'axe $z'z$, de longueur h et de rayon R est constitué d'un matériau homogène et isotrope de perméabilité magnétique μ . La longueur h est supposée très grande devant R .

Ce barreau est plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B}_e emplissant tout l'espace. On veut déterminer le champ magnétique total \vec{B} en tout point ainsi que l'aimantation \vec{M} du barreau.

A/ Questions préliminaires

1°) Démontrer que $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur et à l'intérieur du barreau.

2°) En déduire que, dans la jauge de Coulomb, le potentiel vecteur \vec{A} associé à \vec{B} satisfait l'équation $\Delta \vec{A} = \vec{0}$ (on rappelle la relation $\text{rot } \text{rot } \vec{A} = \text{grad } \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$).

Le champ \vec{B}_e peut toujours être décomposé en une composante \vec{B}_0 parallèle à $z'z$ et une composante \vec{B}'_0 perpendiculaire à $z'z$. Les équations étant linéaires, ceci suggère de procéder par superposition du cas où $\vec{B}_e = \vec{B}_0$ est parallèle à $z'z$ et du cas où $\vec{B}_e = \vec{B}'_0$ est perpendiculaire à $z'z$.

B/ Cas où $\vec{B}_e = B_0 \vec{e}_z$

3°) Utiliser les symétries, les équations locales et les équations de passage du champ magnétique à la surface du barreau pour démontrer que

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_0 \quad \text{à l'extérieur du barreau}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{B}_0 \quad \text{à l'intérieur du barreau}$$

4°) En déduire l'aimantation \vec{M} du barreau ainsi que la densité superficielle de courants équivalente \vec{J}_s .

C/ Cas où $\vec{B}_e = \vec{B}'_0 = B'_0 \vec{e}_x$

5°) Démontrer que dans ce cas, en tout point repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z , le potentiel vecteur est de la forme $\vec{A}'(M) = A'_z(r, \theta) \vec{e}_z$ avec

$$\Delta A'_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A'_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A'_z}{\partial \theta^2} = 0$$

6°) Montrer que $\vec{A}'_0 = B'_0 r \sin \theta \vec{e}_z$ est un potentiel vecteur admissible pour \vec{B}'_0 .

7°) Compte-tenu de ce résultat, on cherche pour $A'_z(r, \theta)$ une expression factorisée du type $f(r) \sin \theta$. Montrer que $f(r)$ doit alors être de la forme

$$f(r) = Cr + \frac{D}{r}$$

C et D étant deux constantes.

8°) En déduire la forme générale des composantes B_r et B_θ du champ magnétique.

9°) a) Montrer qu'à l'intérieur du barreau on doit imposer $D = 0$ et que $A'_z = A_1 r \sin \theta$.

b) Montrer qu'à l'extérieur du barreau on doit imposer $C = B'_0$ et que $A'_z = (B'_0 r + \frac{A_2}{r}) \sin \theta$.

10°) Utiliser les conditions de passage pour démontrer que

$$A_1 = \frac{2\mu B'_0}{\mu + \mu_0} \quad \text{et} \quad A_2 = R^2 B'_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0}$$

11°) En déduire le champ \vec{B}' en tout point, ainsi que l'aimantation \vec{M}' et la densité superficielle de courants équivalente \vec{J}'_s .

D/ Cas où $\vec{B}_e = B_0 \vec{e}_z + B'_0 \vec{e}_x$

12°) a) Calculer le champ magnétique résultant à l'intérieur du barreau ainsi que l'aimantation totale, en précisant leurs orientations par rapport au champ extérieur \vec{B}_e .

b) Montrer qu'un matériau ferromagnétique ($\mu \gg \mu_0$) a tendance à s'aimanter dans le sens de sa plus grande dimension.

c) Calculer le moment des forces magnétiques ayant tendance à orienter le barreau dans le sens du champ extérieur.

V. Une plaque ferromagnétique isotrope d'épaisseur constante d , de perméabilité μ et de grandes dimensions transversales est placée dans un champ magnétique extérieur uniforme. Calculer le champ magnétique en tout point ainsi que l'aimantation de la plaque dans les trois situations suivantes :

1°) Les lignes du champ extérieur sont perpendiculaires à la plaque.

2°) Les lignes du champ extérieur sont parallèles à la plaque.

- 3°) Le champ extérieur appliqué est la superposition des deux précédents.
- 4°) Dans le cas du 3°, préciser l'orientation de l'aimantation dans la plaque.